Ю.С.Владимиров

РЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Часть 1

Теория систем отношений

Издательство Московского
университета
1996

УДК 530.12; 539.12

Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во МГУ, 1996.– 262 с., 28 рис.

Изложены алгебраические аспекты нового подхода к построению объединенной теории пространства-времени и физических взаимодействий (бинарной геометрофизики), опирающегося на понятие отношений между событиями. Математическую основу этого подхода составляет теория бинарных систем комплексных отношений (обобщение бинарных физических структур). Физический фундамент данного направления составляют три сорта идей: 1) о макроскопической природе классического пространства-времени, 2) о прямом межчастичном взаимодействии частиц (концепция дальнодействия Фоккера-Фейнмана, альтернативная теории поля) и 3) принципы многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. В книге развита теория бинарных систем комплексных отношений, являющаяся прообразом и обобщением теории систем отсчета в теории относительности. Показано, что основы теории пространства-времени и фундаментальные понятия физики микромира можно истолковать в терминах бинарных систем комплексных отношений низших рангов (размерностей).

Книга предназначена для специалистов в области теоретической физики, студентов физико-математических факультетов университетов и достаточно подготовленных лиц, интересующихся принципами построения физики.

Издание подготовлено в пакете CyrTUG-emTeX с использованием кириллических шрифтов семейства LH.

В $\dfrac{1604030000}{077(02)-96}$ **Без объявл.**

ISBN 5-211-03638-7 (Ч.1)
ISBN 5-211-03639-5

Оглавление

Предисловие 6

Введение 10

Глава 1. Введение в теорию систем отношений 22
1.1. Определение системы отношений 22
1.2. Бинарные системы вещественных отношений 27
1.3. Объединение двух типов диагональных бинарных систем вещественных отношений 32
1.4. Унарные системы вещественных отношений низших рангов 35
1.5. Системы отсчета и координатные системы в пространстве Минковского 40
1.6. Переход от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям 46
1.7. Выводы и замечания по теории систем вещественных отношений 49

Глава 2. Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) и 2-компонентные спиноры 52
2.1. Системы отношений в бинарной геометрофизике 52
2.2. Закон и основные понятия бинарной системы комплексных отношений 56
2.3. Группа преобразований в рамках одной системы отношений 60
2.4. Переходы между разными системами отношений ранга (3,3) 64
2.5. Двухкомпонентные спиноры 67
2.6. Четырехмерные векторы 70
2.7. Преобразования Лоренца 73
2.8. Прообраз пространства Минковского 77

Глава 3. Импульсное пространство свободных лептонов 82
3.1. Геометрия Лобачевского 82

3.2. Биспиноры и 4-мерные тензоры 87
3.3. Массивная частица в собственной системе отношений 91
3.4. Массивная частица в произвольной системе отношений 96
3.5. Прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве 99
3.6. Бинарная геометрофизика и твисторная программа Пенроуза 102

Глава 4. Классическое пространство-время 108
4.1. Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2) 108
4.2. Переход к унарным системам вещественных отношений 112
4.3. БСКО ранга (2,2) как подсистема БСКО ранга (3,3) 115
4.4. Физическая интерпретация БСКО ранга (2,2) 119
4.5. Бинарная система отношений ранга (2,2;a) и хроногеометрия 122
4.6. Классическое пространство-время 126
4.7. Фундамент физического мироздания 130

Глава 5. Бинарная система комплексных отношений ранга (4,4) и 3-компонентные спиноры 133
5.1. Основные понятия бинарных систем комплексных отношений ранга (4,4) 133
5.2. Преобразования в рамках одной обобщенной системы отношений 137
5.3. Трехкомпонентные спиноры 140
5.4. Девятимерные векторы 144
5.5. Обобщение метрики Минковского 147
5.6. Обобщенная теорема косинусов 151
5.7. Кубичные детерминанты 154
5.8. Закон трехточечной геометрии 157

Глава 6. Обобщенные импульсы и частицы 162
6.1. Трехточечное обобщение геометрии Лобачевского 162
6.2. Обобщенные биспиноры и 9-мерные векторы 165
6.3. Собственная система отношений обобщенной частицы 169
6.4. Девятимерные бусты 172
6.5. Прообраз уравнения Дирака в 9-мерном импульсном пространстве 174
6.6. БСКО ранга (4,4) и хромодинамика 177

6.7. К физической интерпретации БСКО ранга (4,4) 181

Глава 7. Редукция бинарного многомерия ранга (4,4) к 4-мерной теории 184
7.1. Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна 184
7.2. Подгруппа 4-мерных преобразований $SL(2,C)$ 188
7.3. Внутреннее пространство обобщенной частицы..... 191
7.4. Редукция уравнений Дирака 194
7.5. Подгруппа калибровочных преобразований 197
7.6. Подгруппа суперсимметричных преобразований 200
7.7. Подгруппа квазиконформных преобразований....... 204

Глава 8. Алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия и БСКО ранга (4,4;а) 206
8.1. Базовое 4×4-отношение 207
8.2. Переход от невырожденной БСКО ранга (4,4) к вырожденной 209
8.3. Фундаментальные отношения в теории БСКО ранга (4,4;а) 211
8.4. Промежуточный вариант БСКО ранга (4,4) 215

Глава 9. Бинарная система комплексных отношений ранга (5,5) 218
9.1. Закон и ключевые группы преобразований БСКО ранга (5,5) 218
9.2. 6-Мерные пространства состояний 220
9.3. Группа преобразований $SO(2,4)$ 224
9.4. 16-Мерные векторы и обобщенная метрика 229
9.5. К теории четырехточечной геометрии 232
9.6. Гиперчастицы 236
9.7. Редукция БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4) 239
9.8. К физической интерпретации БСКО более высоких рангов 242

Заключение 243

Приложения А 248
А.1. Вывод закона бинарной системы вещественных отношений ранга (2,2) 248
А.2. Определение спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел 251
А.3. Коэффициенты 9-мерных преобразований 254

Литература 257

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга явилась итогом многолетних размышлений о сущности физического пространства-времени. Что такое пространство и время? Справедливы ли классические пространственно временные отношения в микромире? Можно ли найти более элементарные понятия, опирающиеся на физические свойства микромира, из которых выводились бы известные свойства классического пространства и времени? Почему классическое пространство-время 4-мерно? Почему сигнатура классического пространства-времени – $(+ - - -)$? Что кроется за дополнительными размерностями в многомерных теориях Калуцы-Клейна? Как объединить принципы квантовой теории и общей теории относительности? и т.д.

В качестве предварительного шага на пути к решению этих проблем автор попытался разобраться в вопросе: Какой комплекс понятий и закономерностей подразумевают, когда говорят о классическом пространстве и времени? Это побудило заняться аксиоматикой геометрии и теории относительности. В частности, была предпринята попытка сформулировать аксиоматику общей теории относительности [9].

Изучение сущности и проблем общей теории относительности было обусловлено тем, что эйнштейновская теория гравитации представляет собой раздел физики, где достигнут наиболее значительный прогресс в раскрытии свойств пространства-времени. Именно эта теория сейчас представляется венцом многовековых размышлений человечества о геометрии — от Евклида до Н.И.Лобачевского, Я.Бояи, К.Гаусса, Б.Римана, затем от Э.Маха, А.Эйнштейна и до наших дней. Сейчас хорошо известно, что сутью общей теории относительности явилось, во-первых, обобщение метрических аксиом евклидова пространства и, во-вторых, объединение категорий пространства и времени в единое 4-мерное многообразие. Проблемам, связанным как с объединением этих категорий, так и, главным образом, с расщеплением 4-мерного пространства-времени на 3-мерное пространство и время наблюдателя была посвящена книга автора "Системы отсчета в теории гравитации" [10].

Однако нельзя забывать, что общая теория относительности описала геометрическим образом лишь один из известных видов физических взаимодействий — гравитационное. С созданием общей теории относительности сразу же (и даже раньше) был поставлен вопрос о геометризации других известных взаимодействий, главным образом электромагнитного. Встал вопрос: с какими обобщениями свойств пространства и времени можно связать электромагнитное, электрослабое и сильное взаимодействия? Здесь наиболее плодотворной оказалась идея дальнейшего обобщения размерности, т.е. гипотеза Маха-Калуцы об увеличении размерности классического пространства-времени. Автор этой книги также принял участие в анализе и развитии этой идеи. Результаты проведенных исследований изложены в двух монографиях: "Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий" [13] и "Пространство-время: явные и скрытые размерности" [15].

Параллельно с этими исследованиями автора волновал вопрос о выборе одной из двух альтернативных концепций построения теории пространства-времени и физических взаимодействий: реляционной и субстанциальной (полевой). Дискуссия по этому вопросу началась со времен И.Ньютона (и даже раньше), затем она проявилась в отношении А.Эйнштейна к идеям Э.Маха. Потом концепция дальнодействия возродилась в работах А.Фоккера, Г.Тетроде, Я.И.Френкеля, Р.Фейнмана, Ф.Хойла и других в виде теории прямого межчастичного взаимодействия. Оказалось, что можно построить теории прямого межчастичного электромагнитного и даже гравитационного взаимодействий, эквивалентные общепринятым полевым теориям. В нашей книге с А.Ю.Турыгиным "Теория прямого межчастичного взаимодействия" [12] была предложена такая теория гравитации, эквивалентная общей теории относительности. Эти исследования поставили автора перед вопросом: какой путь развития теории пространства-времени предпочесть — традиционный, в рамках теории поля, или реляционный, соответствующий концепции дальнодействия? Как известно, Р.Фейнман шел к своим результатам по квантовой электродинамике, придерживаясь концепции дальнодействия.

В этот момент счастливой находкой явилось знакомство с работами Ю.И.Кулакова [27-29], который с середины 60-х годов в Новосибирске со своими учениками развивал своеобразную теорию, названную им теорией физических структур. По своей сути это универсальная (алгебраическая) теория метрических отношений. На основе ее принципов можно описывать как известные виды геометрии, так и построить новые виды, в частности бинарные геометрии (на двух множествах элементов).

Подробное знакомство автора с теорией физических структур состоялось летом 1984 года на первой школе по теории физических структур (ТФС-1) на озере Баланкуль вблизи Енисея. Затем проведение таких летних школ стало регулярным (в Пущино-на-Оке, во Львове, в Ярославле). На них состоялся обстоятельный анализ соотношения теории относительности, многомерных теорий Калуцы-Клейна, теории прямого межчастичного взаимодействия и квантовой гравитации с принципами теории физических структур.

Постепенно стало ясно, что комплексифицированная теория бинарных физических структур является подходящей математической основой для решения поставленных выше вопросов. Сложилась новая теоретическая конструкция (парадигма), описывающая пространственно-временные отношения и известные виды физических взаимодействий. Она была названа автором *бинарной геометрофизикой*. В математическом плане бинарная геометрофизика опирается на обобщение аппарата теории бинарных физических структур Кулакова, а в физическом плане – на идеи 1) макроскопического подхода к природе классического пространства-времени, 2) теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана и 3) многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна.

Результаты, обсуждавшиеся на школах и совещаниях, были изложены в монографии Ю.И.Кулакова, Ю.С.Владимирова, А.В.Карнаухова “Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику” [32]. Концептуальные основы бинарной геометрофизики и ее соотношение с другими физическими парадигмами обсуждены в книге автора “Фундаментальная физика, философия и религия” [21].

Первоначальный вариант этой книги под названием “Начала бинарной геометрофизики” был принят к печати в Издательстве Московского Университета в 1992 году, однако из-за финансовых трудностей в то время опубликован не был. За прошедшее время были получены новые результаты, и рукопись была радикально переработана. Из нее был выделен раздел, включающий в себя базисные алгебраические аспекты бинарной геометрофизики. Этот материал составил содержание первой части (“Теория систем отношений”) задуманного сочинения под общим названием “Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий”. Во вторую часть (“Теория физических взаимодействий”) будут включены вопросы перехода к макропонятиям и описания физических взаимодействий.

Предполагается, что читатель достаточно хорошо владеет основами современной теоретической физики хотя бы в объеме трех-четырех университетских курсов физико-математических факультетов.

Автор выражает признательность Ю.И.Кулакову, Г.Г.Михайличенко и В.Х.Льву за плодотворное многолетнее сотрудничество, отличающееся доброжелательностью и искренней теплотой. Автор благодарит всех участников школ и совещаний по теории физических структур, а также семинаров Российского гравитационного общества и “Геометрия и физика”, работающих на физическом факультете МГУ, за многократные обстоятельные дискуссии по затронутым в книге проблемам.

ВВЕДЕНИЕ

1. Извечные сакраментальные вопросы: Что такое пространство? Что такое время? Зная теорию относительности, можно было бы спросить: Что такое пространство-время? Однако подобные вопросы в науке не совсем корректны. Правильнее ставить вопрос иначе. Либо — Что мы подразумеваем в физике всякий раз, когда пользуемся понятием пространства-времени? Либо — Каким образом возникает это понятие из каких-то других, более первичных? В последнем случае классическое пространство-время полагается вторичным понятием, следующим из чего-то другого, более фундаментального.

Сейчас имеются все основания полагать, что классическими пространственно-временными представлениями описываются отношения между макрообъектами определенного масштаба. За его пределами эти представления теряют силу и должны быть изменены. Это проявляется как при переходе к большим масштабам, где имеют место закономерности общей теории относительности, так и в масштабах микромира, где им на смену приходят законы квантовой механики и физики элементарных частиц. В основу этой книги положены убеждения автора, что имеется некая система фундаментальных понятий, проявляющихся в физике микромира, из которой при переходе к масштабам макрообъектов возникают классические пространственно-временные представления. Искалась система понятий (теория), удовлетворяющая следующим условиям:

1) Она должна представлять собой прообраз классических пространственно-временных отношений, опирающийся на собственную (не зависящую от классических) систему представлений.

2) Фундаментальные понятия такой теории должны быть пригодны для описания квантовомеханических закономерностей.

3) Основные понятия теории должны описывать как прообраз пространственно-временных отношений в микромире, так и характеристики известных физических взаимодействий элементарных частиц.

4) Теория должна отвечать на вопрос: Как перейти от системы отношений в микромире к классическим пространственно-временным отношениям?

5) От теории ожидалось обоснование ряда ключевых свойств классического пространства-времени, в частности наблюдаемой классической 4-мерности и сигнатуры (ответ на вопрос Э.Маха: "Почему пространство трехмерно?").

6) Теория призвана также прояснить вопрос о природе и особенностях (компактификации) скрытых размерностей в многомерных теориях Калуцы-Клейна.

Развитие теории такого рода преследует и ряд других более отдаленных целей, таких, как достижение прогресса в построении теории великого объединения физических взаимодействий, решение проблемы расходимостей в теории поля, построение квантовой гравитации и т.д. Но нам представляется, что последние задачи имеют подчиненный характер. Вскрытие системы понятий, адекватно описывающей свойства микромира, не может не привести к прогрессу в решении упомянутых проблем.

Для построения такой теории пришлось отказаться от общепринятого понимания сущности пространства-времени и опереться на концепцию реляционного подхода к природе пространства-времени и физических взаимодействий.

2. Кратко напомним, что же понимается в физике под классическим пространством-временем. Прежде всего подчеркнем, что в современной физике пространство-время рассматривается как *самостоятельная категория*, выполняющая роль "вместилища" всего сущего, в которое как на арену помещаются частицы, тела и поля, переносящие взаимодействия. Именно исходя из этого допускается постановка вопроса об определении пространства-времени (геометрии) как самостоятельной сущности. При таком понимании проблемы самый строгий ответ дается в рамках *аксиоматики* геометрии (пространства и времени). Аксиоматический подход к геометрии известен с "Начал" Евклида (Ш век до н.э.). Широко известна также более чем двухтысячелетняя история с пятым постулатом Евклида. В течение последнего столетия был построен ряд более совершенных аксиоматик как геометрии Евклида, так и более общих геометрий. Оказалось, что даже 3-мерная геометрия Евклида, которой с высокой степенью точности описывается классическое пространство, является довольно сложной конструкцией.

В аксиоматическом подходе пространство (геометрия) трактуется как сложное понятие из примитивов — исходных (далее не определяемых) элементарных понятий, подчиняющихся определенной системе аксиом. В качестве примитивов выступают точки, прямые, плоскости. Имеется ряд аксиоматик евклидовой геометрии, например аксиоматики Гильберта, Костина и др. В них число аксиом варьируется, однако, как правило, превышает два десятка. Принято разбивать аксиомы на группы: аксиомы порядка, метрические аксиомы, аксиома Архимеда, топологические аксиомы и т.д.

После открытия специальной теории относительности (СТО) стало ясно, что 3-мерное евклидово пространство объединено с 1-мерным временем в единое 4-мерное пространство-время (Минковского). Были разработаны аксиоматики 4-мерного пространства-времени А.Робба, А.Д.Александрова и ряд других. В них в качестве примитивов выступают точки-события. Оказывается, переход к 4-мерному пространству-времени можно трактовать как изменение *аксиом упорядоченности* событий. Аксиомы линейной упорядоченности заменяются на аксиомы частичной упорядоченности [1].

В большинстве аксиоматик СТО (см., например, [1, 48, 49]) аксиомы частичной упорядоченности рассматриваются как ключевые, с которых начинается построение аксиоматики. На них нанизываются все остальные группы аксиом (см. рис. 01). Именно отношения упорядоченности обусловливают понятие причинности в физике.

Следующий важный класс аксиом пространства Минковского — *метрические аксиомы.* Их суть состоит в том, что для любой пары точек-событий задается вещественное число, называемое квадратом интервала между событиями (Δs^2). Интервал Δs обобщает понятие длины Δl между двумя точками в евклидовой геометрии или понятие промежутка абсолютного времени Δt между двумя событиями. Метрические аксиомы привязаны к аксиомам частичной упорядоченности. В частности, квадрат интервала между двумя точками положителен ($\Delta s^2 > 0$), если точки-события упорядочены (временно-подобны), и отрицателен ($\Delta s^2 < 0$), если точки-события пространственно-подобны. Отно-

---

[1]Напомним, абсолютность времени в дорелятивистских представлениях можно понимать как свойство линейной упорядоченности точек-событий. Оно означает, что для любых двух событий a и b имеет место одно из трех отношений: либо b' следует за a ($b' > a$), либо a следует за b'' ($b'' < a$), либо a и b''' одновременны ($a = b'''$). Свойство линейной упорядоченности физически означает наличие сигналов с бесконечной скоростью распространения. Принятие постулата специальной теории относительности (СТО) о предельной скорости (света) привело к замене свойства линейной упорядоченности свойством частичной упорядоченности. Последнее означает, что для любых двух различных точек a и b имеет место одно из трех отношений: либо b' следует за a ($b' > a$), либо a следует за b'' ($b'' < a$), либо a и b''' не следуют друг за другом ($b''' \leftrightarrow a$), т.е. они не упорядочены. Первые два отношения означают временно-подобность рассматриваемых событий, последнее — пространственно-подобность.

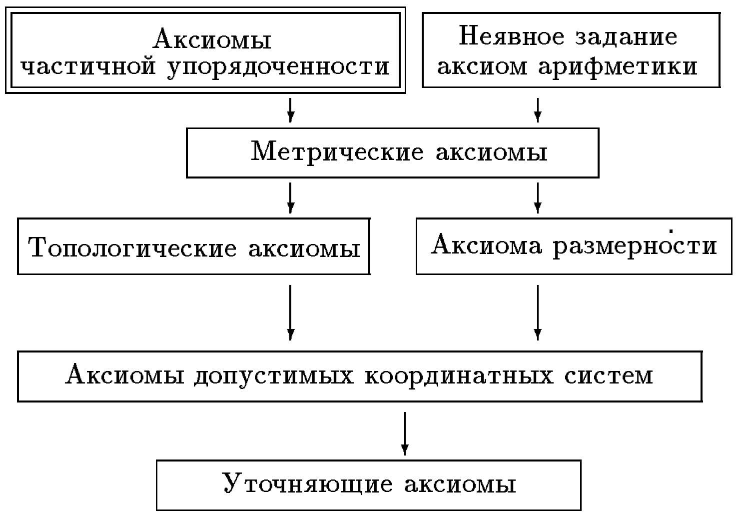


Рис. 0.1: Аксиоматика геометрии (теории физического пространства-времени)

сительно любой точки-события важную совокупность образуют точки на световом конусе — на границе между пространственно-подобными и временно-подобными событиями (рис. 0.2). Принципиально важно, что при определении метрических отношений используются вещественные числа. В связи с этим в некоторых аксиоматиках говорится о неявном задании аксиоматики арифметики. В других аксиоматиках отдельно выделяется аксиома Архимеда, утверждающая, что если даны два отрезка (числа), то складывая меньший отрезок (число) некоторое число раз, всегда можно превзойти больший отрезок (число).

Далее назовем класс *топологических аксиом*, формирующих понятие непрерывности. Среди топологических аксиом особняком стоит *аксиома размерности*. Пространство-время Минковского 4-мерно (постулируется, что размерность $n = 4$) [2]. Кроме

[2]Напомним, что физики-теоретики начиная с Э.Маха [38] ставили вопрос: почему пространство 3-мерно? Предпринимались попытки дать физическое обоснование геометрической аксиомы 3-мерности пространства (4-мерности пространства-времени).

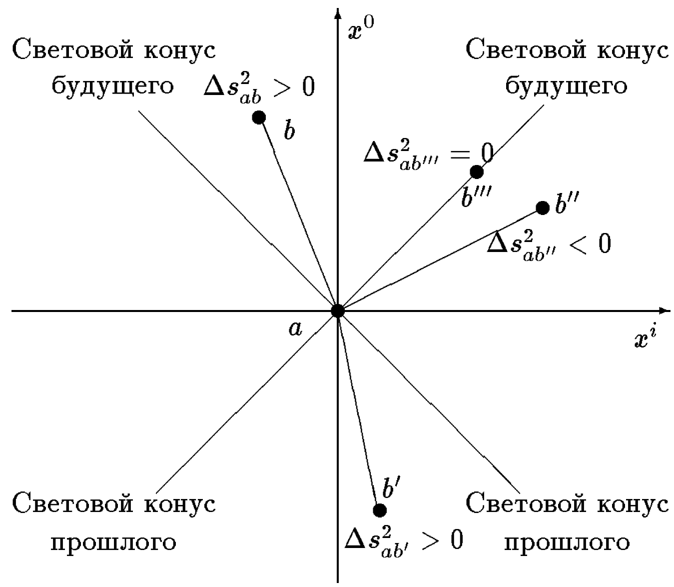


Рис. 0.2: Частичная упорядоченность в пространстве Минковского

того, имеется класс *аксиом допустимых координатных преобразований* и систем отсчета. В рамках этих аксиом формируются понятия преобразований Лоренца и Пуанкаре.

3. Переход от СТО к эйнштейновской общей теории относительности (ОТО) состоит в обобщении метрических аксиом. Метрика ds^2 задается инфинитезимально, т.е. между парами близких точек-событий. Пространство-время становится искривленным (римановым). В настоящее время построено несколько аксиоматик ОТО (см., например, [9, 43, 48]).

В последнее время интенсивно развиваются многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна [13, 24]. Их главное отличие от 4-мерной ОТО состоит в обобщении аксиомы размерности. В теории Калуцы-Клейна, объединяющей гравитационные и электромагнитные взаимодействия, размерность $n = 5$. В других теориях, претендующих на объединение гравитационных и электрослабых или даже и сильных взаимодействий, $n > 5$. Имеются варианты теорий размерностей $n = 6, 7, \ldots, 10, 11$ и более.

Уже ни у кого не вызывает сомнения, что наиболее радикальные открытия в фундаментальной теоретической физике связаны с изменением представлений о свойствах пространства-времени. Можно утверждать, что создание квантовой механики не составило исключения. Оказалось, что в микромире проявляется дополнительность геометрических и динамических свойств материи. Были предприняты попытки трактовки квантовой механики посредством изменения некоторых аксиом классического пространства-времени.

Независимо от названных проблем следует упомянуть довольно значительное число работ, в которых изучался характер мыслимых физических теорий при изменениях каких-то аксиом пространства-времени. Сейчас трудно указать аксиомы, которые бы не пробовали изменить. (Конечно, имеются в виду аксиомы из наиболее распространенных аксиоматик геометрии.) Заметим, что при использовании дифференциальных геометрий, да еще различной размерности, таких возможностей очень много. Можно назвать геометрии с кручением, с неметричностью (геометрию Вейля), финслеровы геометрии и др.

4. Однако это направление поиска далеко не исчерпывает всех возможностей. Как уже подчеркивалось, упомянутые здесь подходы к определению и к обобщениям пространства-времени опираются на понимание его как самостоятельной физической категории. Но есть и другое понимание природы пространства-времени. В связи с этим следует напомнить, что имеются две точки зрения на сущность пространства-времени: субстанциальная (или квазисубстанциальная) и реляционная.

Именно в *субстанциальном* подходе пространство-время понимается как самостоятельная категория или как некая фоновая субстанция [3]. Известно, что подобная концепция пространства в той или иной форме высказывалась еще в древности, в частности Демокритом. Классическое пространство, использованное в механике Ньютона-Галилея, соответствует субстанциальному подходу. Происшедшие с тех пор изменения в понимании свойств пространства-времени не затронули главного — представлений о фоновом характере пространства-времени как вместилища всего сущего. Не избежали этого ни эйнштейновская ОТО, ни теории Калуцы-Клейна.

Второй, *реляционный* подход отрицает самостоятельную сущность пространства-времени. Согласно этой концепции классическое пространство-время представляет собой лишь особый вид отношений, в которые вступают друг с другом макроскопические материальные объекты. Без материальных объектов нет и

[3] В ряде теорий даже предлагается из этой фоновой субстанции строить все известные виды материи.

понятий пространства и времени. Высказывания в духе этой концепции можно найти у Аристотеля, именно ее отстаивали Г.Лейбниц и затем Э.Мах. Так, Лейбниц (1646–1716) в одном из писем С.Кларку писал: "Я вовсе не говорю, что материя и пространство одно и то же, а лишь утверждаю, что без материи нет и пространства, и что пространство само по себе не представляет собой абсолютной реальности"[37, с.84]. Аналогично высказывался Э.Мах (1838–1916). Так, обсуждая понятия механики, он писал, что Ньютоном была предпринята "рискованная попытка отнести всю динамику к *абсолютному пространству* и соответственно к *абсолютному времени.* На практике это предположение, кажущееся бессмысленным, ничего не изменило в признании неподвижных звезд за систему пространственных и временных координат; оно осталось поэтому безвредным и в течение долгого времени ускользало от серьезной критики. Можно, пожалуй, сказать, что главным образом именно со времени Ньютона время и пространство стали теми *самостоятельными* и однако бестелесными сущностями, которыми считаются по настоящее время" [38, с.440]. Сам Мах так понимал эти категории:"В отношении физическом время и пространство суть особые зависимости физических элементов друг от друга" [38, с.432]. "Время и пространство существуют в определенных отношениях физических объектов, и эти отношения не только вносятся нами, а существуют в связи и во взаимной зависимости явлений"[39, с.71]. "Мы можем сказать, что во временной зависимости выражаются простейшие непосредственные физические отношения" [38, с.437]. "В пространственных отношениях находит свое выражение посредственная физическая зависимость" [38, с.438]. Особенно хотелось бы подчеркнуть использованный Махом термин "*отношение*" для определения сути пространства и времени. Этот термин будет играть ключевую роль во всей этой книге. Позднее аналогичным образом высказывались Ф.Хойл [63], Дж.Нарликар [44] и другие физики-теоретики.

Следует отметить, что современная наука (физика и математика) достаточно преуспела в построениях и в изучении возможных (непрерывных) математических моделей пространства-времени. Развит мощный аппарат дифференциальной геометрии, на который опирается вся ОТО и многочисленные возможные ее обобщения. И все это фактически находится в арсенале сторонников субстанциальной концепции пространства-времени. А что могут этому противопоставить сторонники реляционной концепции? До самого последнего времени не так уж и много, — главным образом, рассуждения философского характера, кое-какие математические фрагменты и далеко не всеми разделяемую концепцию дальнодействия в физике, именуемую как теория прямого межчастичного взаимодействия (action at a distance). Однако, продвинувшись в описании физических взаимодействий, сторонники этой теории остановились перед задачей построения реляционной концепции самого пространства-времени. Декларируя его реляционный характер, в теории прямого межчастичного взаимодействия обычно опираются на уже готовое (чаще всего плоское) 4-мерное пространство-время.

5. И вот сравнительно недавно, в 60-х годах в Новосибирске в работах Ю.И.Кулакова [27], а затем Г.Г.Михайличенко [40-42] и В.Х.Льва [33-36] была развита своеобразная теория, названная *теорией физических структур*. Ее появление не было связано ни с теорией прямого межчастичного взаимодействия, ни с противопоставлением субстанциальной и реляционной концепций пространства-времени. Она возникла из совсем иных соображений. Однако теорией физических структур были заложены основы универсальной алгебраической теории отношений между элементами (объектами) произвольной природы. Исходными положениями теории физических структур были элементы одного или двух множеств и отношения между ними (вещественные числа). И далее из соображений равноправности элементов развивалась содержательная теория возможных отношений.

В работах новосибирской группы было показано, что, например, евклидовы 3-мерные пространственные отношения можно трактовать как частный случай физических структур на одном множестве элементов с вещественными отношениями. Оказалось, что как частные случаи возникают и другие известные (и практически неизвестные) виды геометрий. Было также показано, что существуют своеобразные *бинарные геометрии* (на двух множествах элементов), более элементарные, чем обычные геометрии. От них можно перейти к структурам на одном множестве элементов, но не наоборот.

Очевидно, что аксиоматика теории отношений (физических структур) и следующих из нее геометрий должна иметь иной характер по сравнению с аксиоматиками общепринятых геометрий. Однако, как правило, аксиоматический подход уместен для достаточно устоявшихся разделов науки и далеко не всегда плодотворен на стадиях их интенсивного развития, каковой ныне представляется теория отношений. Тем не менее уже имеется несколько попыток аксиоматизации этой теории [23, 55]. В этой книге мы не будем следовать аксиоматическому подходу. Это завело бы в дебри математических тонкостей.

В теории Кулакова провозглашается, что физические структуры описывают законы физики (отсюда и ее название), и делается попытка доказать это, демонстрируя, что ряд законов общей физики (2-й закон Ньютона, закон Ома и некоторые другие) может быть переформулирован на языке теории физических структур. Еще раз подчеркнем, что в группе Ю.И.Кулакова рассматриваются лишь вещественные отношения. Такая теория не распространяется на физику микромира, но в ее рамках установлено, что известные геометрии с симметриями, в том числе и описывающая 4-мерное пространство Минковского, могут рассматриваться как унарные (на одном множестве элементов – точек) физические структуры.

6. Для решения поставленной выше проблемы вывода теории классического пространства-времени из более элементарных понятий, проявляющихся в физике микромира, чрезвычайно важным оказалось открытие Кулаковым бинарных (на двух множествах элементов) структур (геометрий). В связи с тем, что в современной теоретической физике довольно ярко выражена тенденция геометризации физических понятий и фундаментальных взаимодействий, возникла мысль применить для этих целей новые, более элементарные — бинарные геометрии. Оказалось, что ряд понятий таких геометрий, опять-таки совсем в другом контексте, уже давно используется в современной теоретической физике. Это – понятия спиноров, амплитуд вероятностей в квантовой механике, цветов кварков в теории элементарных частиц и многие другие.

Излагаемая в книге реляционная теория пространства-времени и взаимодействий нами названа *бинарной геометрофизикой*. В этот термин заложено, во-первых, то, что теория опирается на бинарные структуры, во-вторых, что эти конструкции представляют собой своеобразные (бинарные) геометрии, и, в-третьих, что эти геометрии предлагается положить в фундамент физики и теории физического пространства-времени. Бинарная геометрофизика использует основные идеи математического аппарата теории физических структур Кулакова, однако она принципиально отличается от последней как по видению проблемы, так и по характеру ее решения. Во-первых, в бинарной геометрофизике используется обобщенная теория бинарных систем (структур) *комплексных* отношений (низших рангов), а во-вторых, ищутся не иллюстрации применимости таких систем отношений в физике, а на этом фундаменте возводится цельная система физического мироздания. При этом полагается, что алгебраическая теория бинарных систем комплексных отношений (БСКО) самым непосредственным образом описывает закономерности физики микромира. От простейших БСКО посредством предельного перехода к большим ансамблям элементов (к макрообъектам) предлагается построение физики макромира одновременно с формированием классических пространственно-временных отношений между макрообъектами. Таким образом, в этом подходе классическое пространство-время, во-первых, имеет вторичный, производный характер – получается из более элементарных отношений – и, во-вторых, эти отношения справедливы лишь для макрообъектов, т.е. лишь в классической области.

7. Забегая вперед, укажем на некоторые аналоги групп традиционных аксиом и ключевых понятий теории систем отношений (физических структур). Оказывается, понятия упорядоченности тесно связаны с бинарностью систем отношений. Как правило, одно множество элементов будет интерпретироваться как начальные состояния (частиц), а второе множество будет соответствовать конечным состояниям.

Наиболее важным понятием в данном подходе является отношение — число, задаваемое для двух (или более) элементов. Несомненно, отношение соответствует метрике общепринятых геометрий, причем это соответствие не обязано быть непосредственным. Ниже будет показано, что привычные метрические отношения — квадрат интервала или длины будут определяться как некие функции от первичных (комплексных) отношений между элементами.

В теории отношений своеобразно возникает аналог общепринятой геометрической размерности. Оказывается, понятие размерности соответствует числам элементов – рангам, для которых записывается закон системы отношений.

8. На рисунке 0.3 изображена блок-схема бинарной геометрофизики и ее соотношение с программой теории физических структур Ю.И.Кулакова. Левая часть рисунка поясняет содержание теории физических структур (ТФС). В этой части верхний блок соответствует общей части математического аппарата теории физических структур (с вещественными отношениями). Под ним изображен блок, соответствующий геометриям с симметриями, которые можно трактовать как различные конкретные физические структуры на одном множестве элементов (унарные системы вещественных отношений различного ранга). Снизу изображен блок, соответствующий примерам законов из общей физики, которые удалось переформулировать на языке теории физических структур.

В правой части рисунка в самых общих чертах изображена блок-схема бинарной геометрофизики. Она включает в себя математический аппарат теории бинарных систем комплексных отношений, главным образом, в виде теорий ряда разновидностей БСКО низших рангов. Эта часть отмечена верхним блоком. Следующий блок содержит в себе теории унарных систем вещественных отношений (УСВО), выводимых из бинарных систем комплексных отношений (БСКО). Еще ниже расположен блок физической интерпретации понятий и соотношений БСКО в физике микромира. На этом заканчивается материал бинарной геометрофизики, включенный в эту часть книги.

Следующая часть бинарной геометрофизики описывает переход от элементарных алгебраических понятий к понятиям макрофизики. Здесь существенны идеи, ранее развитые в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия (ТПМЧВ) Фоккера-Фейнмана. Примечательно, что процедура перехода к макрообъектам непосредственно выводит на понятия многомерного пространства-времени, где важную роль играют методы и идеи многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Только пройдя этот этап, можно выйти на теорию 4-мерного классического пространства-времени и понятия классической физики. Эти части теории отмечены тремя нижними группами блоков в правой части схемы.

На этом же рисунке отмечен материал, который включен в эту книгу. Прежде всего, это изложение математического аппарата теории систем вещественных отношений (СВО), входящего в теорию физических структур. Это сделано в первой главе. Там же показано, какие геометрии с симметриями описываются унарными системами вещественных отношений (УСВО). В последующих главах рассмотрены теории бинарных систем комплексных отношений низших рангов: (3,3), (2,2), (4,4), ..., (n,n). Попутно дана физическая интерпретация основных понятий и соотношений БСКО в рамках физики микромира, главным образом относящихся к свойствам свободных (идеализированных) частиц. Все вопросы, связанные с описанием взаимодействий между частицами, и предельный переход к макрофизике, включая окончательное формирование классического пространства-времени, намечено включить в другую часть книги.

Рис. 0.3: Блок-схема бинарной геометрофизики (БГФ) и ее соотношение с программой теории физических структур (ТФС)

Глава 1

Введение в теорию систем вещественных отношений

Задача этой главы состоит в изложении основной информации из теории систем вещественных отношений. Здесь перечислены законы бинарных и унарных систем отношений, а также проанализирован ряд их математических свойств. Основной упор сделан именно на бинарные системы отношений. В этой главе рассмотрены также законы для унарных систем вещественных отношений низших рангов и обсужден их геометрический смысл.

1.1 Определение системы отношений

1. В предложенной Ю.И.Кулаковым теории физических структур [27, 29] следует различать математический аппарат и его физические приложения. Математическую часть теории физических структур можно назвать алгебраической теорией систем отношений между элементами произвольной природы. В ней постулируется наличие одного или нескольких множеств элементов, между которыми определены отношения, обладающие специальными алгебраическими свойствами. Понятие элемента множества является примитивом теории, т.е. далее не определяется кроме того, что удовлетворяет ниже сформулированным свойствам. В качестве элементов могут выступать элементарные частицы или их составляющие части, геометрические точки-события, физические тела и т.д. В общем случае отношение между элементами — это число (вещественное, комплексное или даже совокуп-

ность из нескольких чисел), сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов, принадлежащих одному или разным множествам. В качестве отношений между элементами могут выступать расстояния между точками, метрика, скалярные произведения векторов, вклады в действия частиц, обусловленные их взаимодействием и т.д. Наиболее важными являются случаи, когда числа сопоставляются парам элементов. Именно таковыми являются метрические отношения в общепринятой геометрии или в теории линейных пространств. В этой книге основной упор делается на теории с парными отношениями, хотя в главах 5–9 рассматриваются также тройные и даже более сложные отношения.

Если рассматривать одно множество, то построенную на нем теорию будем именовать *унарной системой отношений* (УСО), а если элементы составляют два множества и рассматриваются отношения лишь между элементами разных множеств, то построенную на них теорию будем называть *бинарной системой отношений* (БСО). В принципе, можно было ожидать существование тернарных систем отношений, т.е. теории, построенной на трех множествах элементов, а также теорий еще более общих систем отношений. Однако в группе Ю.И.Кулакова показано, что содержательная теория возможна лишь на одном или на двух множествах. (На трех множествах получается лишь тривиальный вариант теории, по крайней мере для случая вещественных отношений.) В основу развиваемой в книге бинарной геометрофизики положены именно бинарные системы отношений.

2. Задание элементов и отношений между ними еще не составляет теории. Необходимо ввести еще какие-то закономерности, т.е. задать свойства этих отношений, которые сделали бы математическую конструкцию содержательной теорией. Таковым простейшим случаем является тот, когда числовые отношения между элементами удовлетворяют неким *алгебраическим соотношениям.* Каким? Простейшее, что можно придумать, это выделить из множеств элементов какие-то подмножества, взять числовые отношения между элементами этих подмножеств и предположить, что между ними имеется какое-то алгебраическое соотношение. Оказывается, эта простая мысль содержит в себе чрезвычайно много и приводит к содержательным следствиям.

Прежде всего, эта идея позволяет определить совокупность (иерархию) теорий систем отношений, различающихся числами элементов в выделенных подмножествах. Назовем эти числа *рангом* системы отношений, т.е. ранг определяет, сколько элементов должно содержать подмножество, для отношений в котором имеет место алгебраическое соотношение. Для унарных систем отношений это одно число r. Для бинарных систем отношений ранг определяется двумя числами (r, s), характеризующими количество элементов в двух множествах.

Для унарных систем отношений ранга r с парными отношениями алгебраическое соотношение представляет собой равенство нулю некоторой функции Φ от $C_2^r = \frac{r(r-1)}{2}$ аргументов — парных отношений:

$$\Phi(a_{ik}, a_{ij}, \cdots, a_{js}) = 0, \qquad (1.1.1)$$

где a_{ik} — парное отношение между элементами i и k выделенного подмножества из общего множества $\mathcal{M}$ (см. рис.1.1), где

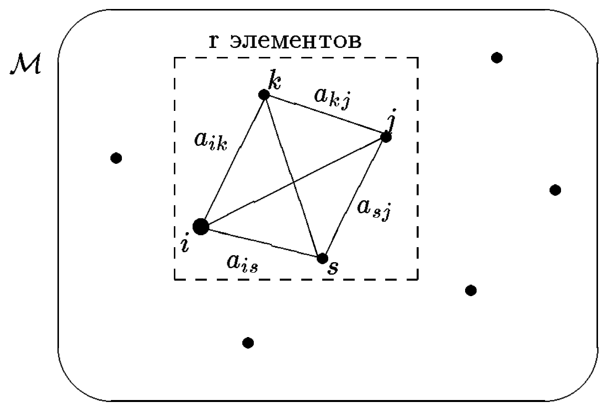


Рис. 1.1: Унарная система отношений

выделенное подмножество из r элементов обведено пунктирной рамкой. В дальнейшем будем называть соотношение вида (1.1.1) *законом* унарной системы отношений.

Для бинарных систем отношений ранга (r, s) на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ алгебраическое соотношение (*закон* бинарной системы отношений) содержит rs парных отношений и имеет вид

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \cdots, a_{j\gamma}) = 0, \qquad (1.1.2)$$

где $a_{i\alpha}$ — парное отношение между элементами i и α из двух разных множеств. Здесь и в дальнейшем будем обозначать латинскими индексами элементы первого множества $\mathcal{M}$, а греческими индексами элементы второго множества $\mathcal{N}$ (см. рис. 2.2).

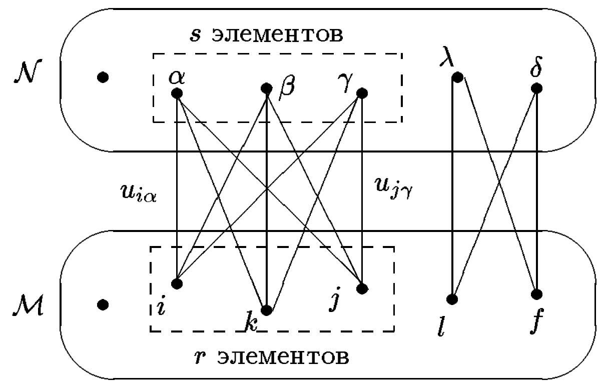


Рис. 1.2: Бинарная система отношений

3. В теории систем отношений (физических структур) ранг соответствует понятию размерности в общепринятой геометрии. Поясним это на примере бинарных систем отношений ранга (r, s). Пусть $i, k, j, \ldots$ — r произвольных элементов множества $\mathcal{M}$, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — s произвольных элементов множества $\mathcal{N}$. Потребуем, чтобы закон (1.1.2) был разрешим относительно любого из rs аргументов, т.е. чтобы его всегда можно было записать, например, в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, \ldots, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, \ldots). \tag{1.1.3}$$

Выберем в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно по $r-1$ и $s-1$ элементов и назовем их *эталонными* или образующими *базис* системы отношений. Пусть ими будут элементы $k, j, \ldots$ из множества $\mathcal{M}$ и элементы $\beta, \gamma, \ldots$ из множества $\mathcal{N}$. Для произвольных неэталонных элементов i и α формулу (1.1.3) можно переписать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, a_{i\gamma}, \ldots; a_{k\alpha}, a_{j\alpha}, \ldots; a_{k\beta}, a_{k\gamma}, \ldots, a_{j\beta}, a_{j\gamma}, \ldots), \tag{1.1.4}$$

где в первой группе выделены парные отношения элемента i со всеми $s-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{N}$ (обозначим их через i^l: $a_{i\beta} \equiv i^1$; $a_{i\gamma} \equiv i^2$; …, где $l = 1, 2, \ldots, s-1$), во второй группе выделены парные отношения элемента α со всеми $r-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{M}$ (обозначим их через α^l: $a_{k\alpha} \equiv \alpha^1$; $a_{j\alpha}$; …, где $l = 1, 2, \ldots, r-1$). В последней группе сосредоточены парные отношения только между эталонными элементами. Их будем считать постоянными параметрами выбранной параметризации (базиса), поэтому парное отношение $a_{i\alpha}$ можно записать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(i^1, i^2, \dots, i^{s-1}; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{r-1}). \tag{1.1.5}$$

Это означает, что парные отношения между любыми (неэталонными) элементами i и α можно понимать как функцию в $r+s-2$-мерном пространстве параметров-координат.

Подставляя парные отношения вида (1.1.5) для rs неэталонных элементов в закон (1.1.2), очевидно, получаем тождество

$$\Phi(f_{i\alpha}, f_{i\delta}, \dots, f_{j\alpha}, f_{j\delta}, \dots) \equiv 0. \tag{1.1.6}$$

Закон (1.1.6) записан в неком базисе. Понятие базиса системы отношений будет иметь важное значение в бинарной геометрофизике.

Легко видеть, что подобное рассуждение можно провести и для унарных систем отношений ранга r. Только в этом случае эталонных элементов должно быть $r-2$. Каждый элемент унарной системы отношений будет характеризоваться $r-2$ параметрами-координатами.

4. В теории систем отношений постулируется, что все элементы, как вошедшие в выделенные подмножества, так и нет, являются равноправными. Это означает, что законы (1.1.1) и (1.1.2) должны выполняться, если заменить часть или все элементы, вошедшие в выделенные подмножества, на произвольные другие. Такая симметрия была названа *фундаментальной симметрией*. Фундаментальные симметрии играют ключевую роль в теории систем отношений. Они заменяют известные групповые симметрии как в геометрии, так и в современных физических теориях. Фундаментальные симметрии позволяют установить все конкретные виды возможных законов (1.1.1) и (1.1.2) и парных отношений a_{ik} и $a_{i\alpha}$ в них.

Введенные здесь понятия: элементы, отношения, ранг, закон и фундаментальная симметрия — составляют фундамент математической теории систем отношений. Как будет показано ниже, их достаточно для построения содержательной как математической, так и физической теорий.

1.2 Бинарные системы вещественных отношений

В приложении А.1 на основе работ Г.Г.Михайличенко [40], а также В.Х.Льва [33] продемонстрировано на примере простейшего ранга (2,2) как устанавливаются законы систем вещественных отношений (физических структур). В задачу этой книги не входит рассмотрение вывода законов систем отношений. Соответствующие выкладки довольно громоздки. С ними можно познакомиться по оригинальным работам Г.Г.Михайличенко [40-42] и В.Х.Льва [33-36]. Здесь же без доказательств приведем результаты исследований Ю.И.Кулакова и Г.Г.Михайличенко [27, 40] по теории бинарных систем вещественных отношений (БСВО). Было показано, что для случая вещественных парных отношений существуют БСВО далеко не для всех мыслимых рангов. Возможные БСВО изображены на рисунке 1.3, где по

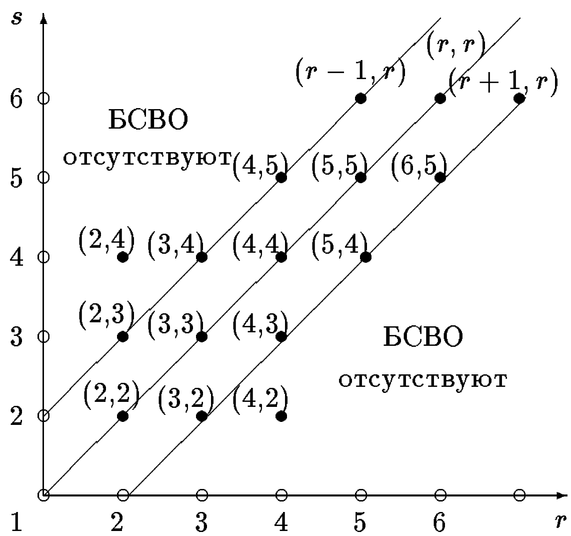


Рис. 1.3: Существующие бинарные системы вещественных отношений

вертикальной оси отложены значения s, а по горизонтальной оси r. Как видно из рисунка, существуют следующие БСВО:

1) на главной диагонали БСВО рангов (r, r), где $r \geq 2$;

2) на двух побочных диагоналях БСВО рангов $(r \pm 1, r)$;

3) исключительная БСВО ранга (4,2) и эквивалентная ей БСВО ранга (2,4).

Другие БСВО отсутствуют. Приведем законы и парные отношения для возможных БСВО.

1. Доказано, что все диагональные БСВО могут быть только двух типов. Их ранги будем обозначать посредством (r, r) и $(r, r; a)$.

Для БСВО ранга (r, r) закон записывается через определитель

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \cdots & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \cdots & u_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & \cdots & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.2.1}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ между элементами противоположных множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ представляются в виде

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \tag{1.2.2}$$

Здесь i^l параметры, сопоставляемые произвольному элементу i множества $\mathcal{M}$, а α^l параметры, сопоставляемые элементу α из множества $\mathcal{N}$.

Забегая вперед, отметим, что именно такие диагональные БСО будут играть ключевую роль в развиваемой ниже бинарной геометрофизике.

Для БСВО ранга $(r, r; a)$ закон имеет вид (записывается посредством окаймленного определителя)

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.2.3}$$

где парные отношения $a_{i\alpha}$ представляются в виде

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0 + \alpha_0. \tag{1.2.4}$$

Здесь i^l, i_0 также $r-1$ параметров, сопоставляемых элементу i, а α^l, α_0 — параметры, характеризующие элемент α.

2. Для БСВО, изображенных на побочных диагоналях, законы найдены в видах: для ранга $(r+1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.2.5)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l + \alpha_0; \qquad (1.2.6)$$

для ранга $(r-1, r)$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \cdots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \cdots & a_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & \cdots & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.2.7)$$

с парным отношением

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + i_0. \qquad (1.2.8)$$

Характерно, что для того типа элементов, которых в законе меньше, число параметров оказывается на единицу больше, причем дополнительный параметр входит в парное отношение аддитивным образом.

Заметим, что БСВО минимального ранга формально можно считать БСВО рангов (2,1) и (1,2). Для них выше приведенные законы означают

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} \\ 1 & a_{k\alpha} \end{vmatrix} = a_{k\alpha} - a_{i\alpha} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} - a_{i\alpha} = 0, \qquad (1.2.9)$$

т.е. в первом случае отношение любого элемента множества $\mathcal{M}$ к произвольному элементу α множества $\mathcal{N}$ определяется одним единственным параметром элемента α: $a_{i\alpha} = a_{k\alpha} = \cdots\cdots = a_{j\alpha} = \alpha_0$, а во втором случае, наоборот, отношение любого элемента множества $\mathcal{N}$ к произвольному элементу i множества $\mathcal{M}$ определяется одним единственным параметром элемента i: $a_{i\alpha} = a_{i\beta} = \cdots = a_{i\gamma} = i_0$.

3. Для исключительных БСВО рангов (4,2) и (2,4) законы найдены соответственно в видах:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & (a_{i\alpha}a_{i\beta}) \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & (a_{k\alpha}a_{k\beta}) \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & (a_{j\alpha}a_{j\beta}) \\ 1 & a_{s\alpha} & a_{s\beta} & (a_{s\alpha}a_{s\beta}) \end{vmatrix} = 0; \qquad (1.2.10)$$

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ (a_{i\alpha}a_{k\alpha}) & (a_{i\beta}a_{k\beta}) & (a_{i\gamma}a_{k\gamma}) & (a_{i\delta}a_{k\delta}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.2.11)$$

где парные отношения для БСВО ранга (4,2) определяются формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{i\alpha^1 + \alpha^2}{i + \alpha^3}; \qquad (1.2.12)$$

а для БСВО ранга (2,4) — формулой

$$a_{i\alpha} = \frac{\alpha i^1 + i^2}{\alpha + i^3}. \qquad (1.2.13)$$

Здесь те элементы, которых в законе меньше, характеризуются тремя параметрами, а те, которых больше, — только одним параметром. БСВО этого ранга, оказывается, соответствует проективной геометрии.

Анализируя содержание и результаты математической части теории систем отношений (теории физических структур), невольно стараешься найти в широко разросшемся дереве современной математики ветви (давно сложившиеся или только побеги), которые бы соответствовали системам отношений. Насколько автору известно, такой поиск предпринимался Ю.И.Кулаковым. Им высказывался ряд соображений на этот счет, начиная от указаний на связь с теорией категорий и функторов и кончая гипотезой об основании теорией физических структур совершенно новой ветви математики. Не исключено, что к математическому содержанию этой теории можно подойти с разных сторон. В частности, следует отметить несколько попыток построения аксиоматики математического аппарата теории физических структур [23, 55]. Это несомненно поможет уточнению логических основ теории и прояснению ее связей с другими разделами математики.

Однако следует признать, что *наиболее близким к теории систем отношений разделом современной математики является теория линейных пространств*. При этом сопоставление двух теорий следует начинать не со сравнения их логических основ, а со сличения ряда выводов теории систем отношений и определений скалярных произведений векторов в теории линейных пространств. Тогда приходим к выводу, что элементам диагональных БСО (см. (1.2.1) и (1.2.2)) сопоставляются векторы линейных пространств. Параметры элементов теории систем отношений выступают в качестве компонент векторов, а парные отношения (1.2.2) соответствуют скалярным произведениям векторов в теории $r-1$-мерных линейных пространств:

$$(\vec{x}_i \vec{x}_k) = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l x_k^l. \qquad (1.2.14)$$

Продолжая сравнение двух теорий, следует напомнить, что в теории линейных пространств широко используются понятие и свойства *определителя Грама.* Как известно (см., например [65, с.205]), определитель Грама записывается в виде

$$G(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k) = \begin{vmatrix} (\vec{x}_1\vec{x}_1) & (\vec{x}_1\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_1\vec{x}_k) \\ (\vec{x}_2\vec{x}_1) & (\vec{x}_2\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_2\vec{x}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{x}_k\vec{x}_1) & (\vec{x}_k\vec{x}_2) & \cdots & (\vec{x}_k\vec{x}_k) \end{vmatrix}. \qquad (1.2.15)$$

Известна также теорема об определителе Грама: “Определитель Грама векторов $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\cdots$, $\vec{x_k}$ равен нулю, если векторы линейно зависимы, и положителен, если они линейно независимы; он равен произведению квадратов длин векторов $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, $\cdots$, $\vec{x_k}$, если они взаимно ортогональны, в противном случае он меньше этой величины”[65, с.207].

Сравнивая это свойство определителя Грама с законами бинарных систем отношений (1.2.2) и определениями соответствующих парных отношений (1.2.2), легко видеть, что законы этих систем отношений представляют собой не что иное как равенство нулю соответствующих определителей Грама. Ключевые понятия теории систем отношений — определители меньшего ранга — также являются определителями Грама с вытекающими из теоремы свойствами.

Таким образом, на две сравниваемые теории можно смотреть как на описывающие одни и те же закономерности, однако с разных позиций (аксиоматик). То, что в одной теории (линейных пространств) является аксиомой (например, вид скалярного произведения векторов), становится теоремой, т.е. выводится во второй теории (систем отношений). Такая ситуация типична для геометрии, строящейся на базе разных систем аксиом. Аналогичное можно усмотреть и в различных формулировках физической теории.

Однако разные точки зрения на одну и ту же совокупность закономерностей могут дать ряд преимуществ при дальнейшем развитии и обобщении теории. На плодотворность множества формулировок в физике в свое время указывал Р.Фейнман [62]. Аналогичное, конечно, имеет место и в математике. Сопоставление теорий линейных пространств и систем отношений демонстрирует это еще раз. Так, в теории систем отношений с единой точки зрения охватываются, например, бинарные системы отношений с законами (1.2.1) и (1.2.3). Парные отношения (1.2.4) последних систем отношений в теории линейных пространств выглядят неестественно (представляются искусственными). Как правило, в теории линейных пространств векторы с таким скалярным произведением не рассматриваются. В теории же систем отношений это родственные определения парных отношений. Заметим также, что окаймленные определители, входящие в закон (1.2.3), в теории систем отношений типа a играют такую же роль, что и определитель Грама в теории систем отношений с законом (1.2.1).

С позиции теории систем отношений становится естественным и другое обобщение теории линейных пространств — на случай, соответствующий недиагональным бинарным системам отношений рангов $(r \pm 1, r)$. Парные отношения (1.2.7) и (1.2.8) также представляются неестественными в теории линейных пространств. Аналогом определителей Грама здесь выступают окаймленные с одной стороны определители видов (1.2.5) и (1.2.6). Еще более неестественными в теории линейных пространств выглядят парные отношения (1.2.11) и (1.2.12), возникающие в теории исключительных бинарных систем отношений.

1.3 Объединение двух типов диагональных бинарных систем вещественных отношений

1. БСВО рангов $(r, r; a)$ можно понимать как частные случаи БСВО соответствующих рангов (r, r). В.Х.Лев показал [33], что из соответствующих функционально-дифференциальных уравнений для диагональных БСВО получается решение, охватывающее оба типа БСВО, т.е. рангов (r, r) и $(r, r; a)$. Согласно

общему решению парное отношение представляется в виде

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{i\alpha} = \tfrac{1}{\varepsilon_1}\left(e^{\varepsilon_1(i_{01}+\alpha_{01})}-1\right) + \tfrac{1}{2}\left(e^{\varepsilon_2(i_{02}+\alpha_{02})}-1\right) + \\ \cdots + \tfrac{1}{\varepsilon_{r-1}}\left(e^{\varepsilon_{r-1}(i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})}-1\right),\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где ε_1, ε_2, $\cdots$ — совокупность из $r-1$ констант; i_{01}, i_{02}, $\cdots$ — совокупность из $r-1$ параметров, сопоставляемых элементам множества $\mathcal{M}$; α_{01}, α_{02}, $\cdots$ - - совокупность из $r-1$ параметров, сопоставляемых элементам множества $\mathcal{N}$.

Общий закон БСВО ранга (r, r) с парным отношением вида (1.3.1) представляется в форме

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\varepsilon_2 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{i\alpha} & \tilde{a}_{i\beta} & \cdots & \tilde{a}_{i\gamma} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{k\alpha} & \tilde{a}_{k\beta} & \cdots & \tilde{a}_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{j\alpha} & \tilde{a}_{j\beta} & \cdots & \tilde{a}_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3.2}$$

2. Сначала покажем, что из закона (1.3.2) и парного отношения (1.3.1) получаются закон и отношения БСВО ранга (r, r). Для этого нужно положить, что все константы ε_l отличны от нуля. Разделим первый столбец в (1.3.2) на ε_1 и прибавим его к последним r столбцам. Учитывая, что первая строка получившейся матрицы состоит из одних нулей, кроме -1 в левом верхнем углу, выражение (1.3.2) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_2 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{i\alpha} & a^*_{i\beta} & \cdots & a^*_{i\gamma} \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{k\alpha} & a^*_{k\beta} & \cdots & a^*_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 & a^*_{j\alpha} & a^*_{j\beta} & \cdots & a^*_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3.3}$$

где

$$\begin{aligned} a^*_{i\alpha} &= \frac{1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1(i_{01}+\alpha_{01})} + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(e^{\varepsilon_2(i_{02}+\alpha_{02})}-1\right) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_{r-1}}\left(e^{\varepsilon_{r-1}(i_{0r-1}+\alpha_{0r-1})}-1\right), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

т.е. из всех парных отношений $\tilde{a}_{i\alpha}$ оказался исключенным постоянный добавок $-1/\varepsilon_1$.

Повторяя такую процедуру последовательно с константами ε_2, ε_3, $\cdots$, ε_{r-1} еще $r-2$ раза, приводим закон (1.3.2) к закону (1.3.1) с парным отношением вида

$$u_{i\alpha} = \frac{1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 (i_{01} + \alpha_{01})} + \frac{1}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 (i_{02} + \alpha_{02})} + \cdots + \frac{1}{\varepsilon_{r-1}} e^{\varepsilon_{r-1} (i_{0r-1} + \alpha_{0r-1})}. \tag{1.3.5}$$

Произведя переобозначение параметров

$$i^l \equiv \frac{e^{\varepsilon_l i_{0l}}}{\sqrt{\varepsilon_l}}; \quad \alpha^l \equiv \frac{e^{\varepsilon_l \alpha_{0l}}}{\sqrt{\varepsilon_l}}, \tag{1.3.6}$$

приходим к ранее записанному парному отношению (1.2.2).

3. Не представляет труда получить из (1.3.1) и (1.3.2) соответствующие выражения для БСВО ранга $(r, r; a)$. Для этого нужно положить, что один из параметров, пусть это будет ε_{r-1}, стремится к нулю, тогда как все остальные отличны от нуля. Опять повторяя $r-2$ раза прежнюю процедуру, закон (1.3.2) приводим к виду

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{r-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \hat{a}_{i\alpha} & \hat{a}_{i\beta} & \cdots & \hat{a}_{i\gamma} \\ 1 & \hat{a}_{k\alpha} & \hat{a}_{k\beta} & \cdots & \hat{a}_{k\gamma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \hat{a}_{j\alpha} & \hat{a}_{j\beta} & \cdots & \hat{a}_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3.7}$$

где парное отношение

$$\hat{a}_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \alpha^l + \frac{1}{\varepsilon_{r-1}} \left(e^{\varepsilon_{r-1} (i_{0r-1} + \alpha_{0r-1})} - 1 \right). \tag{1.3.8}$$

При стремлении ε к нулю в (1.3.7) возникает неопределенность. Раскрывая ее имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\varepsilon (i_0 + \alpha_0)} - 1 \right) \right] = i_0 + \alpha_0, \tag{1.3.9}$$

т.е. (1.3.7) совпадает с (1.3.4), а (1.4.6) превращается в закон (1.3.3) БСВО ранга $(r, r; a)$.

Опираясь на этот результат, БСВО ранга $(r, r; a)$ будем называть *вырожденными БСВО ранга* (r, r).

4. В случае стремления к нулю нескольких констант ε_l приходим к диагональной БСВО типа меньшего ранга. Действительно, пусть $\varepsilon_{r-1} \to 0$ и $\varepsilon_{r-2} \to 0$, тогда, применив $r-2$ раза описанную выше процедуру и раскрывая неопределенности в двух слагаемых согласно (1.3.8), приводим парное отношение (1.3.1) к виду

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-3} i^l \alpha^l + i_{0r-2} + \alpha_{0r-2} + i_{0r-1} + \alpha_{0r-1} \equiv \sum_{l-1}^{r-3} i^l \alpha^l + i_0 + \alpha_0, \tag{1.3.10}$$

где произведены переобозначения:

$$i_{0r-2} + i_{0r-1} \equiv i_0; \quad \alpha_{0r-2} + \alpha_{0r-1} \equiv \alpha_0. \tag{1.3.11}$$

Можно показать, что для этого случая закон запишется через соответствующий определитель типа (1.2.3) ранга $(r-1)+1 = r$.

Аналогично можно рассмотреть БСВО типа a ранга, меньшего r, как трижды, четырежды и т.д. вырожденные БСВО ранга (r, r).

5. Отметим, что вырожденную БСКО ранга (r,r;a) можно рассматривать как частный случай невырожденной БСВО более высокого ранга (r+1,r+1) со специфическими значениями параметров элементов, когда

$$i^{r-1} = i_0; \quad i^r = 1; \quad \alpha^{r-1} = 1; \quad \alpha^r = \alpha_0. \tag{1.3.12}$$

Очевидно, вместо единицы можно взять произвольные константы, одинаковые для всех элементов множеств. При этом нужно соответствующим образом переопределить параметры с индексом 0.

1.4 Унарные системы вещественных отношений низших рангов

Для систем вещественных отношений (структур) на одном множестве элементов (УСВО) можно было ожидать более простую теорию, — в них все элементы однотипны, ранг характеризуется одним числом r, однако на самом деле теория УСВО оказалась существенно сложенее. До сих пор не найдено общего решения сразу для всех УСВО. Для каждого ранга решения приходилось искать отдельно. На сегодняшний день эта задача полностью решена лишь для УСВО низших рангов $r = 3, 4, 5$. Отсылая читателя к оригинальным работам Г.Г.Михайличенко

[40-42] и В.Х.Льва [34-36], ограничимся здесь лишь сводкой полученных результатов.

Для каждого ранга r, исходя из предположения о существовании закона УСВО (1.1.1) и фундаментальной симметрии, осуществлялся переход к системе функционально-дифференциальных уравнений аналогично тому, как это продемонстрировано в Приложении А.1. Далее решалась эта система уравнений и из нее находились возможные виды парных отношений между элементами. Для них строился закон $\Phi(a_{ik}, a_{ij}, \cdots) = 0$ в виде некого определителя из парных отношений. Каждый элемент УСВО ранга r в парных отношениях характеризуется $r-2$ параметрами (координатами).

Аналогично изложенному для БСВО закон УСВО (1.1.1) можно трактовать как уравнение относительно парного отношения a_{ik} между двумя произвольными элементами i и k. Предположив, это уравнение можно явно разрешить относительно a_{ik}, имеем

$$a_{ik} = f(a_{ij}, a_{im}, \cdots; a_{kj}, a_{km}, \cdots; a_{jm}, a_{jn}, \cdots). \tag{1.4.1}$$

Здесь справа функция f зависит от $r(r-1)/2-1$ аргументов, которые разбиты на три группы. Во-первых, это $r-2$ отношений первого элемента i ко всем оставшимся элементам (кроме k), во-вторых, это $r-2$ отношений второго элемента k ко всем оставшимя элементам (кроме i) и, в-третьих, это $(r-2)(r-3)/2$ парных отношений между оставшимися $r-2$ элементами. Последние элементы можно объявить эталонными (базисными) данной УСВО, т.е. парные отношения между ними можно считать заданными раз навсегда и характеризовать все другие элементы через $r-2$ отношений к эталонным элементам. Эти отношения можно считать координатами элементов в конкретной координатной системе, определяемой выбором эталонных элементов. От этих координат можно перейти к произвольной (допустимой) иной координатной системе. В ней по-прежнему элементы будут характеризоваться $r-2$ числами — параметрами элементов.

В работе В.Х.Льва [35] было показано, что для УСВО ранга 5 с вещественными парными отношениями имеются десять и только десять возможных решений (видов парных отношений). Оказалось, что все эти решения можно интерпретировать как специальные виды геометрий, где параметры элементов имеют смысл координат. В общем случае УСВО ранга r соответствуют геометриям размерности: $n = r-2$. Следовательно, УСВО ранга 5 соответствуют десять видов 3-мерных геометрий. Перечислим их, разделив на несколько классов:

1. К *первому классу* отнесем четыре УСВО (геометрии), сим-

метричные парные отношения (метрики) которых имеют вид.

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2\right)}; \tag{1.4.2}$$

$$a_{ik}^{(2)} = x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2 + z_k^2\right)}; \tag{1.4.3}$$

$$a_{ik}^{(3)} = x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 - x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)}; \tag{1.4.4}$$

$$a_{ik}^{(4)} = -x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k + \sqrt{\left(1 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)\left(1 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)}, \tag{1.4.5}$$

где x, y, z по три параметра (координаты), характеризующие элементы. Эти решения соответствуют:

$a_{ik}^{(1)}$ — 3-мерной геометрии Римана (сферической геометрии постоянной положительной кривизны);

$a_{ik}^{(2)}$ и $a_{ik}^{(3)}$ — геометриям на 3-мерных гиперсферах, вложенных в 4-мерные псевдоевклидовы пространства;

$a_{ik}^{(4)}$ — 3-мерной геометрии Лобачевского (гиперболической или геометрии постоянной отрицательной кривизны).

Для всех этих четырех геометрий (УСВО ранга 5) закон имеет один и тот же вид

$$\Phi\left(a_{ik}, a_{im}, \cdots\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ a_{ki} & 1 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ a_{mi} & a_{mk} & 1 & a_{mn} & a_{mp} \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 1 & a_{np} \\ a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.6}$$

Легко убедиться, что подстановка (1.4.2) – (1.4.5) в (1.4.6) приводит к тождеству.

Для УСВО ранга 4 имеются три аналогичные 2-мерные геометрии с симметричными парными отношениями:

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 - y_i^2\right)\left(1 - x_k^2 - y_k^2\right)};$$

$$a_{ik}^{(2)} = x_i x_k - y_i y_k + \sqrt{\left(1 - x_i^2 + y_i^2\right)\left(1 - x_k^2 + y_k^2\right)};$$

$$a_{ik}^{(3)} = -x_i x_k - y_i y_k + \sqrt{\left(1 + x_i^2 + y_i^2\right)\left(1 + x_k^2 + y_k^2\right)},$$

интерпретируемые соответственно как геометрия на 2-мерной сфере, геометрия на 2-мерной сфере в 3-мерном псевдоевклидовом пространстве и геометрия на 2-мерном гиперболоиде.

Аналогично, для УСВО ранга 3 получаются две 1-мерные геометрии соответственно на окружности единичного радиуса и на гиперболе:

$$a_{ik}^{(1)} = x_i x_k + \sqrt{(1 - x_i^2)(1 - x_k^2)};$$

$$a_{ik}^{(2)} = -x_i x_k + \sqrt{(1 + x_i^2)(1 + x_k^2)}.$$

Законы для этих УСВО записываются аналогично (1.4.6), только меньшего ранга.

2. Ко *второму классу* отнесем УСВО (геометрии) с симметричными парными отношениями видов:

$$a_{ik}^{(5)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2; \qquad (1.4.7)$$

$$a_{ik}^{(6)} \equiv s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2, \qquad (1.4.8)$$

соответствующие 3-мерным евклидовой и псевдоевклидовой геометриям. Для них закон записывается через определитель Кэли-Менгера на пяти элементах

$$\Phi(a_{ik}, a_{im}, \cdots) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{ni} & a_{nk} & a_{nm} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{pi} & a_{pk} & a_{pm} & a_{pn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.4.9)$$

Отметим, что в евклидовой геометрии определитель Кэли-Менгера определяет квадрат $r-1$ -мерного симплекса на r точках. Следовательно, закон (1.4.9) означает обращение в нуль 4-мерного объема симплекса, образованного 5 точками. Это будет тогда, когда 5 точек принадлежат 3-мерной гиперповерхности, т.е. лежат в 3-мерном евклидовом (псевдоевклидовом) пространстве.

Аналогичные два решения имеют место для УСВО ранга 4. Они соответствуют 2-мерным евклидовой и псевдоевклидовой геометриям с метриками:

$$a_{ik}^{(4)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2;$$

$$a_{ik}^{(5)} \equiv s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2.$$

Для УСВО ранга 3 имеем только одно решение, соответствующее 1-мерной геометрии на неориентированной прямой. В ней

$$a_{ik}^{(3)} \equiv l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2.$$

Следует заметить, что определитель Кэли-Менгера D_{ikm} в законе этой УСВО $\Phi \equiv D_{ikm} = 0$ имеет смысл (с точностью до коэффициента) квадрата площади треугольника S_{ikm} и записывается по известной формуле Герона через расстояния — длины сторон треугольника:

$$D_{ikm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{km}^2 \\ 1 & l_{mi}^2 & l_{mk}^2 & 0 \end{vmatrix} = -16 S_{ikm}^2, \tag{1.4.10}$$

где площадь треугольника представляется формулой

$$S_{ikm} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p - 2l_{km})(p - 2l_{im})(p - 2l_{ik})};$$

здесь периметр $p = l_{ik} + l_{im} + l_{km}$.

3. К *третьему классу* отнесем УСВО с антисимметричным парным отношением

$$a_{ik}^{(7)} = -a_{ki}^{(7)} = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k, \tag{1.4.11}$$

представляющую собой своеобразную 3-мерную симплектическую геометрию (геометрию на 3-мерной гиперплоскости, вложенной в 4-мерное симплектическое пространство). Эта геометрия также характеризуется законом вида (1.4.9).

Непосредственный аналог такой УСВО имеется также для нечетного ранга 3, когда парное отношение записывается в виде

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i - x_k,$$

а закон записывается в форме

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 \end{vmatrix} = -\left(a_{ik} + a_{km} + a_{mi}\right)^2 = 0. \tag{1.4.12}$$

Эту УСВО со свойством $a_{im} = a_{ik} + a_{km}$ можно понимать как геометрию на 1-мерной ориентированной прямой.

Для *четного ранга* $r = 4$ имеем 2-мерную симплектическую геометрию с парным отношением

$$a_{ik} = -a_{ki} = x_i y_k - x_k y_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix}. \tag{1.4.13}$$

Для нее закон записывается через неокаймленный определитель

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.14}$$

4. Наконец, к *четвертому классу* УСВО ранга 5 отнесем три решения с парными отношениями вида:

$$a_{ik}^{(8)} = \ln{(x_i - x_k)^2} + \frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k}; \tag{1.4.15}$$

$$a_{ik}^{(9)} = \ln\left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \arctan\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k; \tag{1.4.16}$$

$$a_{ik}^{(10)} = \ln\left[(x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2\right] + \gamma arc\tanh\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k, \tag{1.4.17}$$

где γ — параметр. Они соответствуют неким 3-мерным "экзотическим" геометриям. Для них законы не записываются в явном виде.

Таким образом, имеется десять УСВО (3-мерных геометрий) ранга 5, девять УСВО (2-мерных геометрий) ранга 4 и четыре УСВО (1-мерных геометрий) ранга 3. Для УСВО более высоких рангов полные наборы всех возможных решений пока не установлены. На сегодняшний день ясен вид естественных обобщений указанных геометрий на большие размерности, но не доказана теорема отсутствия иных геометрий.

1.5 Системы отсчета и координатные системы в пространстве Минковского

Особо остановимся на характерных чертах классического 4-мерного пространства-времени (пространства Минковского) в реляционном подходе. Как уже отмечалось, в рамках систем отношений первичный характер имеют отношения между элементами, тогда как параметры элементов (координаты) имеют вторичный характер, — их можно выразить через отношения к набору так или иначе выбранных эталонных элементов (базиса). Напомним, что еще Э.Мах — последовательный сторонник реляционного подхода к пространству и времени — в своей книге "Познание и заблуждение"[38] поднимал вопрос о формулировке геометрии, исходя из понятий расстояния, минуя координаты. При этом он упоминал еще более ранние работы: "Интересную попытку обосновать евклидову и неевклидову геометрию на одном понятии расстояния мы находим у Де Тилли (1880 г.)"[38, с.380]. Реализацию такой программы в рамках 3-мерной евклидовой геометрии можно найти в работах Л.М.Блюменталя [4], а также Ю.И.Кулакова [30-31].

1. Рассмотрим задачу задания координат через интервалы между событиями в 4-мерном прространстве-времени, описываемом УСВО ранга 6. Согласно изложенному в предыдущих разделах закон этой УСВО записывается через определитель Кэли-Менгера для 6 точек- событий i, k, a, b, c, d:

$$D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2_{ik} & s^2_{ia} & s^2_{ib} & s^2_{ic} & s^2_{id} \\ 1 & s^2_{ki} & 0 & s^2_{ka} & s^2_{kb} & s^2_{kc} & s^2_{kd} \\ 1 & s^2_{ai} & s^2_{ak} & 0 & s^2_{ab} & s^2_{ac} & s^2_{ad} \\ 1 & s^2_{bi} & s^2_{bk} & s^2_{ba} & 0 & s^2_{bc} & s^2_{bd} \\ 1 & s^2_{ci} & s^2_{ck} & s^2_{ca} & s^2_{cb} & 0 & s^2_{cd} \\ 1 & s^2_{di} & s^2_{dk} & s^2_{da} & s^2_{db} & s^2_{dc} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.5.1)$$

где парные отношения имеют смысл квадратов интервалов между парами точек-событий. Они представляются через параметры (координаты) точек следующим образом

$$s^2_{ik} = (x^0_i - x^0_k)^2 - \sum_{l=1}^{3}(x^l_i - x^l_k)^2 \equiv \tau^2_{ik} - l^2_{ik}. \qquad (1.5.2)$$

Здесь x^μ_i, x^μ_k — координаты точек-событий. Закон (1.5.1) выполняется тождественно при подстановке в него (1.5.2).

2. Отметим, что закон (1.5.1) не позволяет однозначно фиксировать сигнатуру 4-мерного многообразия. Допускаются сигнатуры: $(++++)$, $(+---)$, $(++--)$ и эквивалентные сигнатуры с заменой знаков плюс на минусы и наоборот. Следовательно, необходимы дополнительные аксиомы, выделяющие сигнатуру $(+$

$---$). Эти аксиомы образуют уже упоминавшийся блок аксиом частичной упорядоченности, которые часто задают даже раньше метрических аксиом. Последние согласовываются с упорядоченностью событий. Временно-подобные события имеют $s^2 > 0$, а пространственно-подобные имеют $s^2 < 0$ (см. рис.1.4).

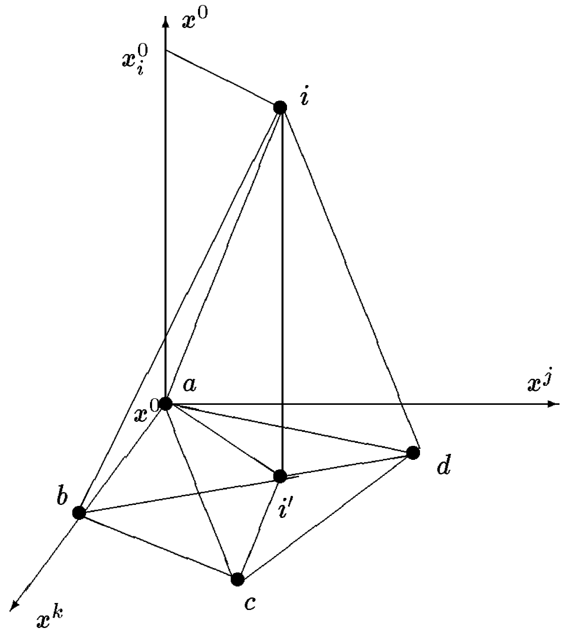


Рис. 1.4: Определение четырех координат произвольного события i через интервалы

С помощью определителей Кэли-Менгера и разделения точек-событий на пространственно- и временно-подобные можно выделить 3-мерные пространственно-подобные сечения и тем самым определить *системы отсчета* наблюдателей [11]. В частности, пусть с наблюдателем произошло событие a. Чтобы задать пространственное сечение, содержащее a, достаточно выбрать еще три (эталонные) пространственно-подобные к a точки-события: b, c, d, для которых $D_{abcd} \neq 0$. Четыре события a, b, c, d можно объявить одновременными. Задаваемому сечению принадлежат все пространственно-подобные к выделенным четырем точки-события p, для которых $D_{abcdp} = 0$. Таким условием выделяется 3-мерная евклидова геометрия, определенная ранее формулами (1.4.7) и (1.4.9).

3. Начнем решение поставленной задачи с определения временно- подобной координаты произвольной точки i через ее отношения (интервала) к четырем эталонным точкам. Поскольку эталонные четыре точки одновременны по определению, т.е. $x_a^0 = x_b^0 = x_c^0 = x_D^0 \equiv x^0$, то для 6 квадратов интервалов между ними имеем

$$\begin{aligned} &s_{ab}^2 = -l_{ab}^2; \quad s_{ac}^2 = -l_{ac}^2; \quad s_{ad}^2 = -l_{ad}^2; \\ &s_{bc}^2 = -l_{bc}^2; \quad s_{bd}^2 = -l_{bd}^2; \quad s_{cd}^2 = -l_{cd}^2, \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

а квадраты интервалов между событием i и эталонными точками имеют вид

$$\begin{aligned} &s_{ia}^2 = \tau^2 - l_{ia}^2; \quad s_{ib}^2 = \tau^2 - l_{ib}^2; \\ &s_{ic}^2 = \tau^2 - l_{ic}^2; \quad s_{id}^2 = \tau^2 - l_{id}^2, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

где $\tau = x_i^0 - x^0$. Пусть i' – проекция точки i на 3-мерное пространственное сечение, тогда для пяти точек i', a, b, c, d можно записать закон УСВО ранга 5:

$$D_{i'abcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau^2 - s_{ia}^2 & \tau^2 - s_{ib}^2 & \tau^2 - s_{ic}^2 & \tau^2 - s_{id}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{ai}^2 & 0 & l_{ab}^2 & l_{ac}^2 & l_{ad}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{bi}^2 & l_{ba}^2 & 0 & l_{bc}^2 & l_{bd}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{ci}^2 & l_{ca}^2 & l_{cb}^2 & 0 & l_{cd}^2 \\ 1 & \tau^2 - s_{di}^2 & l_{da}^2 & l_{db}^2 & l_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5.5}$$

Это выражение можно расссматривать как уравнение относительно неизвестной τ^2. Расписывая определитель, получаем уравнение

$$D_{iabcd} + 2\tau^2 D_{abcd} = 0, \tag{1.5.6}$$

где D_{iabcd} – определитель Кэли-Менгера, составленный из квадратов интервалов между пятью точками i, a, b, c, d, а D_{abcd} – определитель Кэли-Менгера для четырех эталонных точек. Решением уравнения является

$$\tau^2 = -\frac{D_{iabcd}}{2D_{abcd}} \to x_i^0 = x^0 + \sqrt{\frac{-D_{iabcd}}{2D_{abcd}}}. \tag{1.5.7}$$

Используя (1.5.7), из (1.5.4) легко найти l_{ia}^2, l_{ib}^2, l_{ic}^2, l_{id}^2, т.е. квадраты расстояний от проекции i' до четырех эталонных точек.

4. Для нахождения трех пространственных координат x_i^1, x_i^2, x_i^3 следует конкретизировать выбор используемой *координатной системы*. Выберем ее так, чтобы точка-событие a лежала в начале координат, ось x^1 направим вдоль вектора $\vec{ab}$, и направим ось x^2 так, чтобы точка c лежала в плоскости $(x^1 x^2)$. Тогда задача нахождения пространственных координат точки i' в 3-мерном пространстве по ее расстояниям до эталонных точек не представляет труда. Чтобы записать ответ в наиболее компактном виде, введем *обобщенный определитель Кэли-Менгера*, который записывается для двух подмножеств элементов i, k, m, $\cdots$ и a, b, c, $\cdots$, содержащих одинаковые количества элементов, которые могут совпадать, как при записи обычного определителя Кэли-Менгера, а могут и различаться. В самом общем случае такие определители имеют вид

$$D_{ikm\cdots;abc\cdots} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & a_{ia} & a_{ib} & a_{ic} & \cdots \\ 1 & a_{ka} & a_{kb} & a_{kc} & \cdots \\ 1 & a_{ma} & a_{mb} & a_{mc} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \qquad (1.5.8)$$

Через обобщенный определитель Кэли-Менгера координаты точки i' записываются следующим образом [30]

$$x_i^1 = \frac{D_{ai';ab}}{\sqrt{-2D_a D_{ab}}}; \qquad x_i^2 = -\frac{D_{abi';abc}}{\sqrt{-2D_{ab} D_{abc}}};$$

$$x_i^3 = \frac{D_{abci';abcd}}{\sqrt{-2D_{abc} D_{abcd}}}, \qquad (1.5.9)$$

где в первой формуле использовано обозначение определителя

$$D_a \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

для придания симметрии всей совокупности формул.

5. Отметим, что через обобщенные определители Кэли-Менгера можно записать ряд других геометрических выражений, как то: углы между двумя лучами, исходящими из одной точки, значения двугранных и телесных углов и другие. Можно сказать, что всю евклидову геометрию можно переписать через понятия расстояний.

Приведем еще формулу для определителя Кэли-Менгера порядка, на единицу меньшего того, через который записывается закон системы отношений (геометрии). Например, в 3-мерном евклидовом пространстве определитель Кэли-Менгера на четырех точках с точностью до коэффициента определяет квадрат 3-мерного объема и записывается в форме

$$D_{abcd} = 288V^2_{abcd} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^1_a & x^1_b & x^1_c & x^1_d \\ x^2_a & x^2_b & x^2_c & x^2_d \\ x^3_a & x^3_b & x^3_c & x^3_d \end{vmatrix}^2, \tag{1.5.10}$$

где x^k_a, x^k_b, x^k_c, x^k_d — координаты четырех выбранных точек ($k = 1, 2, 3$).

6. Изменяя в (1.5.9) набор эталонных элементов a, b, c, d в 3-мерном пространстве, получим новые значения декартовых координат точки i, а также значения координат другой произвольной точки k, однако, очевидно, квадрат расстояния $l^2_{ik} = a_{ik}$ при этом не изменится. Все возможные изменения эталонных элементов в рамках выделенного пространственного сечения генерируют группу координатных преобразований в 3-мерном пространстве, оставляющую инвариантной квадратичную форму $l^2_{ik} = Const$. Эта 6-параметрическая группа распадается на две подгруппы:

а) 3-параметрическую группу вращений $O(3)$

$$x'^k = L^k_{\cdot i} x^i, \tag{1.5.11}$$

где $i, k = 1, 2, 3$; $L^k_{\cdot i}$ — девять вещественных коэффициентов, удовлетворяющих 6 условиям:

$$L_{ki} L^k_{\cdot j} = \delta_{ij}; \tag{1.5.12}$$

б) 3-параметрическую группу трансляций

$$x'^k = x^k + b^k, \tag{1.5.13}$$

где b^k — три произвольных вещественных параметра.

Более общие изменения четырех эталонных элементов a, b, c, d, выводящие за пределы заданного в п.2 3-мерного пространственного сечения, генерируют 10-параметрическую группу Пуанкаре. Она разбивается на 6-параметрическую группу Лоренца

$$x'^\mu = L^\mu_{\cdot\nu} x^\nu, \tag{1.5.14}$$

где индексы μ и ν пробегают значения:0, 1, 2, 3, а 16 параметров $L^\mu_{\cdot\nu}$ связаны 10 условиями типа (1.5.12), и на 4-параметрическую группу трансляций типа (1.5.13).

1.6 Переход от бинарных систем вещественных отношений к унарным геометриям

Рассмотренные выше УСВО (геометрии) можно понимать как вторичные, образованные из более первичных БСВО путем некой "сшивки" элементов из двух множеств в объекты (элементы) одного нового множества. Об этом, в частности, свидетельствует схожесть видов парных отношений и законов бинарных и унарных систем отношений. В обоих случаях законы записываются через неокаймленные либо через окаймленные определители. Кроме того, обращает на себя внимание значительно большая простота теории БСВО по сравнению с теорией УСВО. Для БСВО найдены сразу все возможные решения, тогда как для УСВО их следут находить для каждого ранга в отдельности со значительно возрастающими с каждом рангом трудностями. Это говорит об элементарности именно бинарных систем отношений.

Продемонстрируем, как можно получить все приведенные выше законы и парные отношения унарных геометрий, кроме экзотических, из законов и парных отношений (1.3.1) — (1.3.4) БСВО. Это будет достигаться *сшивкой пар специально подобранных элементов* из двух разных множеств в элементы одного нового множества и определением между новыми элементами парных отношений, которые должны выражаться через парные отношения исходной БСВО. При этом законы БСВО ранга (r, r) непосредственно перейдут в соответствующие законы УСВО ранга r. Поскольку элементы БСВО ранга (r, r) характеризуются $r-1$ параметром, а элементы УСВО ранга r характеризуются $r-2$ параметрами, то для данного перехода необходимо *дополнительное условие* между исходными параметрами, сокращающее число независимых параметров.

1. Начнем с получения УСВО, отнесенных в предыдущем разделе к *первому классу*. Из закона (1.4.6) видно, что такие УСВО следует получать из невырожденных БСВО ранга (r, r). Будем сшивать в один новый элемент такие элементы БСВО, параметры которых связаны соотношениями:

$$i^l = \pm\alpha^l \equiv x_i^l; \quad k^l = \pm\beta^l \equiv x_k^l; \quad j^l = \pm\gamma^l \equiv x_j^l; \quad \cdots. \qquad (1.6.1)$$

В дальнейшем новые элементы УСВО будем обозначать латинскими индексами элементов БСВО из множества $\mathcal{M}$. Определим парные отношения a_{ik} между новыми элементами следующим образом

$$a_{ik} = a_{ki} = u_{i\beta} = u_{k\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \beta^l = \sum_{l=1}^{r-1} \varepsilon_l x_i^l x_k^l, \qquad (1.6.2)$$

где $\varepsilon = \pm 1$. В качестве дополнительного условия, понижающего число независимых параметров, потребуем, чтобы все внутренние отношения для сшитых пар были одинаковыми. Без ущерба для общности можно положить

$$(u_{i\alpha}) = (u_{k\beta}) = \cdots = 1 \rightarrow a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1. \qquad (1.6.3)$$

Здесь в скобки заключены парные отношения сшитых элементов БСВО. Пусть параметры с номером $r-1$ входят в (1.6.2) со знаком плюс. Выразим их из (1.6.3) через оставшиеся $r-2$ уже независимые параметры. В итоге получаем условия сшивки в виде

$$\begin{aligned} &i^l = \pm\alpha^l \equiv x_i^l; \quad k^l = \pm\beta^l \equiv x_k^l; \cdots \quad l = 1, 2, \cdots, r-2; \\ &i^{r-1} = \alpha^{r-1} = \sqrt{1 \mp (x_i^1)^2 \mp \cdots \mp (x_i^{r-2})^2}; \\ &k^{r-1} = \beta^{r-1} = \sqrt{1 \mp (x_k^1)^2 \mp \cdots \mp (x_k^{r-2})^2}; \cdots . \end{aligned} \qquad (1.6.4)$$

При этом парные отношения между разными новыми элементами принимают вид

$$\begin{aligned} &a_{ik} = \pm x_i^1 x_k^1 \pm x_i^2 x_k^2 \pm \cdots + \\ &+\sqrt{\left(1 \mp (x_i^1)^2 \mp \cdots \mp (x_i^{r-2})^2\right)\left(1 \mp (x_k^1)^2 \mp \cdots \mp (x_k^{r-2})^2\right)}, \end{aligned} \qquad (1.6.5)$$

соответствующий формулам (1.4.2) — (1.4.5). Очевидно, что закон БСВО (1.2.3) тогда переходит в закон вида (1.4.6).

2. Формулами (1.4.13) — (1.4.14) охарактеризован специфический вид УСВО ранга 4, соответствующий *2-мерной симплектической геометрии.* Этот случай получается из невырожденной БСВО ранга (4,4) с другим дополнительным условием на внутренние отношения для сшитых элементов:

$$(u_{i\alpha}) = (u_{k\beta}) = \cdots = 0 \rightarrow a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 0. \qquad (1.6.6)$$

При этом пара координат x^1 и x^2 УСВО следующим образом выражается через пары сшитых элементов БСВО:

$$\begin{array}{lll} i^1 = \alpha^1 = x_i^1; & k^1 = \beta^1 = x_k^1; & \dots \\ i^2 = -\alpha^2 = x_i^2; & k^2 = -\beta^2 = x_k^2; & \dots \\ i^3 = x_i^1 + x_i^2; \quad \alpha^3 = x_i^2 - x_i^1; & k^3 = x_k^1 + x_k^2; \quad \beta^3 = x_k^2 - x_k^1; & \dots . \end{array} \tag{1.6.7}$$

Парное отношение между двумя разными элементами УСВО определяется в виде

$$a_{ik} = u_{i\beta} = x_i^1 x_k^2 - x_i^2 x_k^2 = -u_{k\alpha} = -a_{ki}, \tag{1.6.8}$$

т.е. является антисимметричным и совпадает с (1.4.13). Очевидно, что закон (1.2.3) тогда переходит в закон (1.4.14).

3. УСВО, отнесенные в разделе 1.4 ко *второму классу*, получаются из вырожденных БСВО ранга $(r, r; a)$. В этом случае следует выбрать дополнительное условие в виде равенства нулю внутренних парных отношений:

$$(a_{i\alpha}) = (a_{k\beta}) = \dots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \dots = 0, \tag{1.6.9}$$

причем следует положить, что это обусловлено специальным видом выделенных (аддитивных) параметров. Условия сшивки записываются следующим образом:

$$i^l = \mp\alpha^l = \sqrt{2}x_i^l; \qquad k^l = \mp\beta^l = \sqrt{2}x_k^l;$$

$$i_0 = \alpha_0 = \pm(x_i^1)^2 \dots \pm (x_i^{r-2})^2; \quad k_0 = \beta_0 = \pm(x_k^1)^2 \dots \pm (x_k^{r-2})^2. \tag{1.6.10}$$

В этом случае парные отношения между сшитыми парами определяются в виде

$$a_{ik} = a_{i\beta} = \sum_{l=1}^{r-2} i^l \beta^l + i_0 + \beta_0 = \sum_{l=1}^{r-2} g_{ll} \left(x_i^l - x_k^l\right)^2 = l_{ik}^2, \tag{1.6.11}$$

где $g_{ll} = \pm 1$ — диагональные элементы метрического тензора евклидова или псевдоевклидова пространства с соответствующей сигнатурой. Очевидно, что закон БСВО ранга $(r, r; a)$ (1.2.3) непосредственно переходит в закон вида (1.4.9).

4. УСВО, отнесенные к *третьему классу*, получаются из вырожденных БСВО нечетных рангов при дополнительном условии

$$(a_{i\alpha}) = (a_{k\beta}) = \dots = 0 \to a_{ii} = a_{kk} = \dots = 0. \tag{1.6.12}$$

Для случая БСВО ранга (5,5;a) условия сшивки (1.6.7) обобщаются до выражений:

$$\begin{array}{cccc} i^1=\alpha^1=x_i; & & k^1=\beta^1=x_k; & \cdots \\ i^2=-\alpha^2=y_i; & & k^2=-\beta^2=y_k; & \cdots \\ i^3=x_i+y_i; & \alpha^3=y_i-x_i; \quad k^3=x_k+y_k; & \beta^3=y_k-x_k; & \cdots \\ i_0=z_i; & \alpha_0=-z_i; \quad k_0=z_k; & \beta_0=-z_k; & \cdots. \end{array} \tag{1.6.13}$$

Парное отношение между двумя сшитыми парами определяется в виде

$$a_{ik}=a_{i\beta}=x_iy_k-x_ky_i+z_i-z_k=-a_{ki}. \tag{1.6.14}$$

Закон БСВО (1.2.1) тогда непосредственно переходит в (1.4.9).

Переход от (1.6.12) к одномерной симплектической геометрии (на ориентированной прямой), описываемой формулами (1.4.11) и (1.4.12), очевиден.

1.7 Выводы и замечания по теории систем вещественных отношений

Из изложенных в этой главе основ теории систем *вещественных* отношений можно сделать следующие три основных вывода. Во-первых, (унарную) геометрию классического пространства-времени можно переформулировать в реляционном духе, использовав для этого теорию систем вещественных отношений. Таким образом осуществляется задача, сформулированная еще Махом: изложить геометрию, исходя из понятий расстояний (точнее сказать, — из понятий парных отношений). Во-вторых, кроме теории унарных отношений имеется теория бинарных систем отношений. Поскольку эта теория строится по тем же правилам, что и теория унарных геометрий, то правомерно называть бинарные системы отношений *бинарными геометриями*. В-третьих, унарные геометрии можно получить из бинарных геометрий, следовательно общепринятые геометрии можно понимать как вторичные, производные конструкции, получаемые из бинарных систем отношений.

Эти выводы чрезвычайно важны для достижения целей, поставленных во введении, однако теории систем именно *вещественных* отношений явно недостаточно для осуществления намеченной там программы. Исходя из этого, сделаем ряд критических замечаний по изложенной в этой главе теории систем (структур) с вещественными отношениями. В этой теории можно усмотреть лишь намек на осуществление первой и четвертой из перечисленных задач. Из изложенного пока не видно какой-либо связи ни с квантовой теорией, ни с физикой элементарных частиц. Пока не усматривается прогресс в обосновании свойств классического пространства-времени, таких, как его размерность, сигнатура, вид метрики. Все эти понятия в теории систем вещественных отношений по-прежнему необходимо постулировать. Различие состоит лишь в смене некоторых понятий, например, размерность заменяется на ранг.

Особенно хотелось бы выделить вопрос о характере метрических отношений в классической (унарной) геометрии. Квадратичный (парный) характер метрических отношений является одним из наиболее важных постулатов геометрии, причем, этот постулат обычно никак не связан с ее размерностью. Он имеет место как в классической евклидовой геометрии, так и в многомерных теориях Калуцы-Клейна. Но является ли постулат парности (квадратичности) метрических отношений незыблемым? Некоторый свет на этот вопрос позволяет пролить уже теория систем вещественных отношений. Для бинарных систем отношений парность отношений между элементами двух различных множеств заложена в самую основу теории [4]. Однако для унарных систем отношений этот вопрос оказался сложнее. Уже в рамках УСВО можно поставить задачу о нахождении закона и построения теории тройных отношений между элементами одного множества. Частный случай рассмотрен М.М.Михайличенко (см. Приложение к [27]). Этот вопрос можно связать с вторичным, производным характером унарных систем отношений. Ответ на него зависит от способа перехода от парных бинарных систем отношений к унарным системам отношений, которые могут быть и не парными... В этой связи следует упомянуть работы В.Я.Скоробогатько по так называемой *многоточечной геометрии* [56]. Им получен ряд интересных математических результатов и поставлен вопрос о физических приложениях такой теории. От развиваемой здесь теории естественно ожидать ответы и на эти вопросы.

Следует отметить, что в теории физических структур вещественность отношений поставлена во главу угла и по-существу является одним из основополагающих принципов миропонимания. Ю.И.Кулаков полагал, что эта теория имеет феноменологический характер, т.е. отношения должны быть наблюдаемыми, а, как известно, в физике наблюдаемые величины описываются

[4] Из общих соображений можно было бы ожидать существование теории отношений на трех множествах элементов. В ней исходными были бы тройные отношения, однако в работах группы Ю.И.Кулакова было показано, что не существует содержательной теории, построенной на трех и большем числе множеств, по крайней мере для случая вещественных отношений.

вещественными числами. Однако, на наш взгляд, эта позиция уязвима. Ничто не мешает сузить принцип вещественности, сохранив его лишь для наблюдаемых унарных геометрий, тогда как для более первичных бинарных систем отношений, из которых они выводятся, можно допустить возможность комплексных отношений.

Глава 2

Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) и 2-компонентные спиноры

2.1 Системы отношений в бинарной геометрофизике

Приступая к систематическому изложению бинарной геометрофизики, сформулируем, на какие системы отношений она опирается.

Во-первых, в основу бинарной геометрофизики положим *бинарные системы отношений.* Их теория наиболее проста. Они представляют собой наиболее элементарные системы отношений, из которых можно получить унарные системы, но не наоборот. Из изложенного в предыдущей главе очевидно, что теория бинарных систем отношений не опирается на классические представления.

Во-вторых, для построения бинарной геометрофизики, по крайней мере на первых порах, ограничимся случаем *симметричных*, т.е. изображенных на главной диагонали на рисунке 1.3 бинарных систем отношений (рангов (r, r)). Это отражает то, что в бинарной геометрофизике два множества элементов (начальные и конечные состояния) выступают равноправно, т.е. симметричным образом. В некотором смысле это соответствует однородности времени и его обратимости. В принципе, возможны обобщения теории на несимметричные системы отношений, однако в этой книге подобные обобщения не рассматриваются.

В-третьих, в основу реляционной теории пространства-времени следует положить бинарные системы отношений *наименьших рангов*: $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $\ldots$. Здесь проявляется некий принцип простоты в устройстве природы. Оказывается, наименьшие ранги в конце концов ответственны за размерность и сигнатуру классического пространства-времени.

В-четвертых, бинарную геометрофизику будем строить на базе *иерархии бинарных систем отношений* низших рангов. Оказывается, каждая из систем отношений низших рангов играет принципиально важную и неповторимую роль в построении фундамента теоретической физики. Как будет показано ниже, системы отношений рангов $(4,4)$ и выше, с одной стороны, позволяют описывать взаимодействия, а, с другой стороны, перебрасывают мостик к многомерным теориям Калуцы-Клейна. Другой аспект иерархичности бинарной геометрофизики состоит в том, что интерпретация и осознание роли каждой из бинарных систем отношений возможны лишь при рассмотрении ее внутри цельной конструкции из других отношений.

В-пятых, для построения бинарной геометрофизики обобщим рассмотренные в предыдущей главе БСВО на случай бинарных систем *комплексных* отношений (БСКО), когда парные отношения и параметры элементов описываются комплексными числами. Легко убедиться, что в комплексифицированной теории законы и парные отношения имеют тот же самый вид. Однако теперь, строго говоря, следовало бы заново доказать теоремы единственности для используемых законов. Эта математическая задача здесь не рассматривается.

Именно переход к системам комплексных отношений позволяет надеяться на реализацию второй и третьей из сформулированных во введении свойств реляционной теории пространства-времени. В связи с этим следует упомянуть близкую по духу твисторную программу Р.Пенроуза [46], где также во главу угла ставится комплексификация исходных понятий [1].

В-шестых, особо следует сказать о переходе от комплексных параметров и отношений элементов к физически интерпретируемым (наблюдаемым) понятиям, которые, как известно, описываются вещественными числами. Близкие по смыслу проблемы имеются как в общепринятой квантовой теории, так и в общей теории относительности. В квантовой теории переход от комплексных волновых функций к наблюдаемым величинам (импульсам, координатам и т.д.) осуществляется с помощью эрмито-

[1] Отметим, что в настоящее время имеются программы построения физической теории на основе кватернионов. Например, таковой является алгебродинамика, развиваемая В.В.Кассандровым [25], исходя из другой системы принципов.

вых операторов, имеющих вещественные собственные значения. В общей теории относительности переход от тензорных величин, зависящих от произвола в выборе координатной системы, к наблюдаемым величинам производится посредством проектирования на направления используемых систем отсчета. (В ОТО истинно наблюдаемыми являются лишь скаляры.) В бинарной геометрофизике аналогом указанных процедур является *переход от БСКО к УСВО* путем соответствующей сшивки элементов двух множеств в объекты (элементы) одного сорта и определения между ними вещественных отношений. Таким образом в бинарной геометрофизике появляются и УСВО, однако они имеют вторичный характер.

Для случая БСКО по-новому решается вопрос о получении УСВО. Напомним, что из БСВО ранга (r, r) получались УСВО ранга r. Больший ранг, за некоторыми исключениями, получить было нельзя из-за вещественности параметров и дополнительных условий на них типа (1.6.1). В случае же комплексных отношений получается вдвое больше вещественных параметров. Так, в случае, когда в один новый элемент сшиваются по одному элементу из двух множеств исходной БСКО ранга (r, r), новый элемент унарной системы будет характеризоваться $2(r-1)$ вещественными параметрами. (Например, для ранга $(3, 3)$ получаем четыре вещественных параметра.) Учтем, что в законе БСКО ранга (r, r) фигурируют $2r$ элементов разного сорта. После сшивки их с соответствующими элементами другого сорта, в общем случае не входящими в записанный закон, уже можно говорить, что этим законом связываются $2r$ элементов УСВО, т.е. имеется унарный закон ранга $2r$. С этим числом согласуется число вещественных параметров унарной геометрии размерности n:

$$n = r - 2 \rightarrow 2(r-1) = 2r - 2. \tag{2.1.1}$$

Следовательно, в самом общем случае можно ожидать, что из БСКО ранга (r, r) можно получить $2r-2$–мерную унарную геометрию. Так, 4-мерную геометрию можно ожидать получить из БСКО ранга $(3, 3)$. Однако, в большинстве случаев из-за дополнительных условий ранг получаемой унарной геометрии оказывается на единицу ниже.

Проиллюстрируем изложенное с помощью блок-схемы (см. рис. 2.1), уточняющей верхнюю правую часть блок-схемы на рисунке 0.3. На этом рисунке обозначены четыре уровня блоков. Верхний уровень соответствует общей теории БСКО симметричных рангов (r, r). Будем полагать, что ее основные черты уже известны. Второй сверху уровень соответствует математическим теориям БСКО низших рангов. Третий уровень составляют

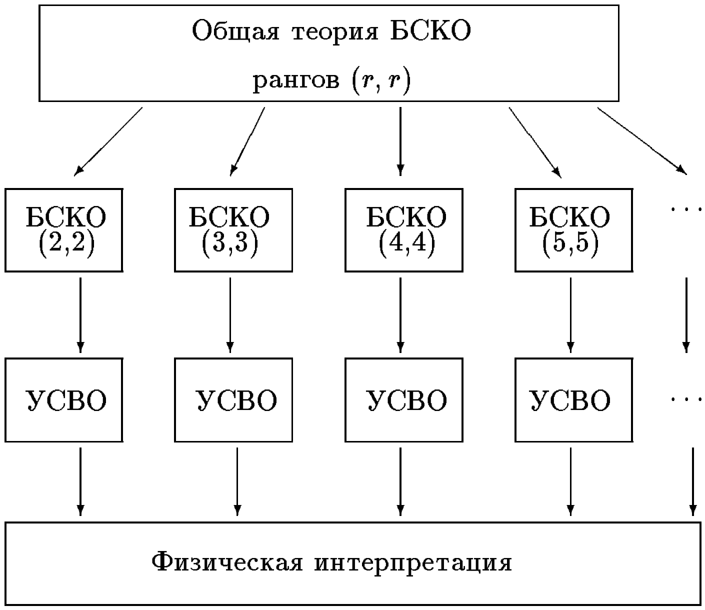


Рис. 2.1: Системы отношений в бинарной геометрофизике

переходы к УСВО, которые можно получить из БСКО соответствующих рангов. Везде будет подразумеваться, что из работ новосибирской группы известно, какие, в принципе, возможны УСВО. Только после этого появляется возможность говорить о физической интерпретации (четвертый, нижний уровень).

Приступим к построению бинарной геометрофизики с анализа БСКО ранга (3,3). Как будет показано в этой и следующей главах, именно она играет ключевую роль в бинарной геометрофизике. Роль другой БСКО самого низшего ранга (2,2) также чрезвычайно важна в построении фундамента физического мироздания, однако ее роль раскрывается по-настоящему лишь при комплексном рассмотрении в совокупности с БСКО рангов (3,3) и (4,4). По этим причинам теория БСКО ранга (2,2) будет изложена после обсуждения БСКО ранга (3,3) (в четвертой главе). Последующие главы посвящены систематическому изложению теории БСКО ранга (4,4) и более высоких рангов.

2.2 Закон и основные понятия бинарной системы комплексных отношений ранга (3,3)

1. Напомним, что согласно общей формуле (1.2.1) закон БСКО ранга (3,3) записывается в виде равенства нулю определителя, построенного из 9 парных отношений между двумя тройками произвольных элементов i, m, n и α, μ, ν из двух разных множеств

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} \\ u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} \\ u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.2.1)$$

где парные отношения имеют вид

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2. \qquad (2.2.2)$$

Здесь i^1 и i^2 – два комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а α^1 и α^2 — комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Это парное отношение можно понимать как скалярное произведение двух 2-мерных векторов из разных пространств.

2. Как уже отмечалось, параметры элементов можно выразить через их отношения к некой системе эталонных (базисных) элементов. В данном случае ранга (3,3) базис системы отношений задается двумя элементами множества $\mathcal{M}$ и двумя элементами множества $\mathcal{N}$. Они выполняют роль базиса как при задании координатной системы в геометрии или как роль базисных тел, определяющих систему отсчета в теории относительности. Пусть эталонными являются элементы m, n, μ, ν, фигурирующие в (2.2.1). Обозначим волной сверху отношения между эталонными элементами: $\tilde{u}_{m\mu}$, $\tilde{u}_{m\nu}$, $\tilde{u}_{n\mu}$, $\tilde{u}_{n\nu}$. Отношение $u_{i\alpha}$ между произвольными неэталонными элементами i и α (см. рис.2.2) выразим с помощью закона (2.2.1) через парные отношения элементов i и α к эталонным ($u_{i\mu}$, $u_{i\nu}$, $u_{m\alpha}$, $u_{n\alpha}$) и парные отношения между эталонными элементами:

$$u_{i\alpha} = \frac{1}{\Delta}\left(u_{i\mu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\nu} + u_{i\nu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\mu} - u_{i\mu}u_{n\alpha}\tilde{u}_{m\nu} - u_{i\nu}u_{m\alpha}\tilde{u}_{n\mu}\right), \qquad (2.2.3)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} \\ \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} \end{vmatrix} = \tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu} - \tilde{u}_{n\mu}\tilde{u}_{m\nu} \equiv \begin{bmatrix} \mu\nu \\ mn \end{bmatrix} \qquad (2.2.4)$$

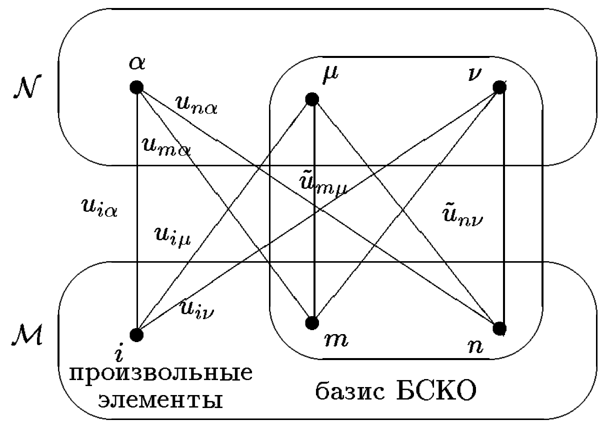


Рис. 2.2: Задание параметров пары элементов i и α через их отношения к эталонным элементам

— важное понятие в теории БСКО ранга (3.3), определяемое для двух пар разнородных элементов. Будем его называть *фундаментальным* 2×2*-отношением.* В данном случае это отношение характеризует систему эталонных элементов.

3. Выделим частный случай эталонных элементов, когда парные отношения между ними удовлетворяют условиям:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}^*_{m\mu}; \quad \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}^*_{n\nu}; \quad \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}^*_{m\nu} \ . \tag{2.2.5}$$

Такая система эталонных элементов характеризуется четырьмя вещественными числами. В общем случае отношения, удовлетворяющие (2.2.5), можно представить в виде

$$\tilde{u}_{m\mu} = u_0 + u_3; \ \tilde{u}_{n\nu} = u_0 - u_3; \ \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}^*_{m\nu} = u_1 + iu_2, \tag{2.2.6}$$

где u_0, u_1, u_2, u_3 –вещественные числа; тогда фундаментальное 2x2-отношение (2.2.4) является вещественным и записывается в форме

$$\Delta = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \tag{2.2.7}$$

соответствующей квадратичной форме с сигнатурой пространства Минковского.

4. Еще более частный случай представляет базис из двух пар элементов, удовлетворяющих условиям:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}_{n\nu} = u_0; \ \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}_{m\nu} = 0. \tag{2.2.8}$$

В этом случае

$$\Delta = u_0^2 > 0, \tag{2.2.9}$$

и парное отношение (2.2.3) между двумя произвольными неэталонными элементами в данном базисе принимает наиболее простой вид

$$u_{i\alpha} = \frac{\tilde{u}_{m\mu}}{\Delta}(u_{i\mu}u_{m\alpha} + u_{i\nu}u_{n\alpha}) \equiv i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2, \tag{2.2.10}$$

где параметры элементов представляются через отношения к базисным элементам:

$$\begin{aligned} i^1 &= \pm\tfrac{u_{i\mu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^2 = \pm\tfrac{u_{i\nu}}{\sqrt{u_0}}; \\ \alpha^1 &= \pm\tfrac{u_{m\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^2 = \pm\tfrac{u_{n\alpha}}{\sqrt{u_0}}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Назовем БСКО ранга (3,3) *собственной выделенной четверки элементов*, если отношения между ними удовлетворяют условиям (2.2.8), и, обратно, четверку элементов со свойством (2.2.8) назовем *собственным базисом* данной БСКО ранга (3,3).

5. Важное место в теории БСКО ранга (3,3) занимает переход к унарным системам вещественных отношений. От БСКО(3,3) можно перейти ко всем (по крайней мере к неэкзотическим) видам унарных геометрий, перечисленным в главе 1; причем вследствие того, что парные отношения комплексные, размерность получающихся унарных геометрий оказывается больше, чем в теории БСВО того же ранга (3,3). При переходе к унарным геометриям опять следует определить условие сшивки элементов из двух множеств. Определим сшивку через операцию комплексного сопряжения параметров:

$$i^s = \alpha^{*s}; \; k^s = \beta^{*s}; \; j^s = \gamma^{*s}; \cdots. \tag{2.2.12}$$

Такие пары элементов будем называть *сопряженными друг другу*. Эти условия обобщают использованные в главе 1 условия сшивки (1.6.1). Очевидно, что условия типа (2.2.5) выполняются для двух пар сопряженных элементов.

6. Продемонстрируем переход от БСКО ранга (3,3) к унарной *римановой геометрии* (к УСВО ранга 5), который оказывается наиболее простым. Это делается для специальных пар сопряженных элементов из двух разных множеств, которые становятся элементами новой УСВО.

Пусть i, α и k, β – две пары сопряженных согласно (2.2.12) элементов. Определим между ними парное отношение a_{ik} (новые элементы будем обозначать латинскими индексами соответствующих элементов из $\mathcal{M}$) через симметричную комбинацию перекрестных отношений в БСКО ранга (3,3) [2]:

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{2}\left(u_{i\beta} + u_{k\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(i^1\beta^1 + i^2\beta^2 + k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2\right). \tag{2.2.13}$$

Очевидно, что эти парные отношения вещественны. Зададим также внутренние отношения a_{ii}, a_{kk}, ... для каждой из сшитых пар в виде

$$a_{ii} = u_{i\alpha}; \quad a_{kk} = u_{k\beta}; \quad \ldots . \tag{2.2.14}$$

Перейдем от комплексных параметров к вещественным согласно формулам:

$$\begin{array}{ll} i^1 = z_i + iv_i; & i^2 = u_i + iw_i; \\ k^1 = z_k + iv_k; & k^2 = u_k + iw_k; \\ \quad\ldots & \quad\ldots, \end{array} \tag{2.2.15}$$

тогда перекрестные и внутренние парные отношения (2.2.13) и (2.2.14) принимают вид

$$a_{ik} = z_i z_k + v_i v_k + u_i u_k + w_i w_k; \tag{2.2.16}$$

$$a_{ii} = z_i^2 + v_i^2 + u_i^2 + w_i^2;\ a_{kk} = z_k^2 + v_k^2 + u_k^2 + w_k^2;\ \cdots . \tag{2.2.17}$$

Очевидно, что (2.2.16) можно понимать как скалярное произведение двух векторов в 4-мерном евклидовом пространстве. Их длины определяются формулами (2.2.17). Этот факт можно отобразить в виде равенства нулю определителя Грама для пяти векторов (для пяти сшитых пар):

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} & a_{km} & a_{kn} \\ a_{ji} & a_{jk} & a_{jj} & a_{jm} & a_{jn} \\ a_{mi} & a_{mk} & a_{mj} & a_{mm} & a_{mn} \\ a_{ni} & a_{nk} & a_{nj} & a_{nm} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.2.18}$$

На пары сшитых элементов, для которых строится унарная геометрия, наложим дополнительные условия, обобщающие (1.6.3):

$$a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1; \rightarrow z^2 + v^2 + u^2 + w^2 = 1. \tag{2.2.19}$$

[2] Заметим, что отношения между парами сопряженных элементов, образующих собственный базис, равны нулю.

Выражая z через три независимых параметра v, u, w, приходим к 3-мерной римановой геометрии (с постоянной положительной кривизной), когда перекрестные парные отношения (2.2.16) превращаются в (1.4.2), а соотношение (2.2.18) переходит в закон (1.4.6) УСВО ранга 5.

7. Унарные геометрии других типов (геометрия Минковского, геометрия Лобачевского) получаются из БСКО ранга (3,3) другим способом. Так, прообраз *геометрии Минковского* вводится для пар сопряженных элементов $(i\alpha)$, $(k\beta)$, $\cdots$, когда парное отношение задается через фундаментальное 2x2-отношение типа (2.2.4), т.е.

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = u_{i\alpha}u_{k\beta} - u_{i\beta}u_{k\alpha} \tag{2.2.20}$$

без каких-либо дополнительных условий типа (2.2.19). Все дальнейшее содержание этой главы посвящено обсуждению вопросов, связанных с заданием парных отношений в виде (2.2.20), и получению на этой основе УСВО ранга 6.

Переход к *геометрии Лобачевского* также опирается на фундаментальные 2x2-отношения (2.2.20), однако, во-первых, элементы этой геометрии строятся не из пар, а из четверок сопряженных элементов, и, во-вторых, геометрия задается не для произвольных наборов из четверок элементов, а лишь для специальных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Эти вопросы наряду с интерпретацией в физике элементарных частиц обсуждены в третьей главе.

2.3 Группа преобразований в рамках одной системы отношений

1. Определим (сначала формально) две группы линейных преобразований параметров элементов отдельно в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} i'^1 &= C^1_1 i^1 + C^1_2 i^2; \quad \alpha'^1 = \tilde{C}^1_1 \alpha^1 + \tilde{C}^1_2 \alpha^2; \\ i'^2 &= C^2_1 i^1 + C^2_2 i^2; \quad \alpha'^2 = \tilde{C}^2_1 \alpha^1 + \tilde{C}^2_2 \alpha^2, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где C^s_r и $\tilde{C}^s_r$ – комплексные коэффициенты, характеризующие эти преобразования. Здесь s и r пробегают значения 1 и 2.

Важный частный случай составляют преобразования, оставляющие инвариантными парные отношения:

$$u'_{i\alpha} = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2 = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 = u_{i\alpha} = Inv. \tag{2.3.2}$$

Это требование налагает на коэффициенты C_r^s и $\tilde{C}_r^s$ следующие условия:

$$C_1^1\tilde{C}_1^1 + C_1^2\tilde{C}_1^2 = 1; \quad C_1^1\tilde{C}_2^1 + C_1^2\tilde{C}_2^2 = 0;$$
$$C_2^1\tilde{C}_2^1 + C_2^2\tilde{C}_2^2 = 1 \quad C_2^1\tilde{C}_1^1 + C_2^2\tilde{C}_1^2 = 0. \tag{2.3.3}$$

2. Потребуем, чтобы при преобразованиях типа (2.3.1) сохранялось свойство сопряженности пар элементов (2.2.12). Это связывает преобразования в двух множествах таким образом, что

$$\tilde{C}_r^s = C_r^{*s}; \tag{2.3.4}$$

тогда условия (2.3.3) переходят в следующие три комплексные соотношения:

$$C_1^1C_1^{*1} + C_1^2C_1^{*2} = 1; \quad C_2^1C_2^{*1} + C_2^2C_2^{*2} = 1;$$
$$C_1^1C_2^{*1} + C_1^2C_2^{*2} = 0. \tag{2.3.5}$$

Это четыре условия на 8 вещественных параметров. Линейные преобразования (2.3.1) с условиями (2.3.5) образуют *унитарную* (4-параметрическую) *группу U(2)* [3]. Очевидно, что при таких преобразованиях фундаментальные 2x2-отношения (2.2.13) остаются инвариантными.

3. *Группа унитарных преобразований* $U(2)$ *описывает переходы между различными собственными базисами одной и той же БСКО ранга (3,3)*. Продемонстрируем это. Пусть параметры произвольных элементов i и α определены в собственном базисе элементов m, n, μ, ν согласно формулам (2.2.11). Возьмем в качестве второго базиса пару сопряженных элементов l, λ; p, π (см. рис.2.3). Пусть второй базис также является собственным данной БСКО ранга (3,3), т.е. согласно (2.2.8) отношения между этими элементами удовлетворяют условиям:

$$\tilde{u}_{l\lambda} = \tilde{u}_{p\pi} = \acute{u}_0; \quad \tilde{u}_{l\pi} = \tilde{u}_{p\lambda} = 0. \tag{2.3.6}$$

[3] Термин "унитарная группа" обусловлен тем, что ее преобразования описываются унитарными матрицами. Напомним, что *унитарными* называются матрицы , удовлетворяющие условию $C^+C = I$, где C^+ – матрица, получающаяся из процедурами комплексного сопряжения и транспонирования. Легко видеть, что для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix}$$

условия (2.3.5) означают унитарность.

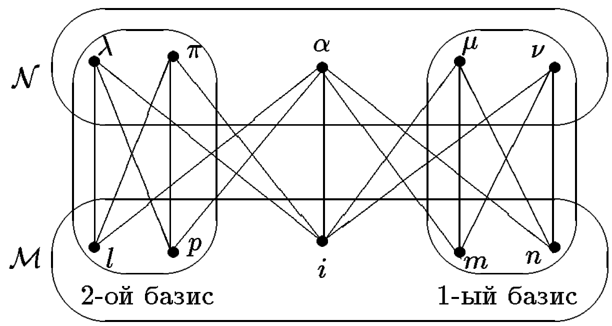


Рис. 2.3: Переход от одного базиса к другому в рамках БСКО ранга (3,3)

Тогда парное отношение $u_{i\alpha}$ можно переписать в новом базисе посредством формулы типа (2.2.10):

$$u'_{i\alpha} = \frac{\tilde{u}_{l\lambda}}{\Delta_2}\,(u_{i\lambda}u_{l\alpha} + u_{i\pi}u + p\alpha) = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2, \qquad (2.3.7)$$

где, как и в (2.2.11),

$$\begin{aligned} i'^1 &= \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{\acute{u}_0}}; \quad & i'^2 &= \pm\tfrac{u_{i\pi}}{\sqrt{\acute{u}_0}}; \\ \alpha'^1 &= \pm\tfrac{u_{l\alpha}}{\sqrt{\acute{u}_0}}; \quad & \alpha'^2 &= \pm\tfrac{u_{p\alpha}}{\sqrt{\acute{u}_0}}. \end{aligned} \qquad (2.3.8)$$

Парные отношения элементов i и α к элементам 2-го базиса можно выразить через отношения этих элементов к элементам 1-го базиса посредством закона (2.2.1). Так, чтобы найти $u_{i\lambda}$ запишем закон БСКО ранга (3,3) для элементов: i, m, n; λ, μ, ν:

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\lambda} & u_{i\mu} & u_{i\nu} \\ u_{m\lambda} & \tilde{u}_{m\mu} & \tilde{u}_{m\nu} \\ u_{n\lambda} & \tilde{u}_{n\mu} & \tilde{u}_{n\nu} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3.9)$$

Из этого выражения находим

$$\begin{aligned} u_{i\lambda} &= \tfrac{u_0}{\Delta_1}\,(u_{i\mu}u_{m\lambda} + u_{i\nu}u_{n\lambda}) \rightarrow \\ i'^1 &\equiv \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{\acute{u}_0}} = C_1^1 i^1 + C_2^1 i^2, \end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

где $\Delta_1 = u_0^2$, i^1 и i^2 определены в (2.2.11), а коэффициенты C_1^1 и C_2^1 выражаются через отношения элементов 2-го базиса к элементам 1-го:

$$C_1^1 = \frac{u_{m\lambda}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}; \; C_2^1 = \frac{u_{n\lambda}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}. \tag{2.3.11}$$

Аналогично находится отношение

$$\begin{aligned} u_{i\pi} &= \tfrac{u_0}{\Delta_1}\left(u_{i\mu}u_{m\pi} + u_{i\nu}u_{n\pi}\right) \to \\ i'^2 &\equiv \pm \tfrac{u_{i\pi}}{\sqrt{\acute{u}_0}} = C_1^2 i^1 + C_2^2 i^2, \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

где

$$C_1^2 = \frac{u_{m\pi}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}; \quad C_2^2 = \frac{u_{n\pi}}{\sqrt{u_0 \acute{u}_0}}. \tag{2.3.13}$$

Точно так же находятся выражения для отношений $u_{l\alpha}$ и $u_{p\alpha}$.

Соотношения (2.3.10) и (2.3.12) представляют собой линейные преобразования параметров элементов вида (2.3.1), а условия на отношения элементов (2.3.6) во втором базисе, выраженные через отношения к элементам 1-го базиса, соответствуют условиям на коэффициенты линейных преобразований (2.3.5). Действительно

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{l\lambda} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{l\mu}u_{m\lambda} + u_{l\nu}u_{n\lambda}\right) = \acute{u}_0 \to \quad C_1^1 C_1^{*1} + C_2^1 C_2^{*1} = 1; \\ \tilde{u}_{p\pi} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{p\mu}u_{m\pi} + u_{p\nu}u_{n\pi}\right) = \acute{u}_0 \to \quad C_1^2 C_1^{*2} + C_2^2 C_2^{*2} = 1 : \\ \tilde{u}_{l\pi} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{l\mu}u_{m\pi} + u_{l\nu}u_{n\pi}\right) = 0 \to \quad C_1^2 C_1^{*1} + C_2^2 C_2^{*1} = 0; \\ \tilde{u}_{p\lambda} &= \tfrac{1}{u_0}\left(u_{p\mu}u_{m\lambda} + u_{p\nu}u_{n\lambda}\right) = 0 \to \quad C_1^1 C_1^{*2} + C_2^1 C_2^{*2} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Следует учесть, что из условий (2.3.5) вытекают соотношения:

$$C_1^1 C_1^{*1} = C_2^2 C_2^{*2}; \quad C_1^2 C_1^{*2} = C_2^1 C_2^{*1}. \tag{2.3.15}$$

Таким образом, в рамках одной и той же БСКО ранга (3,3) имеется множество собственных базисов. Переходы между этими базисами описываются группой унитарных преобразований $U(2)$. Другими словами, можно утверждать, что *группа унитарных преобразований $U(2)$ не выводит за пределы одной и той* *же БСКО ранга (3,3)*. Как будет показано ниже, в общепринятой теории такие преобразования соответствуют преобразованиям координат в рамках одной и той же системы отсчета [4]. Выбор различных собственных базисов соответствует использованию разных координатных систем.

2.4 Переходы между разными системами отношений ранга (3,3)

1. Рассмотрим фундаментальное 2х2-отношение между произвольными двумя парами элементов: i, k, α, β. Легко показать, что оно представляется в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \tag{2.4.1}$$

т.е. записывается через произведение двух определителей, образованных из параметров элементов отдельных множеств.

2. Формально рассмотрим такие линейные преобразования параметров элементов в каждом множестве, которые оставляют инвариантными соответствующие определители справа в (2.4.1). В частности, для элементов множества $\mathcal{M}$ при произвольных линейных преобразованиях

$$i'^s = C^s_r i^r, \tag{2.4.2}$$

где $s, r = 1, 2$, определитель преобразуется по закону

$$\begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 \\ i'^2 & k'^2 \end{vmatrix} = \left(C^1_1 C^2_2 - C^1_2 C^2_1\right) \cdot \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Следовательно, для инвариантности определителя необходимо, чтобы коэффициенты преобразования удовлетворяли условию

$$C^1_1 C^2_2 - C^1_2 C^2_1 = 1. \tag{2.4.4}$$

Это два условия на 8 вещественных коэффициентов, составляющих C^s_r.Линейные преобразования (2.4.2) с условием (2.4.4) составляют *унимодулярную (6-параметрическую) группу* $SL(2, C)$.

[4]Следует напомнить, что в теории относительности имеется принципиальное различие между понятиями системы отсчета и координатной системы (см., например [10]).

Во втором множестве следует рассматривать комплексно сопряженные преобразования. Они также составляют группу $SL(2,C)$.

3. Рассмотренные в предыдущем разделе унитарные преобразования $U(2)$ оставляют инвариантным фундаментальное 2x2-отношение (2.4.1), однако в общем случае отдельные определители справа не являются инвариантными при этих преобразованиях. Обсудим частный случай унитарных преобразований, при которых коэффициенты удовлетворяют как условиям (2.3.5), так и (2.4.4). Такие преобразования составляют *унимодулярную унитарную (3-параметрическую) группу* $SU(2)$.

Выделяя из третьего из соотношений в (2.3.5) коэффициент $C_2^2 = -C_1^{*1}C_1^2/C_2^{*1}$ и подставляя его в (2.4.4), приходим с учетом первого соотношения из (2.3.5) к условиям на коэффициенты:

$$C_2^1 = -C_1^{*2}; \quad C_1^1 = C_2^{*2}. \tag{2.4.5}$$

Представим C_2^1 и C_1^1 через вещественные параметры a_0, a_1, a_2, a_3 так, что

$$C_2^1 = a_2 + ia_1; \quad C_1^1 = a_0 + ia_3,$$

тогда матрица унимодулярных унитарных преобразований приводится к виду

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ -C_2^{*1} & C_1^{*1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \tag{2.4.6}$$

где вследствие (2.4.4) вещественные параметры удовлетворяют соотношению

$$C_1^1C_2^2 - C_2^1C_1^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \tag{2.4.7}$$

т.е. независимыми остаются только три из них.

Очевидно, что преобразования из группы $SU(2)$ не выводят за пределы одной и той же БСКО ранга (3,3).

4. Матрицу коэффициентов $\{C_s^r\}$ произвольного $SL(2,C)$ - преобразования можно представить в виде произведения эрмитовой матрицы [5] на унитарную:

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}. \tag{2.4.8}$$

[5]Напомним, что *эрмитовыми* называются матрицы B, удовлетворяющие условию

$$B = B^\dagger,$$

где $B^\dagger$ — матрица, получающаяся из B процедурами комплексного сопряжения и транспонирования.

Данное утверждение можно обосновать, опираясь на соответствующие теоремы из теории матриц, а можно доказать и непосредственно [6]. Следовательно, можно утверждать, что *преобразования, дополняющие 3-параметрическую группу $SU(2)$ до полной 6- парметрической группы $SL(2,C)$, характеризуются эрмитовыми матрицами* вида

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.4.9)$$

где $b-0$, b_1, b_2, b_3 — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \qquad (2.4.10)$$

т.е. независимыми являются только три. Такие преобразования не образуют подгруппу . В литературе они часто называются *бустами.*

5. При этих преобразованиях парные отношения $u_{i\alpha}$ не являются инвариантами. Они изменяются. Однако после таких преобразований измененные $u'_{i\alpha}$ образуют новую БСКО ранга (3,3), в которой фундаментальные 2х2-отношения точно такие же, что и в исходной БСКО ранга (3,3). Можно показать, что для любой четверки из двух пар сопряженных элементов с парными отношениями вида (2.2.5) имеется такой набор коэффициентов C_r^s преобразований буста, что полученная новая БСКО ранга (3,3) для них будет *собственной системой отношений.*

---

[6]Для этого матрицу $\{C_s^r\}$ следует представить в виде

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + ic_2 & c_3 + ic_4 \\ c_5 + ic_6 & c_7 + ic_8 \end{pmatrix},$$

где вследствие (2.4.4) вещественные параметры c_l $(l = 1, 2, \cdots, 8)$ удовлетворяют условиям:

$$c_1c_7 - c_2c_8 - c_3c_5 + c_4c_6 = 1; \quad c_2c_7 + c_1c_8 - c_3c_6 - c_4c_5 = 0.$$

Из (2.4.8) можно получить 8 вещественных уравнений на 8 неизвестных коэффициентов: b_0, b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3. Легко показать, что в случае

$$2 + \sum_{l=1}^{8} c_l^2 \neq 0$$

семь неизвестных b_1, b_2, b_3 и a_0, a_1, a_2, a_3 выражаются через $b_0 \neq 0$ и параметры c_l.

2.5 Двухкомпонентные спиноры

1. Представление фундаментального 2х2-отношения в виде (2.4.1) и введенные условия инвариантности каждого из определителей, образованных из параметров элементов отдельных множеств, позволяют говорить о парных отношениях (метрике) в каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Так в множестве $\mathcal{M}$ двум элементам i и k оказывается сопоставленным парное отношение

$$b_{(ik)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1k^2 - i^2k^1. \tag{2.5.1}$$

Более того, в каждом множестве элементов оказывается определенной унарная система комплексных отношений (УСКО). Ее можно считать как бы "наведенной" элементами противоположного множества. Если бы параметры были вещественными, то такая унарная система отношений с антисимметричными парными отношениями совпала бы с рассмотренной в главе 1 2-мерной симплектической геометрией с законом (1.4.14). В данном же случае имеем УСКО ранга 4 с законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & b_{(ik)} & b_{(im)} & b_{(in)} \\ -b_{(ik)} & 0 & b_{(km)} & b_{(kn)} \\ -b_{(im)} & -b_{(km)} & 0 & b_{(mn)} \\ -b_{(in)} & -b_{(kn)} & -b_{(mn)} & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.5.2}$$

Очевидно, во втором множестве $\mathcal{N}$ имеет место аналогичная УСКО ранга 4 с парными отношениями $\tilde{b}_{\alpha\beta} = \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$.

2. Известно, что 2-мерные комплексные векторы, для которых определена антисимметричная метрика, инвариантная относительно линейных преобразований (2.4.2), называются *2- компонентными (комплексными) спинорами.* Таким образом, теория БСКО ранга (3,3) естественным образом приводит к 2-компонентным спинорам [14]. Это другой подход к определению столь важного в математике и физике понятия, отличный от общепринятого способа определения спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел [26, 54]. Его основные моменты изложены в Приложении A.2.

В связи с важностью для всего дальнейшего кратко напомним основные положения теории 2-компонентных спиноров [51, 53]. Спиноры можно обозначать как в векторном виде $(\vec{i}, \vec{k})$, так и в тензорном. В предыдущих разделах этой главы фактически уже использовались тензорные обобзначения (i^s, k^s). Еще раз запишем скалярное произведение (антисимметричную метрику) для двух векторов (спиноров) в разных обозначениях:

$$\left(\vec{i}\vec{k}\right) = g_{sr} i^s k^r = b_{(ik)}, \tag{2.5.3}$$

где s и r принимают значения 1 и 2; g_{sr} является антисимметричным 2-мерным метрическим тензором

$$g_{sr} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.4}$$

Метрический тензор совпадает с 2-мерным символом Леви-Чивиты

$$g_{sr} = \varepsilon_{sr} = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & s = r; \\ +1, & sr = 12; \\ -1, & sr = 21. \end{array} \right\} \tag{2.5.5}$$

3. Величины с верхними индексами называются контравариантными, а с нижними — ковариантными. Напомним, что по одинаковым индексам, встречающимся сверху и снизу, подразумевается суммирование (в данном случае от 1 до 2). Метрический тензор в формулах (2.5.3) – (2.5.5) является ковариантным. Ему можно сопоставить контравариантный метрический тензор g^{sr} по обычным тензорным правилам

$$g^{sr} = \frac{\cdot\cdot g_{sr}}{|g_{sr}|} \to g^{sr} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Имеют место соотношения:

$$g_{sr} g^{sr} = 2; \quad g_{sr} g^{rl} = \delta_s^l, \tag{2.5.7}$$

где

$$\delta_s^l = \left\{ \begin{array}{cc} 1, & s = l; \\ 0, & s \neq l \end{array} \right\}$$

– символы Кронекера. С помощью компонент метрического тензора можно ввести ковариантные компоненты спиноров (ковариантные параметры элементов):

$$i_s = g_{sr} i^r. \tag{2.5.8}$$

Особо следует подчеркнуть, что “немой” индекс у g_{sr}, по которому производится суммирование, — второй. Можно записать и обратное соотношение

$$i^s = g^{rs} i_r. \tag{2.5.9}$$

При поднятии индексов "немой" индекс у g^{rs} должен быть первым. Из формулы (2.5.8) следует

$$i_1 = g_{12} i^2 = i^2; \quad i_2 = g_{21} i^1 = -i^1. \tag{2.5.10}$$

Совершенно аналогично вводится метрический тензор во втором множестве (пространстве) $\mathcal{N}$. Всякий раз, когда будет необходимо подчеркнуть принадлежность компонент пространствам $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$, будем для пространства $\mathcal{N}$ индексы писать с точками сверху, тогда как для пространства $\mathcal{M}$ — без точек. Компоненты $g_{\dot{s}\dot{r}}$ и $g^{\dot{s}\dot{r}}$ имеют в точности те же значения, что g_{sr} и g^{sr}, так что имеют место аналогичные соотношения между ковариантными и контравариантными компонентами спиноров во втором пространстве.

4. Поскольку в теории спиноров исходными являются метрика и группа преобразований, то ключевую роль в такой теории играют объекты, преобразующиеся по различным представлениям группы. Таковыми являются всевозможные *спинтензоры* — величины, преобразующиеся как произведения произвольного числа спиноров из двух пространств. Так, спинтензор ранга $m+n$ преобразуется как

$$B^{sr\cdots\dot{l}\dot{p}\cdots} \sim i^s k^r \cdots \beta^{\dot{l}} \gamma^{\dot{p}} \cdots, \tag{2.5.11}$$

т.е.

$$B'^{sr\cdots\dot{l}\dot{p}\cdots} = C^s_a C^r_b \cdots C^{*\dot{l}}_{\dot{c}} C^{*\dot{p}}_{\dot{d}} \cdots B^{ab\cdots\dot{c}\dot{d}\cdots}. \tag{2.5.12}$$

Очевидно, что можно писать спинтензоры и с ковариантными индексами, например

$$B_{s\dot{r}} = B^{l\dot{p}} g_{sl} g_{\dot{r}\dot{p}}. \tag{2.5.13}$$

При преобразованиях из группы $SL(2,C)$ остаются инвариантными комбинации типа

$$B_{s\dot{r}} B^{s\dot{r}}, \quad B_{s\dot{r}\dot{p}} B^{s\dot{r}\dot{p}}, \cdots.$$

5. Оказалось, что в физических приложениях теории спиноров наиболее важную роль играют смешанные спинтензоры второго ранга $B^{s\dot{r}}$ и спинтензорные инварианты $B_{s\dot{r}} B^{s\dot{r}}$. Чтобы разобраться в причинах этого обстоятельства, давайте введем спинтензор $B^{s\dot{r}}$, построенный по правилу (2.5.11) из двух сопряженных элементов i и α. Вследствие условий сопряженности элементов компоненты $B^{1\dot{1}}$ и $B^{2\dot{2}}$ вещественны, а $B^{1\dot{2}}$ и $B^{2\dot{1}}$ –

комплексно сопряжены друг другу. Матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1\alpha^1 & i^1\alpha^2 \\ i^2\alpha^1 & i^2\alpha^2 \end{pmatrix} = \tag{2.5.14}$$

$$= \begin{pmatrix} k^0+k^3 & k^1-ik^2 \\ k^1+ik^2 & k^0-k^3 \end{pmatrix} = k^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} k^l \sigma_l,$$

где k^0, k^1, k^2, k^3 — четверка вещественных чисел, I_2 — единичная 2x2-матрица, σ_l — три 2x2-матрицы Паули:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.15}$$

Матрицы Паули удовлетворяют известным соотношениям [7]:

$$Sp\sigma_l = 0; \quad \sigma_i\sigma_l + \sigma_l\sigma_i = 2\delta_{il}I_2; \quad \sigma_i\sigma_l = i\varepsilon_{ilj}\sigma_j + \delta_{ij}, \tag{2.5.16}$$

где δ_{il} — символы Кронекера, ε_{ilj} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Легко убедиться, что спинтензорный инвариант $B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}}$ из $B^{s\dot{r}}$, образованных согласно (2.5.14), тождественно равен нулю:

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = \begin{vmatrix} k^0+k^3 & k^1-ik^2 \\ k^1+ik^2 & k^0-k^3 \end{vmatrix} = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0. \tag{2.5.17}$$

2.6 Четырехмерные векторы

Проанализируем вещественные величины типа k^μ, введенные в (2.5.14) для пары сопряженных элементов через смешанные спинтензоры второго ранга. Из (2.5.14) легко выразить обратно k^μ через параметры сопряженных элементов:

$$\begin{aligned} k^0(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2\right); \\ k^1(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1\right); \\ k^2(i\alpha) &= \tfrac{i}{2}\left(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}\right) = \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1\right); \\ k^3(i\alpha) &= \tfrac{1}{2}\left(B^{1\dot{1}} - B_{2\dot{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2\right). \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

[7] Можно также сказать, что матрицы Паули являются образующими алгебры Клиффорда $C(3,0)$ (см. Приложение А.2).

Эти четыре компоненты $k^\mu(i\alpha)$ не являются независимыми. Они связаны условием (2.5.17), соответствующим свойствам изотропных векторов в 4-мерном пространстве Минковского. Таким образом, сопряженным парам элементов i, α можно сопоставить изотропный вектор с компонентами (2.6.1) в некотором 4-мерном многообразии с сигнатурой $(+\,-\,-\,-)$.

Перейдем к случаю *двух сопряженных пар*. Очевидно, для каждой четверки разноименных элементов i, α, k, β также можно определить смешанный спинор второго ранга, причем это можно сделать несколькими способами. Выделим два из них, соответствующих симметричной и антисимметричной комбинациям из двух пар сопряженных элементов.

А. *Симметричная комбинация* означает, что спинтензор $B^{s\dot{r}}$ выбирается в виде

$$B^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{2.6.2}$$

Тогда матрицу из компонент $B^{s\dot{r}}$ для сопряженных элементов можно представить в следующих видах:

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{2}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0+p^3 & p^1-ip^2 \\ p^1+ip^2 & p^0-p^3 \end{pmatrix} = p^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} p^l\sigma_l, \tag{2.6.3}$$

где p^μ – четыре вещественных числа, σ_l — матрицы Паули.

Построим спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{2}B_{s\dot{r}}B^{s\dot{r}} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu, \tag{2.6.4}$$

где $g_{\mu\nu}$ — компоненты метрического тензора в пространстве Минковского. Легко показать, что этот инвариант в общем случае отличен от нуля и представляется в следующих видах:

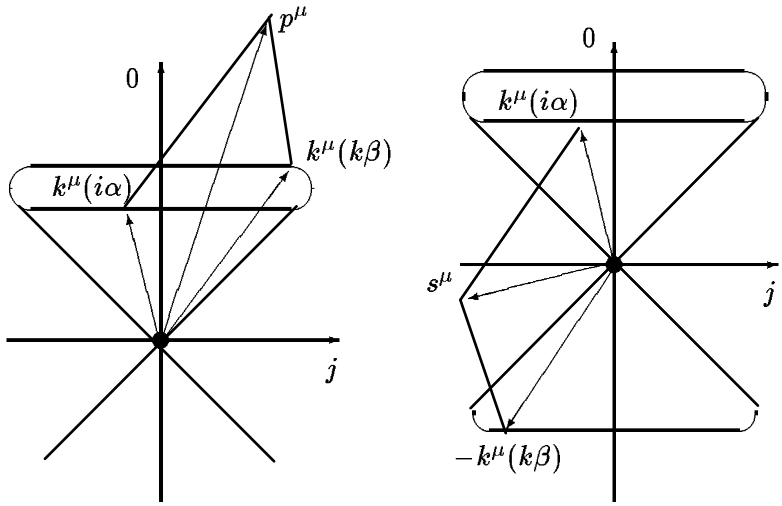
$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 2k_\mu(i\alpha)k^\mu(k\beta) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix}. \tag{2.6.5}$$

Это чрезвычайно важный результат, раскрывающий причины особой значимости в теории спиноров именно смешанных спинтензоров второго ранга: построенный из них *инвариант совпадает с фундаментальным* 2×2-*отношением* в теории БСКО ранга (3,3).

Аналогично (2.6.1) выразим компоненты p^μ через параметры четырех элементов:

$$
\begin{aligned}
p^0 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right);\\
p^1 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1\right);\\
p^2 &= \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right);\\
p^3 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right).
\end{aligned}
\qquad (2.6.6)
$$

Формула (2.6.5) позволяет сопоставлять двум парам сопряженных элементов i, α и k, β неизотропный вектор p^μ, являющийся геометрической суммой двух изотропных векторов в 4-мерном пространстве Минковского (см. рис.2.4 а).



а) Временно-подобный вектор p^μ

б) Пространственно-подобный вектор s^μ

Рис. 2.4: Неизотропные векторы, образованные парой изотропных векторов $k^\mu(i\alpha)$ и $k^\mu(k\beta)$

Б. *Антисимметричная комбинация* означает, что спинтензор $\tilde{B}^{s\dot{r}}$ выбирается в виде

$$\tilde{B}^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} - k^s\beta^{\dot{r}}. \qquad (2.6.7)$$

В этом случае матрицу $\tilde{B}^{s\dot{r}}$ для двух пар сопряженных элементов можно записать аналогично (2.6.3) через четыре вещественных числа s^μ:

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}^{1\dot{1}} & \tilde{B}^{1\dot{2}} \\ \tilde{B}^{2\dot{1}} & \tilde{B}^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^0+s^3 & s^1-is^2 \\ s^1+is^2 & s^0-s^3 \end{pmatrix} = s^0 I_2 + \sum_{l=1}^{3} s^l \sigma_l. \quad (2.6.8)$$

Спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{2}\tilde{B}_{s\dot{r}}\tilde{B}^{s\dot{r}} = g_{\mu\nu}s^\mu s^\nu \quad (2.6.9)$$

опять отличен от нуля и представляется через фундаментальное 2x2-отношение, однако с обратным знаком:

$$g_{\mu\nu}s^\mu s^\nu = -2k_\mu(i\alpha)k^\mu(k\beta) = -\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} \equiv s^2_{(ik)}. \quad (2.6.10)$$

Компоненты s^μ (см. рис. 2.4 б) записываются через параметры четырех элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} s^0 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right); \\ s^1 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right); \\ s^2 &= \tfrac{i}{2}\left(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 + k^2\beta^1\right); \\ s^3 &= \tfrac{1}{2}\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right). \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Согласно (2.6.10) и (2.6.5) одной и той же четверке сопряженных элементов i, α и k, β можно сопоставить два неизотропных вектора p^μ и s^μ. Легко видеть, что эти два вектора ортогональны, т.е.

$$p^\mu s_\mu = 0. \quad (2.6.12)$$

2.7 Преобразования Лоренца

1. Зная закон линейных преобразований параметров элементов (2.4.2), легко показать, что построенные из них квадратичные комбинации (2.6.1), (2.6.6) и (2.6.11) тоже будут преобразовываться линейным образом

$$b'^\mu = L^\mu_{\cdot\alpha} b^\alpha, \quad (2.7.1)$$

где b^μ является собирательным обозначением величин k^μ, p^μ и s^μ, а 16 коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ являются вещественными, если коэффициенты C^s_r и $\tilde{C}^s_r$ в (2.3.2) комплексно сопряжены. Выпишем выражения для компонент $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
L^0_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_1 + C^1_2C^{*1}_2 + C^2_1C^{*2}_1 + C^2_2C^{*2}_2\right);\\
L^0_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_2 + C^1_2C^{*1}_1 + C^2_1C^{*2}_2 + C^2_2C^{*2}_1\right);\\
L^0_{\cdot 2} &= -\tfrac{i}{2}\left(C^1_1C^{*1}_2 - C^1_2C^{*1}_1 + C^2_1C^{*2}_2 - C^2_2C^{*2}_1\right);\\
L^0_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_1 - C^1_2C^{*1}_2 + C^2_1C^{*2}_1 - C^2_2C^{*2}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^1_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*2}_1 + C^2_1C^{*1}_1 + C^1_2C^{*2}_2 + C^2_2C^{*1}_2\right);\\
L^1_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*2}_2 + C^2_1C^{*2}_1 + C^1_2C^{*2}_1 + C^2_2C^{*1}_1\right);\\
L^1_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1C^{*2}_1 + C^2_2C^{*1}_1 - C^1_1C^{*2}_2 - C^2_1C^{*1}_2\right);\\
L^1_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*2}_1 + C^2_1C^{*1}_1 - C^1_2C^{*2}_2 - C^2_2C^{*1}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^2_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1C^{*2}_1 - C^2_1C^{*1}_1 + C^1_2C^{*2}_2 - C^2_2C^{*1}_2\right);\\
L^2_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1C^{*2}_2 - C^2_1C^{*1}_2 + C^1_2C^{*2}_1 - C^2_2C^{*1}_1\right);\\
L^2_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*2}_2 + C^2_2C^{*1}_1 - C^2_1C^{*1}_2 - C^1_2C^{*2}_1\right);\\
L^2_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}\left(C^1_1C^{*2}_1 - C^2_1C^{*1}_1 - C^1_2C^{*2}_2 + C^2_2C^{*1}_2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^3_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_1 + C^1_2C^{*1}_2 - C^2_1C^{*2}_1 - C^2_2C^{*2}_2\right);\\
L^3_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_2 - C^2_1C^{*2}_2 + C^1_2C^{*1}_1 - C^2_2C^{*2}_1\right);\\
L^3_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}\left(C^2_1C^{*2}_2 + C^1_2C^{*1}_1 - C^1_1C^{*1}_2 - C^2_2C^{*2}_1\right);\\
L^3_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}\left(C^1_1C^{*1}_1 - C^2_1C^{*2}_1 - C^1_2C^{*1}_2 + C^2_2C^{*2}_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

Очевидно, что все $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$, как и C^s_r для группы $SL(2,C)$, определяются 6 независимыми вещественными параметрами. Можно убедиться, что 16 коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ удовлетворяют 10 условиям:

$$g_{\mu\nu}L^{\mu}_{\cdot\alpha}L^{\nu}_{\cdot\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{2.7.3}$$

Преобразования с коэффициентами $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ образуют 6-параметрическую *ортогональную группу* $O(1,3)$, которую принято называть *векторным представлением группы* $SL(2,C)$. Теперь имеются все основания называть величины k^μ, p^μ, s^μ векторами.

2. Отдельно рассмотрим преобразования векторов, индуцированные подгруппой преобразований $SU(2)$. В этом случае коэффициенты C^s_r удовлетворяют условиям (2.4.5) и (2.4.7). Подставляя их в (2.7.2), находим, что в этом случае

$$L^0_{\cdot 0} = 1; \quad L^0_{\cdot i} = 0; \quad L^i_{\cdot 0} = 0. \tag{2.7.4}$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения: 1, 2, 3. Это означает, что временно-подобные компоненты векторов b^0 при таких преобразованиях не изменяются, а преобразуются друг через друга лишь пространственно-подобные компоненты b^i. Этот результат можно усмотреть также из того факта, что компоненты b^0 выражаются через парные отношения элементов, например, $p^0 = \frac{1}{2}\left(u_{i\alpha} + u_{k\beta}\right)$, которые при преобразованиях $SU(2)$ остаются инвариантными. Такие 3-параметрические преобразования образуют *группу* $O(3)$.

3. Рассмотрим характерные случаи пространственно-подобных преобразований. Так, поворот в плоскости (2,3), т.е. поворот вокруг *первой оси* на угол θ_1 соответствует следующим значениям параметров a_μ из (2.4.6):

$$a_0 = \cos\frac{\theta_1}{2}; \quad a_1 = \sin\frac{\theta_1}{2}; \quad a_2 = a_3 = 0. \tag{2.7.5}$$

Вращениям вокруг *второй оси* (т.е. в плоскости (3,1)) на угол θ_2 соответствуют

$$a_0 = \cos\frac{\theta_2}{2}; \quad a_1 = 0; \;\; a_2 = \sin\frac{\theta_2}{2}; \;\; a_3 = 0. \tag{2.7.6}$$

Вращениям вокруг *третьей оси* (т.е. в плоскости (1,2)) на угол θ_3 соответствуют

$$a_0 = \cos\frac{\theta_3}{2}; \quad a_1 = a_2 = 0; \quad a_3 = \sin\frac{\theta_3}{2}. \tag{2.7.7}$$

Подставляя, например, (2.7.7) в выражения для коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$, а затем в (2.7.1), находим

$$b'^1 = b^1\cos\theta_3 + b^2\sin\theta_3; \quad b'^2 = -b^1\sin\theta_3 + b^2\cos\theta_3; \quad b'^3 = b^3. \tag{2.7.8}$$

4. Обсудим преобразования векторов, соответствующие преобразованиям спиноров через эрмитовы матрицы (2.4.9), дополняющие подгруппу $SU(2)$ до группы $SL(2,C)$. Легко видеть, что при таких преобразованиях временно-подобные и пространственноподобные компоненты векторов перемешиваются. Эти векторные преобразования дополняют подгруппу $O(3)$ до группы $O(1,3)$. Известно, что именно такими преобразованиями в специальной теории относительности описываются *переходы между различными системами отсчета*. Эти преобразования определяются тремя независимыми параметрами b_μ из (2.4.9), которые

соответствуют трем компонентам скорости движения одной системы отсчета относительно другой в 3-мерном пространстве.

5. Приведем значения параметров b_μ для трех случаев скоростей v_i второй системы отсчета вдоль соответствующих осей. Так, для движения вдоль *первой оси* (для псевдоповорота в плоскости (0,1)) параметры следует выбрать в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_1}{2}; \quad b_1 = \sinh\frac{\theta_1}{2}; \quad b_2 = b_3 = 0, \tag{2.7.9}$$

где θ_1 связано со скоростью v_1 следующим образом

$$\frac{v_1}{c} = \tanh\theta_1 = \frac{2b_0b_1}{b_0^2 + b_1^2}. \tag{2.7.10}$$

Здесь введена скорость света c для получения безразмерных величин.

Для описания перехода к другой системе отсчета, движущуйся вдоль *второй оси* (для псевдоповорота в плоскости (0,2)) со скоростью v^2, параметры следует выбрать в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_2}{2}; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = \sinh\frac{\theta_2}{2}; \quad b_3 = 0, \tag{2.7.11}$$

где

$$\frac{v_2}{c} = \tanh\theta_2 = \frac{2b_0b_2}{b_0^2 + b_2^2}. \tag{2.7.12}$$

Аналогично, для описания *псевдоповорота в плоскости* (0,3) на угол θ_3 следует взять параметры в виде

$$b_0 = \cosh\frac{\theta_3}{2}; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = \sinh\frac{\theta_3}{2}, \tag{2.7.13}$$

где

$$\frac{v_3}{c} = \tanh\theta_3 = \frac{2b_0b_3}{b_0^2 + b_3^2}. \tag{2.7.14}$$

6. Более подробно рассмотрим, например, случай движения вдоль первой оси и продемонстрируем появление общеизвестных преобразований Лоренца. Подставляя (2.7.9) в (2.4.8), имеем для данного случая

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\theta_1}{2} & \sinh\frac{\theta_1}{2} \\ \sinh\frac{\theta_1}{2} & \cosh\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.7.15}$$

Легко убедиться, что из всех коэффициентов $L^{\mu}_{\cdot\alpha}$ остаются отличными от нуля лишь шесть:

$$
\begin{aligned}
&L^{0}_{\cdot 0} = L^{1}_{\cdot 1} = b_0^2 + b_1^2 = \cosh\theta_1;\\
&L^{0}_{\cdot 1} = L^{1}_{\cdot 0} = 2b_0 b_1 = \sinh\theta_1; \qquad (2.7.16)\\
&L^{2}_{\cdot 2} = L^{3}_{\cdot 3} = b_0^2 - b_1^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Учитывая известные формулы гиперболической тригонометрии и (2.7.10):

$$
\sinh\theta = \frac{\tanh\theta}{\sqrt{1-\tanh\theta^2}} = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}};
$$

$$
\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},
$$

приходим к известным преобразованиям Лоренца:

$$
b'^0 = \frac{b^0 + (v/c)b^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad b'^1 = \frac{(v/c)b^0 + b^1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \quad b'^2 = b^2; \quad b'^3 = b^3. \tag{2.7.17}
$$

2.8 Прообраз пространства Минковского

1. Возьмем три пары сопряженных элементов (i, α), (k, β), (j, γ) и рассмотрим скалярные произведения векторов, образованных из двух разных пар сопряженных элементов (см.рис. 2.5). Векторы будем помечать латинскими индексами соответствующих им элементов множества $\mathcal{M}$. Построим скалярное произведение двух векторов $s^{\mu}(ik)$ и $s^{\mu}(ij)$. Оно представляется в виде

$$
\begin{aligned}
s_{\mu}(ik)s^{\mu}(ij) &= \frac{1}{2}\left(-\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ ik\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ ij\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\beta\gamma\\ kj\end{bmatrix}\right) =\\
&= \frac{1}{2}\left(s^2_{(ik)} + s^2_{(ij)} - s^2_{(kj)}\right).
\end{aligned} \tag{2.8.1}
$$

Это выражение следует трактовать как общеизвестную *теорему косинусов* для треугольника, изображенного на рисунке 2.5:

$$
s^2_{(kj)} = s^2_{(ik)} + s^2_{(ij)} - 2s_{\mu}(ik)s^{\mu}(ij). \tag{2.8.2}
$$

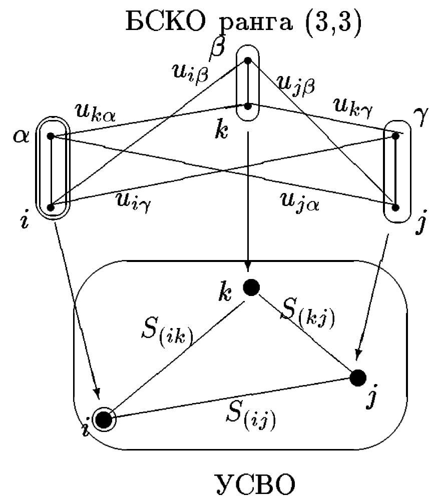


Рис. 2.5: Треугольник отношений в пространстве Минковского

Для векторов p^μ скалярное произведение записывается аналогичным образом

$$p_\mu(ik)p^\mu(ij) = \frac{1}{2}\left(p^2_{(ik)} + p^2_{(ij)} + p^2_{(kj)}\right) \qquad (2.8.3)$$

и представляет собой видоизменение теоремы косинусов:

$$p^2_{(kj)} = 2p_\mu(ik)p^\mu(ij) - p^2_{(ik)} - p^2_{(ij)}. \qquad (2.8.4)$$

2. Возьмем шесть пар сопряженных элементов: (i,α), (k,β), (j,γ), (m,μ), (n,ν), (l,λ), выделим из них пару (i,α) и построим пять векторов: $s^\mu(ik)$, $s^\mu(ij)$, $s^\mu(im)$, $s^\mu(in)$, $s^\mu(il)$ (см. рис.2.6). Поскольку эти векторы 4-мерные, то построенный на них определитель Грама обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} s^2_{(ik)} & s_\mu(ik)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(ik)s^\mu(il) \\ s_\mu(ij)s^\mu(ik) & s^2_{(ij)} & \cdots & s_\mu(ij)s^\mu(il) \\ s_\mu(im)s^\mu(ik) & s_\mu(im)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(im)s^\mu(il) \\ s_\mu(in)s^\mu(ik) & s_\mu(in)s^\mu(ij) & \cdots & s_\mu(im)s^\mu(il) \\ s_\mu(il)s^\mu(ik) & s_\mu(il)s^\mu(ij) & \cdots & s^2_{(il)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.8.5)$$

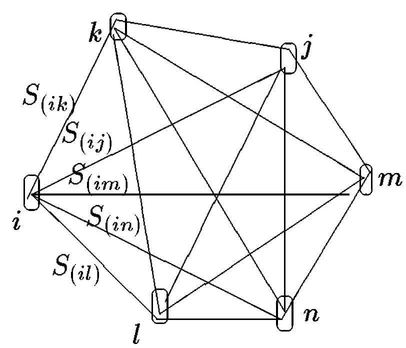


Рис. 2.6: Шесть точек-событий, выбранных для написания закона пространства Минковского

Перепишем это выражение, учтя во всех недиагональных слагаемых теорему косинусов (2.8.1)

3. Произведем тождественное преобразование получившегося определителя, состоящее в увеличении его ранга на единицу. Для этого добавим в определитель новую (первую) строку, в которой первый элемент является единицей, а все остальные элементы равны нулю. Тогда элементы добавленного (первого) столбца, кроме первой единицы, могут быть произвольными. В качестве них выберем соответствующие диагональные элементы определителя (2.8.5). Такое преобразование определителя назовем его *окаймлением.* Вычитая из второго, третьего и т.д. столбцов первый столбец, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ s^2_{(ik)} & s^2_{(ik)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(kj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(kl)} \\ s^2_{(ij)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(jk)} & s^2_{(ij)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(jl)} \\ s^2_{(im)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(mk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(mj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(ml)} \\ s^2_{(in)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(nk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(nj)} & \cdots & s^2_{(il)} - s^2_{(nl)} \\ s^2_{(il)} & s^2_{(ik)} - s^2_{(lk)} & s^2_{(ij)} - s^2_{(lj)} & \cdots & s^2_{(il)} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8.6}$$

4. Произведем второе окаймление, теперь образовав новый (первый) столбец из единицы на первом месте и нулей на всех остальных местах. Построим новую (первую) строку из первой единицы и из соответствующих диагональных элементов определителя в (2.8.6). Далее вычтем из третьей, четвертой и т.д. строк первую строку и, переставляя затем первую и вторую строки,

получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2_{(ik)} & s^2_{(ij)} & s^2_{(im)} & s^2_{(in)} & s^2_{(il)} \\ 1 & s^2_{(ik)} & 0 & s^2_{(kj)} & s^2_{(km)} & s^2_{(kn)} & s^2_{(kl)} \\ 1 & s^2_{(ij)} & s^2_{(jk)} & 0 & s^2_{(jm)} & s^2_{(jn)} & s^2_{(jl)} \\ 1 & s^2_{(im)} & s^2_{(mk)} & s^2_{(mj)} & 0 & s^2_{(mn)} & s^2_{(ml)} \\ 1 & s^2_{(in)} & s^2_{(nk)} & s^2_{(nj)} & s^2_{(nm)} & 0 & s^2_{(nl)} \\ 1 & s^2_{(il)} & s^2_{(lk)} & s^2_{(lj)} & s^2_{(lm)} & s^2_{(ln)} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.8.7)$$

Это определитель Кэли-Менгера, построенный на шести элементах (на шести парах сопряженных элементов). Как уже отмечалось в главе 1 (см. раздел 1.5), это соотношение является законом УСВО ранга 6. Парные отношения $s^2_{(ik)}$ представляются в виде

$$s^2_{(ik)} = (x^0_k - x^0_i)^2 - (x^1_k - x^1_i)^2 - (x^2_k - x^2_i)^2 - (x^3_k - x^3_i)^2. \quad (2.8.8)$$

Особо подчеркнем, что сигнатура этого парного отношения $(+ - - -)$ соответствует сигнатуре скалярных произведений в (2.6.10) и (2.8.1). Таким образом, мы пришли к отношениям, соответствующим 4-мерному *пространству Минковского.*

5. Заметим, что закон (2.8.7) можно получить, исходя из пяти векторов: $p^\mu(ik)$, $p^\mu(ij)$, $p^\mu(im)$, $p^\mu(in)$, $p^\mu(il)$. Это также 4-мерные векторы. Для них определитель Грама также обращается в нуль. Далее недиагональные элементы следует переписать с учетом видоизмененной теоремы косинусов (2.8.3). Две процедуры окаймления, описанные выше, по-прежнему приводят к определителю типа (2.8.7).

6. Особо следует выделить случай, когда выбираются такая совокупность из пяти сопряженных элементов: (k, β), (j, γ), (m^μ), $\cdots$, что они совместно с парой $(i\alpha)$ образуют одну и ту же систему отношений. Это означает, что для всех образованных из них векторов s^μ временно-подобные компоненты равны нулю:

$$s^0(ik) = s^0(ij) = s^0(im) = \cdots = 0. \qquad (2.8.9)$$

В этом случае можно говорить о 3-мерных векторах:

$$s^\mu(ik) \to -r^l(ik); \quad s^\mu(ij) \to -r^l(ij); \quad \cdots, \qquad (2.8.10)$$

где $l = 1, 2, 3$. Тогда следует ограничиться *пятью* парами сопряженных элементов, т.к. для них определитель Грама типа

(2.8.5), построенный на четырех векторах, обращается в нуль. Теорема косинусов тогда записывается в привычной 3-мерной форме

$$2r_l(ik)r^l(ij) = r^2_{(ik)} + r^2_{(ij)} - r^2_{(kj)}. \qquad (2.8.11)$$

Дальнейшие процедуры, описанные выше, приводят к равному нулю определителю Кэли-Менгера, построенному на пяти элементах, т.е. к закону (1.4.9) УСВО ранга 5, соответствующему *3-мерной евклидовой геометрии* с парными отношениями вида (1.4.7).

Завершая эту главу, можно утверждать, что теория БСКО ранга (3,3) позволяет существенно продвинуться в решении основных задач бинарной геометрофизики, сформулированных во введении. Так, можно начинать построение бинарной геометрофизики с принципов, вообще говоря, не зависящих от классической физики. Изложенное в этом разделе можно назвать *прообразом классического пространства-времени.* В рамках данного подхода достигается прогресс в обосновании свойств классического пространства-времени. Можно утверждать, что размерность и сигнатура классического пространства-времени обусловлены БСКО ранга (3,3). Более того, в данном подходе автоматически возникают спинорные величины, причем они оказываются более элементарными, нежели типичные для классической физики векторные величины. Отметим также, что в рамках теории БСКО ранга (3,3) автоматически возникает квадратичное мероопределение. Однако, в то же время содержание этой главы пока не пролило свет на связь развиваемой теории с физикой микромира.

Глава 3

Импульсное пространство свободных лептонов

Бинарные системы комплексных отношений ранга (3,3) в иной ипостаси, нежели рассмотренной в главе 2, играют ключевую роль в теории микромира. Ими описывается важнейший класс элементарных частиц — лептоны, точнее, идеализированные, т.е. не участвующие в электрослабых взаимодействиях нейтрино и массивные лептоны (электронные нейтрино, электроны и позитроны). Многие понятия и закономерности теории спинорных частиц, обычно вводимые после написания дифференциальных полевых уравнений (Дирака, Клейна-Фока), можно ввести чисто алгебраически, опираясь на теорию бинарных отношений ранга (3,3).

3.1 Геометрия Лобачевского

1. Имеется другой способ перехода от БСКО ранга (3,3) к УСВО. Он приводит к иной унарной геометрии с чрезвычайно важной физической интерпретацией — как импульсного пространства некоторого избранного класса частиц [14]. Обсудим этот переход. Для этого вернемся к неизотропным векторам, определенным на двух парах сопряженных элементов. На этот раз возьмем симметрично заданный вектор

$$p^{\mu}(ik) = k^{\mu}(i\alpha) + k^{\mu}(k\beta). \tag{3.1.1}$$

Возьмем 5 наборов таких элементов, в общем случае не имеющих общих элементов (хотя это требование и не обязательно).

Они изображены на рисунке 3.1. Будем обозначать векторы ла-

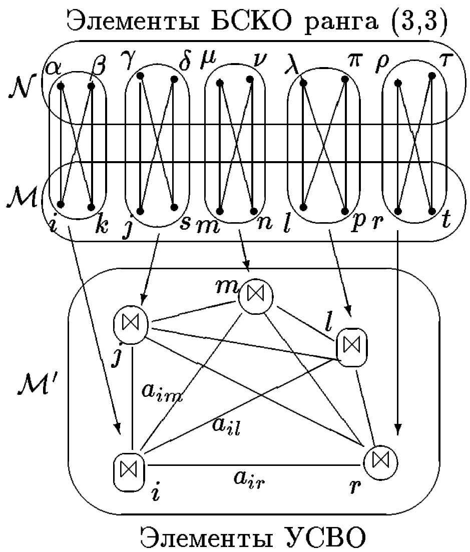


Рис. 3.1: Переход от БСКО(3,3) к импульсному пространству

тинскими индексами одного из их элементов множества $\mathcal{M}$.

2. Система из пяти 4-мерных векторов p^μ, сопоставленных пяти паборам элементов, является линейно зависимой. Следовательно, как и в разделе 2.8, из них можно образовать тождественно равный нулю определитель Грама

$$\begin{vmatrix} p^2(i) & p_\mu(i)p^\mu(j) & p_\mu(i)p^\mu(m) & p_\mu(i)p^\mu(l) & p_\mu(i)p^\mu(r) \\ p_\mu(j)p^\mu(i) & p^2(j) & p_\mu(j)p^\mu(m) & p_\mu(j)p^\mu(l) & p_\mu(j)p^\mu(r) \\ p_\mu(m)p^\mu(i) & p_\mu(m)p^\mu(j) & p^2(m) & p_\mu(m)p^\mu(l) & p_\mu(m)p^\mu(r) \\ p_\mu(l)p^\mu(i) & p_\mu(l)p^\mu(j) & p_\mu(l)p^\mu(m) & p^2(l) & p_\mu(l)p^\mu(r) \\ p_\mu(r)p^\mu(i) & p_\mu(r)p^\mu(j) & p_\mu(r)p^\mu(m) & p_\mu(r)p^\mu(l) & p^2(l) \end{vmatrix} =$$

$$= 0. \qquad (3.1.2)$$

Элементы этого определителя можно понимать как отношения между обобщенными элементами (из четверок исходных элементов) некоторого одного множества $\mathcal{M}'$ (см. рис. 3.1). При этом заданы как внутренние отношения элементов:

$$\tilde{a}_{ii} \equiv p^2(i) = \begin{bmatrix} \scriptstyle\alpha\beta \\ \scriptstyle ik \end{bmatrix}; \quad \tilde{a}_{jj} \equiv p^2(j) = \begin{bmatrix} \scriptstyle\gamma\delta \\ \scriptstyle is \end{bmatrix}; \quad \cdots, \qquad (3.1.3)$$

так и перекрестные парные отношения:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} = p_\mu(i)p^\mu(j) = \tfrac{1}{2}\left[{\alpha\beta \atop ik}\right] \otimes \left[{\gamma\delta \atop js}\right] \equiv \\ \equiv \tfrac{1}{2}\left(\left[{\alpha\gamma \atop ij}\right] + \left[{\alpha\delta \atop is}\right] + \left[{\beta\gamma \atop kj}\right] + \left[{\beta\delta \atop ks}\right]\right). \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3. Положим, что имеется некоторое множество четверок элементов, для которых внутренние отношения одинаковы, т.е.

$$p^2(i) = p^2(j) = \cdots = C^2 \to \tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_{jj} = \cdots = C^2, \tag{3.1.5}$$

где С – некоторая константа. Заменяя в (3.1.2) скалярные произведения на перекрестные парные отношения (3.1.4) и деля все строки на C^2, получаем

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{ij} & a_{im} & a_{il} & a_{ir} \\ a_{ji} & 1 & a_{jm} & a_{jl} & a_{jr} \\ a_{mi} & a_{mj} & 1 & a_{ml} & a_{mr} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lm} & 1 & a_{lr} \\ a_{ri} & a_{rj} & a_{rm} & a_{rl} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.1.6}$$

где $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/C^2$. Это выражение представляет собой закон УСВО ранга 5. Согласно изложенному в главе 1 этот закон соответствует 3-мерной геометрии. Учитывая сигнатуру $(+ - - -)$ в определении скалярных произведений в (3.1.4), приходим к выводу, что это *геометрия Лобачевского* с парным отношением вида (1.4.5). С учетом нормировки p^2 на константу C имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} = \sqrt{\left(C^2 + p_1^2(i) + p_2^2(i) + p_3^2(i)\right)\left(C^2 + p_1^2(j) + p_2^2(j) + p_3^2(j)\right)} - \\ - p_1(i)p_1(j) - p_2(i)p_2(j) - p_3(i)p_3(j). \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

4. Поясним полученный результат с помощью рисунка 3.2. На этом рисунке изображены изотропные конусы с общей вершиной О. Во внутренность изотропных конусов вписан двуполостный гиперболоид, отстоящий от вершины О на расстояние С. Использованные выше пять векторов p_μ снесены в одну точку О. Поскольку все они имеют одинаковую "длину" в псевдоевклидовом пространстве, то все они заканчиваются на поверхности двуполостного гиперболоида. Именно поэтому можно говорить, что отношения между введенными векторами описываются гиперболической геометрией.

Рис. 3.2: Импульсное пространство частиц одного сорта (лептонов) описывается гиперболической геометрией (геометрией Лобачевского)

5. Заметим, что изложенные здесь рассуждения можно было бы проводить с использованием антисимметрично заданного 4-мерного вектора

$$s^{\mu}(ik) = k^{\mu}(i\alpha) - k^{\mu}(k\beta). \tag{3.1.8}$$

В этом случае по-прежнему можно записать определитель Грама типа (3.1.2) и ввести внутренние и перекрестные парные отношения формулами типа (3.1.3) — (3.1.4). Однако в этом случае внутренние отношения будут отрицательны

$$\tilde{a}_{ii} = -\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} < 0; \quad \tilde{a}_{jj} = -\begin{bmatrix} \gamma\delta \\ js \end{bmatrix} < 0; \quad \cdots, \tag{3.1.9}$$

а перекрестные отношения имеют вид

$$\tilde{a}_{ij} = s_{\mu}(i)s^{\mu}(j) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ ij \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\delta \\ is \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta\gamma \\ kj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\delta \\ ks \end{bmatrix}\right). \tag{3.1.10}$$

Очевидно, что для всех этих векторов условие (3.1.5) следует писать в виде

$$\tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_{jj} = \cdots = -C^2.$$

Изменяя знаки при перекрестных отношениях, опять приходим к закону (3.1.6), однако парное отношение будет записываться в виде

$$\tilde{a}_{ij} = s_1(i)s_1(j) + s_2(i)s_2(j) + s_3(i)s_3(j) -$$
$$-\sqrt{\left(C^2 - s_1^2(i) - s_2^2(i) - s_3^2(i)\right)\left(C^2 - s_1^2(j) - s_2^2(j) - s_3^2(j)\right)}. \tag{3.1.11}$$

Этот случай следует интерпретировать как 3-мерную геометрию на однополостном гиперболоиде, асимптотически приближающемся к изотропным конусам, изображенным на рис. 3.2.

6. В бинарной геометрофизике константу C будем интерпретировать как массу покоя выделенного в природе типа элементарных частиц — *массивных лептонов — электронов и позитронов*. Пусть эта константа будет размерной. Введем для нее привычное обозначение $C = mc$, где c скорость света, тогда

$$p^2(i) = p_0(i)^2 - p_1(i)^2 - p_2(i)^2 - p_3(i)^2 = m^2c^2. \tag{3.1.12}$$

Подчеркнем, что теперь рассматривается другая УСВО, полученная из одной и той же БСКО ранга (3,3). То, что в разделе 1.8 было перекрестным отношением двух элементов УСВО ранга 6, теперь стало внутренним отношением для одного нового элемента УСВО ранга 5. Нормировка этого внутреннего отношения (3.1.12) соответствует введению элементарной длины в прообраз пространственно-временных отношений раздела 1.8 [1].

[1]Если считать, что s^μ из раздела 1.8 соответствует компонентам пространственно-временного смещения, то можно ввести величину $\tilde{s}^\mu$ размерности длины так, что

$$\tilde{s}^\mu(ik) = \frac{s^\mu(ik)}{mc} l_e,$$

где l_e некоторая константа размерности длины. Из двух констант l_e и mc можно образовать константу размерности действия

$$\hbar = l_e mc \to l_e = \frac{\hbar}{mc}.$$

Естественно положить $\hbar$ *постоянной Планка*, тогда l_e имеет смысл комптоновской длины волны электрона. Заметим, что для теории систем отношений (теории физических структур [30]) характерно возникновение фундаментальной константы всякий раз, когда накладываются две системы отношений. В данном случае таковой является константа $\hbar$.

Другой тип известных лептонов (первого поколения) — нейтрино, как известно, имеет нулевую массу покоя. Его описывают изотропным вектором. Следовательно, *нейтрино* будем описывать одним элементом множества $\mathcal{M}$ и одним элементом множества $\mathcal{N}$.

3.2 Биспиноры и 4-мерные тензоры

1. Итак, массивные частицы должны описываться двумя спинорами (и двумя сопряженными спинорами), т.е. 4-компонентными величинами. Как записать четверку компонент,— это зависит от ряда обстоятельств. Приведем устоявшееся выражение, прокомментировав его через понятия бинарной геометрофизики [14].

Восемь компонент, соответствующие четырем элементам i, α, k, β, разбиваются на две четверки. Одна из них записывается в виде 4-компонентного столбца, а вторая в виде строки. Потребуем, чтобы, во-первых, элементы столбца Ψ и строки $\Psi^\dagger$ соответствовали друг другу по закону (2.3.1) нахождения двух пар элементов в парах, т.е. были комплексно сопряжены друг другу. Это еще содержит произвол, т.к. столбец Ψ может быть составлен из параметров элементов одного или разных сортов. Второе условие состоит в том, что столбец должен равноправно содержать элементы из начального и конечного состояний. Образуем столбец из параметров элементов i и β, не состоящих друг с другом в паре. Третье условие конкретизирует порядок расположения элементов в столбце. Оно связано с трансформационными свойствами параметров и означает, что, если i^s является контравариантным спинором, то для элемента β должен браться ковариантный спинор. Следовательно, каждому массивному лептону будут сопоставляться следующие 4-компонентные величины:

$$\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2 \\ -\beta^1 \end{pmatrix}; \qquad (3.2.1)$$

$$\Psi^\dagger = (\alpha^1, \alpha^2, k_1, k_2) = (\alpha^1, \alpha^2, k^2, -k^1).$$

Согласно приведенным в разделе 2.5 соотношениям между ко- и контравариантными компонентами спинора столбец Ψ преобразуется при преобразованиях из группы $SL(2,C)$ следующим образом

$$\Psi' = \begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & 0 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2^{*2} & -C_1^{*2} \\ 0 & 0 & -C_2^{*1} & C_1^{*1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \equiv S\Psi. \tag{3.2.2}$$

Поскольку матрица преобразований S приводима к блочному виду, а Ψ составлено из двух спиноров, говорят, что Ψ является *биспинором.*

2. Как уже отмечалось, при $SL(2,C)$ преобразованиях остаются инвариантными две билинейные комбинации: $i^1k^2 - i^2k^1$ и $\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$. Для записанных в (3.2.1) величин можно подобрать некую матрицу, назовем ее γ_0, такую, чтобы билинейная комбинация $\Psi^\dagger\gamma_0\Psi$ равнялась сумме инвариантов, т.е.

$$\Psi^\dagger\gamma_0\Psi = -(i^1k^2 - i^2k^1) - (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1) \equiv \overline{\Psi}\Psi. \tag{3.2.3}$$

Легко видеть, что γ_0 должно иметь вид

$$\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Здесь знак минус выбран из соображений удобства. В (3.2.3) введено обозначение

$$\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma_0 = -(k_1, k_2, \alpha^1, \alpha^2). \tag{3.2.5}$$

Из (3.2.3) следует, что строка $\overline{\Psi}$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}S^{-1}, \tag{3.2.6}$$

где S^{-1} – матрица, обратная S:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C_2^2 & -C_2^1 & 0 & 0 \\ -C_1^2 & C_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1^{*1} & C_1^{*2} \\ 0 & 0 & C_2^{*1} & C_2^{*2} \end{pmatrix}. \tag{3.2.7}$$

3. Легко показать, что компоненты p_μ в (2.6.6) записываются посредством матрицы γ_0 и трех матриц γ_i:

$$2p_\mu = \overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \tag{3.2.8}$$

где γ_i — три пространственно-подобные матрицы Дирака в стандартном представлении

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (3.2.9)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь σ^i – матрицы Паули, записанные в (2.5.15). Матрицы Дирака удовлетворяют известным соотношениям:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I_4, \qquad (3.2.10)$$

т.е. γ_0 временно-подобна, а матрицы γ_i — пространственно-подобны [2].

Зная как преобразуются Ψ и $\overline{\Psi}$, можно показать, что компоненты p_μ преобразуются по векторному закону

$$2p'_\mu = \left(\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right)' = \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\mu S\Psi = 2L^{\alpha}_{\mu\cdot}p_\alpha, \qquad (3.2.11)$$

где $L^{\alpha}_{\mu\cdot}$ частично записаны в (2.7.2).

4. Обычным образом введем пятую матрицу

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \qquad (3.2.12)$$

Легко видеть, что γ_5 пространственно-подобна (т.е. $\gamma_5^2 = -1$), а пятая компонента вектора p_5 вещественна и имеет вид

$$2p_5 = \overline{\Psi}\gamma_5\Psi = i\left[\left(i^1k^2 - i^2k^1\right) - \left(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1\right)\right], \qquad (3.2.13)$$

[2]Матрицы Дирака являются образующими алгебры Клиффорда $C(1,3)$ над полем вещественных чисел. Базис этой алгебры составляют $2^4 = 16$ элементов (см. Приложение А.2)

т.е. определяется разностью инвариантов. Из (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.13) следует тождество

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 - p_6^2 = 0, \tag{3.2.14}$$

где $2p_6 = \overline{\Psi}\Psi$. Это напоминает соотношение из 6-оптики [13, с.182], аналогичной 5-оптике Румера [52].

С помощью матриц γ_5 можно ввести общепринятые понятия левых (e_L) и правых (e_R) компонент массивного лептона (электрона) [45]:

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_R \equiv \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.15}$$

Аналогично, из 4-компонентной строки получаются сопряженные компоненты:

$$\begin{aligned} \overline{e}_L &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 - i\gamma_5) = (0, 0, \alpha^1, \alpha^2); \\ \overline{e}_R &\equiv \frac{1}{2}\overline{\Psi}(1 + i\gamma_5) = -(k_1, k_2, 0, 0). \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Таким образом, элемент i (и сопряженный ему элемент α) можно называть левой компонентой лептона, а элемент k (и сопряженный ему β) – правой компонентой.

Используя эти выражения, компоненты вектора (3.2.8) можно записать в виде

$$\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \overline{e}_L\gamma_\mu e_L + \overline{e}_R\gamma_\mu e_R. \tag{3.2.17}$$

5. Для четырех компонент комбинаций $\overline{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi$ имеем мнимые выражения, аналогичные (2.6.11), но с другими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_0\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2\right); \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_1\Psi &= i\left(i^1\alpha 2 + i^2\alpha^1 - k^1\beta^2 - k^2\beta^1\right); \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_2\Psi &= -i^1\alpha 2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1; \\ \overline{\Psi}\gamma_5\gamma_3\Psi &= i\left(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 + k^2\beta^2\right). \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Оставшиеся 6 возможных комбинаций $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ представимы в виде

$$\begin{aligned}
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_1\Psi = i^1k^1 - i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_2\Psi = i\left(i^1k^1 + i^2k^2 + \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\right);\\
&\overline{\Psi}\gamma_0\gamma_3\Psi = -i^1k^2 - i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1;\\
&\overline{\Psi}\gamma_2\gamma_3\Psi = i\left(-i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2\right);\\
&\overline{\Psi}\gamma_3\gamma_1\Psi = i^1k^1 + i^2k^2 - \alpha^1\beta^1 - \alpha^2\beta^2;\\
&\overline{\Psi}\gamma_1\gamma_2\Psi = i\left(i^1k^2 + i^2k^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^2\beta^1\right),
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

т.е. в отличие от 10 предшествующих выражений записывается через парные комбинации из параметров элементов одного сорта.

Итого, в формулах (3.2.3), (3.2.8), (3.2.13), (3.2.18) и (3.2.19) приведены 16 квадратичных комбинаций, соответствующие всем возможным произведениям четверки матриц γ_μ (базису алгебры Клиффорда $C(1,3)$ над полем вещественных чисел). Эти величины образуют характерные тензоры. Тензорный характер преобразований, выписанных комбинаций можно доказать, используя (3.2.11). Действительно, например, для величин $\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\Psi}\gamma_\alpha\gamma_\beta\Psi\right)' = \overline{\Psi}S^{-1}\gamma_\alpha\gamma_\beta S\Psi = \overline{\Psi}\left(S^{-1}\gamma_\alpha S\right)\left(S^{-1}\gamma_\beta S\right)\Psi =\\
&= \overline{\Psi}L^{\mu}_{\alpha\cdot}\gamma_\mu L^{\nu}_{\beta\cdot}\gamma_\nu\Psi = L^{\mu}_{\alpha\cdot}L^{\nu}_{\beta\cdot}\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Это закон преобразований тензора второго ранга.

3.3 Массивная частица в собственной системе отношений

1. В предыдущем разделе были рассмотрены тензорные величины, которые можно сопоставить, вообще говоря, произвольным двум парам сопряженных элементов, в том числе и массивному лептону. Однако, для построения реалистической теории лептонов этого мало. Сопоставим частицам частный случай двух сопряженных пар, когда спинорные инварианты имеют *вещественные* значения, т.е.

$$Im\left(i^1k^2 - i^2k^1\right) = 0 \to i^1k^2 - i^2k^1 = \pm mc. \tag{3.3.1}$$

Это соотношение означает два условия на вещественные составляющие параметров. Если произвольные две пары сопряженных элементов характеризуются 4 комплексными параметрами: i^1, i^2, k^1, k^2 (8 вещественными числами), то условие (3.3.1) означает, что независимыми остаются только 6 вещественных величин.

Напомним, что в общем случае фундаментальное 2х2-отношение для сопряженных элементов вещественно и положительно. Условия (3.3.1) выделяют два частных случая: положительного и отрицательного значения инварианта. Сопоставим эти два случая двум сортам лептонов: электрону и позитрону (частице и античастице). Пусть *частица(электрон) характеризуется положительным значением инварианта*

$$i^1k^2 - i^2k^1 = +mc, \tag{3.3.2}$$

а *античастица (позитрон) характеризуется отрицательным значением инварианта*

$$i^1k^2 - i^2k^1 = -mc. \tag{3.3.3}$$

2. Проанализируем основные свойства лептонов в собственной системе отношений. Согласно изложенному в главе 2 выбор собственной системы отношений означает:

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = mc; \quad u_{i\beta} = u_{k\alpha} = 0. \tag{3.3.4}$$

Обозначим параметры лептона в собственной системе отношений значком "с" снизу, тогда условия (3.3.4) запишутся через параметры в виде

$$\begin{aligned} &i_c^1\alpha_c^1 + i_c^2\alpha_c^2 = k_c^1\beta_c^1 + k_c^2\beta_c^2 = mc; \\ &i_c^1\beta_c^1 + i_c^2\beta_c^2 = 0 \to k_c^1\alpha_c^1 + k_c^2\alpha_c^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

где, напомним, $\alpha_c^s = i_c^{*s}; \beta_c^s = k_c^{*s}$. Из (3.3.5) следует, что все параметры можно выразить через два из них. Выберем в качестве ключевых параметры: i_c^1 и i_c^2. Используя условия (3.3.5), находим, что в собственной системе отношений лептонов

$$\begin{aligned} &p^0_{(c)} = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_c\gamma^0\Psi_c = i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} = mc; \\ &p^i_{(c)} = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_c\gamma^i\Psi_c = 0, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

т.е. как для частицы, так и для античастицы отлична от нуля только временно-подобная компонента импульса. Это оправдывает общепринятый в классической механике термин собственной системы (отсчета).

3. Используем свойства вещественности инвариантов (3.3.2) и (3.3.3) в собственной системе отношений. Из (3.3.5) имеем

$$k_c^1 = -\frac{i_c^{*2} k_c^2}{i_c^{*1}}.$$

Подставляя это выражение в значение инварианта, находим

$$i^1 k^2 - i^2 k^1 = \frac{k_c^2}{i_c^{*1}} \left(i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} \right) = \frac{k_c^2}{i_c^{*1}} mc = \pm mc, \qquad (3.3.7)$$

где использовано (3.3.6). Это означает условия связи параметров элементов:

$$k_c^2 = \pm i_c^{*1}; \quad k_c^1 = \mp i_c^{*2}.$$

С учетом знака инварианта частицы и античастицы следует положить *для электрона* (частицы)

$$i_c^1 = k_c^{*2}; \qquad i_c^2 = -k_c^{*1}, \qquad (3.3.8)$$

а *для позитрона* (античастицы)

$$i_c^1 = -k_c^{*2}; \quad i_c^2 = k_c^{*1}. \qquad (3.3.9)$$

4. С помощью формул (3.3.8) и (3.3.9) запишем в собственной системе отношений выражения для 4-компонентных столбцов Ψ, определенных в (3.2.1). Для *электрона* имеем

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^1 \\ i_c^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.10)$$

Для *позитрона* получаем другое выражение

$$\Psi_c = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ -i_c^1 \\ -i_c^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.11)$$

Как уже отмечалось, эти столбцы характеризуются лишь двумя комплексными числами, связанными одним условием (3.3.6).

5. Рассмотрим преобразования параметров из группы $SU(2)$, не выводящие из используемой (собственной) системы отношений. В общем случае они характеризуются (2.4.6) и (2.4.7). Подставляя их в (3.2.2), находим для Ψ'

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 & 0 & 0 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ 0 & 0 & -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.3.12}$$

т.е. при преобразованиях из группы $SU(2)$ контравариантные компоненты спинора i^s и ковариантные компоненты сопряженного спинора β_s преобразуются одинаково. Именно это обстоятельство побудило записывать Ψ через два типа спиноров разной ковариантности [3].

Заметим, что из параметров элементов i^s и β_s можно образовать две комбинации:

$$W(+)^s = i^s + \beta_s; \quad W(-)^s = i^s - \beta_s, \tag{3.3.13}$$

которые при $SU(2)$ – преобразованиях изменяются независимо друг от друга. Легко видеть, что данные определения частицы и античастицы соответствуют случаям:

$$W(+)^s_c \neq 0; \quad W(-)^s_c = 0; () \tag{3.3.14}$$

и

$$W(+)^s_c = 0; \quad W(-)^s_c \neq 0; () \tag{3.3.15}$$

в собственной системе отношений.

В ряде работ по квантовой электродинамике (см., например, [5]) вводится вспомогательная 4-компонентная величина

$$\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W(+)^s \\ W(-)^s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i^s + \beta_s \\ i^s - \beta_s \end{pmatrix}, \tag{3.3.16}$$

[3] Введенный в разделе 3.2 биспинор соответствует частному случаю 4-компонентного спинора алгебры Клиффорда $C(4,1)$ (см. Приложение A.2), т.е. как бы 5-мерному многообразию с сигнатурой $(+\ +\ +\ +\ -)$. 2-Компонентный спинор (2.4.2), как уже отмечалось, соответствует алгебре Клиффорда $C(3,0)$, т.е. 3-мерному евклидову пространству. Столбец (3.3.12) выступает как сдвоенный 2-компонентный спинор, т.е. опять биспинор, но в ином смысле, нежели в разделе 3.2.

обладающая тем свойством, что в собственной системе отношений для частицы и античастицы соответственно принимает вид

$$\psi(\pm) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \psi(\mp) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i_c^1 \\ i_c^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3.17}$$

Это показывает, что в собственной системе отношений четыре компоненты можно сопоставить двум видам частиц с двумя возможными проекциями спинов.

6. Последовательно выпишем в собственной системе отношений компоненты всех определенных выше тензоров. Для вектора p_c^μ компоненты уже записаны в (3.3.6). Далее запишем инварианты:

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = \overline{\Psi}_c\gamma^5\Psi_c = 0; \tag{3.3.18}$$

$$\overline{\Psi}\Psi = \overline{\Psi}_c\Psi_c = \mp 2\left(i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2}\right) = \mp 2m_0c. \tag{3.3.19}$$

Можно утверждать, что условие (3.3.1) в определении частицы означает равенство нулю инварианта $\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$. Инвариант (3.3.19) имеет разный знак для частицы и античастицы. Условимся верхний знак писать для частицы, а нижний знак — для античастицы.

Компоненты тензора $\overline{\Psi}_c\gamma^\mu\gamma^\nu\Psi_c$ находятся в виде

$$\overline{\Psi}_c\gamma^0\gamma^i\Psi_c = 0; \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\Psi}_c\gamma^1\gamma^2\Psi_c = \pm 2i\left(i_c^1 i_c^{*1} - i_c^2 i_c^{*2}\right) \equiv -4iM_{3(c)}; \\ &\overline{\Psi}_c\gamma^2\gamma^3\Psi_c = \pm 2i\left(i_c^1 i_c^{*2} + i_c^2 i_c^{*1}\right) \equiv -4iM_{1(c)}; \\ &\overline{\Psi}_c\gamma^3\gamma^1\Psi_c = \mp 2\left(i_c^1 i_c^{*2} - i_c^2 i_c^{*1}\right) \equiv -4iM_{2(c)}, \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

где в (3.3.15) справа введены 3-мерные обозначения:

$$M_j = \frac{i}{8}\varepsilon_{jik}\overline{\Psi}\gamma^i\gamma^k\Psi. \tag{3.3.22}$$

Здесь ε_{jik} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Два числа i_c^1 и i_c^2, определяющих Ψ_c, можно связать с понятием *спина частицы*. Легко убедиться, что в случае $i_c^2 = 0$ имеем $i_c^1 i_c^{*1} = m_0c$ и

$$M_{1(c)} = M_{2(c)} = 0; \quad M_{3(c)} = \mp\frac{1}{2}m_0c. \tag{3.3.23}$$

При $i_c^1 = 0$ аналогично получаем

$$M_{1(c)} = M_{2(c)} = 0; \quad M_{3(c)} = \pm\frac{1}{2}m_0 c. \tag{3.3.24}$$

Это можно трактовать как выражения для значений двух возможных проекций спина частицы на направление оси ^{3}.

Для компонент псевдовектора в собственной системе отношений имеем

$$\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^0\Psi_c = 0; \tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c &= 2i\left(i_c^1 i_c^{*2} + i_c^2 i_c^{*1}\right); \\ \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^2\Psi_c &= -2\left(i_c^1 i_c^{*2} - i_c^2 i_c^{*1}\right); \\ \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^3\Psi_c &= 2i\left(i_c^1 i_c^{*1} - i_c^2 i_c^{*2}\right). \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Эти выражения одинаковы для электрона и позитрона.

3.4 Массивная частица в произвольной системе отношений

1. При преобразованиях 2-компонентных спиноров, описываемых эрмитовыми матрицами (2.4.9), компоненты биспинора Ψ' из (3.2.2) изменяются по закону

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ \beta_1' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0+b_3 & b_1-ib_2 & 0 & 0 \\ b_1+ib_2 & b_0-b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0-b_3 & -b_1+ib_2 \\ 0 & 0 & -b_1-ib_2 & b_0+b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.1}$$

т.е., еще раз подчеркнем, что теперь отношения между парами элементов изменяются, а временно-подобная и пространственно-подобные компоненты вектора p^μ перемешиваются.

2. Зная вид биспинора для частицы (3.3.10) и для античастицы (3.3.11) в собственной системе отношений и закон преобразования (3.4.1), легко записать компоненты биспиноров в любой другой системе отношений. Ограничимся псевдоповоротами вокруг первой оси при $v/c \ll 1$. Для этого случая (2.6.9) пред-

ставляется в виде

$$\begin{aligned} b_0 &= \cosh\tfrac{\theta_1}{2} \simeq 1 + \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{v}{c}\right)^2; \\ b_1 &= \sinh\tfrac{\theta_1}{2} \simeq \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{c}\right); \\ b_2 &= b_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Тогда для электрона имеем

$$\Psi' = \begin{pmatrix} b_0 i_c^1 + b_1 i_c^2 \\ b_1 i_c^1 + b_0 i_c^2 \\ b_0 i_c^1 - b_1 i_c^2 \\ -b_1 i_c^1 + b_0 i_c^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} i_c^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 + i_c^2 \\ i_c^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 + i_c^2 \end{pmatrix}. \tag{3.4.3}$$

Отсюда видно, что при переходе к другой системе отношений компоненты i^1 и i^2 начинают перемешиваться.

Введенные в (3.3.17) величины в новой системе отношений записываются следующим образом

$$\psi'(\pm) \simeq \begin{pmatrix} i_c^1 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^1 \\ i_c^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 \end{pmatrix}; \quad \psi'(\mp) \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right) i_c^1 \\ i_c^1 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^1 \\ i_c^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^2 i_c^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4.4}$$

т.е. отличны от нуля все четыре компоненты.

3. Запишем компоненты псевдовектора $\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\Psi$ в системе отношений, движущейся относительно собственной системы отношений со скоростью v_1:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}\gamma^5\gamma^0\Psi &= \tfrac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c; \\ \overline{\Psi}\gamma^5\gamma^1\Psi &= \tfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^1\Psi_c; \\ \overline{\Psi}\gamma^5\gamma^2\Psi &= \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^2\Psi_c; \\ \overline{\Psi}\gamma^5\gamma^3\Psi &= \overline{\Psi}_c\gamma^5\gamma^3\Psi_c. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Отсюда видно, что при этих преобразованиях две из трех пространственно-подобных компонент псевдовектора не меняются, тогда как компонента с индексом “1” при $v/c \to 1$ становится как угодно большой. Это интерпретируется как стремление спина ультрарелятивистской частицы ориентироваться вдоль или против направления ее движения.

4. В произвольной системе отношений рассмотрим задачу, в некотором смысле обратную обсужденной выше, — выразим параметры элементов массивного лептона через компоненты его импульса и минимальное число независимых парметров. Как уже отмечалось, массивный лептон характеризуется 8 вещественными парметрами, на которые наложены два условия (3.3.1). Пусть элементы из множества $\mathcal{M}$ обозначаются символами i и k. Введем вещественные параметры согласно

$$\begin{aligned} i^1 &= z_1 + iv_1; \quad & i^2 &= z_2 + iv_2; \\ k^1 &= u_1 + iw_1; \quad & k^2 &= u_2 + iw_2. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Запишем компоненты 4-импульса лептона через вещественные параметры:

$$2p_0 = z_1^2 + v_1^2 + z_2^2 + v_2^2 + u_1^2 + w_1^2 + u_2^2 + w_2^2; \tag{3.4.7}$$

$$2p_3 = z_1^2 + v_1^2 - z_2^2 - v_2^2 + u_1^2 + w_1^2 - u_2^2 - w_2^2; \tag{3.4.8}$$

$$p_1 = z_1 z_2 + v_1 v_2 + u_1 u_2 + w_1 w_2; \tag{3.4.9}$$

$$p_2 = z_1 v_2 - z_2 v_1 + u_1 w_2 - u_2 w_1. \tag{3.4.10}$$

Очевидно, 8 параметров элементов невозможно выразить через 4 компоненты импульса. Часть параметров оказывается независимой. Из изложенного выше известно, что на парметры массивного лептона наложено условие (3.3.2), которое в терминах (3.4.6) означает

$$z_1 u_2 - u_1 z_2 + v_2 w_1 - v_1 w_2 = mc; \tag{3.4.11}$$

$$z_1 w_2 + v_1 u_2 - z_2 w_1 - v_2 u_1 = 0. \tag{3.4.12}$$

Из (3.4.7) — (3.4.10) и соображений главы 2 следует, что остаются независимыми три вещественных параметра элементов. Выберем в качестве ключевых 4 вещественных параметра: z_1, v_1, u_1, w_1, на которые согласно (3.4.7) (3.4.8) наложено одно условие

$$z_1^2 + v_1^2 + u_1^2 + w_1^2 = p_0 + p_3, \tag{3.4.13}$$

т.е. значения этих параметров определяется точкой 3-мерной гиперсферы радиуса $p_0 + p_3$ в 4-мерном евклидовом пространстве, т.е. геометрией Римана.

5. Соотношения (3.4.9) и (3.4.10) можно понимать как два линейных уравнения относительно неизвестных u_2 и w_2. Решая эту систему и подставляя решение в условия (3.4.11) и (3.4.12), легко убедиться, что полученные соотношения можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений относительно величин z_2 и v_2. Решая эту систему, находим ответ на поставленный выше вопрос:

$$\begin{aligned} z_2 &= \tfrac{p_1 z_1 - p_2 v_1 - mcu_1}{p_0 + p_3}; \quad v_2 = \tfrac{p_2 z_1 + p_1 v_1 + mcw_1}{p_0 + p_3}; \\ u_2 &= \tfrac{p_1 u_1 - p_2 w_1 + mcz_1}{p_0 + p_3}; \quad w_2 = \tfrac{p_1 w_1 + p_2 u_1 - mcv_1}{p_0 + p_3}. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

6. Условие (3.4.13) было получено суммированием соотношений (3.4.7) и (3.4.8). Беря разность этих же соотношений, получаем

$$z_2^2 + v_2^2 + u_2^2 + w_2^2 = p_0 - p_3. \tag{3.4.15}$$

Подставляя сюда (3.4.15), получаем известное релятивистское соотношение между массой, энергией и импульсом частицы.

3.5 Прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве

Отметим, что здесь пока еще не было дифференциальных уравнений движения, тем не менее, опираясь на изложенный материал, можно ввести соотношение, являющееся прообразом известного уравнения Дирака в импульсном пространстве. Это позволяет взглянуть на эти уравнения под новым углом зрения [14].

Формально запишем в ковариантном спинтензорном виде связь между двумя парами компонент β_s и i^s, входящих в определение столбца Ψ (3.2.1) для массивной частицы,

$$\beta_{\dot r} = K_{\dot r s} i^s \to \begin{pmatrix} \beta_{\dot 1} \\ \beta_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot 1 1} & K_{\dot 1 2} \\ K_{\dot 2 1} & K_{\dot 2 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}. \tag{3.5.1}$$

Всегда можно подобрать матрицу $K_{\dot r s}$ с комплексными коэффициентами так, чтобы выполнялось это соотношение.

Пусть i^s и $\beta_{\dot r}$ характеризуют одну и ту же частицу. Это означает, что в ее собственной системе отношений выполняются соотношения (3.3.8). Компоненты i^s и $\beta_{\dot r}$ в произвольной системе отношений выражаются через компоненты в собственной системе отношений согласно формуле (3.4.1), т.е.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0+b_3)i_c^1 + (b_1-ib_2)i_c^2 \\ (b_1+ib_2)i_c^1 + (b_0-b_3)i_c^2 \end{pmatrix}; \\
&\begin{pmatrix} \beta_{\dot 1} \\ \beta_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_0-b_3)i_c^1 - (b_1-ib_2)i_c^2 \\ -(b_1+ib_2)i_c^1 + (b_0+b_3)i_c^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.5.2}
$$

Подставляя (3.5.2) в (3.5.1), имеем два комплексных соотношения. В каждом из них приравняем слева и справа коэффициенты отдельно при параметрах i_c^1 и i_c^2. В итоге получаем четыре уравнения для четырех компонент

$$
\begin{aligned}
&K_{\dot 1 1}(b_0+b_3) + K_{\dot 1 2}(b_1+ib_2) = b_0-b_3; \\
&K_{\dot 1 1}(b_1-ib_2) + K_{\dot 1 2}(b_0-b_3) = -(b_1-ib_2); \\
&K_{\dot 2 1}(b_0+b_3) + K_{\dot 2 2}(b_1+ib_2) = -(b_1+ib_2); \\
&K_{\dot 2 1}(b_1-ib_2) + K_{\dot 2 2}(b_0-b_3) = b_0+b_3.
\end{aligned}
\tag{3.5.3}
$$

Детерминант Δ этого уравнения согласно (2.7.3)

$$
\Delta = \left(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\right)^2 = 1. \tag{3.5.4}
$$

Решение уравнений (3.5.3) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} K_{\dot 1 1} & K_{\dot 1 2} \\ K_{\dot 2 1} & K_{\dot 2 2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1+2b_2(b_0-b_3) & -2b_0(b_1-ib_2) \\ -2b_0(b_1+ib_2) & -1+2b_0(b_0+b_3) \end{pmatrix} \equiv \\
&\equiv \sigma^{\mu}_{(-)} u_\mu,
\end{aligned}
\tag{3.5.5}
$$

где $\sigma^{\mu}_{(-)} = \{I_2, -\sigma^i\}$ — набор из четырех 2-рядных матриц, а четыре компоненты u_μ означают

$$
u_0 = 2b_0^2 - 1; \quad u_i = 2b_0 b_i. \tag{3.5.6}
$$

Легко убедиться, что компоненты u_μ обладают свойством

$$
u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1. \tag{3.5.7}
$$

Для частного случая псевдоповорота вокруг первой оси (2.7.9)

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \cosh\theta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\
u_1 &= \sinh\theta_1 = \tfrac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \\
u_2 &= u_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.5.8}
$$

Эти формулы позволяют интерпретировать u_μ как компоненты 4-скорости собственной системы отношений частицы (т.е. ее самой) относительно используемой системы отношений.

Вводя 2-компонентные столбцы

$$\Psi_1 \equiv \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}; \quad \Psi_2 \equiv \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{3.5.9}$$

и умножая (3.5.1) на коэффициент m_0c, имеем

$$\Psi_2 m_0 c = \sigma^\mu_{(-)} m_0 c u_\mu \Psi_1 \to \sigma^\mu_{(-)} p_\mu \Psi_1 - m_0 c \Psi_2 = 0, \tag{3.5.10}$$

где введено обозначение

$$p_\mu = m_0 c u_\mu.$$

Совершенно аналогично можно найти коэффициенты $K^{s\dot{r}}$ для обратного к (3.5.1) соотношения

$$i^s = K^{s\dot{r}} \beta_{\dot{r}} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix}. \tag{3.5.11}$$

Подставляя сюда выражения (3.5.2) и расписывая уравнения типа (3.5.4), находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K^{1\dot{1}} & K^{1\dot{2}} \\ K^{2\dot{1}} & K^{2\dot{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 + 2b_0(b_0 + b_3) & 2b_0(b_1 - ib_2) \\ 2b_0(b_1 + ib_2) & -1 + 2b_0(b_0 - b_3) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \sigma^\mu_{(+)} u_\mu, \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

где $\sigma^\mu_{(+)} = \{I_2, +\sigma^i\}$. Опять умножая (3.5.11) на коэффициент m_0c, имеем

$$\Psi_1 m_0 c = \sigma^\mu_{(+)} m_0 c u_\mu \Psi_2 \to \sigma^\mu_{(+)} p_\mu \Psi_1 = 0. \tag{3.5.13}$$

Объединим 2-компонентные соотношения (3.5.10) и (3.5.13) в одно 4-компонентное выражение. Вспоминая введенные в разделе 3.2 представления матриц Дирака, имеем

$$p_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{(+)} \\ \sigma^\mu_{(-)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} - m_0 c \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0 \to$$

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} + m_0 c)\, \Psi = 0. \qquad (3.5.14)$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с общеизвестным *уравнением Дирака для свободной частицы в импульсном пространстве.* Заметим, что использование второй возможной связи двух элементов, образующих античастицу согласно (3.3.9), приводит к тому же уравнению (3.5.14), но со знаком минус перед вторым слагаемым справа.

Константа $m_0 c$, введенная в (3.5.10) и (3.5.13), совпадает со значением спинорного инварианта (3.2.3). Действительно, комбинация $\sigma^{\mu} p_{\mu}$ уже встречалась в представлении спинтензорной матрицы (2.6.3). Расписывая компоненты $B^{s\dot{r}}$ через параметры элементов и умножая эту матрицу на столбец Ψ_2, имеем

$$\sigma^{\mu}_{(+)} p_{\mu} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot{1}} \\ \beta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \left(\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1\right) \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix},$$

что совпадает с (3.5.13). Аналогично можно проинтерпретировать и соотношение (3.5.10). Таким образом, введенная константа означает

$$m_0 c = i^1 k^2 - i^2 k^1.$$

Очевидно, что умножив (3.5.14) слева на матрицу $\gamma^{\mu} p_{\mu} - m_0 c$, получаем

$$\left(g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} - m_0^2 c^2\right) \Psi = 0 \rightarrow \left(\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} - m_0^2 c^2\right) \Psi = 0, \qquad (3.5.15)$$

что соответствует *уравнению Клейна-Фока* в импульсном пространстве, или, что эквивалентно, известному релятивистскому соотношению между компонентами 4-импульса частицы.

3.6 Бинарная геометрофизика и твисторная программа Пенроуза

1. В современной литературе довольно широко представлены исследования по твисторной программе Р.Пенроуза [46, 47, 61]. Эта программа в ряде аспектов пересекается с развиваемой здесь бинарной геометрофизикой. Это относится как к идеологической части теорий, так и к ряду технических средств, используемых для их построения. Близость этих двух программ проявляется, во-первых, в одинаковом понимании классического пространства-времени как некой вторичной конструкции, которую нужно получить из более первичных понятий, используемых

в физике микромира. Во-вторых, в обеих программах в качестве более первичных понятий выступают 2-компонентные (комплексные) спиноры, более того, именно пары 2-компонентных спиноров. В программе Пенроуза они называются *твисторами.*

Так, обосновывая свою программу Р.Пенроуз пишет: "Если единый подход к квантовой физике и геометрии пространства-времени существует, то тип математического описания, пригодный для одной из них, должен подходить и для другой. Один из главных побудительных мотивов развития теории твисторов состоит в том, что она дает математическое описание физики, которое базируется целиком на *комплексной* структуре; при этом геометрия четырехмерного пространства-времени и квантовомеханический принцип суперпозиции возникают как тесно связанные аспекты этой комплексной твисторной структуры" [61, с.13-14]. В другой работе Пенроуз с сотрудниками писал: "Мы надеемся, что развитие твисторной теории приведет в конечном счете к построению лоренцевых многообразий, которые будут служить моделями пространства-времени" [61, с.132].

Вместе с тем имеются и существенные различия как в исходных положениях, так и в содержании двух программ. Отсылая читателя к оригинальным работам Р.Пенроуза и его сторонников [46, 61], где изложены мотивы и основные результаты теории твисторов, ограничимся лишь кратким сопоставлением основных понятий и соотношений в двух теориях.

2. Как уже отмечалось, *твистор* Z^α в теории Пенроуза образован парой 2-компонентных величин: спинором ω^s и ковариантным спинором $\pi_{\dot{s}}$ из сопряженного пространства, т.е. $Z^\alpha = (\omega^s, \pi_{\dot{r}})$. В теории Пенроуза из этих величин конструируются моменты ($\vec{\omega}$) и импульсы ($\vec{\pi}$) частиц. Принципиально важным моментом в такой теории является переход от твисторов к координатному пространству-времени. Аналогичная задача решается и в бинарной геометрофизике, однако иным способом. Пенроуз предлагает ее решать с помощью так называемого *основного соотношения теории твисторов*[4]

$$\omega^s = i x^{s\dot{r}} \pi_{\dot{r}}, \tag{3.6.1}$$

где $x^{s\dot{r}}$ – смешанный спинтензор второго ранга, компоненты которого трактуются как комбинации из четырех координат $\tilde{x}^\mu$ классического пространства-времени

$$x^{s\dot{r}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 + \tilde{x}^3 & \tilde{x}^1 - i\tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2 & \tilde{x}^0 - \tilde{x}^3 \end{pmatrix} \equiv \sigma_{(+)\mu} \tilde{x}^\mu. \tag{3.6.2}$$

[4] Мотивировкой написания этого соотношения послужил вид классического выражения для связи импульса и момента частицы $\vec{\omega} = [\vec{x}\vec{\pi}]$.

В основном соотношении теории твисторов отражена идеология программы Р.Пенроуза: “Точки пространства-времени восстанавливаются при этом по твисторному пространству (они отвечают определенным линейным подпространствам), но являются вторичным понятием по отношению к твисторам”[61, с.133].

Соотношения (3.6.1) и (3.6.2) очень напоминают выражения (3.5.13) и (3.5.11), возникавшие при выводе прообраза уравнения Дирака. Отсюда сразу видно принципиальное отличие теории Пенроуза от содержания этой главы. Здесь рассматривалось импульсное пространство, а у Пенроуза речь идет о переходе к координатному пространству. Из сравнения формул (3.5.13) и (3.6.1) в двух теориях видно, что сопоставляются следующие выражения:

$$m_0 c K^{s\dot r} = \sigma^{\mu}_{(+)} p_\mu \leftrightarrow x^{s\dot r} = \sigma_{(+)\mu}\tilde{x}^{\mu}. \tag{3.6.3}$$

Кроме того, пенроузовский твистор Z^α сопоставляется нашему 4-компонентному столбцу:

$$\Psi \leftrightarrow Z^\alpha; \quad i^s \leftrightarrow \omega^s; \quad \beta_{\dot r} \leftrightarrow i\pi_{\dot r}. \tag{3.6.4}$$

3. Проанализируем более подробно соотношение понятий на основе указанных соответствий. Для этого решим основное соотношение теории твисторов (3.6.1) в терминах бинарной геометрофизики. Это значит, что будем решать уравнение

$$i^s = K^{s\dot r}\beta_{\dot r} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} æ_0 + æ_3 & æ_1 - iæ_2 \\ æ_1 + iæ_2 & æ_0 - æ_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\dot 1} \\ \beta_{\dot 2} \end{pmatrix}, \tag{3.6.5}$$

где матрица $K^{s\dot r}$ представлена через вещественные параметры $æ_0$, $æ_1$, $æ_2$, $æ_3$ аналогично тому, как в (3.6.2) $x^{s\dot r}$ записано через $\tilde{x}^\mu$. Неизвестными будем считать коэффициенты $æ_\mu$. Поскольку в теории Пенроуза условия типа (3.5.2) на i^s и $\beta_{\dot s}$ не накладываются, теперь получается иная ситуация. Представим i^s и $\beta_{\dot s}$ через восемь вещественных параметров

$$\begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} y_1 + iy_2 \\ y_3 + iy_4 \end{pmatrix} \sim i\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно имеем два уравнения, которые можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_3 - iz_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} æ_0 + æ_3 & æ_1 - iæ_2 \\ æ_1 + iæ_2 & æ_0 - æ_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iy_1 - y_2 \\ iy_3 - y_4 \end{pmatrix}. \tag{3.6.6}$$

4. Приравняем в каждом из этих уравнений слева и справа отдельно вещественные и мнимые части и получим 4 вещественных уравнения для 4 неизвестных. Легко убедиться, что детерминант этой системы тождественно равен нулю. Нетривиальные решения существуют при выполнении условия

$$z_1 y_1 - z_2 y_2 + z_3 y_3 - z_4 y_4 = 0. \tag{3.6.7}$$

Вводя элементы α и k с параметрами, комплексно сопряженными соответствующим параметрам i^s и β^s, можно убедиться что в бинарной геометрофизике условие (3.6.7) означает

$$\overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{3.6.8}$$

В работах Пенроуза твистору $Z^\alpha = \{\omega^1, \omega^2; \pi_1, \pi_2\}$ соответствует сопряженный твистор $\overline{Z}_\alpha = \{\pi_1, \pi_2; \omega^1, \omega^2\}$ и определено скалярное произведение твистора на сопряженный твистор

$$\overline{Z}_\alpha Z^\alpha = \omega^s \pi_s + \omega^{\dot{s}} \pi_{\dot{s}} \equiv 2s, \tag{3.6.9}$$

названное *спиральностью*. Подставляя в (3.6.7) компоненты $\omega^{\dot{s}}$ и $\pi^{\dot{s}}$, выраженные через вещественные величины, убеждаемся, что условие (3.6.7) означает одновременное равенство нулю следующих выражений:

$$\overline{Z}_\alpha Z^\alpha = 2s = 0 \to \overline{\Psi}\gamma^5\Psi = 0. \tag{3.6.10}$$

Поскольку в (3.6.7) имеются два знака плюс и два знака минус, говорят, что твисторы — объекты в 4-мерном многообрразии с сигнатурой $(+ - + -)$ с равным нулю квадратом.

5. Пусть условие (3.6.7) выполнено. Тогда из (3.6.6) можно найти три компоненты $æ_1$, $æ_2$ и $æ_3$ как функции четвертой компоненты $æ_0$:

$$\begin{aligned} æ_1 &= -\frac{æ_0 k^1(k\beta) - M^1}{k^0(k\beta)}; \\ æ_2 &= \frac{æ_0 k^2(k\beta) - M^2}{k^0(k\beta)}; \\ æ_3 &= \frac{æ_0 k^3(k\beta) - M^3}{k^0(k\beta)}. \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Здесь использованы введенные в (2.6.1) обозначения для компонент 4-мерного изотропного вектора $k^\mu(k\beta)$, построенного на сопряженной паре элементов k и β, и 3-мерной величины M^i, введенной согласно (3.4.22).

6. В теории Пенроуза вместо $k^\mu(k\beta)$ следует писать координаты x^μ, которые удовлетворяют аналогичному условию

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \tag{3.6.12}$$

т.е. x^μ образуют изотропную линию в координатном пространстве-времени. Кроме того, следует положить $x^0 = æ_0$, тогда вместо (3.6.11) следует писать

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= x^1 - \tfrac{M^1}{x^0}; \\ \tilde{x}^2 &= x^2 - \tfrac{M^2}{x^0}; \\ \tilde{x}^3 &= x^3 - \tfrac{M^3}{x^0}. \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Говорят, что решение (3.6.13) определяет флаг, древко которого направлено вдоль изотропного луча x^μ, а полотнище ориентировано вдоль M^i, характеризующего ориентацию спина частицы. Напомним, уже в обозначениях твистора $Z^\alpha = (\omega^s, \pi_{\dot{s}})$ заложено, что из спинора π^s (и ему сопряженного) строится изотропный вектор (импульс $k^\mu(k\beta)$), определяющий направление распространения спинорной частицы, а из спинора ω^s совместно с π^s (и им сопряженными) строится вектор момента M^i.

Легко убедиться, что беря вместо (3.6.5) обратное ему соотношение типа $\beta_{\dot{r}} = K_{\dot{r}s} i^s$, будем иметь обратную картину, т.е. получится изотропный импульс $k^\mu(i\alpha)$, сопоставленный с другой парой элементов $(i,\ \alpha)$, величина же M^i по-прежнему будет определяться всей четверкой элементов: i, α, k, β.

7. Подводя итог проведенному сопоставлению, следует подчеркнуть, что в теории твисторов две пары элементов (i,α) и (k,β) не связаны в одну массивную частицу, т.е. *твисторами описываются пары свободных нейтрино.* Этот вывод лишь частично перекрывается с интерпретацией, даваемой Пенроузом: "Твистор (простейшего типа), по-существу, можно представить себе "классически" как безмассовую частицу в свободном состоянии; при этом частица может обладать внутренним спином $\cdots$" [61, с.133]. Отличие состоит в том, что с позиции бинарной геометрофизики твистором описывается не одна, а две безмассовые частицы (два нейтрино). Характерно, что в теории твисторов рассматривается именно такой случай, когда инвариант $\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$, определенный для двух нейтрино, равен нулю. Отметим, что с точки зрения бинарной геометрофизики для одного нейтрино невозможно построить тензор $\overline{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ (или вектор M^i), — такие величины по определению (3.3.16) можно ввести лишь для двух пар элементов.

Но самое важное различие бинарной геометрофизики и теории твисторов состоит в исходных посылках теорий. В теории Пенроуза твистор постулируется, а в бинарной геометрофизике исходными являются БСКО, среди которых ключевую роль играют БСКО ранга (3,3). В их рамках понятия спиноров и биспиноров возникают автоматически.

Глава 4

Классическое пространство-время

Назначение этой главы состоит в том, чтобы опираясь на понятия БСКО указать путь построения теории координатного пространства-времени. При этом оказывается, что в формировании категории классического пространства-времени ключевую роль играет БСКО минимального ранга (2,2). Только благодаря ей осуществляется переход от двух моментов времени (начало – конец) БСКО ранга (3,3) (и более высоких рангов) к развернутой во времени картине пространственно-разнесенных событий (процессов). В этой главе дается систематическое изложение теории БСКО ранга (2,2) и тех следствий из нее, которые необходимы для построения классического пространства- времени. Здесь же показывается, что БСКО ранга (2,2) можно понимать как подсистему БСКО ранга (3,3).

4.1 Бинарная система комплексных отношений ранга (2,2)

1. Обсудим наиболее важные черты БСКО наименьшего ранга (2,2). Согласно изложенной в части 1 общей теории бинарных систем отношений закон БСКО ранга (2,2) имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.1.1)$$

а парные отношения [1]

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1, \tag{4.1.2}$$

где i^1 и α^1 – в общем случае комплексные параметры соответственно элементов $i \subset \mathcal{M}$ и $\alpha \subset \mathcal{N}$. Подчеркнем, каждый элемент характеризуется только одним параметром.

2. На первый взгляд, казалось бы, следует говорить о двух теориях: БСКО ранга (2,2) и БСКО ранга (2,2;a), – однако оказывается, что эти две возможности следует понимать как две стороны одной медали. Чтобы это показать, перепишем закон (4.1.1) в форме

$$u_{i\alpha}u_{k\beta} = u_{k\alpha}u_{i\beta}$$

и прологарифмируем его. В итоге будем иметь

$$\ln u_{i\alpha} + \ln u_{k\beta} - \ln u_{k\alpha} - \ln u_{k\beta} = 0 \to$$

$$\to a_{i\alpha} + a_{k\beta} - a_{k\alpha} - a_{i\beta} = 0, \tag{4.1.3}$$

где введены обозначения:

$$Ca_{i\alpha} = \ln u_{i\alpha}; \quad Ca_{k\beta} = \ln u_{k\beta}; \cdots. \tag{4.1.4}$$

Здесь C – произвольная универсальная константа. Вспоминая вид $u_{i\alpha}$, т.е. (4.1.2), приходим к представлению $a_{i\alpha}$ через новые параметры:

$$a_{i\alpha} = \frac{1}{C}(\ln i^1 + \ln \alpha^1) \equiv i_0 + \alpha_0, \tag{4.1.5}$$

где

$$i_0 = \frac{1}{C}\ln i^1; \quad \alpha_0 = \frac{1}{C}\ln \alpha^1.$$

Очевидно, (4.1.3) можно понимать как закон БСКО ранга (2,2;a) с парным отношением (4.1.5), который можно переписать в форме

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.1.6}$$

соответствующей общему виду законов (1.2.3) для вырожденных БСКО.

Заметим, что можно было бы исходить от закона (4.1.6) и парного отношения (4.1.5) и, идя обратным путем, получить (4.1.1) и (4.1.2).

---

[1] Вывод закона и парного отношения БСКО ранга (2,2) приведен в Приложении A.1.

3. В связи с тем, что парные отношения комплексные, напомним определение натурального логарифма от комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$:

$$\ln z = \ln \rho + i(\varphi + 2n\pi), \tag{4.1.7}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Эта функция многозначная, поэтому часто ограничиваются главным значением φ, когда $0 < \varphi \leq 2\pi$.

Исходя из этого можно утверждать, что закон (4.1.3) БСКО ранга (2,2;a) *распадается на два закона БСКО* рангов (2,2;a)

$$\tilde{\Phi} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re\tilde{\Phi} = a^{(1)}_{i\alpha} + a^{(1)}_{k\beta} - a^{(1)}_{k\alpha} - a^{(1)}_{i\beta} = 0; \\ \\ Im\tilde{\Phi} = a^{(2)}_{i\alpha} + a^{(2)}_{k\beta} - a^{(2)}_{k\alpha} - a^{(2)}_{i\beta} = 0, \end{array} \right\} \tag{4.1.8}$$

где для первой БСКО имеем

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{i\alpha} &= Re\left(\frac{\ln u_{i\alpha}}{C}\right) = Re\left(\frac{\ln i^1}{C}\right) + Re\left(\frac{\ln \alpha^1}{C}\right) = \\ &= \frac{1}{C}(\ln \rho_i + \ln \rho_\alpha) \equiv i^{(1)}_0 + \alpha^{(1)}_0. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Здесь положено, что константа C вещественная.

Для второй БСКО имеем аналогично

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{i\alpha} &= Im\left(\frac{\ln u_{i\alpha}}{C}\right) = Im\left(\frac{\ln i^1}{C}\right) + Im\left(\frac{\ln \alpha^1}{C}\right) = \\ &= \frac{1}{C}(\varphi_i + \varphi_\alpha) \equiv i^{(2)}_0 + \alpha^{(2)}_0, \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где фазы понимаются в своих главных значениях.

4. Как и в случае БСКО ранга (3,3), в теории БСКО ранга (2,2) важную роль играют фундаментальные отношения как отличные от нуля миноры в законе БСКО. Для случая ранга (2,2;a) можно построить фундаментальное 2x2-отношение вида

$$\left| \begin{array}{cc} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{array} \right| = (i_0 - k_0)(\beta_0 - \alpha_0) \equiv \binom{\alpha\beta}{ik}_0, \tag{4.1.11}$$

которое, как и прежде, распадается на произведение однородных комбинаций из параметров элементов одного сорта.

Для БСКО ранга (2,2) в качестве фундаментальных отношений выступают сами парные отношения, однако для этого случая можно образовать отличное от нуля 2x2-отношение вида

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = (i^1 - k^1)(\beta^1 - \alpha^1) \equiv \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}. \qquad (4.1.12)$$

5. Рассмотрим возможные *преобразования параметров* элементов, оставляющие инвариантными либо определенные выше 2x2-отношения, либо сами парные отношения. Эти преобразования, как и ранее, можно понимать обусловленными изменениями наборов эталонных элементов в двух множествах БСКО. Начнем с преобразований, сохраняющих 2x2-отношения.

а) Поскольку (4.1.11) и (4.1.12) расщепляются на произведения комбинаций параметров из разных множеств, то можно говорить о преобразованиях параметров в каждом множестве в отдельности. Легко видеть, (4.1.11) и (4.1.12) остаются инвариантными соответственно при преобразованиях:

$$i'_0 = i_0 + a_0; \quad \alpha'_0 = \alpha_0 + \tilde{a}_0; \qquad (4.1.13)$$

$$i'^1 = i^1 + a^1; \quad \alpha'^1 = \alpha^1 + \tilde{a}^1, \qquad (4.1.14)$$

где a_0, $\tilde{a}_0$, a^1, $\tilde{a}^1$ – произвольные комплексные параметры, одинаковые для преобразований всех элементов соответствующих множеств. Такие преобразования естественно назвать *глобальными трансляциями.*

б) Кроме того, можно ввести увязанные друг с другом преобразования в двух множествах, оставляющие инвариантными 2x2-отношения:

$$i'_0 = b_0 i_0; \quad \alpha'_0 = b_0^{-1}\alpha_0; \qquad (4.1.15)$$

$$i'^1 = b^1 i^1; \quad \alpha'^1 = (b^1)^{-1}\alpha^1 \qquad (4.1.16)$$

соответственно для рангов (2,2;а) и (2,2). Здесь опять b^1 и b_0 произвольные комплексные коэффициенты, одинаковые для всех элементов.

в) Парные отношения в двух разновидностях БСКО остаются инвариантными относительно более узких преобразований. Так, для БСКО ранга (2,2) парные отношения допускают преобразования (4.1.16), тогда как для ранга (2,2;а) допустимы суженные преобразования (4.1.13):

$$i'_0 = i_0 + a_0; \quad \alpha'_0 = \alpha_0 - a_0, \qquad (4.1.17)$$

т.е. при $\tilde{a}_0 = -a_0$. Вспоминая связь параметров, находим, что параметры преобразований (4.1.16) и (4.1.17) выражаются друг через друга

$$a_0 = \frac{1}{C} \ln b^1. \tag{4.1.18}$$

4.2 Переход к унарным системам вещественных отношений

1. Чтобы в рамках бинарной геометрофизики проинтерпретировать физически (и геометрически) БСКО ранга (2,2) будем следовать универсальному правилу, которое, напомним, предполагает переход от БСКО к производной от нее унарной системе вещественных отношений (УСВО) путем склейки пар элементов из разных множеств. И только затем устанавливается, какие физические (и геометрические) понятия соответствуют вещественным отнеошениям построенной УСВО. В разделе 1.6 была изложена методика перехода к унарным системам отношений. Она включает в себя, во-первых, определение склейки элементов из двух множеств бинарной системы отношений, во-вторых, формирование вещественных отношений между склеенными совокупностями из разнородных элементов через отношения первичной бинарной системы и, в-третьих, нахождение закона УСВО.

2. Применим эту методику сначала к случаю БСКО ранга (2,2;a). Не лишаясь общности, будем полагать, что ее парные отношения вещественные. Начнем с условия склейки. Постулируем, что элементы из двух множеств: i и α, k и β, j и γ, ... находятся "в парах" (т.е. являются связанными), если их параметры удовлетворяют условиям:

$$i_0 = -\alpha_0; \quad k_0 = -\beta_0; \quad j_0 = -\gamma_0; \quad \cdots. \tag{4.2.1}$$

Тогда парные отношения между связанными элементами обращаются в нуль

$$a_{i\alpha} = a_{k\beta} = a_{j\gamma} = \cdots = 0. \tag{4.2.2}$$

Очевидно, это свойство инвариантно относительно преобразований (4.1.17).

Определим отношения между связанными парами непосредственно через первичные парные отношения следующим образом

$$S_{ik} = a_{i\beta} = -a_{k\alpha} = -S_{ki}, \tag{4.2.3}$$

т.е. это отношение антисимметрично. Здесь и в дальнейшем связанные пары будем помечать латинскими индексами, т.е. индексами элементов из множества $\mathcal{M}$.

При таком условии склейки бинарность системы отношений оказывается завуалированной. Получается так, что парные отношения (4.2.3) определены для элементов как из разных множеств, так и отдельно между элементами внутри множества $\mathcal{M}$:

$$S_{ik} = i_0 - k_0 \equiv S_i - S_k, \tag{4.2.4}$$

и между элементами внутри множества $\mathcal{N}$:

$$S_{\alpha\beta} = \alpha_0 - \beta_0 \equiv S_\alpha - S_\beta = k_0 - i_0 = -S_{ik}, \tag{4.2.5}$$

где введены единые параметры УСВО в соответствии с условиями склейки (4.2.1):

$$S_i = i_0 = -\alpha_0 = -S_\alpha; \quad S_k = k_0 = -\beta_0 = -S_\beta. \tag{4.2.6}$$

3. Рассмотрим закон (4.1.6) БСВО ранга (2,2;a) для нескольких частных наборов элементов.

а) Пусть закон записан для двух пар склеенных элементов (i,α) и (k,β), тогда имеем

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ki} & 0 \end{vmatrix} = S_{ki} + S_{ik} = 0, \tag{4.2.7}$$

т.е. в этом случае закон означает антисимметрию парных отношений.

б) Пусть в законе (4.1.6) одна пара элементов (i,α) склеена, а другие два элемента j и β – нет, тогда, сопоставляя элементу β четвертый, склеенный с ним элемент k, имеем

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} \end{vmatrix} = S_{ik} + S_{kj} + S_{ji} = 0. \tag{4.2.8}$$

Это соотношение выражает известное *свойство расстояний между тремя точками на ориентированной линии.*

в) Можно показать, что закон (4.1.6) для четырех элементов, не находящихся друг с другом в парах, сводится к случаю (4.2.8).

4. К соотношению (4.2.8) можно придти иначе. Поскольку был осуществлен переход к одному множеству склеенных элементов, и поскольку каждый из новых элементов характеризуется лишь одним параметром, то ранг УСВО должен быть равен 3. Все такие УСВО ранга 3 известны. Их законы выписаны в главе 1. Перебирая их, приходим к выводу, что в данном случае

имеем *одномерную симплектическую геометрию*, закон которой (1.4.12) для трех точек i, k, j имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{ik} & S_{ij} \\ 1 & S_{ki} & 0 & S_{kj} \\ 1 & S_{ji} & S_{jk} & 0 \end{vmatrix} = -(S_{ik} + S_{kj} + S_{ji})^2, \qquad (4.2.9)$$

что соответствует (4.2.8). Таким образом осуществлен переход от БСКО ранга (2,2;a) к УСВО ранга (3).

5. Можно осуществить переход к УСВО от другой версии рассматриваемой БСКО, т.е. ранга (2,2). Чтобы это сделать, положим, что пары элементов i и α, k и β, j и γ, $\cdots$ связаны (сшиты) друг с другом, если их параметры комплексно сопряжены, т.е.

$$i^1 = \alpha^{*1}; \quad k^1 = \beta^{*1}; \quad j^1 = \gamma^{*1}; \quad \cdots. \qquad (4.2.10)$$

Определим вещественные парные отношения между составными элементами (i, α) и (k, β) следующим образом

$$w_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i\beta} + u_{k\alpha}) = \frac{1}{2}(i^1\beta^1 + k^1\alpha^1). \qquad (4.2.11)$$

Очевидно, что и в этом случае, опираясь на (4.2.10), можно определить системы отношений внутри каждого из двух множеств.

Перейдем от произвольных комплексных параметров к вещественным числам:

$$\begin{aligned} i^1 = x_i + iy_i; \quad &\to \quad \alpha^1 = x_i - iy_i; \\ k^1 = x_k + iy_k; \quad &\to \quad \beta^1 = x_k - iy_k, \end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

тогда парное отношение (4.2.11) принимает вид

$$w_{ik} = x_i x_k + y_i y_k. \qquad (4.2.13)$$

Естественно определить внутренние отношения для каждого составного элемента в виде, согласующимся с (4.2.11):

$$w_{ii} = i^1\alpha^1 = x_i^2 + y_i^2; \quad w_{kk} = k^1\beta^1 = x_k^2 + y_k^2. \qquad (4.2.14)$$

Легко видеть, что (4.2.13) означает скалярное произведение двух векторов в 2-мерном евклидовом пространстве с квадратами длин, определенными в (4.2.14). Эти свойства можно выразить в виде равенства нулю определителя Грама, записанного для трех произвольных элементов:

$$\begin{vmatrix} w_{ii} & w_{ik} & w_{ij} \\ w_{ki} & w_{kk} & w_{kj} \\ w_{ji} & w_{jk} & w_{jj} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2.15}$$

Для перехода к УСВО введем дополнительные условия на внутренние отношения:

$$w_{ii} = w_{kk} = w_{jj} = \cdots = 1, \tag{4.2.16}$$

тогда (4.2.15) превращается в закон УСВО ранга 3:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & w_{ik} & w_{ij} \\ w_{ki} & 1 & w_{kj} \\ w_{ji} & w_{jk} & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4.2.17}$$

соответствующий 1-мерной геометрии на окружности единичного радиуса. Напомним, что вместо единицы можно было бы взять любое другое положительное число. Легко убедиться, что закон (4.2.17) соответствует соотношению между разностями фаз (углов) для трех единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ik} + \varphi_{kj}. \tag{4.2.18}$$

Заметим, что другой бинарной системе вещественных отношений ранга (2,2;а) в (4.1.8) (для модулей) соответствует тот случай, когда БСКО ранга (2,2) характеризуется вещественными парными отношениями и, следовательно, вещественными параметрами элементов.

4.3 БСКО ранга (2,2) как подсистема БСКО ранга (3,3)

1. В предыдущих двух разделах БСКО ранга (2,2) рассматривалась как самостоятельная система. Однако, оказывается, эту БСКО минимального ранга можно рассматривать как подсистему БСКО ранга (3,3) аналогично тому, как в теории групп некоторые группы являются подгруппами более общих групп. Для того, чтобы это показать, во-первых, нужно продемонстрировать, как в рамках БСКО ранга (3,3) возникают параметры, соответствующие элементам БСКО ранга (2,2), и, во-вторых,

следует указать критерий деления элементов с такими параметрами на два множества. Покажем, как решаются эти вопросы.

2. Прежде всего, отметим, что закон БСКО ранга (3,3) в (2.2.1) позволяет перейти от одного набора параметров элементов к другому согласно соотношениям:

$$\begin{array}{lll} i^s \to \tilde{i}^s = C_i i^s; & k^s \to \tilde{k}^s = C_k k^s; & j^s \to \tilde{j}^s = C_j j^s; \\ \alpha^s \to \tilde{\alpha}^s = C_\alpha \alpha^s; & \beta^s \to \tilde{\beta}^s = C_\beta \beta^s; & \gamma^s \to \tilde{\gamma}^s = C_\gamma \gamma^s, \end{array} \tag{4.3.1}$$

так что, например,

$$\tilde{u}_{i\alpha} = \tilde{i}^1 \tilde{\alpha}^1 + \tilde{i}^2 \tilde{\alpha}^2 = C_i C_\alpha u_{i\alpha}, \tag{4.3.2}$$

где C_i, $\cdots$, C_γ – произвольные комплексные числа, сопоставляемые соответствующим элементам. Действительно, для новых параметров закон БСКО ранга (3,3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} & \tilde{u}_{i\gamma} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} & \tilde{u}_{k\gamma} \\ \tilde{u}_{j\alpha} & \tilde{u}_{j\beta} & \tilde{u}_{j\gamma} \end{vmatrix} = \\ &= C_i C_k C_j C_\alpha C_\beta C_\gamma \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Закон выполняется, если он имеет место для прежних параметров.

3. В главе 3 на параметры элементов, описывающих одну и ту же свободную частицу, был наложен ряд дополнительных условий. Рассмотрим, как они отражаются на значениях коэффициентов C_i, $\cdots$, C_γ, если потребовать, чтобы новые параметры (с тильдой) удовлетворяли тем же условиям. Положим, что по-прежнему начальные и конечные состояния описываются комплексно сопряженными параметрами, тогда

$$\tilde{i}^s = (\tilde{\alpha}^s)^* \to C_i = C_\alpha^*; \quad \tilde{k}^s = (\tilde{\beta}^s)^* \to C_k = C_\beta^*; \cdots. \tag{4.3.4}$$

Положим также, что парные отношения для связанных элементов (в теории БСКО ранга (3,3)) при преобразованиях (4.3.1) не меняются, тогда из (4.3.2) и (4.3.4) следует

$$C_i C_\alpha = C_i C_i^* = 1; \quad C_k C_\beta = C_k C_k^* = 1; \quad \cdots, \tag{4.3.5}$$

т.е. параметры C_i, $\cdots$, C_γ являются комплексными числами *с модулем, равным единице*:

$$C_i = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = e^{-i\varphi_i}; \quad C_k = e^{i\varphi_k}; \cdots, \tag{4.3.6}$$

где $\varphi_i, \cdots$ – вещественные числа.

4. Потребуем, чтобы условия (3.3.2) (или (3.3.3)), накладываемые на элементы, описывающие частицу (античастицу), попрежнему удовлетворялись. Это означает

$$\tilde{i}^1\tilde{k}^2 - \tilde{i}^2\tilde{k}^1 = C_iC_kmc \to C_iC_k = 1. \qquad (4.3.7)$$

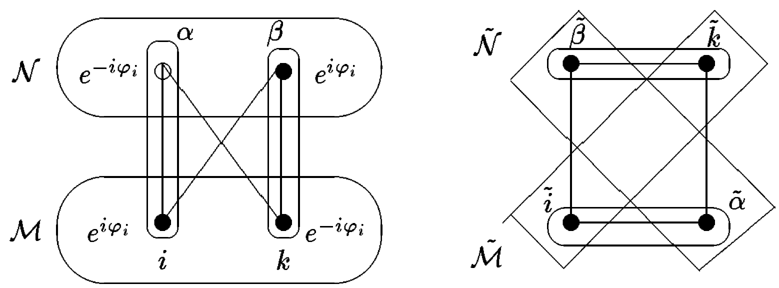
С учетом (4.3.5) отсюда получаем, что коэффициенты при параметрах одноименных элементов связаны между собой условиями:

$$C_i = C_k^* = e^{i\varphi_i}; \quad C_\alpha = C_\beta^* = e^{i\varphi_\alpha} = e^{-i\varphi_i}. \qquad (4.3.8)$$

При этих условиях 4-компонентные величины, определенные в (3.2.1), приобретают общие экспоненциальные множители:

$$\Psi \to \Psi e^{i\varphi}; \quad \Psi^\dagger \to \Psi^\dagger e^{-i\varphi}. \qquad (4.3.9)$$

Формулы (4.3.4) и (4.3.8) пояснены на рисунке 4.1а, где изображены четыре элемента, описывающие идеализированную свободную частицу в начальном и конечном состояниях. Показано,



а) БСКО ранга (3,3) б) БСКО ранга (2,2)

Рис. 4.1: Четверка элементов, описывающая состояния идеализированного массивного лептона, с позиций двух БСКО

что допустимые единичные по модулю коэффициенты совпадают у перекрестных элементов.

5. Ниже будет показано, что для *взаимодействующих* частиц упомянутые выше условия должны быть обобщены. Прежде всего, это касается условия комплексного сопряжения параметров элементов в начальных и в конечные состояниях, т.е. в общем случае должны быть изменены условия (4.3.4). Анализ показывает, что условия (4.3.7) должны быть сохранены, т.е. будем полагать, что при параметрах присутствуют экспоненциальные слагаемые, комплексно сопряженные для пар элементов (для левых

и правых компонент частицы):

$$C_i = C_k^* = e^{i\varphi_i}; \quad C_\beta = C_\alpha^* = e^{i\varphi_\beta}, \tag{4.3.10}$$

где $\varphi_i \neq \varphi_\beta$. *Эти экспоненциальные слагаемые будем считать параметрами элементов БСКО ранга (2,2).* Особо следует подчеркнуть, что они соответствуют *фазовой* (циклической) части БСКО ранга (2,2) в (4.1.8). Таким образом, каждому элементу из любого множества БСКО ранга (3,3) соответствует какой-то элемент БСКО ранга (2,2). При этом, вообще говоря, ниоткуда не следует, что эти элементы в рамках БСКО ранга (2,2) должны строго соответствовать двум множествам БСКО ранга (3,3).

6. Разделим все так введенные элементы на два множества БСКО ранга (2,2) следующим образом. Во-первых, элементы из пар, описывающих каждое из состояний массивного лептона, будем считать принадлежащими двум *разным* множествам. Так, пусть элемент i на рисунке 4.1а принадлежит множеству $\tilde{\mathcal{M}}$, а элемент k – множеству $\tilde{\mathcal{N}}$ БСКО ранга (2,2). Во-вторых, элементы из пар второго множества БСКО ранга (3,3) по отношению к уже установленным элементам первого множества БСКО ранга (3,3) отнесем к противоположным множествам БСКО ранга (2,2). В частности, для элементов, изображенных на рисунке 4.1, элемент α отнесем к множеству $\tilde{\mathcal{N}}$, а элемент β – к множеству $\tilde{\mathcal{M}}$ БСКО ранга (2,2). Присвоим всем элементам второй символ (с тильдой), характеризующий их принадлежность к одному из двух множеств БСКО ранга (2,2). Для изображенных на рисунке 4.1 элементов это означает

$$i \to \tilde{i}; \quad k \to \tilde{\alpha}; \quad \alpha \to \tilde{\beta}; \quad \beta \to \tilde{k}. \tag{4.3.11}$$

При этом согласно определению связанных пар (4.2.10) в теории БСКО ранга (2,2) элементы $\tilde{i}$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{k}$ и $\tilde{\beta}$ следует считать "сшитыми" друг с другом. Другими словами можно сказать, элементы БСКО ранга (3,3), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами разных множеств с точки зрения БСКО ранга (2,2), и, наоборот, элементы БСКО ранга (2,2), находящиеся в парах с точки зрения этой же БСКО, являются элементами одного и того же множества с точки зрения БСКО ранга (3,3) (см. рис. 4.1б).

7. С точки зрения БСКО ранга (2,2) между сшитыми парами элементов (между начальным и конечным состояниями лептона в теории БСКО ранга (3,3)) можно установить отношения, обобщающие (4.2.11), причем это можно сделать как в рамках

УСВО, так и в рамках унарной системы комплексных отношений. В последнем случае эти отношения можно задать в виде

$$\tilde{u}_{ik} = \tilde{k}\tilde{\alpha} = e^{i(\varphi_k - \varphi_i)}. \tag{4.3.12}$$

Очевидно, что в идеализированном варианте, соответствующем (4.3.6), это отношение равно единице.

От отношения (4.3.11) можно перейти к отношениям БСКО ранга (2,2;a) по описанным в разделе 4.1 рецептам, т.е.

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{C}\ln \tilde{u}_{ik} = \frac{i}{C}(\varphi_k - \varphi_i), \tag{4.3.13}$$

где C, напомним, некоторая константа из (4.1.4), которая может принимать как вещественные, так и комплексные значения.

4.4 Физическая интерпретация БСКО ранга (2,2)

1. Физическая интерпретация парных отношений БСКО ранга (2,2;a) опирается на установленное в (4.2.8) свойство аддитивности

$$S_{ij} = S_{ik} + S_{kj}. \tag{4.4.1}$$

Постулируем, что *парные отношения* $a_{i\beta} \equiv S_{ik}$ *БСКО ранга (2,2;a) в бинарной геометрофизике соответствуют действию между двумя состояниями (точками, событиями) одной и той же частицы.* Поскольку действие частицы с точностью до коэффициента равно длине интервала s_{ik} между двумя точками, то $a_{i\beta}$ геометрически интерпретируется как пропорциональное интервалу собственного времени t_{ik} между двумя событиями.

2. Изложенное в предыдущих разделах этой главы позволяет утверждать, что интерпретация парного отношения через действие имеет место для *фазовой части БСКО ранга (2,2;a)*. Возникает возможность пролить свет на две ипостаси БСКО ранга (2,2) — их можно понимать как *два аспекта теории: классический и квантовый*, – БСКО ранга (2,2;a) соответсвует классическому аспекту теории, а БСКО ранга (2,2) соответствует квантовому аспекту теории.

Действительно, классической аддитивности действия (4.4.1) соответствует квантовомеханический мультипликативный закон

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ij}\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{ik}\right] \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{kj}\right]. \tag{4.4.2}$$

В этом случае приобретает определенный смысл константа С в (4.1.4). Она выражается через постоянную Планка:

$$C = \frac{1}{\hbar}. \tag{4.4.3}$$

3. Принципиально важным моментом в данной интерпретации является исконно циклический характер зависимости парных отношений от действия, т.е. появление действия в показателе экспоненты с мнимой единицей. Именно так входит действие в формулы для квазиклассических приближений волновых функций частиц в квантовой механике. Это можно трактовать как *компактифицированность некой дополнительной размерности с координатой* $x^4 = S$, соответствующей параметрам БСКО ранга (2,2).

В этой связи следует вспомнить идею Ю.Б.Румера, изложенную в его "Исследованиях по 5-оптике"[52]. Он предлагал интерпретировать действие как 5-ю (здесь будем ее обозначать через x^4) координату, которая компактифицирована (замкнута) с периодом $\hbar$. Это была одна из первых попыток геометрического истолкования квантовой механики, оставшаяся незавершенной. Одной из причин неудачи этой попытки Румера, на наш взгляд, являлось желание связать эту 5-ю координату одновременно и с электромагнитным взаимодействием. Последнее же диктует использование другой дополнительной координаты (размерности).

4. Однако классическое действие не имеет компактифицированного характера. Если считать циклический характер действия первичным свойством материи, то возникает вопрос о механизме (причинах) перехода от компактифицированной размерности к некомпактифицированной в классической физике, т.е. о переходе от аддитивного закона (4.4.1) на ориентированной окружности к аддитивному закону на ориентированной прямой. В бинарной геоиетрофизике этот принципиально важный вопрос связан с проблемой интерпретации квантовой теории и с проблемой соотношения квантовой механики и теории классического пространства-времени. Это предполагается обсудить в другой части книги. Здесь же будем опираться на факт, что такой переход имеется.

5. Наличие двух понятий: компонент импульса p_μ, введенных в главе 3 в рамках теории БСКО ранга (3,3), и действия S_{ik}, обусловленного БСКО ранга (2,2), – позволяет в согласии с общепринятыми формулами ввести понятие *разности координат* между начальными и конечными состояниями частицы. Для этого представим S_{ik} в виде

$$S_{ik} \equiv S_i - S_k = \Delta S = p_\mu \Delta x^\mu_{ik} \equiv p_\mu (x^\mu_k - x^\mu_i), \tag{4.4.4}$$

где величины Δx^μ возникли как коэффициенты в представлении инварианта ΔS через компоненты 4-мерного импульса. Это позволяет представлять фазы φ в (4.3.10) через импульсы и координаты частиц в соответствующих состояниях:

$$\varphi_i = p_\mu x_i^\mu; \quad \varphi_k = p_\mu x_k^\mu. \tag{4.4.5}$$

Для сохранения инвариантности S_{ik} при преобразованиях Лоренца введенные координаты должны преобразовываться как компоненты контравариантного 4-мерного вектора:

$$p'_\mu = L^{\nu}_{\mu\cdot} p_\nu \to x'^\mu = L^{\mu}_{\cdot\lambda} x^\lambda, \tag{4.4.6}$$

где $L^{\nu}_{\mu\cdot}$ – коэффициенты преобразований 4- вектора, записанные в (2.7.2).

Особо подчеркнем, что выражения (4.4.4) - (4.4.5) являются *определениями* величин x^μ, сопоставляемых через S_{ik} импульсу p_μ. Очевидно, этих соотношений недостаточно для определения всех четырех компонент dx^μ (здесь и далее Δ заменена на d), поэтому доопределим их следующим образом

$$dx^\mu = \frac{dS}{m^2c^2} p_\mu, \tag{4.4.7}$$

где mc – ранее введенная константа. Легко видеть, что при преобразованиях (4.4.6) остается инвариантной величина

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv ds^2 = \frac{dS^2}{m^2c^2}, \tag{4.4.8}$$

где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор пространства Минковского, а ds естественно назвать *интервалом процесса перехода* частицы из начального в конечное состояние.

6. В предыдущем разделе было показано, что БСКО ранга (2,2) является подсистемой БСКО ранга (3,3). Однако на это можно взглянуть и иначе. Если рассматривать БСКО ранга (3,3) в более узком смысле, соответствующем содержанию главы 3, то излагаемое в этом разделе можно понимать как своеобразную *композицию* двух БСКО: рангов (3,3) и (2,2). Обратим внимание, что в рамках такой композиции предлагается принципиально иная логическая схема введения трех ключевых понятий физики: координат (x^μ), импульсов (p_μ) и действия (S). В традиционном изложении физики используется схема, где первичны x^μ и p_μ, тогда как действие S вторично. В бинарной геометрофизике более первичными понятиями являются импульс и действие,

тогда как категория координатного пространства-времени вторична.

7. Принципиально важный момент, возникающий из композиции с БСКО наинизшего ранга (2,2), состоит в *появлении временной развертки.* В рассмотренных ранее аспектах теории БСКО ранга (3,3) фактически речь шла лишь о двух моментах времени, т.е. о переходе частицы из какого-то начального состояния в некое конечное состояние. Понятие импульса, можно сказать, характеризовало обобщенные угловые характеристики. Учет БСКО ранга (2,2) позволяет развернуть совокупность таких отдельных переходов в мировую историю процессов во времени (см. рис. 4.2). Можно утверждать, что *течение (классического) времени*

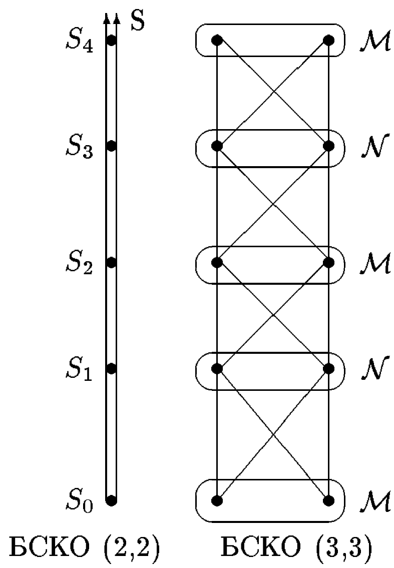


Рис. 4.2: Развертка в мировую историю процессов, посредством учета БСКО ранга (2,2)

обусловлено именно БСКО минимального ранга (2,2).

4.5 Бинарная система отношений ранга (2,2;a) и хроногеометрия

1. Рассмотрим следующий важный вопрос, состоящий в задании координат не только для истории одной выделенной час-

тицы, но и для точек-событий окружающего частицу мира. Подробно этот вопрос разбирается в другой части книги, однако вчерне его можно рассмотреть в рамках алгебраических понятий. Возьмем фундаментальное 2x2-отношение (4.1.11) БСКО ранга (2,2;a) и запишем его для двух пар связанных элементов (i,α) и (k,β):

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ik} \\ -S_{ik} & 0 \end{vmatrix} = S_{ik}^2. \qquad (4.5.1)$$

Оно с точностью до коэффициента определяет квадрат интервала между двумя событиями (на мировой линии одной частицы).

2. Можно сказать, вся теория классического пространства-времени разворачивается на основе этого числа. Укажем конкретный механизм задания координат событий за пределами мировой линии избранной частицы через интервалы на мировой линии этой частицы. Он фактически заложен в основу радиолокации. Полагается, что макроприбором фиксируется значение параметра эволюции (числа неких событий от начального момента до данного) в момент его взаимодействия (отправки сигнала) с другим объектом B (см. рис.4.3). Пусть это произошло в момент собственного времени s_{ik}, где i характеризует начало отсчета событий (точки A) на мировой линии макроприбора. Пусть взаимодействие имеет возвратный характер, т.е. положим, что второй объект вторично провзаимодействовал с первым объектом. На привычном языке это означает, что из B отправлен сигнал назад к первому объекту. Пусть повторное взаимодействие с 1-м объектом произошло при значении собственного времени s_{ij}. Тогда с помощью этих двух чисел можно определить две классические координаты события B относительно события A (или пары i, α). Назовем *разностью временных координат* двух событий A и B полусумму чисел

$$s_{AB} \equiv x_{AB}^0 = \frac{1}{2}(s_{ik} + s_{ij}), \qquad (4.5.2)$$

а полуразность назовем *расстоянием* (пространственным интервалом) l_{AB} между этими событиями

$$l_{AB} = \frac{1}{2}(s_{ij} - s_{ik}). \qquad (4.5.3)$$

Легко видеть, что произведение двух чисел s_{ik} и s_{ij} можно понимать как квадрат интервала между двумя событиями в классическом понимании этого термина:

$$s_{ik}s_{ij} = (x_{AB}^0)^2 - l_{AB}^2 \equiv s_{AB}^2. \qquad (4.5.4)$$

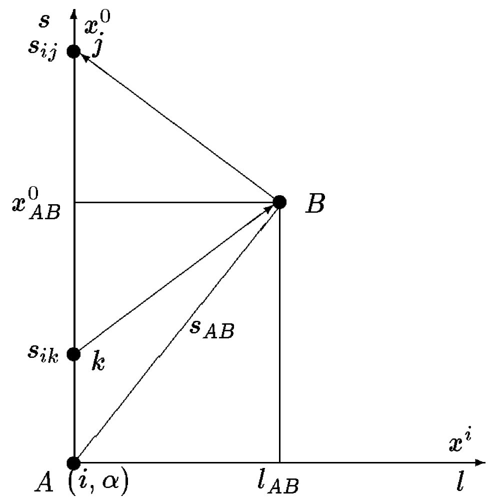


Рис. 4.3: Задание двух координат события В методом хроногеометрии

Отметим, что данная схема годится и в том случае, когда одно или оба события k и j предшествуют событию i. В случае, например, когда событие k предшествует i, число s_{ik} становится отрицательным, и согласно определению (4.5.4) события А и В становятся пространственно-подобными.

3. Комбинацию (4.5.4) можно связать со значением фундаментального 2x2-отношения БСКО ранга (2,2;a) для случая, когда одна пара элементов (i, α) связана (тильды над элементами писать не будем), а два других k и γ – не связаны:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & S_{ij} \\ -S_{ik} & S_{kj} \end{vmatrix} = S_{ik}S_{ij}. \qquad (4.5.5)$$

Здесь введен элемент γ, связанный с элементом j. Следует отметить, что имеется различие в том, сигнал испускается или принимается. Это обстоятельство можно связать с типом элементов двух множеств. Можно положить, что испускание сигнала помечается элементом из множества $\tilde{\mathcal{M}}$ (в данном случае элементом k), а поглощение сигнала помечается элементом множества $\tilde{\mathcal{N}}$ (в данном случае элементом γ). Начало отсчета помечается сразу двумя связанными элементами i и α.

Заметим, что имеется возможность аналогичным образом проинтерпретировать фундаментальное 2х2-отношение для случая четырех несвязанных элементов. Оно имеет смысл квадрата интервала между двумя событиями, не лежащими на мировой линии наблюдателя.

4. Изложенная принципиальная схема введения двух координат событий вне мировой линии наблюдателя (макроприбора) многократно обсуждалась в работах физиков [3], геометров [1] и даже в трудах по философии естествознания. В частности, эта схема положена в основу специальной формулировки общей теории относительности как *хроногеометрии*, когда измерение координат и многих понятий теории относительности осуществляется лишь с помощью показаний часов наблюдателя (или ряда наблюдателей).

Важно отметить, что с помощью изложенной хроногеометрической схемы можно определить *лишь две координаты* x^0 и l произвольной точки-события B. Не внося в эту схему ничего дополнительного невозможно определить две оставшиеся (угловые) координаты события B. Для такого наблюдателя оказываются равнозначными все точки, изображенные на рисунке 4.4 в виде окружности из точек. В 4-мерном пространстве-времени они соответствуют 2-мерной сфере радиуса l_{AB}.

При изложении теории 4-мерного пространства-времени на основе модели хроногеометрии приходится вводить дополнительные понятия или усложнять описанную методику. Один из способов преодоления этой трудности состоит в использовании нескольких наблюдателей. Оказывается, угловые координаты события B можно определить, если его измерять, как минимум, тремя наблюдателями. При этом, конечно, полагается, что наблюдатели обмениваются между собой сигналами, определяя таким образом взаимные расстояния. Такой способ интересен тем, что не опирается на качественно иные методы получения информации и пригоден не только в плоском, но и в искривленном пространстве-времени общей теории относительности.

5. В бинарной геометрофизике этот вопрос решается иначе. Следует вспомнить, что БСКО ранга (2,2) появилась как подсистема БСКО ранга (3,3). Из этого следует, что подсистема описывает только часть координат, тогда как оставшиеся угловые координаты соответствуют направлениям (ориентациям) вектора передачи импульса k^μ, которые возникают из дальнейшего (вслед за (4.3.1) и (4.3.10)) обобщения теории БСКО ранга (3,3) на случай взаимодействующих частиц.

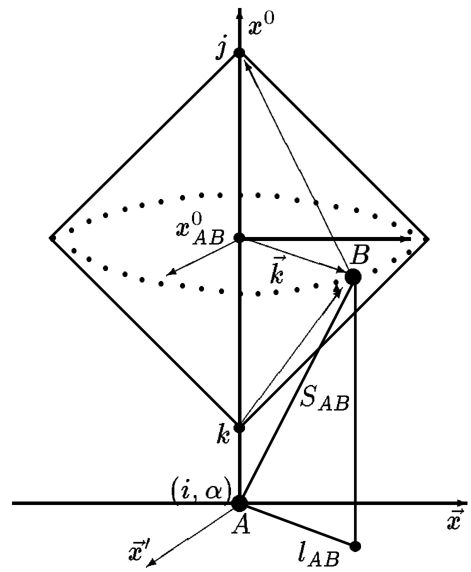


Рис. 4.4: Пары координат, установленные методом хроногеометрии, одинаковы для всех точек, лежащих на окружности

4.6 Классическое пространство-время

1. В разделе 1.5 был записан закон классического пространства Минковского в рамках теории унарных физических структур ранга 6 с *вещественными* парными отношениями, а вразделе 1.6 было показано, что формально этот закон можно получить также из БСВО ранга (6,6;a). В бинарной геометрофизике пространство Минковского должно быть выведено из БСКО. В разделе 2.8 было показано, что в рамках БСКО ранга (3,3) можно ввести прообраз пространства Минковского. Однако это не может рассматриваться как решение проблемы вывода координатного классического пространства-времени, в частности, вследствие того, что эта БСКО интерпретируется в терминах импульсного пространства, причем свободной частицы. Полное решение этой проблемы должно, во-первых, опираться на БСКО более высоких рангов, в рамках которых возможно описать взаимодействие частиц, и, во-вторых, должно опираться на БСКО ранга (2,2) с циклическим характером зависимости от действия. Теории БСКО рангов (4,4) и более высоких изложены в по-

следующих главах, а переход от циклической БСКО ранга (2,2) к классической БСКО ранга (2,2;а) рассмотрен в другой части книги. Тем не менее, опираясь на факт возможности перехода к классической БСКО ранга (2,2;а), в предварительном порядке можно вывести закон пространства Минковского в рамках расширенного понимания БСКО ранга (3,3).

2. Чтобы это сделать, необходимо еще более, чем в разделе 4.3, обобщить трактовку БСКО ранга (3,3). Для взаимодействующих частиц будем полагать, что параметры конечных элементов более существенно (не только в экспоненциальных слагаемых) отличаются от комплексно сопряженных параметров начальных элементов. Из значений параметров конечных элементов (привлекая комплексно сопряженные им значения) по известным правилам можно построить импульсы конечных состояний p'_μ. Точно так же из параметров исходных элементов строятся начальные импульсы p_μ. В результате взаимодействия импульс частицы изменяется на величину

$$k_\mu = p'_\mu - p_\prime. \qquad (4.6.1)$$

В соответствии с изменением импульсов в конечных состояниях следует изменить определение фаз экспоненциальных слагаемых (4.4.5)

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}p_\mu x'^\mu\right] \to \exp\left[\frac{i}{\hbar}p'_{mu}x'^\mu\right]. \qquad (4.6.2)$$

Фундаментальные 2x2-отношения будут содержать произведения экспоненциальных слагаемых из начальных и конечных состояний, которые можно представить в виде

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'_\mu x'^\mu - p_\mu x^\mu)\right] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(p_\mu + k_\mu)(x^\mu + \Delta x^\mu) - p_\mu x^\mu\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Delta S\right]\cdot\exp\left[\frac{i}{\hbar}k_\mu x^\mu\right], \qquad (4.6.3)$$

где положено

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu; \qquad p'_\mu \Delta x^\mu = \Delta S. \qquad (4.6.4)$$

Величина ΔS, как и в разделе 4.4, имеет смысл изменения действия частицы при переходе из начального в конечное состояние.

3. Допустим, что вектор k_μ (или, по крайней мере, его направление в пространстве) является наблюдаемым. Это позволяет

дополнить хроногеометрию до полной 4-мерной теории. Чтобы показать это, выделим пространственно-подобную часть k^i вектора k_μ, где индекс i пробегает значения: 1, 2, 3. Длина вектора k^i записывается в виде

$$(\vec{k})^2 = h_{ij} k^i k^j,$$

где h_{ij} – метрический тензор 3-мерного пространственного сечения. Опираясь на это выражение, построим единичный пространственно-подобный вектор

$$l^i = \frac{k^i}{\sqrt{(\vec{k})^2}}. \tag{4.6.5}$$

Очевидно, все возможные изменения импульса в (4.6.1) формируют ежик из векторов, исходящих из одной точки и своими концами заполняющих единичную 2-мерную сферу (окружность на рисунке 4.4). Определим компоненты 4-мерного вектора, сопоставленного с событиями 1 и 2, следующим образом

$$s^\mu_{12} = \{x^0_{12},\ l^i l_{12}\}, \tag{4.6.6}$$

где l_{12} - расстояние между событиями 1 и 2, определенное в (4.5.3)

4. Пусть номером 1 отмечено событие на мировой линии рассматриваемой частицы (наблюдателя), а событие 2 произошло вне этой мировой линии. Возьмем пять таких событий и пометим их номерами: 2, 3, 4, 5, 6. Им можно сопоставить пять векторов s^μ_{1n} вида (4.6.6). По известным формальным правилам образуем скалярные произведения между всеми этими векторами и построим из них определитель Грама, который тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} s^2(12) & s_\mu(12)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(12)s^\mu(16) \\ s_\mu(13)s^\mu(12) & s^2(13) & \cdots & s_\mu(13)s^\mu(16) \\ s_\mu(14)s^\mu(12) & s_\mu(14)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(14)s^\mu(16) \\ s_\mu(15)s^\mu(12) & s_\mu(15)s^\mu(13) & \cdots & s_\mu(15)s^\mu(16) \\ s_\mu(16)s^\mu(12) & s_\mu(16)s^\mu(13) & \cdots & s^2(16) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6.7}$$

5. С помощью соотношения типа теоремы косинусов определим квадрат вектора $s^\mu(kj)$, соединяющего концы векторов с общим началом в точке 1:

$$s^2(kj) = s^2(1k) + s^2(1j) - 2s_\mu(1k)s^\mu(1j). \tag{4.6.8}$$

Следует подчеркнуть формальный характер так определенной длины вектора. При построении модели классического пространства- времени это определение следует дополнить утверждением, что эта длина будет такой же и с точки зрения любого другого наблюдателя. В частности, события k и j можно считать принадлежащими мировым линиям двух других наблюдателей. Естественно положить, что эти наблюдатели описанным выше методом хроногеометрии (радиолокации) могут измерить длины как вектора s_μ, так и векторов $s_\mu(1k)$ и $s_\mu(1j)$. Дополнительное утверждение означает, что результаты таких измерений совпадают, во-первых, со значением длины (4.6.8) и, во-вторых, с длинами векторов $s_\mu(1k)$ и $s_\mu(1j)$ с точки зрения первого наблюдателя. В дальнейшем это утверждение будет доказано. Оно следует, во-первых, из одинакового способа перехода к классическим понятиям и, во-вторых, из симметрии определения расстояния для наблюдателей, находящихся на концах вектора.

6. Дважды произведем операцию окаймления в точности так же, как и в разделе 2.8. Напомним, что процедура окаймления состоит в добавлении строки (или столбца) из нулей, кроме одной единицы, и столбца (или строки) под единицей из должным образом подобранных элементов. Затем с таким определителем производятся процедуры вычитания одних столбцов (строк) из других, не меняющих значение определителя. В итоге слева получается определитель Кэли-Менгера

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s^2(12) & s^2(13) & s^2(14) & s^2(15) & s^2(16) \\ 1 & s^2(21) & 0 & s^2(23) & s^2(24) & s^2(25) & s^2(26) \\ 1 & s^2(31) & s^2(32) & 0 & s^2(34) & s^2(35) & s^2(36) \\ 1 & s^2(41) & s^2(42) & s^2(43) & 0 & s^2(45) & s^2(46) \\ 1 & s^2(51) & s^2(52) & s^2(53) & s^2(54) & 0 & s^2(56) \\ 1 & s^2(61) & s^2(62) & s^2(63) & s^2(64) & s^2(65) & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.6.9}$$

Это закон УСВО ранга 6, при данной сигнатуре соответствующий закону (1.5.1) классического пространства Минковского.

4.7 Фундамент физического мироздания

Как уже отмечалось, ключевую роль в построении фундамента физического мироздания играют БСКО низших рангов. Среди них особое положение занимает БСКО минимального ранга (2,2). В этой главе была затронута лишь вершина айсберга связанных с этой БСКО проблем, но и этого уже достаточно, чтобы сделать ряд существенных выводов.

1. При анализе фундамента физического мироздания можно усмотреть проявление совокупности БСКО малых рангов. В этой главе показано, что понятие эволюции (расстояний) связано с БСКО ранга (2,2), однако в ее рамках нельзя ничего сказать о размерности многообразия. Классическое 4-мерие и сигнатура $(+ - - -)$ находят свое обоснование в рамках БСКО ранга (3,3), но и этого мало, – все это может проявляться только в результате взаимодействий частиц (материальных образований), а для их описания необходимо использовать БСКО еще более высоких рангов. Это уже неоднократно упоминалось в предыдущих разделах. Именно в этом смысле в разделе 2.1 говорилось об иерархичности БСКО низших рангов.

2. Следует подчеркнуть, что бинарная геометрофизика не должна рассматриваться, как прямая сумма БСКО минимальных рангов, каждая из которых играет свою индивидуальную роль. Из раздела 4.3 следует, что БСКО ранга (2,2) должна пониматься как подсистема БСКО ранга (3,3). В следующих главах при рассмотрении БСКО ранга (4,4) из последней будет выделяться БСКО ранга (3,3) и, более того, ряд характерных черт такой теории будет проявляться в результате редукции понятий и некоторых комбинаций из БСКО ранга (4,4) на теорию БСКО ранга (3,3). Этот процесс можно продлить и далее на более высокие ранги. Исходя из этого следует обратить внимание на *дедуктивный характер конструкции бинарной геометрофизики.* Следует исходить из теории БСКО некоторого ранга (r,r) (уж во всяком случае $r \geq 4$) и затем из нее выделять БСКО меньших рангов, анализируя проявления их свойств в фундаменте физики микромира. Этот характер теории проиллюстрирован блок-схемой на рисунке 4.5, доопределяющей блок-схемы, ранее изображенные на рисунках 2.1 и 0.3. На схеме в верхнем ряду изображены горизонтальные стрелки справа налево, показывающие подчиненный характер БСКО каждого ранга перед БСКО более высоких рангов. На рисунке БСКО ранга (4,4) обведена двойной рамкой, что показывает достаточность этого ранга для обоснования значительной части свойств теории взаимодействующих лептонов и ряда свойств макромира.

3. Эта часть книги посвящена изложению алгебраических аспектов бинарной геометрофизики, которые ответственны за ряд наблюдаемых свойств физики микромира Некоторые из этих свойств названы в нижней части рисунка 4.5. В частности, в этой главе лишь упомянуто, что первичная БСКО ранга (2,2) имеет циклический характер, – в мнимом показателе экспоненты стоит прообраз действия. Именно здесь заключены истоки волновых свойств материи. Вместе с формированием классического

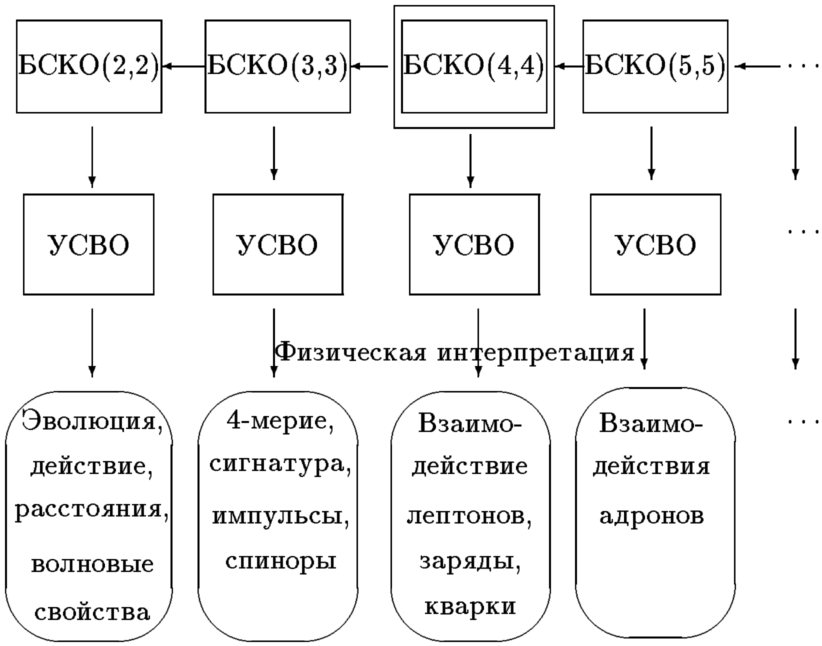


Рис. 4.5: Дедуктивный характер бинарной геометрофизики

пространства- времени из этого циклического характера отношений (зависимости от s) будут проступать контуры квантовой теории. На наш взгляд, квантовая механика есть ни что иное как результат описания (более первичных циклических) отношений, для которых не имеет место аксиома Архимеда, в рамках классических пространственно-временных отношений с аксиомой Архимеда. В связи с этим уместно напомнить высказывание Де Бройля: "Действительно, понятие пространства и времени взяты из нашего повседневного опыта и справедливы лишь для явлений большого масштаба. Нужно было бы заменить их другими понятиями, играющими фундаментальную роль в микропроцессах, которые бы асимптотически переходили при переходе от элементарных процессов к наблюдаемым явлениям обычного масштаба в привычные понятия пространства и времени. Стоит ли говорить, что это трудная задача? Было бы удивительно, если бы оказалось возможным когда-нибудь исключить из физической теории понятия, представляющие самую основу нашей повседневной жизни. Правда, история науки показывает удивительную плодотворность человеческой мысли и не стоит терять надежды. Однако пока мы не добились успеха в распространении наших представлений в указанном представлении, мы должны стараться с большими или меньшими трудностями втиснуть микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас все время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит” [6, с.187].

Близкие мысли можно найти в мемуаре Б.Римана “О гипотезах, лежащих в основании геометрии”, написанном еще в середине прошлого века: “Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, – понятия твердого тела и светового луча, – по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это допущение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления” [50, с.32]. На наш взгляд, излагаемые здесь положения БСКО низших рангов представляют собой замену классических пространственно- временных представлений на более элементарные в области микромира, из которых выводятся логическим путем понятия классического мира.

Глава 5

Бинарная система комплексных отношений ранга (4,4) и 3-компонентные спиноры

Если в рамках БСКО ранга (3,3) формулируется новый подход к теории 2-компонентных спиноров и к получаемым из них 4-мерным векторам с *парными* метрическими отношениями, то в БСКО следующего ранга (4,4) (в бинарном многомерии) по тем же правилам строится теория объектов, которые естественно назвать 3-компонентными спинорами. Таким образом открывается новый канал обобщения понятия 2-компонентного спинора. Из 3-компонентных спиноров по прежним правилам строятся 9- компонентные векторы, для которых имеют место *кубичные* метрические отношения, – возникает своеобразная 3-точечная (унарная) геометрия.

5.1 Основные понятия бинарных систем комплексных отношений ранга (4,4)

1. Согласно общей формуле (1.2.2) закон БСКО ранга (4,4) записывается в виде равенства нулю определителя, составленного из 16 парных отношений между двумя четверками элементов

i, m, n, l и α, μ, ν, λ из двух разных множеств

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} & u_{i\lambda} \\ u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{5.1.1}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ задаются формулой (1.2.3)

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \tag{5.1.2}$$

Здесь i^1, i^2, i^3 — три комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а α^1, α^2, α^3 — комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Отметим, что это парное отношение можно рассматривать как скалярное произведение двух 3-мерных векторов из двух разных пространств.

2. Пусть в (5.1.1) две тройки разноименных элементов m, n, l и μ, ν, λ образуют базис БСКО ранга (4,4). Пометим волной сверху внутренние отношения между базисными элементами. Выразим парное отношение $u_{i\alpha}$ между произвольными (небазисными) элементами i и α через их парные отношения к базисным и внутренние отношения между базисными элементами. Из (5.1.1) в общем случае находим

$$\begin{aligned} u_{i\alpha} = \frac{1}{\Delta}\{u_{i\mu}[u_{m\alpha}(\tilde u_{n\nu}\tilde u_{l\lambda} - \tilde u_{l\nu}\tilde u_{n\lambda}) &- u_{n\alpha}(\tilde u_{m\nu}\tilde u_{l\lambda} - \tilde u_{l\nu}\tilde u_{m\lambda}) + \\ + u_{l\alpha}(\tilde u_{m\nu}\tilde u_{n\lambda} - \tilde u_{n\nu}\tilde u_{m\lambda})] &- \\ - u_{i\nu}[u_{m\alpha}(\tilde u_{n\mu}\tilde u_{l\lambda} - \tilde u_{l\mu}\tilde u_{n\lambda}) &- u_{n\alpha}(\tilde u_{m\mu}\tilde u_{l\lambda} - \tilde u_{l\mu}\tilde u_{m\lambda}) + \\ + u_{l\alpha}(\tilde u_{m\mu}\tilde u_{n\lambda} - \tilde u_{n\mu}\tilde u_{m\lambda})] &+ \\ + u_{i\lambda}[u_{m\alpha}(\tilde u_{n\mu}\tilde u_{l\nu} - \tilde u_{l\mu}\tilde u_{n\nu}) &- u_{n\alpha}(\tilde u_{m\mu}\tilde u_{l\nu} - \tilde u_{l\mu}\tilde u_{m\nu}) + \\ + u_{l\alpha}(\tilde u_{m\mu}\tilde u_{n\nu} - \tilde u_{n\mu}\tilde u_{m\nu})]\}&, \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde u_{m\mu} & \tilde u_{m\nu} & \tilde u_{m\lambda} \\ \tilde u_{n\mu} & \tilde u_{n\nu} & \tilde u_{n\lambda} \\ \tilde u_{l\mu} & \tilde u_{l\nu} & \tilde u_{l\lambda} \end{vmatrix} \tag{5.1.4}$$

— важное понятие в теории БСКО ранга (4,4), определенное для двух троек элементов. По аналогии с (2.2.4) будем его называть *фундаментальным* 3×3*-отношением БСКО ранга (4,4)*.

3. Аналогично теории БСКО(3,3) сосредоточим внимание на рассмотрении пар *сопряженных элементов*, т.е. таких элементов из разных множеств, параметры которых комплексно сопряжены. Для базисных элементов это означает

$$m^s = \mu^{*s}; \quad n^s = \nu^{*s}; \quad l^s = \lambda^{*s}. \tag{5.1.5}$$

Для такого базиса парные отношения связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}^*_{m\mu}; \quad \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}^*_{n\nu}; \quad \tilde{u}_{l\lambda} = \tilde{u}^*_{l\lambda}; \\ &\tilde{u}_{m\nu} = \tilde{u}^*_{n\mu}; \quad \tilde{u}_{m\lambda} = \tilde{u}^*_{l\mu}; \quad \tilde{u}_{n\lambda} = \tilde{u}^*_{l\nu}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

В самом общем случае матрица парных отношений для двух троек сопряженных элементов может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + u_3 & u_1 - iu_2 & u_4 - iu_5 \\ u_1 + iu_2 & u_0 - u_3 & u_6 - iu_7 \\ u_4 + iu_5 & u_6 + iu_7 & u_8 \end{pmatrix}, \tag{5.1.7}$$

где $u_0, u_1, \cdots, u_8$ — девять вещественных чисел, т.е. выделенная система базисных элементов характеризуется 9 вещественными числами.

4. Выделим еще более частный случай базисных элементов, характеризующихся условиями:

$$\tilde{u}_{m\mu} = \tilde{u}_{n\nu} = \tilde{u}_{l\lambda} = u_0; \tag{5.1.8}$$

$$\tilde{u}_{m\nu} = \tilde{u}_{m\lambda} = \tilde{u}_{n\mu} = \tilde{u}_{n\lambda} = \tilde{u}_{l\mu} = \tilde{u}_{l\nu} = 0, \tag{5.1.9}$$

где u_0 — некоторое вещественное положительное число. Подставляя эти условия в (5.1.3), находим, что парное отношение $u_{i\alpha}$ в этом базисе записывается в виде

$$\begin{aligned} u_{i\alpha} &= \frac{1}{\Delta}\left[u_{i\mu}u_{m\alpha}(\tilde{u}_{n\nu}\tilde{u}_{l\lambda}) + u_{i\nu}u_{n\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{l\lambda}) + u_{i\lambda}u_{l\alpha}(\tilde{u}_{m\mu}\tilde{u}_{n\nu})\right] = \\ &= i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3, \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

где параметры небазисных элементов непосредственно записываются через их отношения к базисным элементам:

$$\begin{aligned} &i^1 = \pm\tfrac{u_{i\mu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^2 = \pm\tfrac{u_{i\nu}}{\sqrt{u_0}}; \quad i^3 = \pm\tfrac{u_{i\lambda}}{\sqrt{u_0}}; \\ &\alpha^1 = \pm\tfrac{u_{m\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^2 = \pm\tfrac{u_{n\alpha}}{\sqrt{u_0}}; \quad \alpha^3 = \pm\tfrac{u_{l\alpha}}{\sqrt{u_0}}. \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Назовем базис из трех элементов, удовлетворяющий условиям (5.1.8), (5.1.9), *собственным* данной БСКО ранга (4,4) и, обратно, назовем БСКО ранга (4,4), в которой для двух троек сопряженных элементов выполняются условия (5.1.8) и (5.1.9), *собственной* данного набора элементов.

5. В теории БСКО ранга (4,4), а также при ее физической интерпретации важное место занимает вопрос о получении из нее УСВО. В этом случае имеется больше возможностей, нежели в теории БСКО ранга (3,3), причем возникают принципиально новые геометрии.

Прежде всего укажем простейший переход к многомерной *римановой геометрии.* Он осуществляется сшивкой пар разноименных элементов из двух множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ бинарной системы в один элемент унарной геометрии точно так же, как в разделе 2.2 (см. рис. 1.5), однако размерность получаемой унарной геометрии будет больше. Действительно, возьмем условия сшивки элементов в форме (5.1.5)

$$i^s = \alpha^{*s}; \quad k^s = \beta^{*s}; \quad j^s = \gamma^{*s}; \cdots, \tag{5.1.12}$$

где $s = 1, 2, 3$. Зададим унарные вещественные *парные* отношения между элементами i и k в виде

$$a_{ik} = \frac{1}{2}\left(u_{i\beta} + u_{k\alpha}\right) = a_{ki}, \tag{5.1.13}$$

тогда внутренние отношения естественно определить в форме

$$a_{ii} = u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3; \quad a_{kk} = u_{k\beta} = k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + k^3\beta^3. \tag{5.1.14}$$

Перейдем от комплексных параметров элементов к вещественным числам

$$\begin{array}{lll} i^1 = x_i^1 + ix_i^2; & k^1 = x_k^1 + ix_k^2; & \cdots \\ i^2 = x_i^3 + ix_i^4; & k^2 = x_k^3 + ix_k^4; & \cdots \\ i^3 = x_i^5 + ix_i^6; & k^3 = x_k^5 + ix_k^6; & \cdots, \end{array} \tag{5.1.15}$$

тогда перекрестные и внутренние отношения (5.1.13) и (5.1.14) принимают вид

$$a_{ik} = \sum_{l=1}^{6} x_i^l x_k^l; \tag{5.1.16}$$

$$a_{ii} = \sum_{l=1}^{6} (x_i^l)^2; \quad a_{kk} = \sum_{l=1}^{6} (x_k^l)^2. \tag{5.1.17}$$

Выражение (5.1.16) можно понимать как скалярное произведение двух вещественных векторов с длинами (5.1.17) в *6-мерном евклидовом пространстве.* Этот факт можно отобразить в виде равенства нулю определителя Грама для семи произвольных векторов (элементов унарной геометрии)

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{ij} & \cdots \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{5.1.18}$$

На параметры элементов наложим условия типа (2.2.19):

$$a_{ii} = a_{kk} = \cdots = 1 \to \sum_{l=1}^{6}(x_i^l)^2 = \sum_{l=1}^{6}(x_k^l)^2 = \cdots = 1. \tag{5.1.19}$$

В итоге получаем 5-мерную риманову геометрию (5-мерное пространство постоянной положительной кривизны), т.е. гиперсферу в 6-мерном евклидовом пространстве.

Отметим, что изменения знаков в условиях сшивки (5.1.12) (другие знаки) приводят к геометриям на гиперповерхностях в пространствах с сигнатурами $(+ + + + - -)$ и $(+ + - - - -)$.

6. Особый интерес представляет переход от БСКО к унарным геометриям, когда отношения в новом множестве задаются через фундаментальные отношения аналогично тому, как это делалось в главе 2. Однако в случае БСКО ранга (4,4) подобное обобщение имеет принципиально иной характер: *теперь вещественное отношение должно задаваться не для двух, а для трех пар разноименных элементов*. Прежнее парное отношение (2.2.20) обобщается на тройное отношение

$$a_{ikj} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \tag{5.1.20}$$

При этом для элементов, входящих в пары, по-прежнему задаются условия сшивки (5.1.12). Эта глава посвящена обсуждению, именно такого перехода к унарной геометрии.

Другие способы перехода к унарным геометриям, соответствующим обобщенным импульсным пространствам, рассмотрены в следующей главе.

5.2 Преобразования в рамках одной обобщенной системы отношений

1. Введем в каждое из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ линейные преобразования параметров элементов. Для того чтобы сохранялись

условия сшивки параметров (5.1.15), следует ограничиться случаем, когда линейные преобразования в двух множествах описываются комплексно сопряженными коэффициентами, т.е.

$$i'^s = C^s_r i^r; \quad \alpha'^s = C^{*s}_r \alpha^r. \tag{5.2.1}$$

Эти преобразования в самом общем случае характеризуются 9 комплексными коэффициентами (или 18 вещественными числами).

2. Выделим частный случай преобразований (5.2.1), оставляющих инвариантными парные отношения

$$u'_{i\alpha} = i'^1\alpha'^1 + i'^2\alpha'^2 + i'^3\alpha'^3 = u_{i\alpha}, \tag{5.2.2}$$

т.е. не выводящих за пределы одной системы отношений ранга (4,4). Это требование налагает следующие условия на коэффициенты преобразований (5.2.1):

$$\begin{array}{l} C^1_1 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^3_1 C^{*3}_1 = 1; \\ C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_2 C^{*2}_2 + C^3_2 C^{*3}_2 = 1; \\ C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3 + C^3_3 C^{*3}_3 = 1; \end{array} \tag{5.2.3}$$

$$\begin{array}{l} C^1_1 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_2 + C^3_1 C^{*3}_2 = 0; \\ C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3 + C^3_1 C^{*3}_3 = 0; \\ C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3 + C^3_2 C^{*3}_3 = 0. \end{array} \tag{5.2.4}$$

Очевидно, что соотношения (5.2.3) вещественны, а (5.2.4) комплексны, т.е. они налагают 9 условий на 18 вещественных чисел. Итого, имеем 9 независимых вещественных параметров, характеризующих введенные преобразования.

Напомним, что группа комплексных линейных преобразований (5.2.1), оставляющих инвариантной билинейную форму вида (5.2.2), называется *унитарной группой* $U(3)$. Эти преобразования соответствуют унитарным преобразованиям $U(2)$ в теории БСКО ранга (3,3), а условия (5.2.3),(5.2.4) соответствуют условиям (2.3.5).

Аналогично тому, как это делалось в разделе 2.3, можно показать, что *группа* $U(3)$ *описывает переходы между различными собственными базисами одной и той же БСКО ранга* (4,4).

3. Имеется важное свойство преобразований из группы $U(3)$: коэффициенты любого столбца матрицы (C^s_r) можно выразить через комплексно сопряженные элементы других столбцов и определитель этой матрицы. Докажем это. Начнем с коэффициентов

третьего столбца C_3^s. Выделим из (5.2.3) и (5.2.4) следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} C_3^1 C_3^{*1} + C_3^2 C_3^{*2} + C_3^3 C_3^{*3} = 1; \\ C_1^1 C_3^{*1} + C_1^2 C_3^{*2} + C_1^3 C_3^{*3} = 0; \\ C_2^1 C_3^{*1} + C_2^2 C_3^{*2} + C_2^3 C_3^{*3} = 0 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

и посмотрим на них как на систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно величин C_3^{*s}. Ее решение имеет вид

$$C_3^{*1} = \frac{1}{\Delta_c}(C_1^2 C_2^3 - C_1^3 C_2^2); \quad C_3^{*2} = \frac{1}{\Delta_c}(C_2^1 C_1^3 - C_1^1 C_2^3);$$

$$C_3^{*3} = \frac{1}{\Delta_c}(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1),$$

где Δ_c —детерминант матрицы (C_r^s). Аналогично находятся коэффициенты C_1^{*s} и C_2^{*s}. Собирая все эти выражения, можно записать матричное соотношение

$$\Delta_c^* \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_2^{*2} C_3^{*3} - C_2^{*3} C_3^{*2} & C_1^{*3} C_3^{*2} - C_1^{*2} C_3^{*3} & C_1^{*2} C_2^{*3} - C_1^{*3} C_2^{*2} \\ C_3^{*1} C_2^{*3} - C_2^{*1} C_3^{*3} & C_1^{*1} C_3^{*3} - C_3^{*1} C_1^{*3} & C_2^{*1} C_1^{*3} - C_1^{*1} C_2^{*3} \\ C_2^{*1} C_3^{*2} - C_2^{*2} C_3^{*1} & C_1^{*2} C_3^{*1} - C_1^{*1} C_3^{*2} & C_1^{*1} C_2^{*2} - C_2^{*2} C_2^{*1} \end{pmatrix}. \tag{5.2.6}$$

4. Обратим внимание на то, что условия (5.1.8), (5.1.9) на отношения между элементами собственного базиса записываются через параметры этих элементов (в неком другом базисе) в виде

$$\begin{aligned} m_c^1 m_c^{*1} + m_c^2 m_c^{*2} + m_c^3 m_c^{*3} = u_0; \\ n_c^1 n_c^{*1} + n_c^2 n_c^{*2} + n_c^3 n_c^{*3} = u_0; \\ l_c^1 l_c^{*1} + l_c^2 l_c^{*2} + l_c^3 l_c^{*3} = u_0; \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned} m_c^1 n_c^{*1} + m_c^2 n_c^{*2} + m_c^3 n_c^{*3} = 0; \\ m_c^1 l_c^{*1} + m_c^2 l_c^{*2} + m_c^3 l_c^{*3} = 0; \\ n_c^1 l_c^{*1} + n_c^2 l_c^{*2} + n_c^3 l_c^{*3} = 0, \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

аналогичном условиям (5.2.3),(5.2.4). Здесь при параметрах поставлены индексы "c", означающие, что параметры взяты в собственной системе отношений.

Рассуждения, аналогичные произведенным выше, позволяют выразить одни параметры через другие посредством формул, сходных с (5.2.6):

$$\begin{pmatrix} m_c^1 & n_c^1 & l_c^1 \\ m_c^2 & n_c^2 & l_c^2 \\ m_c^3 & n_c^3 & l_c^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{u_0}{\Delta^*} \begin{pmatrix} n_c^{*2} l_c^{*3} - n_c^{*3} l_c^{*2} & l_c^{*2} m_c^{*3} - l_c^{*3} m_c^{*2} & m_c^{*2} n_c^{*3} - m_c^{*3} n_c^{*2} \\ n_c^{*3} l_c^{*1} - n_c^{*1} l_c^{*3} & l_c^{*3} m_c^{*1} - l_c^{*1} m_c^{*3} & m_c^{*3} n_c^{*1} - m_c^{*1} n_c^{*3} \\ n_c^{*1} l_c^{*2} - n_c^{*2} l_c^{*1} & l_c^{*1} m_c^{*2} - l_c^{*2} m_c^{*1} & m_c^{*1} n_c^{*2} - m_c^{*2} n_c^{*1} \end{pmatrix}, \tag{5.2.9}$$

где

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} m_c^{*1} & m_c^{*2} & m_c^{*3} \\ n_c^{*1} & n_c^{*2} & n_c^{*3} \\ l_c^{*1} & l_c^{*2} & l_c^{*3} \end{vmatrix}. \tag{5.2.10}$$

5. Пусть задано значение детерминанта Δ^*. Возникает вопрос: какие параметры можно выбрать в качестве независимых? Анализ системы соотношений (5.2.7), (5.2.8) показывает, что в качестве таковых можно выбрать 5 комплексных параметров, например: m_c^1, m_c^2, m_c^3, n_c^1, n_c^2, — на которые наложены 2 вещественных условия из (5.2.7):

$$\begin{gathered} m_c^1 m_c^{*1} + m_c^2 m_c^{*2} + m_c^3 m_c^{*3} = u_0; \\ n_c^1 n_c^{*1} + n_c^2 n_c^{*2} + n_c^3 n_c^{*3} = u_0, \end{gathered} \tag{5.2.11}$$

где параметр n_c^3 выражается через названные пять параметров следующим образом

$$n_c^3 = -\frac{1}{m_c^{*3}}(n_c^1 m_c^{*1} + n_c^2 m_c^{*2}). \tag{5.2.12}$$

5.3 Трехкомпонентные спиноры

Аналогично тому, как в теории БСКО ранга (3,3) были введены 2- компонентные спиноры, в рамках БСКО ранга (4,4) можно придти к понятию 3-компонентных спиноров. Напомним, что в литературе принято говорить о спинорах с числом компонент 2^n, где n — целое число. Именно такие спиноры получаются, если их вводить на основе алгебр Клиффорда $C(p,q)$ над полем вещественных чисел (см. Приложение А.2). Здесь же предлагается другой канал обобщения понятия 2-компонентных спиноров, допускающий 3 и иное число компонент [16, 60].

1. *Фундаментальное* 3×3-*отношение* в теории БСКО ранга (4,4) играет такую же роль, как фундаментальное 2×2-отношение (2.4.1) в теории БСКО ранга (3,3). Оно представляется в виде

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}, \tag{5.3.1}$$

т.е. аналогично (2.4.1) записывается через произведение двух определителей отдельно из параметров элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Это позволяет ввести понятие своеобразных метрик в каждом из множеств. Так, в множестве $\mathcal{M}$ трем элементам i, k, j сопоставляется тройное отношение

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} =$$

$$= i^1k^2j^3 + i^3k^1j^2 + i^2k^3j^3 - i^3k^2j^1 - i^2k^1j^3 - i^1k^3j^2. \tag{5.3.2}$$

2. Рассмотрим такие линейные преобразования (5.2.1), которые сохраняют инвариантными фундаментальные 3х3-отношения (5.3.1). Это означает, что в каждом из множеств должно оставаться инвариантным тройное отношение типа (5.3.2). Легко убедиться, что при преобразованиях (5.2.1)

$$b'_{(ikj)} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{vmatrix} b_{(ikj)}, \tag{5.3.3}$$

т.е. для инвариантности $b_{(ikj)}$ на коэффициенты C_r^s следует наложить условие

$$C_1^1C_2^2C_3^3 + C_1^3C_2^1C_3^2 + C_1^2C_2^3C_3^1 - C_1^3C_2^2C_3^1 - C_1^1C_2^3C_3^2 - C_1^2C_2^1C_3^3 = 1, \tag{5.3.4}$$

обобщающее (2.4.4) в теории БСКО ранга (3,3). Это два условия на 18 вещественных параметров. Линейные преобразования (5.2.1) с условием (5.3.4) составляют *унимодулярную* (16-параметрическую) *группу* $SL(3, C)$. Эта группа преобразований играет в теории БСКО ранга (4,4) ту же роль, что группа $SL(3, C)$ в теории БСКО ранга (3,3).

3. Определим *3-компонентные спиноры* как элементы 3- мерного комплексного векторного пространства, в котором определена антисимметричная кубичная метрика. Это означает, что для любых трех элементов $\vec{i} = (i^1, i^2, i^3)$, $\vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$ и $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$ определена кубичная форма

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = g_{srl} i^s k^r j^l = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}, \tag{5.3.5}$$

где индексы пробегают значения: 1, 2, 3; $g_{srl} = \varepsilon_{srl}$ — метрический спин-тензор, совпадающий с 3-индексным символом Леви-Чивиты. Эта формула соответствует (2.5.3) в теории 2-компонентных спиноров.

Аналогично определяются сопряженные 3-компонентные спиноры. В тех случаях, когда возможны недоразумения, индексы сопряженных спиноров будем помечать точкой сверху.

Напомним, что в теории 2-компонентных спиноров метрический спин-тензор обладал двумя индексами. Это позволяло однозначно определять соответствие ко- и контравариантных спиноров. В данном же случае метрический спин-тензор имеет три индекса, поэтому с его помощью можно сопоставлять 2-индексным комбинациям 1-индексную и обратно:

$$l_{sr} = \varepsilon_{srl} l^l; \quad (lt)_s = \varepsilon_{srl} l^r t^l. \tag{5.3.6}$$

Примером величин с ковариантными индексами являются миноры в матрице (4.3.2):

$$\begin{gathered} (kj)_1 = \begin{vmatrix} k^2 & j^2 \\ k^3 & j^3 \end{vmatrix} \equiv l_1; \quad (kj)_2 = \begin{vmatrix} k^3 & j^3 \\ k^1 & j^1 \end{vmatrix} \equiv l_2; \\ (kj)_3 = \begin{vmatrix} k^1 & j^1 \\ k^2 & j^2 \end{vmatrix} \equiv l_3, \end{gathered} \tag{5.3.7}$$

так что (4.2.7) можно переписать в виде

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = i^s (kj)_s \equiv i^s l_s. \tag{5.3.8}$$

4. Рассмотрим как преобразуются ковариантные спиноры при преобразованиях из группы $SL(3, C)$. Произведя преобразования (5.2.1), например, в формулах (5.3.7) легко найти, что

$$\begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \tag{5.3.9}$$

где элементы матрицы (Q^k_s) (в соответствии с тем, как она записана в (5.3.9)) имеют вид

$$(Q^k_s) = \begin{pmatrix} C^2_2C^3_3 - C^3_2C^2_3 & C^3_1C^2_3 - C^2_1C^3_3 & C^2_1C^3_2 - C^3_1C^2_2 \\ C^1_3C^3_2 - C^1_2C^3_3 & C^1_1C^3_3 - C^1_3C^3_1 & C^1_2C^3_1 - C^1_1C^3_2 \\ C^1_2C^2_3 - C^2_2C^1_3 & C^2_1C^1_3 - C^1_1C^2_3 & C^1_1C^2_2 - C^2_1C^1_2 \end{pmatrix}. \tag{5.3.10}$$

В самом общем случае преобразований (5.2.1) матрица (Q^k_s) с точностью до коэффициента является матрицей, обратной $(C^k_s)^\top$, (индекс $\top$ означает транспонирование)

$$(C^k_s)^\top \cdot (Q^l_r) = \Delta_c \cdot I_3, \tag{5.3.11}$$

где Δ_c— определитель матрицы (C^k_s). Для группы преобразований $SL(3, C)$, согласно (5.3.4), матрица (Q) является обратной к матрице $(C)^\top$.

5. Аналогично изложенному в разделе 2.5 (см. (2.5.11)) можно определить *обобщенные спинтензоры* как величины, преобразующиеся согласно (2.5.12). Очевидно также обобщение на смешанные спинтензоры (с ковариантными и контравариантными индексами). Легко также ввести соответствующие инварианты из спинтензорных величин.

6. Преобразования (5.2.1) с коэффициентами, одновременно удовлетворяющими условиям (5.2.3) – (5.2.4) и (5.3.4), образуют группу *унитарных унимодулярных преобразований* $SU(3)$, характеризуемую 8 независимыми вещественными параметрами. (Заметим, что условие (5.3.4) при выполнении (5.2.3) – (5.2.4) означает только одно дополнительное условие).

Для группы преобразований $SU(3)$ формулы (5.2.6) означают

$$(C^s_r) = (Q^{*s}_r), \tag{5.3.12}$$

где (Q^s_r) — матрица преобразований ковариантных спиноров, определенная в (5.3.10). Здесь учтено, что $\Delta^*_c = 1$ согласно (5.3.4). Таким образом, при $SU(3)$ преобразованиях ковариантные компоненты 3-спинора преобразуются как компоненты сопряженного контравариантного 3-спинора.

Аналогично тому, как это было сделано в главе 2, можно ввести совокупность преобразований (обобщенные бусты), дополняющих преобразования $SU(3)$ до полной группы $SL(3, C)$. Более подробно это будет рассмотрено в главе 7.

5.4 Девятимерные векторы

1. Обсудим смешанные спинтензоры $B^{s\dot r}$, которые можно определить аналогично (2.6.2) для одной, двух или трех пар сшитых элементов. При выполнении условий сшивки (5.1.5) матрицу из компонент $B^{s\dot r}$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B^{1\dot 1} & B^{1\dot 2} & B^{1\dot 3} \\ B^{2\dot 1} & B^{2\dot 2} & B^{2\dot 3} \\ B^{3\dot 1} & B^{3\dot 2} & B^{3\dot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0+B^3 & B^1-iB^2 & B^4-iB^5 \\ B^1+iB^2 & B^0-B^3 & B^6-iB^7 \\ B^4+iB^5 & B^6+iB^7 & B^8 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv B^0\lambda_0 + \sum_{l=1}^{8} B^l\lambda_l, \tag{5.4.1}$$

где B^0, B^1, $\cdots$, B^8 — девять вещественных чисел,

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.2}$$

а λ_l — восемь эрмитовых *матриц Гелл-Манна*, играющих в теории 3-компонентных спиноров такую же роль, что и матрицы Паули σ_l в теории 2-компонентных спиноров. Запишем матрицы Гелл-Манна в следующем представлении [1]

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5.4.3}$$

[1] Это представление отличается от обычно используемого видом матрицы λ_8.

Нетрудно записать ряд соотношений между матрицами λ_l, в некотором смысле аналогичные (2.5.16), однако теперь эти матрицы не являются образующими алгебры Клиффорда.

2. Из формулы (5.4.1) нетрудно выразить вещественные числа B^0 и B^l через компоненты спинтензора $B^{s\dot{r}}$. Выпишем их через параметры элементов сначала для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено парой сшитых элементов i и α

$$B_{(1)}^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}}. \tag{5.4.4}$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned}
&B_{(1)}^0 \equiv k^0 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2);\\
&B_{(1)}^1 \equiv k^1 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1);\\
&B_{(1)}^2 \equiv k^2 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}) = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1);\\
&B_{(1)}^3 \equiv k^3 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2);\\
&B_{(1)}^4 \equiv k^4 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{3}} + B^{3\dot{1}}) = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1);\\
&B_{(1)}^5 \equiv k^5 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{3}} - B^{3\dot{1}}) = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1);\\
&B_{(1)}^6 \equiv k^6 = \tfrac{1}{2}(B^{2\dot{3}} + B^{3\dot{2}}) = \tfrac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2);\\
&B_{(1)}^7 \equiv k^7 = \tfrac{i}{2}(B^{2\dot{3}} - B^{3\dot{2}}) = \tfrac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2);\\
&B_{(1)}^8 \equiv k^8 = B^{3\dot{3}} = i^3\alpha^3.
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Легко видеть, что первые 4 компоненты совпадают с компонентами 4-вектора k^μ, определенного в (2.6.1).

3. Аналогичным образом записываются компоненты 9-мерных векторов, задаваемых двумя парами сопряженных элементов:

$$B_{(+)}^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} + k^s\beta^{\dot{r}}; \quad B_{(-)}^{s\dot{r}} = i^s\alpha^{\dot{r}} - k^s\beta^{\dot{r}}. \tag{5.4.6}$$

В этом случае по формулам, аналогичным (5.4.5), можно определить два вида 9-мерных векторов:

$$B_{(+)}^A \equiv p^A; \quad B_{(-)}^A \equiv s^A \tag{5.4.7}$$

соответственно из компонент спинтензоров $B^{s\dot r}_{(+)}$ и $B^{s\dot r}_{(-)}$. Очевидно, что первые четверки компонент совпадают с величинами, определенными в (2.6.6) и в (2.6.11). Здесь для них сохранены те же самые обозначения.

4. Наконец, выпишем компоненты B^A для случая трех сшитых пар элементов, когда

$$B^{s\dot r} = i^s\alpha^{\dot r} + k^s\beta^{\dot r} + j^s\gamma^{\dot r}. \tag{5.4.8}$$

В этом случае, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
B^0_{(3)} &\equiv P^0 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2);\\
B^1_{(3)} &\equiv P^1 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1);\\
B^2_{(3)} &\equiv P^2 = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1);\\
B^3_{(3)} &\equiv P^3 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2);\\
B^4_{(3)} &\equiv P^4 = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 + k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 + j^3\gamma^1);\\
B^5_{(3)} &\equiv P^5 = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 - k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 - j^3\gamma^1);\\
B^6_{(3)} &\equiv P^6 = \tfrac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 + k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 + j^3\gamma^2);\\
B^7_{(3)} &\equiv P^7 = \tfrac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 - k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 - j^3\gamma^2);\\
B^8_{(3)} &\equiv P^8 = i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3.
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

В принципе, можно определить величины B^A с разными знаками вкладов сопряженных пар, составляющих $B^{s\dot r}$.

5. Зная формулы преобразований параметров (5.2.1), легко найти векторный закон преобразований компонент B^A относительно грруппы $SL(3,C)$ в 9-мерном многообразии

$$B'^A = L^A_{\cdot B} B^B, \tag{5.4.10}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^A_{\cdot B}$ выражаются через квадратичные комбинации из коэффициентов C^r_s и C^{*r}_s аналогично (2.7.2). Формулы для 81 компоненты $L^A_{\cdot B}$ довольно громоздки, они выписаны в Приложении 3.

Поскольку компоненты B^0 во всех формулах (5.4.5), (5.4.7) и (5.4.9) выражаются через парные отношения $u_{i\alpha}$, а они при преобразованиях из группы $SU(3)$ не изменяются, то при унитарных унимодулярных преобразованиях имеем

$$L^0_{\cdot 0} = 1; \quad L^0_{\cdot l} = 0; \quad L^l_{\cdot 0} = 0. \tag{5.4.11}$$

Следовательно, такие 8-параметрические преобразования затрагивают лишь 8 компонент векторов. Они соответствуют 3- параметрическим пространственно-подобным поворотам в теории БСКО ранга (3,3).

5.5 Обобщение метрики Минковского

1. Введем спинтензорный инвариант

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot r\dot p\dot n}B^{s\dot r}B^{l\dot p}B^{m\dot n} = \begin{vmatrix} B^{1\dot 1} & B^{1\dot 2} & B^{1\dot 3} \\ B^{2\dot 1} & B^{2\dot 2} & B^{2\dot 3} \\ B^{3\dot 1} & B^{3\dot 2} & B^{3\dot 3} \end{vmatrix}, \tag{5.5.1}$$

непосредственно обобщающий инвариант (2.6.4) в теории 2-компонентных спиноров. Подставляя сюда компоненты 9- мерного вектора B^A из (5.4.1), находим

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot r\dot p\dot n}B^{s\dot r}B^{l\dot p}B^{m\dot n} = B^8\left((B^0)^2-(B^1)^2-(B^2)^2-(B^3)^2\right)+$$
$$+2B^1\left(B^4B^6+B^5B^7\right)-B^0\left((B^4)^2+(B^5)^2+(B^6)^2+(B^7)^2\right)+$$
$$+2B^2\left(B^5B^6-B^4B^7\right)+B^3\left((B^4)^2+(B^5)^2-(B^6)^2-(B^7)^2\right)\equiv$$
$$\equiv G_{ABC}B^AB^BB^C. \tag{5.5.2}$$

Это кубичное по компонентам вектора выражение заменяет 4-мерную релятивистски инвариантную квадратичную форму (2.6.4). Это чрезвычайно важное обстоятельство в теории БСКО ранга (4,4). В такой теории происходит не просто увеличение размерности с четырех до девяти, но и изменение характера мероопределения. Напомним, что в известных работах по многомерным теориям Калуцы-Клейна обычно используется постулат квадратичного (риманова) мероопределения.

2. Следует особо подчеркнуть, что для случая, когда $B^{s\dot r}$ определено через три пары сопряженных элементов, инвариант

(5.5.2) совпадает с фундаментальным 3х3-отношением для этих элементов, т.е.

$$G_{ABC}B^A_{(3)}B^B_{(3)}B^C_{(3)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix}. \qquad (5.5.3)$$

Для трех пар элементов этот инвариант в общем случае отличен от нуля.

Когда $B^{s\dot{r}}$ определено на двух парах сопряженных элементов согласно (5.4.6), инвариант (5.5.2) тождественно обращается в нуль:

$$G_{ABC}B^A_{(2)}B^B_{(2)}B^C_{(2)} = 0, \qquad (5.5.4)$$

где под $B^A_{(2)}$ следует понимать векторы p^A или s^A из (5.4.7). На этом основании векторы p^A и s^A можно назвать *изотропными* в теории БСКО ранга (4,4). Они аналогичны общепринятому изотропному вектору $k^\mu(i\alpha)$, определенному в 4-мерной теории согласно (2.6.1).

Для случая, когда $B^{s\dot{r}}$ определено на одной паре сопряженных элементов согласно (5.4.4), опять получаем равный нулю инвариант, однако теперь инвариант

$$G_{ABC}B^A_{(1)}B^B_{(1)}B^C_{(1)} \equiv 0 \qquad (5.5.5)$$

распадается на сумму двух величин, в отдельности равных нулю, т.к.

$$k^8\left((k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2\right) = k^8 g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0. \qquad (5.5.6)$$

По этой причине 9-мерный вектор, построенный на одной паре сопряженных элементов, можно назвать *дважды изотропным.*

3. Величины G_{ABC} в (5.5.2) и в последующих формулах естественно назвать *трехкомпонентным метрическим тензором.* При определении кубичного инварианта он обобщает известный 2-компонентный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ 4-мерного пространства Минковского (в декартовых координатах)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (5.5.7)$$

Метрика G_{ABC} имеет 729 компонент. Отличными от нуля являются только 60, из них 27 имеют знак плюс и 33 — знак минус. Выпишем их в виде 9 квадратных матриц, представляющих собой 9 последовательных сечений 9x9x9-куба из компонент G_{ABC}:

$$G_{AB8} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB7} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB6} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB5} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB4} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB3} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB2} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$G_{AB1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right);$$

$$
G_{AB0} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right). \qquad (5.5.8)
$$

5.6 Обобщенная теорема косинусов

1. Аналогично тому, как в разделе 2.8 был осуществлен переход от БСКО ранга (3,3) к унарной вещественной 4-мерной геометрии Минковского, обсудим переход от БСКО ранга (4,4) к

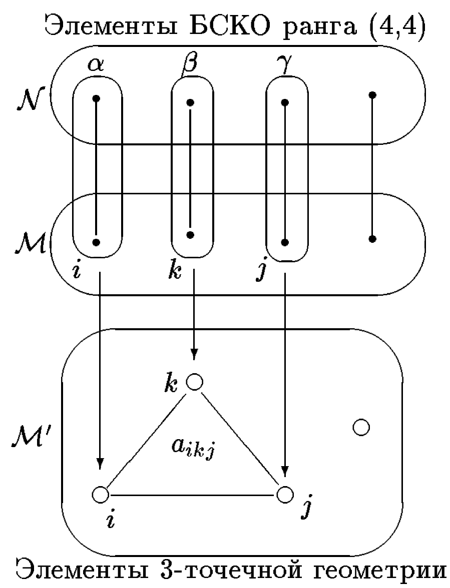


Рис. 5.1: Переход от БСКО ранга (4,4) к унарной трехточечной геометрии

своеобразной (унарной) геометрии, которую естественно назвать *трехточечной*. В ней, в отличие от общепринятых двухточечных геометрий, метрика задается для трех точек. Под "точками" теперь будем понимать новые элементы, образованные сшивкой пар сопряженных элементов из двух множеств БСКО ранга (4,4). Пусть сшивка по-арежнему определена процедурой комплексного сопряжения параметров элементов (5.1.5). Сопоставим элементы БСКО ранга (4,4) с элементами унарной системы вещественных отношений, как показано на рисунке 5.1. Условимся обозначать элементы унарной геометрии латинскими индексами соответствующих элементов множества $\mathcal{M}$ БСКО ранга (4,4).

Вместо квадрата парных отношений, например, s^2_{ik} в (2.6.10) в пространстве Минковского, определим куб тройных отношений между тремя "точками" i, j, k через фундаментальное 3x3-отношение:

$$a^3_{(ikj)} = \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} = a^3_{(ikj)} = a^3_{(kij)} = a^3_{(kji)}. \tag{5.6.1}$$

2. Определим понятие *скалярного произведения трех 9-мерных векторов*, построенных на трех разных шестерках сопряженных элементов БСКО ранга (4,4), через введенные ранее инварианты:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(mnl), \vec{B}(rst)\right) \equiv \\ &\equiv G_{ABC} B^A_{(3)}(ikj) B^B_{(3)}(mnl) B^C_{(3)}(rst) \equiv \\ &\equiv \tfrac{1}{6}\varepsilon_{slm}\varepsilon_{\dot r\dot p\dot n} B^{s\dot r}(ikj) B^{l\dot p}(mnl) B^{m\dot n}(rst). \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

В общем случае элементы из разных шестерок могут пересекаться.

Аналогично 4-мерной формуле (3.1.4) для скалярного произведения двух векторов, скалярное произведение трех векторов (5.6.2) можно переписать через отдельные инварианта вида (5.6.1), определенные для всех возможных троек "точек" из элементов, входящих в (5.6.2):

$$\begin{aligned} 6\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(mnl), \vec{B}(rst)\right) &= \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu\nu\lambda \\ mnl \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \rho\sigma\tau \\ rst \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \alpha\mu\rho \\ imr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\mu\sigma \\ ims \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \alpha\mu\tau \\ imt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\nu\rho \\ inr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\nu\sigma \\ ins \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \alpha\nu\tau \\ int \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\lambda\rho \\ ilr \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \alpha\lambda\sigma \\ ils \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\lambda\tau \\ ilt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\mu\rho \\ kmr \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \beta\mu\sigma \\ kms \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\mu\tau \\ kmt \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \beta\nu\rho \\ knr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\nu\sigma \\ kns \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\nu\tau \\ knt \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+\begin{bmatrix}\beta\lambda\rho\\ klr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\sigma\\ kls\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\lambda\tau\\ klt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\rho\\ jmr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\mu\sigma\\ jms\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\gamma\mu\tau\\ jmt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\rho\\ jnr\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\sigma\\ jns\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\nu\tau\\ jnt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\rho\\ jlr\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\sigma\\ jls\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma\lambda\tau\\ jlt\end{bmatrix}. \tag{5.6.3}$$

Легко видеть, что в случае $m = r = i$, $n = s = k$, $l = t = j$ эта формула переходит в (5.6.1), т.е.

$$\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(ikj), \vec{B}(ikj)\right) = \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ikj\end{bmatrix} = a^3_{(ikj)} \equiv B^3(ikj). \tag{5.6.4}$$

3. Как можно было видеть из раздела 2.8, для вывода закона прообраза пространства Минковского ключевую роль играла теорема косинусов (2.8.2) (см. также (2.8.4)). Исходя из формулы (5.6.3) установим аналог теоремы косинусов в трехточечной геометрии. Для этого возьмем четыре пары сшитых элементов (i,α), (k,β), (j,γ) и (l,λ) (см. рис.5.2). Пусть точка i выделена. С

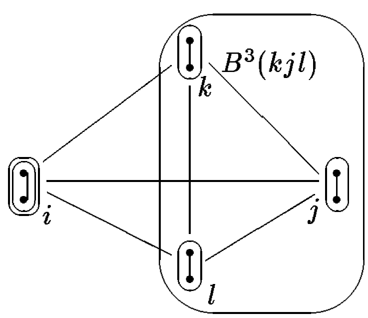


Рис. 5.2: Теорема косинусов в трехточечной геометрии устанавливается для четырех пар элементов

участием этой точки можно образовать три треугольника: (ikj), (ijl) и (ikl). Определим для этих треугольников три 9-мерных вектора и запишем согласно (5.6.3) их скалярное произведение. Учитывая, что отдельные инварианты справа в (5.6.3) обращаются в нуль, как только две пары элементов совпадают, будем иметь

$$\left(\vec{B}(ikj), \vec{B}(ijl), \vec{B}(ilk)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\alpha\gamma\beta\\ ijk\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\gamma\lambda\\ ijl\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix}\right)+$$

$$+ \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\beta\gamma\lambda\\ kjl\end{bmatrix}. \qquad (5.6.5)$$

Это выражение можно переписать в другом виде

$$\begin{aligned} B^3(kjl) &= -\frac{3}{2}\left(B^3(ijk)+B^3(ijl)+B^3(ikl)\right)+\\ &+ 3\left(\vec{B}(ikj),\vec{B}(ijl),\vec{B}(ilk)\right), \end{aligned} \qquad (5.6.6)$$

обобщающем формулы (2.8.2) или (2.8.4) для теоремы косинусов в 4-мерной геометрии с парными отношениями.

Отметим, что 9-мерные векторы $B^{\mu}_{(3)}$ можно определить с другими знаками вкладов от составляющих его пар элементов, нежели $(+\,+\,+)$ в (4.4.9). При знаках $(+\,-\,-)$, $(-\,+\,+)$ и т.д. получаются другие виды трехточечных обобщений теоремы косинусов. Эта ситуация аналогична появлению разновидностей теоремы косинусов (2.8.2) и (2.8.4) в теории БСКО ранга (3,3).

5.7 Кубичные детерминанты

1. Опираясь на установленную обобщенную теорему косинусов, построим *кубичную ("пространственную") матрицу* с элементами M_{jkl}. Пусть ее элементы характеризуются соответствующими тремя точками j, k, l при одной общей для всех элементов точке i. Пусть далее точка i сохраняет свой индивидуальный характер, а точки j, k, l имеют собирательный смысл, т.е. пробегают значения: $1,\ 2,\ \cdots,\ n$, где n *порядок* кубичной матрицы. Таким образом, элементы матрицы пусть задаются в согласии с (5.6.5)

$$M_{jkl} = \left(\vec{B}(ikj),\vec{B}(ijl),\vec{B}(ilk)\right). \qquad (5.7.1)$$

2. Из кубичной матрицы (M_{jkl}) построим *кубичный детерминант.* Поскольку теория кубичных (пространственных) детерминантов известна недостаточно широко, приведем из нее самые необходимые сведения [57, 58]. Из элементов кубичной матрицы (M_{jkl}) можно построить четыре вида детерминантов:

$$\left|M_{\overset{+}{j}\overset{\pm}{k}\overset{\pm}{l}}\right|,\ \left|M_{\overset{\pm}{j}\overset{+}{k}\overset{\pm}{l}}\right|,\ \left|M_{\overset{\pm}{j}\overset{\pm}{k}\overset{+}{l}}\right|,\ \left|M_{\overset{+}{j}\overset{+}{k}\overset{+}{l}}\right|, \qquad (5.7.2)$$

где использованы обозначения через так называемые *символы Райса.* Три значка над индексами определяют *сигнатуру детерминанта.* Это непривычное понятие для большинства имеющих дело лишь с квадратичными детерминантами (определителями). Общепринятые квадратичные определители записываются через символы Райса в виде $\left|M_{\underset{j}{\pm}\underset{k}{\pm}}\right|$. Известно, что слагаемые в определителе характеризуются знаками + или −, которые зависят от индексов сомножителей. В квадратичных определителях оба индекса эквивалентны. Однако в кубичных (и вообще в нечетных) детерминантах эквивалентность относительно выбора знака может быть лишь для пар индексов. Третий индекс оказывается выделенным,— он не влияет на выбор знака. В связи с этим индексы делятся на *альтернативные*, влияющие на знак, и *неальтернативные*, не влияющие на выбор знака. Так, первый из детерминантов в (5.7.1) определяется выражением

$$\left|M_{\underset{j}{+}\underset{k}{\pm}\underset{l}{\pm}}\right| = \sum_j \sum_k \sum_l (-1)^{I_k+I_l} M_{j_1k_1l_1} M_{j_2k_2l_2} \cdots M_{j_nk_nl_n}, \quad (5.7.3)$$

где суммирование производится по всем возможным *трансверсалям*, т.е. по всем $n!$ комбинациям из n элементов матрицы, из которых никакая пара не принадлежит одному и тому же *сечению какой-либо ориентации*. Под сечением ориентации, например j, понимается совокупность из n^2 элементов матрицы с фиксированным индексом j. Очевидно, в кубичных матрицах имеются сечения трех возможных ориентаций. В формуле (5.7.2) индексы k и l альтернативные, тогда как индекс j — неальтернативный. Знак слагаемых детерминанта определяется степенью $(I_k + I_l)$ при -1. Здесь I_k определяет, четной или нечетной перестановкой индексы $k_1, k_2, \cdots, k_n$ могут быть переведены в совокупность чисел: $1, 2, \cdots, n$. Аналогичный смысл имеет величина I_l.

3. Еще раз подчеркнем, что *число альтернативных индексов всегда является четным*, так как тогда и только тогда сохраняется коммутативность умножения слагаемых в определениях детерминантов типа (4.7.2). Число альтернативных индексов определяет *род* p-мерного детерминанта. У p-мерной матрицы при p четном имеется только один детерминант наивысшего рода p, когда все индексы альтернативные. Следуя Кэли такие детерминанты называются *гипердетерминантами*. Так, привычные квадратичные детерминанты являются гипердетерминантами. Детерминанты наинизшего рода 0, когда все индексы неальтернативные, называются *перманентом*. Таковым является последний из детерминантов в (5.7.1). Детерминанты, род которых лежит между 0 и p согласно терминологии Вайдьянатхасвами называются смешанными. В этом разделе ограничимся смешанным детерминантом рода 2 вида (5.7.2), т.е. с сигнатурой $(+\pm\pm)$.

4. Покажем, что для порядков $n = 9$ и выше детерминант

(5.7.2) при выполнении некоторого условия на "точки" тождественно равен нулю. Для доказательства воспользуемся следующим свойством многомерных детерминантов (теоремой): "Если одно из сечений какой-либо ориентаций в многомерном детерминанте есть линейная комбинация его других сечений той же ориентации, то детерминант будет равен нулю, если ориентация — альтернативная, и не будет необходимо равным нулю, если ориентация — неальтернативная" [57, с.30]. Возьмем сечения с альтернативной ориентацией l. Из правой части (5.6.5) видно, что первое слагаемое во всех соответствующих элементах в параллельных сечениях ориентации l одинаково, тогда как последние три различаются. Распишем, например, третье слагаемое. Его можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikl \end{bmatrix} = G_{abc}(k_i^A + k_k^A + k_l^A)(k_i^B + k_k^B + k_l^B)(k_i^C + k_k^C + k_l^C), \quad (5.7.4)$$

где k_i^A, k_k^A, k_l^A — дважды изотропные 9-мерные векторы, образованные соответствующими парами сопряженных элементов. Учитывая, что эти векторы дважды изотропные, с помощью формул для кубичной метрики из раздела 5.5 легко показать, что все комбинации из кубичных и квадратичных векторов одной и той же пары сопряженных элементов тождественно обращаются в нуль, т.е. это слагаемое можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikl \end{bmatrix} = 6G_{ABC}k_i^A k_k^B k_l^C. \quad (5.7.5)$$

Учтем, что векторы k^A являются 9-мерными. Это значит, что при $n = 10$ любой из них (пусть это будет k_l^A) можно представить в виде линейной комбинации из девяти других:

$$k_{l_r}^A = \sum_{s \neq r}^{10} C_s k_{l_s}^A. \quad (5.7.6)$$

Это означает, что выражения из трех последних слагаемых справа в (5.6.5) одного сечения альтернативной ориентации l является линейной комбинацией выражений из других параллельных сечений.

Для того чтобы это утверждение распространялось на все выражение (5.6.5), необходимо, чтобы коэффициенты C_s в разложении (5.7.4) удовлетворяли условию

$$\sum_{s \neq r}^{10} C_s = 1.$$

Это будет выполняться, в частности, в том случае, если все дважды изотропные векторы k_l^A обладают одинаковой компонентой k_l^0:

$$k_{l_1}^0 = k_{l_2}^0 = \cdots = k_{l_{10}}^0.$$

Однако в этом случае можно говорить не о 9-мерных, а о 8-мерных векторах, т.е. во всех предыдущих рассуждениях можно ограничиться случаем порядка $n = 9$. Другими словами, должно выполняться условие

$$\sum_{s \neq r}^{9} C_s = 1 \qquad k_{l_1}^0 = k_{l_2}^0 = \cdots = k_{l_9}^0. \tag{5.7.7}$$

Следовательно, определитель 9-го порядка (5.7.2) при выполнении условия (5.7.5) обращается в нуль и в дальнейших рассуждениях играет роль определителя Грама в разделе 2.8.

5.8 Закон трехточечной геометрии

1. Аналогично разделу 2.8 произведем окаймление кубичного детерминанта (5.7.2), в котором все элементы умножены на 3. Будем опираться на теорему из теории пространственных матриц, аналогичную случаю квадратичных матриц: "Любой из детерминантов кубической матрицы равен сумме произведений всех элементов какого-нибудь его сечения на их алгебраические дополнения" [57, с.41]. Это означает, что от нулевого детерминанта (5.7.2) 9-го порядка можно перейти к нулевому детерминанту 10-го порядка, добавив к (5.7.2) сечение, например, ориентации j лишь с одним единичным элементом

$$\tilde{M}_{1,10,10} = 1; \quad \tilde{M}_{1,k,l} = 0; \quad \tilde{M}_{1,10,l} = 0; \quad \tilde{M}_{1,k,10} = 0 \tag{5.8.1}$$

при $k, l = 1, 2, \cdots, 9$. Элементы двух новых сечений ориентаций k и l, не входящие в названное сечение ориентации j, могут быть произвольными. Поставим эти сечения десятыми и зададим элементы сечений ориентации k и l соответственно формулами:

$$\tilde{M}_{j,10,l} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha\lambda \\ jil \end{bmatrix}; \quad \tilde{M}_{j,k,10} = \begin{bmatrix} \gamma\beta\alpha \\ jki \end{bmatrix}, \tag{5.8.2}$$

(см. рис. 5.3). В пересечениях дополнительных сечений друг с другом стоят нули, кроме углового элемента $\tilde{M}_{1,10,10} = 1$.

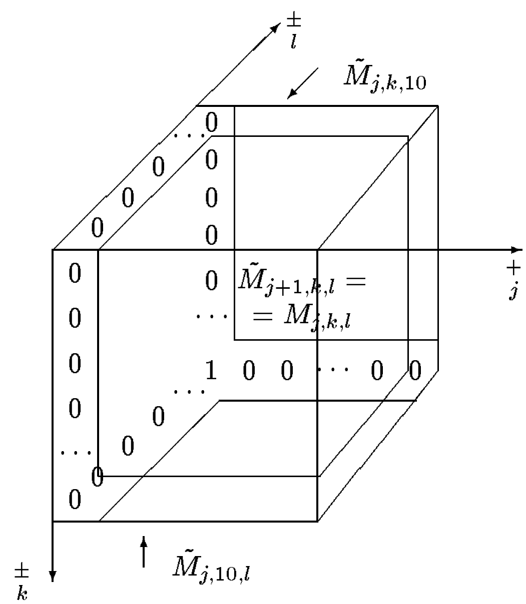


Рис. 5.3: Первое окаймление детерминанта $|M_{jkl}|$

2. Вычтем из всех сечений ориентации l (при $l = 1, 2, \cdots, 9$) последнее сечение этой же ориентации, умноженное на 3/2. Это можно сделать вследствие свойства Гегенбауэра, обобщающего теорему Якоби для квадратичных детерминантов: "Если в многомерном детерминанте к некоторому сечению какой-нибудь ориентации прибавляется другое сечение той же ориентации, умноженное на какое-либо число, то детерминант не меняется, если ориентация — альтернативная, и, вообще говоря, меняется, если ориентация — неальтернативная" [57, с.31]. В итоге такой процедуры во всех элементах получившейся матрицы $\tilde{M}'_{jkl}$ (кроме дополнительных сечений) исчезнет слагаемое $(3/2)\left[{\alpha\gamma\beta \atop ijk}\right]$, а в левом нижнем ребре возникнут числа $-3/2$.

Далее, опираясь на ту же теорему, вычтем из всех сечений альтернативной ориентации k (при $k = 1, 2, \cdots, 9$) нижнее сечение этой же ориентации с коэффициентом 3/2. В итоге из слагаемых в новой матрице $\tilde{M}''_{jkl}$ выпадут слагаемые $(3/2)\begin{bmatrix}\gamma\alpha\lambda\\ jil\end{bmatrix}$, т.е.

$$\tilde{M}''_{j+1,k,l} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma\beta\lambda\\ jkl\end{bmatrix} \tag{5.8.3}$$

при $k \neq 10$; $l \neq 10$. Элементы первого сечения ориентации j будут иметь вид:

$$\begin{array}{|cccc}
\hline
9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2\\
9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-3/2 & -3/2 & \cdots & 1.
\end{array}$$

3. Произведем второе окаймление детерминанта. Добавим на первые места новые сечения ориентаций k, l и на одиннадцатое место новое сечение ориентации j. Пусть (для симметрии) в двух новых первых сечениях отличен от нуля и равен единице элемент $\tilde{M}''_{1,1,11} = 1$, а все остальные их элементы равны нулю. Из изложенного следует, что одиннадцатое сечение ориентации j можно задать произвольно, не затрагивая ребер в пересечении с уже заданными новыми сечениями двух других ориентаций. Зададим элементы этого сечения в виде

$$M'_{11,k+1,l+1} = \begin{bmatrix}\alpha\beta\lambda\\ ikl\end{bmatrix} \tag{5.8.4}$$

при $k, l = 1, 2, \cdots, 10$.

4. Для получения непосредственного аналога (прообраза) 4-мерной геометрии Минковского необходимо произвести вычитания из сечений ориентации j одиннадцатого сечения той же ориентации, умноженного на $1/2$. Однако для неальтернативных направлений в общем случае такая процедура неправомерна. В результате ее проведения значение детерминанта в общем случае изменится. Чтобы все-таки можно было ее произвести *необходимо наложить дополнительные условия на "точки", для которых намечается ввести унарную кубичную геометрию*. Эти условия состоят в обращении в нуль детерминанта, получающегося таким вычитанием. В итоговой матрице $M''_{j+1,k+1,l+1}$ первые сечения ориентаций j, k, l соответственно имеют вид:

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2\\
0 & 9/4 & 9/4 & \cdots & -3/2\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1;
\end{array}$$

$$
\begin{array}{|ccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1; \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ccccc}
\hline
0 & -3/2 & -3/2 & \cdots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0,
\end{array}
$$

а элементы оставшейся подматрицы определяются формулой

$$M''_{j+1,k+1,l+1} = \begin{bmatrix} \gamma\beta\lambda \\ jkl \end{bmatrix}, \tag{5.8.5}$$

где на десятом месте стоит элемент i, т.е. $j_{10} = i$; $k_{10} = i$; $l_{10} = i$. Такая матрица обобщает квадратичный определитель Кэли-Менгера (2.8.7). Эта матрица обладает тем свойством, что на ее диагональных сечениях, когда $j = k$ или $j = l$ или $k = l$ (кроме элементов в пересечении с первым сечением ориентации j и на ребре $M''_{j,1,1}$), все элементы обращаются в нуль. Очевидно, что в выписанных выше особенных (первых) сечениях значения элементов можно изменить, умножив сечения на постоянные числа.

5. Как уже отмечалось, геометрия такого рода возможна не для любого множества пар сопряженных элементов, как это имеет место для 4-мерных геометрий с парными отношениями, а лишь для случая, когда для всех возможных комбинаций из 10 элементов кубический определитель Кэли-Менгера 11-го порядка обращается в нуль. Это приводит к ограничению множеств элементов, для которых можно ввести такую геометрию. Учитывая, что каждая пара состояний элементов характеризуется тремя комплексными или 6 вещественными числами, можно записать формулу для грубой оценки числа n таких элементов

$$C_n^{10} \leq 6n \to \frac{n!}{(n-10)!10!} \leq 6n. \tag{5.8.6}$$

Максимальное число, при котором выполняется это неравенство: $n = 12$. [2]

[2]Выскажем гипотезу, что такая геометрия имеет место для сильновзаимодействующих частиц, т.е. в атомных ядрах. Зная, что сильновзаимодействующие частицы — барионы состоят из трех кварков, приходим к выводу, что насыщение ($n = 12$) имеет место для 4 барионов, т.е. для ядер гелия (для α-частиц).

Глава 6

Обобщенные импульсы и частицы

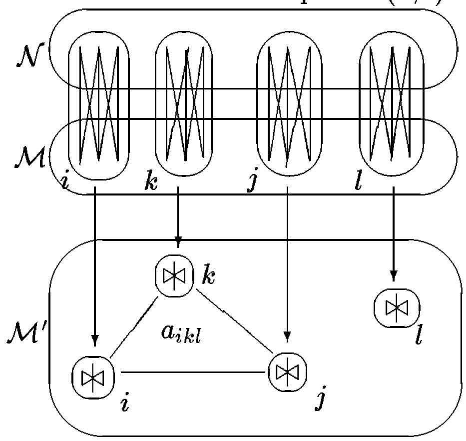
По аналогии с главой 3, где из БСКО ранга (3,3) была выведена геометрия Лобачевского, интерпретируемая как импульсное пространство для идеализированных лептонов, в этой главе на базе БСКО ранга (4,4) построено трехточечное обобщение геометрии Лобачевского. Так же, как определялись лептоны, введены обобщенные частицы, описываемые тройками элементов БСКО ранга (4,4). В такой теории ключевую роль играют группы $SL(3, C)$ и $SU(3)$. Есть основания интерпретировать обобщенные частицы как идеализированные барионы, имеющие трехкварковую структуру, а обобщенное пространство Лобачевского предложено трактовать как импульсное пространство таких частиц.

6.1 Трехточечное обобщение геометрии Лобачевского

1. Придерживаясь методики перехода от БСКО ранга (3,3) к импульсному пространству (к пространству Лобачевского), в рамках теории БСКО ранга (4,4) естественно определить *обобщенное импульсное пространство* для специальных образований, составленных из шестерок (из трех пар) сопряженных элементов. Такие образования – элементы новой УСВО – строятся из бинарных элементов согласно рисунку 6.1. На этом рисунке новые элементы обозначены одним латинским индексом.

В новом множестве $\mathcal{M}'$ определим как *внутренние отношения* для каждого из новых элементов

Элементы БСКО ранга (4,4)



Элементы обобщенного импульсного пространства

Рис. 6.1: Переход от БСКО ранга (4,4) к обобщенному импульсному пространству

$$a_{iii} = \begin{bmatrix} \alpha\mu\nu \\ imn \end{bmatrix}, \tag{6.1.1}$$

где i, m, n, α, μ, ν — первичные элементы, образующие новый элемент i, так и *перекрестные тройные отношения* с помощью общей формулы (5.6.3)

$$a_{ikl} = \left(\vec{B}(imn), \vec{B}(kps), \vec{B}(ltb)\right). \tag{6.1.2}$$

Здесь, как и в главе 3 при определении импульсов, будем полагать, что векторы $\vec{B}(imn)$ построены симметрично из трех сопряженных пар элементов, т.е. все три дважды изотропные составляющие k^A входят с одинаковыми знаками плюс согласно (5.4.9).

2. Чтобы записать закон для трехточечной УСВО выделим 10 произвольных элементов в определенном выше множестве $\mathcal{M}'$ и из всевозможных скалярных произведений вида (6.1.2), соответствующих им 9-мерных векторов (т.е. из тройных отношений a_{ikl}) построим кубичный определитель. Пусть направления k и l будут альтернативными, а i — неальтернативным. Легко показать, что

$$\left|B_{\underset{i}{+}\underset{k}{\pm}\underset{l}{\pm}}\right| \equiv \left|a_{\underset{i}{+}\underset{k}{\pm}\underset{l}{\pm}}\right| = 0. \tag{6.1.3}$$

Для этого нужно опять воспользоваться теоремой об обращении в нуль кубичного детерминанта, если одно из его сечений является линейной комбинацией других его сечений той же альтернативной ориентации. Поскольку элементы данного кубичного детерминанта записываются линейно через составляющие три вектора согласно (5.6.2), а десять 9-мерных векторов, на которых построен кубичный детерминант, линейно зависимы, то условия теоремы выполняются.

Заметим, что доказательство обращения в нуль детерминанта (6.1.3) значительно проще, нежели детерминанта из раздела 5.7, поскольку вид элементов кубичного детерминанта (5.6.5), диктуемый обобщенной теоремой косинусов, сложнее. Из него, в частности, следуют условия (5.7.6) на вид 9-мерных векторов, тогда как в данном случае ограничений на векторы нет.

3. Ограничимся частным случаем, когда внутренние отношения одинаковы. Нормируем их на некоторую (положительную вещественную) величину M^3c^3 так, что

$$a_{iii} = a_{jjj} = a_{kkk} = \cdots = M^3c^3. \tag{6.1.4}$$

Это выражение соответствует (3.1.12) в теории БСКО ранга (3,3) и означает, что 9-мерные компоненты обобщенного импульса удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} G_{ABC}P^AP^BP^C &= P^8\left((P^0)^2-(P^1)^2-(P^2)^2-(P^3)^2\right)+\\ +2P^1\left(p^4P^6+P^5P^7\right) &- P^0\left((P^4)^2+(P^5)^2+(P^6)^2+(P^7)^2\right)+\\ +2P^2\left(P^5P^6-P^4P^7\right) &+ P^3\left((P^4)^2+(P^5)^2-(P^6)^2-(P^7)^2\right)=\\ &= M^3c^3. \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Обозначения уже подсказывают, что константа M имеет физический смысл некой *массы* обобщенной частицы.

Очевидно, что обращающийся в нуль кубичный детерминант (6.1.3) с условиями (6.1.4) на элементы главной диагонали можно трактовать как закон

$$\Phi = \left| B_{\underset{i}{+}\,\underset{k}{\pm}\,\underset{l}{\pm}} \right| = 0 \tag{6.1.6}$$

трехточечной УСВО, обобщающей закон двухточечной геометрии Лобачевского (3.1.6). По этой причине такую геометрию можно назвать *трехточечной или обобщенной геометрией Лобачевского.*

4. Как и в разделе 3.1, можно сопоставить два варианта унарных конструкций (двух трехточечных геометрий), выводимых из одной и той же БСКО ранга (4,4). Задание в одной из них (в обобщенном импульсном пространстве) нормировки длин векторов (6.1.3) опять можно трактовать как введение характерной *минимальной длины* (обобщенного интервала) в прообразе обобщенного (трехточечного) координатного пространства.

6.2 Обобщенные биспиноры и 9-мерные векторы

1. Для описания обобщенных частиц введем многокомпонентные столбцы Ψ и строки $\Psi^\dagger$, аналогичные 4-компонентным величинам, определенным в (3.2.1). В разделе 3.2

был перечислен ряд условий, исходя из которых конструировались 4-компонентные величины. Теперь выражения, построенные по прежним рецептам, составляют три 6-компонентных столбца:

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix}; \quad \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ k^3 \\ (\gamma\alpha)_{\dot 1} \\ (\gamma\alpha)_{\dot 2} \\ (\gamma\alpha)_{\dot 3} \end{pmatrix}; \quad \Psi(3) = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \\ (\alpha\beta)_{\dot 1} \\ (\alpha\beta)_{\dot 2} \\ (\alpha\beta)_{\dot 3} \end{pmatrix} \tag{6.2.1}$$

и три 6-компонентные строки:

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger(1) &= \left\{\alpha^{\dot 1}, \alpha^{\dot 2}, \alpha^{\dot 3}; (kj)_1, (kj)_2, (kj)_3\right\}; \\ \Psi^\dagger(2) &= \left\{\beta^{\dot 1}, \beta^{\dot 2}, \beta^{\dot 3}; (ji)_1, (ji)_2, (ji)_3\right\}; \\ \Psi^\dagger(3) &= \left\{\gamma^{\dot 1}, \gamma^{\dot 2}, \gamma^{\dot 3}; (ik)_1, (ik)_2, (ik)_3\right\}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Эти величины соответствуют (3.2.1), во-первых, в том смысле, что тройки компонент в $\Psi(s)$ и $\Psi^\dagger(s)$ преобразуются комплексно сопряженным образом и могут быть поставлены в соответствие друг другу в прежнем смысле. Во-вторых, две тройки компонент в каждой из этих величин соответствуют “начальным” и “конечным” состояниям элементов, не находящимся друг с другом в парах. В-третьих, как и в (3.2.1), одна половина компонент является контравариантной, а вторая половина — ковариантной, но преобразующейся через комплексно сопряженные коэффициенты, например

$$\begin{pmatrix} i'^1 \\ i'^2 \\ i'^3 \\ (\beta\gamma)'_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)'_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)'_{\dot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 & 0 & 0 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 & 0 & 0 & 0 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q^{*1}_1 & Q^{*2}_1 & Q^{*3}_1 \\ 0 & 0 & 0 & Q^{*1}_2 & Q^{*2}_2 & Q^{*3}_2 \\ 0 & 0 & 0 & Q^{*1}_3 & Q^{*2}_3 & Q^{*3}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix}, \tag{6.2.3}$$

т.е.

$$\Psi'(1) = S\Psi(1).$$

В том же смысле, что и в (3.2.2), величину $\Psi(s)$ можно назвать биспинором.

Существенное отличие (6.2.1) и (6.2.2) от (3.2.1) состоит в том, что вторые тройки компонент образованы парными комбинациями компонент элементов, а не одинарными, как в (3.2.1).

2. Как уже отмечалось, при $SL(3,C)$ преобразованиях остаются инвариантными две кубичные комбинации: $\varepsilon_{srp} i^s k^r j^p$ и $\varepsilon_{\dot s\dot r\dot p}\alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p}$. Для определенных в (6.2.1) и (6.2.2) величин можно подобрать такую 6x6-матрицу $\tilde\Lambda_0$, чтобы при любом s выполнялось соотношение

$$\Psi^\dagger(s)\tilde\Lambda_0\Psi(s) = \varepsilon_{srp} i^s k^r j^p + \varepsilon_{\dot s\dot r\dot p}\alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p} \equiv \overline{\Psi}(s)\Psi(s). \tag{6.2.4}$$

Легко видеть, что матрица $\tilde\Lambda_0$ должна иметь вид

$$\tilde\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.5}$$

где I_3 — единичная 3x3-матрица. С помощью этой матрицы в (6.2.3) введен аналог общепринятого выражения, например

$$\overline{\Psi}(1) \equiv \Psi^\dagger(1)\tilde\Lambda_0 = \left\{(kj)_1, (kj)_2, (kj)_3; \alpha^{\dot 1}, \alpha^{\dot 2}, \alpha^{\dot 3}\right\}. \tag{6.2.6}$$

Из (6.2.3) следует, что строка $\overline{\Psi}(s)$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}'(s) = \overline{\Psi}(s)S^{-1}, \tag{6.2.7}$$

где S^{-1} — матрица, обратная S в (6.2.3); она имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*1} & C_2^{*1} & C_3^{*1} \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*2} & C_2^{*2} & C_3^{*2} \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{*3} & C_2^{*3} & C_3^{*3} \end{pmatrix}. \tag{6.2.8}$$

3. Аналогично формуле (3.2.8) для определения импульса p^μ в теории БСКО ранга (3,3) можно выразить компоненты P^A из (5.4.9) в виде квадратичных комбинаций из $\overline{\Psi}$ и Ψ:

$$2(P^A + \tilde{P}^A) = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}(s)\Lambda^A\Psi(s), \tag{6.2.9}$$

где Λ^A — девять 6-рядных матриц, которые выражаются через λ_0 и матрицы Гелл-Манна (5.4.2), (5.4.3) согласно

$$\Lambda^0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda^l = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_l \\ \lambda_l & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.10}$$

Они соответствуют известным матрицам Дирака γ^μ. Выражение $\tilde{P}^A$ в (6.2.8) записывается точно так же, как и P^A в (5.4.9), но с заменой

$$i^s \to (\beta\gamma)_{\dot{s}}; \quad k^s \to (\gamma\alpha)_{\dot{s}}; \quad j^s \to (\alpha\beta)_{\dot{s}};$$

$$\alpha^{\dot{s}} \to (kj)_s; \quad \beta^{\dot{s}} \to (ji)_s; \quad \gamma^{\dot{s}} \to (ik)_s.$$

Дополнительное слагаемое $\tilde{P}^A$ и суммирование по s отличают (6.2.8) от аналогичной формулы (3.2.8). В связи с этим следует заметить, что в теории БСКО ранга (3,3) в определении Ψ и $\overline{\Psi}$ элементы i и k (а также α и β) формально выступали неравноправно. Естественно было бы и там ввести пары величин:

$$\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^s \\ \beta_{\dot{s}} \end{pmatrix}; \quad \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^s \\ \alpha_{\dot{s}} \end{pmatrix}$$

и определить векторы формулой

$$2(p_\mu + \tilde{p}_\mu) = \sum_{s=1}^{2} \tilde{\Psi}(s)\gamma_\mu\Psi(s).$$

Однако там оказывается $\tilde{p}_\mu = p_\mu$. Вследствие того, что ковариантные величины записываются линейно через контравариантные, оказалось возможным ограничиться одним 4- компонентным столбцом (и одной строкой).

4. Определим матрицу Λ^{10} в виде, аналогичном матрице γ_5 в (3.2.12):

$$\Lambda^{10} = -i \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \tag{6.2.11}$$

тогда вторую линейную комбинацию инвариантов можно представить в виде

$$2P^{10} = \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = -i(\varepsilon_{srp}i^s k^r j^p - \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{p}}\alpha^{\dot{s}}\beta^{\dot{r}}\gamma^{\dot{p}}) \tag{6.2.12}$$

для каждого $s = 1, 2, 3$.

С помощью матрицы Λ^{10} можно расщепить определения P^A и $\tilde{P}^A$ в (6.2.8), для этого введем "левые" (L) и "правые" (R) компоненты Ψ и $\overline{\Psi}$ по образу и подобию введения левых и правых компонент лептонов в (3.2.15):

$$\begin{aligned}
\Psi_L(s) &= \tfrac{1}{2}(I_6 + i\Lambda^{10})\Psi(s) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi(s); \\
\Psi_R(s) &= \tfrac{1}{2}(I_6 - i\Lambda^{10})\Psi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}\Psi(s); \\
\overline{\Psi}_L(s) &= \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(I_6 - i\Lambda^{10}) = \overline{\Psi}(s)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}; \\
\overline{\Psi}_R(s) &= \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(s)(I_6 + i\Lambda^{10}) = \overline{\Psi}(s)\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Легко видеть, что левые компоненты определяются параметрами элементов в первой степени (например, $\Psi_L(1)$ определяется i^s, а $\overline{\Psi}_L(1)$ — параметром α^s), тогда как правые компоненты выражаются лишь через квадратичные комбинации параметров. Это позволяет раздельно записать

$$2P^A = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}_L(s)\Lambda^A\Psi_L(s); \quad 2\tilde{P}^A = \sum_{s=1}^{3} \overline{\Psi}_R(s)\Lambda^A\Psi_R(s). \tag{6.2.14}$$

5. Используя формулы преобразований параметров элементов (5.2.1) и (5.3.9), находим *векторные законы преобразований компонент P^A и $\tilde{P}^A$ относительно группы $SL(3, C)$* в 9-мерном многообразии:

$$P'^A = L^A_{\cdot B}P^B; \quad \tilde{P}'^A = \tilde{L}^A_{\cdot B}\tilde{P}^B, \tag{6.2.15}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^{A}_{\cdot B}$ обсуждены в разделе 5.4 и выписаны в Приложении 3, а коэффициенты $\tilde{L}^{A}_{\cdot B}$ записываются аналогичным образом через Q^{k}_{s} из (5.3.10).

6.3 Собственная система отношений обобщенной частицы

1. Аналогично тому, как это делалось в разделе 3.3, обсудим собственную систему отношений обобщенной частицы. По-прежнему будем полагать, что три пары сопряженных элементов: (i,α), (k,β), (j,γ), составляющих частицу, не произвольны, а удовлетворяют некоторой системе условий. Прежде всего, в согласии с нормировкой (6.1.3) следует обобщить условия (3.3.4), т.е. переписать условия (5.1.8) и (5.1.9) с заменой произвольной константы u_0 на Mc:

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = u_{j\gamma} = Mc; \tag{6.3.1}$$

$$u_{i\beta} = u_{k\alpha} = u_{i\gamma} = u_{j\alpha} = u_{k\gamma} = u_{j\beta} = 0. \tag{6.3.2}$$

Они означают, во-первых, что внутренние отношения между сопряженными парами одинаковы, и, во-вторых, что перекрестные отношения между элементами различных пар равны нулю. Другими словами, простейшая унарная вещественная геометрия, описанная в разделе 5.1, внутри обобщенной частицы вырождается.

2. Термин "собственная система отношений" по-прежнему оправдывает себя. Действительно, подставляя (6.3.1), (6.3.2) в определения компонент 9-мерных импульсов (5.4.9), можно показать, что

$$P^{0}_{(c)} = Mc; \tag{6.3.3}$$

$$P^{1}_{(c)} = P^{2}_{(c)} = P^{3}_{(c)} = P^{4}_{(c)} = P^{5}_{(c)} = P^{6}_{(c)} = P^{7}_{(c)} = 0; \tag{6.3.4}$$

$$P^{8}_{(c)} = Mc. \tag{6.3.5}$$

Здесь индекс c снизу, как и в разделе 3.3, означает, что компоненты записаны в собственной системе отношений. Отсюда видно, что 7 компонент 9-мерного импульса, которые естественно назвать пространственно-подобными, в собственной системе отношений тождественно обращаются в нуль.

3. Рассмотрим значения инвариантов. Для этого сопоставим две формы записи фундаментального 3х3-отношения:

$$\begin{vmatrix} Mc & 0 & 0 \\ 0 & Mc & 0 \\ 0 & 0 & Mc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i^{*1} & k^{*1} & j^{*1} \\ i^{*2} & k^{*2} & j^{*2} \\ i^{*3} & k^{*3} & j^{*3} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta\Delta^* = M^3c^3. \tag{6.3.6}$$

Отсюда находим, если инвариант вещественный, то

$$\Delta = \pm(Mc)^{3/2}, \tag{6.3.7}$$

а если мнимый, то

$$\Delta = \pm i(Mc)^{3/2}. \tag{6.3.8}$$

Используя найденные формулы, запишем инварианты (6.2.3) и (6.2.11). Для вещественного Δ имеем

$$\overline{\Psi}(s)\Psi(s) = \pm 2(Mc)^{3/2}; \quad \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = 0. \tag{6.3.9}$$

Для мнимого Δ находим

$$\overline{\Psi}(s)\Psi(s) = 0; \quad \overline{\Psi}(s)\Lambda^{10}\Psi(s) = 2i(Mc)^{3/2} \tag{6.3.10}$$

для любого $s = 1, 2, 3$. Ограничимся случаем, когда Δ – вещественная величина.

4. Аналогично тому, как это делалось в теории БСКО ранга (3,3), естественно положить, что две возможности выбора знака в (6.3.9) соответствуют двум видам обобщенных частиц. *Назовем случай с верхним знаком соответствующим обобщенной частице, а с нижним знаком – обобщенной античастице.* Таким образом, определения частицы и античастицы имеют инвариантный характер, – связаны со значением знака инварианта.

С учетом данного определения и ранее приведенной формулы (5.2.9) запишем в матричном виде соотношения между параметрами элементов, составляющими частицу и античастицу, в собственной системе отношений:

$$\begin{pmatrix} i_c^1 & k_c^1 & j_c^1 \\ i_c^2 & k_c^2 & j_c^2 \\ i_c^3 & k_c^3 & j_c^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{Mc}} \begin{pmatrix} k_c^{*2} j_c^{*3} - k_c^{*3} j_c^{*2} & j_c^{*2} i_c^{*3} - j_c^{*3} i_c^{*2} & i_c^{*2} k_c^{*3} - i_c^{*3} k_c^{*2} \\ k_c^{*3} j_c^{*1} - k_c^{*1} j_c^{*3} & j_c^{*3} i_c^{*1} - j_c^{*1} i_c^{*3} & i_c^{*3} k_c^{*1} - i_c^{*1} k_c^{*3} \\ k_c^{*1} j_c^{*2} - k_c^{*2} j_c^{*1} & j_c^{*1} i_c^{*2} - j_c^{*2} i_c^{*1} & i_c^{*1} k_c^{*2} - i_c^{*2} k_c^{*1} \end{pmatrix}, \tag{6.3.11}$$

где знак плюс соответствует обобщенной частице, а минус — античастице. Эти формулы обобщают соотношения (3.3.8) и (3.3.9) для электрона и позитрона.

5. С помощью (6.3.11) легко переписать 6-компонентные столбцы (6.2.1) в собственной системе отношений. Для обобщенной частицы имеем

$$\Psi_c(1) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^3 \\ \sqrt{Mc}i_c^1 \\ \sqrt{Mc}i_c^2 \\ \sqrt{Mc}i_c^3 \end{pmatrix}; \quad \Psi_c(2) = \begin{pmatrix} k_c^1 \\ k_c^2 \\ k_c^3 \\ \sqrt{Mc}k_c^1 \\ \sqrt{Mc}k_c^2 \\ \sqrt{Mc}k_c^3 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_c(3) = \begin{pmatrix} j_c^1 \\ j_c^2 \\ j_c^3 \\ \sqrt{Mc}j_c^1 \\ \sqrt{Mc}j_c^2 \\ \sqrt{Mc}j_c^3 \end{pmatrix}. \tag{6.3.12}$$

Для обобщенной античастицы аналогично имеем

$$\Psi_c(1) = \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ i_c^3 \\ -\sqrt{Mc}i_c^1 \\ -\sqrt{Mc}i_c^2 \\ -\sqrt{Mc}i_c^3 \end{pmatrix}; \quad \Psi_c(2) = \begin{pmatrix} k_c^1 \\ k_c^2 \\ k_c^3 \\ -\sqrt{Mc}k_c^1 \\ -\sqrt{Mc}k_c^2 \\ -\sqrt{Mc}k_c^3 \end{pmatrix};$$

$$\Psi_c(3) = \begin{pmatrix} j_c^1 \\ j_c^2 \\ j_c^3 \\ -\sqrt{Mc}j_c^1 \\ -\sqrt{Mc}j_c^2 \\ -\sqrt{Mc}j_c^3 \end{pmatrix}. \tag{6.3.13}$$

Согласно изложенному в разделе 5.2 в качестве ключевых можно выбрать пять параметров, например: i^1, i^2, i^3, k^1, k^2, на которые наложены два условия нормировки:

$$\begin{aligned} i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} + i_c^3 i_c^{*3} &= Mc; \\ k_c^1 k_c^{*1} + k_c^2 k_c^{*2} + k_c^3 k_c^{*3} &= Mc, \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

т.е. независимыми являются только три параметра. Напомним, состояния лептонов в главе 3 характеризовались двумя параметрами.

6. При преобразованиях параметров из группы $SU(3)$, не выводящей за пределы одной и той же обобщенной системы отношений, верхние и нижние тройки параметров в (6.3.12) и (6.3.13) преобразуются одинаковым образом, т.е. 6-компонентные столбцы и в этом смысле представляют собой биспиноры. Опираясь на это свойство группы $SU(3)$, можно определить тензоры более высокого ранга.

6.4 Девятимерные бусты

1. Произвольное преобразование из группы $SL(3,C)$ можно представить в виде произведения двух преобразований: одного из 8-параметрической группы $SU(3)$, характеризуемого унитарной матрицей, и некоторого второго преобразования, характеризуемого эрмитовой матрицей. Такие эрмитовы преобразования можно понимать как совокупность преобразований, дополняющих группу $SU(3)$ до группы $SL(3,C)$. Они не образуют группу и являются аналогами бустов в теории БСКО ранга (3,3). Такие 9-мерные обобщенные бусты можно записать через матрицы Гелл-Манна

$$(C^s_r) = \sum_{A=0}^{8} b_A \lambda^A = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & b_4 - ib_5 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & b_6 - ib_7 \\ b_4 + ib_5 & b_6 + ib_7 & b_8 \end{pmatrix}, \qquad (6.4.1)$$

где на 9 вещественных параметров b_A наложено условие (5.3.4):

$$b_8(b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) + 2b_1(b_4b_6 + b_5b_7) + 2b_2(b_5b_6 - b_4b_7) -$$
$$-b_3(b_4^2 + b_5^2 - b_6^2 - b_7^2) - b_0(b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2) = 1. \qquad (6.4.2)$$

Таким образом, независимых вещественных параметров только восемь. Выражения (6.4.1) и (6.4.2) соответствуют 4-мерным формулам (2.4.9) и (2.4.10).

2. При бустах 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$ преобразуются

согласно (6.2.3), где подматрица $Q_{\dot r}^{*\dot s}$ имеет компоненты:

$$
\begin{aligned}
&Q_{\dot 1}^{*\dot 1} = b_8(b_0 - b_3) - b_6^2 - b_7^2;\\
&Q_{\dot 1}^{*\dot 2} = -b_8(b_1 - ib_2) + b_4 b_6 + b_5 b_7 - i(b_5 b_6 - b_4 b_7);\\
&Q_{\dot 1}^{*\dot 3} = -(b_0 - b_3)(b_4 - ib_5) + b_1 b_6 - b_2 b_7 - i(b_2 b_6 + b_1 b_7);\\
&Q_{\dot 2}^{*\dot 1} = -b_8(b_1 + ib_2) + b_4 b_6 + b_5 b_7 + i(b_5 b_6 - b_4 b_7);\\
&Q_{\dot 2}^{*\dot 2} = b_8(b_0 + b_3) - b_4^2 - b_5^2;\\
&Q_{\dot 2}^{*\dot 3} = -(b_0 + b_3)(b_6 - ib_7) + b_1 b_4 + b_2 b_5 - i(b_1 b_5 - b_2 b_4);\\
&Q_{\dot 3}^{*\dot 1} = -(b_0 - b_3)(b_4 + ib_5) + b_1 b_6 - b_2 b_7 + i(b_2 b_6 + b_1 b_7);\\
&Q_{\dot 3}^{*\dot 2} = -(b_0 + b_3)(b_6 + ib_7) + b_1 b_4 + b_2 b_5 + i(b_1 b_5 - b_2 b_4);\\
&Q_{\dot 3}^{*\dot 3} = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2.
\end{aligned}
\tag{6.4.3}
$$

Эти компоненты соответствуют правой нижней части в формуле (3.2.2), характеризующей 4-мерные преобразования.

3. Выделим частные случаи таких преобразований, соответствующие трем видам 4-мерных бустов (преобразований Лоренца):

а) Пусть выделенными являются параметры элементов с индексами 1 и 2, тогда, полагая

$$
b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0; \quad b_8 = 1, \tag{6.4.4}
$$

получаем матрицу преобразований

$$
S_{12} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & b_0 - b_3 & -(b_1 - ib_2) & 0\\
0 & 0 & 0 & -(b_1 + ib_2) & b_0 + b_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right), \tag{6.4.5}
$$

где учтено, что при условиях (6.4.4) на 4 оставшихся коэффициента наложено условие (6.4.2), означающее

$$
b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \tag{6.4.6}
$$

т.е. фактически получаем матрицу преобразований вида (3.4.1).

б) Пусть выделенными являются параметры элементов с индексами 1 и 3, тогда, полагая

$$
b_1 = b_2 = b_6 = b_7 = 0; \quad b_0 - b_3 = 1, \tag{6.4.7}
$$

получаем матрицу преобразований

$$S_{31} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_0+b_3 & 0 & b_4-ib_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4+ib_5 & 0 & b_8 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_8 & 0 & -(b_4-ib_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(b_4+ib_5) & 0 & b_0+b_3 \end{array} \right), \tag{6.4.8}$$

где учтено, что из-за (6.4.7) условия (6.4.2) принимают вид

$$b_8(b_0+b_3) - b_4^2 - b_5^2 = 1. \tag{6.4.9}$$

Очевидно, параметры b_8 и (b_0+b_3) можно так переопределить, чтобы это выражение записывалось в привычном псевдоевклидовом виде.

в) Пусть выделенными будут параметры элементов с индексами 2 и 3, тогда, полагая

$$b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0; \quad b_0 + b_3 = 1, \tag{6.4.10}$$

приходим к матрице преобразований

$$S_{23} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0-b_3 & b_6-ib_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_6+ib_7 & b_8 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_8 & -(b_6-ib_7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(b_6+ib_7) & b_0-b_3 \end{array} \right). \tag{6.4.11}$$

Из (6.4.2) и (6.4.8) следует условие на коэффициенты

$$b_8(b_0-b_3) - b_6^2 - b_7^2 = 1. \tag{6.4.12}$$

Рассмотренные здесь три частных вида 3-параметрических преобразований генерируют преобразования Лоренца (4-мерные бусты) в трех 4-мерных псевдоевклидовых (импульсных) пространствах, выделяемых в 9-мерном многообразии импульсов P^A.

6.5 Прообраз уравнения Дирака в 9-мерном импульсном пространстве

1. В теории БСКО ранга (4,4) можно ввести соотношения, имеющие такой же смысл, что и известные уравнения Дирака

в 4-мерном импульсном пространстве [16, 60]. Эти соотношения связывают параметры элементов i^s, k^s, j^s со значениями соответствующих величин $(\beta\gamma)_{\dot r}$, $(\gamma\alpha)_{\dot r}$, $(\alpha\beta)_{\dot r}$. Они записываются аналогично (3.5.1) и для i^s и $(\beta\gamma)_{\dot r}$ имеют вид

$$(\beta\gamma)_{\dot r} = K_{\dot r s} i^s \to \begin{pmatrix} (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\dot 1 1} & K_{\dot 1 2} & K_{\dot 1 3} \\ K_{\dot 2 1} & K_{\dot 2 2} & K_{\dot 2 3} \\ K_{\dot 3 1} & K_{\dot 3 2} & K_{\dot 3 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}, \tag{6.5.1}$$

где $K_{\dot r s}$ – комплексные компоненты смешанного спинтензора.

Компоненты $K_{\dot r s}$, будем искать так же, как это делалось в разделе 3.5, т.е. будем исходить из выражений i^s и $(\beta\gamma)_{\dot s}$ в собственной системе отношений, где они для обобщенной частицы (античастицы) связаны соотношениями (6.3.11). Затем перейдем в произвольную систему отношений с помощью преобразований (6.4.1) и в каждом из трех соотношений (6.5.1) приравняем коэффициенты слева и справа при компонентах i^s_c. В итоге получится 9 линейных уравнений для 9 компонент $K_{\dot r s}$. Детерминант этой системы равен единице. Решение системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
K_{\dot 1 1} &= \sqrt{Mc}\{-(b_0 - b_3) - b_8 + [b_8(b_0 - b_3) - (b_6^2 + b_7^2)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 1 2} &= \sqrt{Mc}\{(b_1 - ib_2) + [-b_8(b_1 - ib_2) +\\
&\quad +(b_4 - ib_5)(b_6 + ib_7)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 1 3} &= \sqrt{Mc}\{(b_4 - ib_5) + [-(b_0 - b_3)(b_4 - ib_5) +\\
&\quad +(b_1 - ib_2)(b_6 - ib_7)] \textstyle\sum b^2\};\\
\\
K_{\dot 2 1} &= \sqrt{Mc}\{(b_1 + ib_2) + [-b_8(b_1 + ib_2) +\\
&\quad +(b_4 + ib_5)(b_6 - ib_7)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 2 2} &= \sqrt{Mc}\{-(b_0 - b_3) - b_8 + [b_8(b_0 - b_3) - (b_4^2 + b_5^2)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 2 3} &= \sqrt{Mc}\{(b_6 - ib_7) + [-(b_0 + b_3)(b_6 - ib_7) +\\
&\quad +(b_1 + ib_2)(b_4 - ib_5)] \textstyle\sum b^2\};\\
\\
K_{\dot 3 1} &= \sqrt{Mc}\{(b_4 + ib_5) + [-(b_0 - b_3)(b_4 + ib_5) +\\
&\quad +(b_1 + ib_2)(b_6 + ib_7)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 3 2} &= \sqrt{Mc}\{(b_6 + ib_7) + [-(b_0 + b_3)(b_6 + ib_7) +\\
&\quad +(b_1 - ib_2)(b_4 + ib_5)] \textstyle\sum b^2\};\\
K_{\dot 3 3} &= \sqrt{Mc}\{-2b_0 + [b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2] \textstyle\sum b^2\},
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

где использовано обозначение

$$\sum b^2 = 2b_0b_8 + b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2 - b_6^2 - b_7^2.$$

2. Вторая часть обобщенного уравнения Дирака имеет смысл обратного соотношения между i^s и $(\beta\gamma)_{\dot r}$ (аналогично тому, как для лептонов было записано (3.5.11)):

$$i^s = K^{s\dot r}(\beta\gamma)_{\dot r} \to \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{1\dot 1} & K^{1\dot 2} & K^{1\dot 3} \\ K^{2\dot 1} & K^{2\dot 2} & K^{2\dot 3} \\ K^{3\dot 1} & K^{3\dot 2} & K^{3\dot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\beta\gamma)_{\dot 1} \\ (\beta\gamma)_{\dot 2} \\ (\beta\gamma)_{\dot 3} \end{pmatrix}. \tag{6.5.3}$$

Опять, используя те же соображения, находим 9 уравнений для компонент контравариантного спинтензора $K^{s\dot r}$. Детерминант этой системы равен единице. Решением системы являются

$$\begin{aligned}
K^{1\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_0+b_3) - (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_4^2 - b_5^2)];\\
K^{1\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_1 - ib_2) + (b_4 - ib_5)(b_6 + ib_7)];\\
K^{1\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_4 - ib_5)(b_0 + b_3 + b_8) + (b_1 - ib_2)(b_6 - ib_7)];\\
\\
K^{2\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_1 + ib_2) + (b_4 + ib_5)(b_6 - ib_7)];\\
K^{2\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[2b_0(b_0 - b_3) - (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_6^2 - b_7^2)];\\
K^{2\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_6 - ib_7)(b_0 - b_3 + b_8) + (b_1 + ib_2)(b_4 - ib_5)];\\
\\
K^{3\dot 1} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_4 + ib_5)(b_0 + b_3 + b_8) + (b_1 + ib_2)(b_6 + ib_7)];\\
K^{3\dot 2} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[(b_6 + ib_7)(b_0 - b_3 + b_8) + (b_1 - ib_2)(b_4 + ib_5)];\\
K^{3\dot 3} &= \tfrac{1}{\sqrt{Mc}}[b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 + b_8^2].
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

3. Собирая два 3-компонентных выражения (6.5.1) и (6.5.3) в одно 6-компонентное соотношение, получаем первую часть из комплекта, составляющего прообраз уравнения Дирака в теории БСКО ранга (4,4):

$$\begin{aligned} K^{s\dot r}(\beta\gamma)_{\dot r} &= i^s;\\ K_{\dot r s} i^s &= (\beta\gamma)_{\dot r}. \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Для более симметричной записи этих уравнений следует переопределить 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$, например,

$$\Psi(1) \to \hat\Psi(1) = \begin{pmatrix} i^s \\ \frac{1}{\sqrt{Mc}}(\beta\gamma)_{\dot r} \end{pmatrix}, \tag{6.5.6}$$

тогда коэффициент $\sqrt{Mc}$, содержащийся в компонентах спин-тензоров можно опустить. Тогда (6.5.5) можно переписать в 6-компонентном виде

$$(\hat{K} + I_6)\hat{\Psi}(1) = 0, \tag{6.5.7}$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{K}^{s\dot{r}} \\ \hat{K}_{\dot{r}s} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5.8}$$

определяется выражениями (6.5.2) и (6.5.4) без $\sqrt{Mc}$.

4. Аналогичным образом можно записать еще два комплекта 6- компонентных уравнений для выражений $\hat{\Psi}(2)$ и $\hat{\Psi}(3)$. Однако здесь нужно учесть, что во втором комплекте независимых уравнений будет только 4, т.к., напомним, в собственной системе отношений можно опираться на 5 величин: i_c^1, i_c^2, i_c^3, k_c^1, k_c^2, на которые наложены два условия. Компонента k_c^3 уже выражается через названные компоненты, т.е. записанное для нее уравнение является следствием всех предыдущих уравнений. Третий комплект уравнений для $\hat{\Psi}(3)$ не содержит ничего нового, т.к. все j_c^s выражаются через названные выше компоненты. Итого, обобщенные уравнения Дирака имеют всего 10 независимых компонент.

6.6 БСКО ранга (4,4) и хромодинамика

1. Сопоставим изложенное в этой главе с известными сведениями о частицах, участвующих в сильных взаимодействиях. В основе современной теории сильных взаимодействий (хромодинамики) лежат представления о кварковой структуре адронов, т.е. барионов и мезонов (см., например, [45, 64]). Как известно, кварки обладают тремя цветами (цветовыми зарядами), т.е. образуют цветовой триплет q^s (где $s = 1, 2, 3$). Сопоставим этому тот факт, что элементы БСКО ранга (4,4) также характеризуются тремя параметрами. Это позволяет *интерпретировать элементы БСКО ранга (4,4) как кварки*:

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \overline{q}^1 \\ \overline{q}^2 \\ \overline{q}^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \tag{6.6.1}$$

а параметры i^s элементов как цветовые заряды q^s кварков (в начальном состоянии). Аналогично тому, как это делалось в главе 3, параметры α^s элементов второго множества, преобразующиеся комплексно сопряженным образом, следует трактовать как цветовые заряды кварков $\overline{q}^s$ в конечных состояниях.

2. Напомним также, что в хромодинамике барионы (B) представляются в виде "бесцветной" кубичной комбинации из компонент трех кварков

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{srp} q^s q^r q^p, \tag{6.6.2}$$

где ε_{srp} полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты.

Обращаясь к фундаментальному 3x3-отношению (5.3.1), легко увидеть, что определитель справа в (5.3.1) с точностью до коэффициента совпадает с (6.6.2), т.е.

$$B(i,k,j) = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{srp} i^s k^r j^p = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}. \tag{6.6.3}$$

Второй определитель справа в (5.3.1) записывается аналогично через кварки в конечном состоянии. Следовательно, фундаментальное 3x3-отношение БСКО ранга (4,4) описывает идеализированные барионы в начальном и в конечном состояниях.

3. Преобразования (5.3.9) с коэффициентами (5.3.10) следует рассматривать как иное представление группы линейных преобразований $SL(3, C)$. Своеобразием теории БСКО ранга (4,4) является то, что в ней преобразования с коэффициентами Q^r_s из (5.3.10) образуют такую же группу, что и (5.3.3). Это позволяет допустить возможность существования элементов БСКО ранга (4,4), преобразующихся по закону

$$x'_s = Q^r_s x_r; \quad \chi'_{\dot{s}} = Q^{*\dot{r}}_{\dot{s}} \chi_{\dot{r}}. \tag{6.6.4}$$

Будем интерпретировать элементы типа x, преобразующиеся согласно (6.6.4), как описывающие начальные состояния антикварков $\tilde{q}_s$, а элементы $\chi_{\dot{s}}$ – как описывающие конечные состояния антикварков $\bar{\tilde{q}}_s$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \bar{\tilde{q}}_1 \\ \bar{\tilde{q}}_2 \\ \bar{\tilde{q}}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_{\dot{1}} \\ \chi_{\dot{2}} \\ \chi_{\dot{3}} \end{pmatrix}. \tag{6.6.5}$$

В соответствии с (6.6.3) определим антибарион $\tilde{B}$ как "бесцветную" кубичную комбинацию из антикварков

$$\tilde{B}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{srp} x_s y_r z_p. \tag{6.6.6}$$

Тогда очевидно, что фундаментальное 3x3-отношение, построенное из трех пар элементов, преобразующихся согласно (6.6.4), описывает антибарион в начальном и в конечном состояниях.

4. Особый интерес представляют комбинации, составленные из элементов, преобразующихся различным образом. Легко видеть, что имеется квадратичная "бесцветная" комбинация, инвариантная относительно группы преобразований $SL(3, C)$, составленная из кварка и антикварка

$$M(i, x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i^1 x_1 + i^2 x_2 + i^3 x_3) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} q^s \tilde{q}_s. \tag{6.6.7}$$

Эта комбинация совпадает с определением мезона (M) в стандартной хромодинамике. Комбинация (6.6.7) соответствует определителю в (6.6.3), характеризующему барион. Так, раскладывая определитель в (6.6.3) по первому столбцу и учитывая (5.3.7), имеем соответствие

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} = i^1(kj)_1 + i^2(jk)_2 + i^3(kj)_3 \leftrightarrow i^1 x_1 + i^2 x_2 + i^3 x_3, \tag{6.6.8}$$

т.е.

$$B(i, k, j) \leftrightarrow M(i, x).$$

5. Допущение о существовании элементов, преобразующихся по разным пррдставлениям группы, усложняет математическую конструкцию БСКО ранга (4,4). В частности, это, во-первых, приводит к расщеплению каждого из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ на пары подмножеств

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2; \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \tag{6.6.9}$$

и, во-вторых, к выделению группы преобразований $SU(3)$, относительно которых элементы в парах подмножеств преобразуются одинаково. Эта конструкция пояснена на рисунке 6.2.

При преобразованиях из группы $SU(3)$ согласно (5.3.12) имеем $Q^r_s = C^{*s}_r$ и $Q^{*r}_s = C^s_r$. Это означает, что элементы типа x в (6.6.4) – (6.6.7) следует отнести к тому же множеству $\mathcal{N}$

($x \in \mathcal{N}_2$), что и элементы типа α, описывающие конечные состояния кварков. Следовательно, множеству $\mathcal{N}$ принадлежат конечные состояния кварков ($\mathcal{N}_1$) и начальные состояния антикварков ($\mathcal{N}_2$). Аналогично, множеством $\mathcal{M}$ описываются начальные состояния кварков ($\mathcal{M}_1$) и конечные состояния антикварков ($\mathcal{M}_2$). Это находится в соответствии с общепринятыми представлениями о природе частиц и античастиц.

Поскольку теперь имеются четыре подмножества, то на них можно построить шесть специальных видов БСКО ранга (4,4):

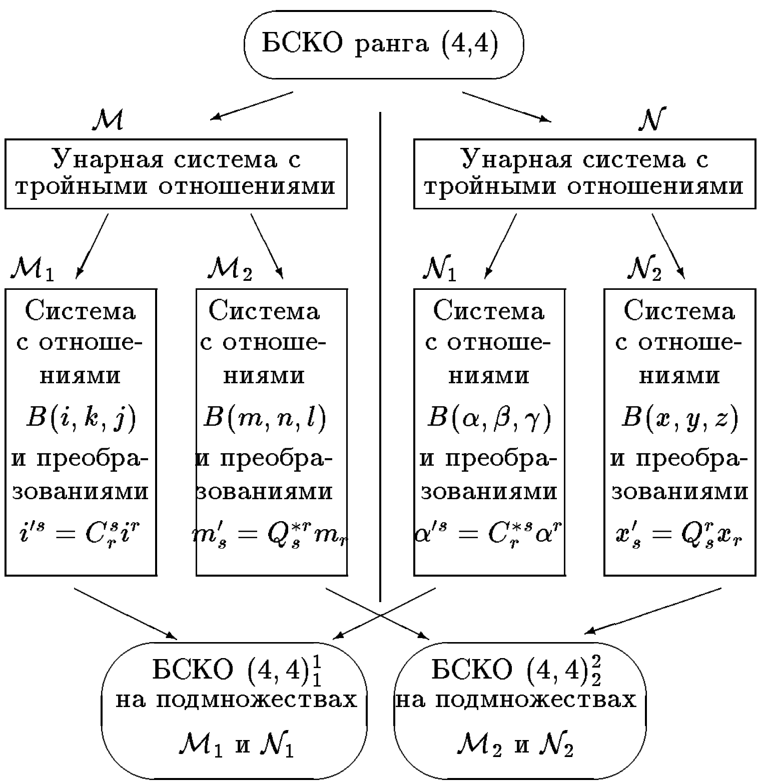


Рис. 6.2: Блок-схема содержания теории БСКО ранга (4,4)

$(4,4)^1_1$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$;
$(4,4)^2_2$ на подмножествах $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{N}_2$;

$(4,4)_1^2$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_2$;
$(4,4)_2^1$ на подмножествах $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{N}_1$;
$(4,4)_{12}$ на подмножествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$;
$(4,4)^{12}$ на подмножествах $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$.

Определения кварков и барионов согласно (6.6.1) – (6.6.3) сделаны в рамках БСКО ранга $(4,4)_1^1$, тогда как определения антикварков и антибарионов в (6.6.4) – (6.6.6) — в рамках БСКО ранга $(4,4)_2^2$. Легко видеть, что определение мезонов (6.6.7) означает не что иное как парное отношение $u_{i\xi}$, где $\xi = x$ в рамках БСКО ранга $(4,4)_1^2$.

Следует особо подчеркнуть, что во всех ключевых комбинациях (6.6.3), (6.6.6) и (6.6.7) группа $SU(3)$ может быть обобщена до более широкой группы $SL(3,C)$. На основании материала предыдущих глав и выше приведенных соображений можно сформулировать постулат, что *в бинарной геометрофизике частицы (и вообще связанные состояния из частиц) описываются комбинациями элементов, обладающими $SL(2,C)-$, $SL(3,C)-$ и т.д. инвариантностью.*

6. К понятию мезона можно подойти еще с одной стороны. Давайте образуем фундаментальное 2х2-отношение БСКО ранга (4,4) из двух пар элементов i, l, α, ξ, находящихся в парах (т.е. $i^s = \alpha^{*s}$, $l^s = \xi^{*s}$), причем пусть элементы i и l множества $\mathcal{M}$ принадлежат разным его подмножествам, тогда имеем

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\xi} \\ u_{l\alpha} & u_{l\xi} \end{vmatrix} = (i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3)(x_1\chi_1 + x_2\chi_2 + x_3\chi_3) -$$

$$-(i^1x_1 + i^2x_2 + i^3x_3)(\alpha^1\chi_1 + \alpha^2\chi_2 + \alpha^3\chi_3), \qquad (6.6.10)$$

где сделан переход к ранее введенным обозначениям: $\xi^s \to x_s$; $l^s \to \chi_s$. Легко видеть, что последнее слагаемое справа является $SL(2,C)$-инвариантным и соответствует как бы 2х2-объему, описывающему согласно (6.6.7) матричный элемент перехода мезона из начального состояния в конечное.

6.7 К физической интерпретации БСКО ранга (4,4)

1. В бинарной геометрофизике можно определить два принципиально различных канала развития (интерпретации) БСКО ранга (4,4) с целью описания *хромодинамики*.

Первый канал основан на понимании БСКО ранга (4,4) как описывающей лишь так называемые *внутренние симметрии* сильно взаимодействующих элементарных частиц (адронов). Тогда для описания (внешних) классических пространственно-временных отношений следует опять использовать БСКО ранга (3,3) с ее подсистемой в виде БСКО ранга (2,2), т.е. все то, что было изложено в главах 2-4. В итоге должна получаться своеобразная композиция БСКО рангов (4,4) и (3,3), причем БСКО ранга (4,4) должна использоваться в усеченном виде, включающем лишь преобразования из группы $SU(3)$. Видимо, этот канал довольно хорошо соответствует общепринятой формулировке теории сильных взаимодействий, где классическое 4-мерное пространство-время рассматривается само по себе, а $SU(3)$ и другие симметрии относят к вспомогательным внутренним пространствам.

Второй канал соответствует пониманию БСКО ранга (4,4) (и последующих рангов) как *универсальной системы отношений*, содержащей в себе все отношения и свойства, которые ранее были рассмотрены в рамках БСКО ранга (3,3). Нам представляется этот канал более естественным и в логическом плане более экономным. Он в наибольшей мере соответствует духу многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна, где также вводится одно универсальное многомерное многообразие, и уже из него выделяется классическое 4-мерное пространство-время, а дополнительные компоненты метрики предлагается трактовать как описывающие электромагнитное и другие физические взаимодействия. Есть все основания полагать, что этот канал является жизнеспособным. Возникающие в рамках БСКО ранга (4,4) векторы имеют временно- подобные компоненты, а преобразования из группы $SL(3,C)$ содержат в себе обобщенные преобразования Лоренца. БСКО ранга (3,3) можно понимать как своеобразную подсистему БСКО ранга (4,4). Можно надеяться, что в рамках второго канала можно вскрыть более тесно связанные закономерности электрослабых и сильных взаимодействий.

2. В бинарной геометрофизике БСКО ранга (4,4) используется также для описания *электрослабых взаимодействий* лептонов. Это чрезвычайно важное для данной программы направление развития теории. Именно на этом пути предлагается построение теории классического пространства-времени и электромагнитных (электрослабых) взаимодействий. Здесь важными являются методы редукции БСКО ранга (4,4) на БСКО ранга (3,3), аналогичные методам редукции многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна на классические 4-мерные пространственно-временные сечения. Как уже отмечалось, теория классического пространства-времени может быть построена только вместе с теорией физических взаимодействий. Методы редукции БСКО ранга (4,4) на 4-мерие рассмотрены в следую-

щей главе, а сама теория будет изложена во второй части книги.

3. При реализации программы бинарной геометрофизики естественно встает вопрос: почему в физическом мире не реализовалось пространство-время девяти измерений, присущих БСКО ранга (4,4)? Видимо, ответ на этот вопрос должен быть многоплановым. Во- первых, классическое 4-мерие соответствует БСКО минимального ранга (3,3), в котором оказывается содержательная модель. Можно понимать так, что мир в результате эволюции скатился в некоторое свое минимальное состояние. Во-вторых, 9-мерная пространственно-временная конструкция оказывается ущербной в своей основе. Из БСКО ранга (4,4) с группой преобразований $SL(3,C)$ не получается многообразия с полной группой, например, O(1,8), которую можно было бы ожидать в классическом 9-мерном многообразии. Напомним, что группа $SL(2,C)$ из теории БСКО ранга (3,3) генерирует полную ортогональную группу O(1,3) (преобразований Лоренца). В-третьих, существенную роль играет БСКО ранга (2,2), как подсистема БСКО ранга (r,r). Напомним, что в рамках БСКО ранга (3,3) массивные лептоны описывались двумя элементами в каждом состоянии. При композиции с БСКО ранга (2,2) эта пара элементов в каждом состоянии принадлежала двум разным множествам БСКО ранга (2,2). В случае БСКО ранга (4,4) обобщенная частица описывается тремя элементами в каждом состоянии, а, как уже неоднократно отмечалось, нет нетривиальных систем отношений, построенных на трех множествах. Таким образом, в случае рангов (r,r) при $r > 3$ уже нет разделения элементов по двум множествам БСКО ранга (2,2), как в случае ранга (3,3). Можно назвать и другие доводы против существования аналогов классического пространства-времени более высоких размерностей.

4. Можно высказать гипотезу о проявлении неклассического 9-мерия из теории БСКО ранга (4,4) в виде трех поколений элементарных частиц. Как будет показано в следующей главе, имеются три характерные возможности выделения из 9-мерного многообразия 4-мерных сечений с сигнатурой $(+---)$.

Глава 7

Редукция бинарного многомерия ранга (4,4) к 4-мерной теории

Если иметь ввиду, что БСКО ранга (3,3) ответственна за классическое 4-мерие, то теорию БСКО следующего ранга (4,4) можно назвать бинарным многомерием. Как в многомерной (унарной) теории Калуцы-Клейна важное место занимают вопросы редукции (отображения) многомерия на 4-мерное пространство-время, так и в бинарной геометрофизике существенную роль играет выделение из БСКО ранга (4,4) понятий, присущих БСКО ранга (3,3) и их физическая интерпретация.

7.1 Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна

1. При построении бинарной геометрофизики существенную роль сыграли идеи многомерной геометрической теории Калуцы-Клейна. Последняя основана на увеличении размерности физического пространства-времени. Если классическое (непосредственно наблюдаемое) пространство-время описывается четырьмя измерениями, то дополнительные размерности и связанные с ними величины в теории Калуцы-Клейна ответственны за проявления электромагнитного и других взаимодействий. В бинарной геометрофизике дело обстоит аналогичным образом. Если БСКО ранга (3,3), как было показано в главах 2 и 3, ответственна за классическое 4-мерие, то БСКО ранга (4,4) должна восприниматься как *бинарное многомерие*, родственное теории

Калуцы-Клейна как по физической интерпретации, так и по характеру математического описания. В отличие от классических геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна, допускающих рассмотрение многообразий пяти, шести и любого другого числа измерений, бинарное многомерие ранга (4,4) приводит к аналогам унарных многообразий сразу девяти измерений.

2. Для построения и осмысления многомерных теорий Калуцы-Клейна в привычных терминах 4-мерия необходимо использовать методы 1+4-, 1+1+4-, $\cdots$ -расщеплений исходного n -мерного многообразия на 4-мерное пространство-время и дополнительные размерности. Это достигается с помощью монадного, диадного и т.д. методов, позволяющих решать достаточно широкий круг проблем — от описания систем отсчета в общей теории относительности до построения теорий Калуцы-Клейна. Эти методы достаточно подробно изложены в наших книгах [10, 13]. Там же показано, что эти методы включают в себя четыре составные части: алгебру, задание физико-геометрических тензоров, определение монадных (диадных и т.д.) операторов дифференцирования (анализ) и запись всех ковариантных соотношений в монадном (диадном) виде. В данной книге речь идет об алгебраических аспектах бинарной геометрофизики, т.е. остановимся на сопоставлении первой и четвертой составных частей в двух теориях.

3. Монадный (диадный и т.д.) метод допускает как общековариантную формулировку, так и представление в нескольких характерных калибровках. Наиболее общей является калибровка, соответствующая хронометрической в общей теории относительности [10], когда вектор монады выбирается вдоль направления дополнительной пятой координаты в 5-мерной теории Калуцы-Клейна. В этом случае из группы допустимых координатных преобразований

$$x'^A = x'^A(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5), \tag{7.1.1}$$

где $A = 0, 1, 2, 3, 5,$ естественным образом выделяются подгруппа преобразований четырех (классических) координат

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{7.1.2}$$

где $\mu = 0, 1, 2, 3,$ имеющая место в эйнштейновской общей теории относительности (ОТО), и произвольные преобразования 5-ой координаты

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5). \tag{7.1.3}$$

Эти преобразования не меняют конгруэнцию линий пятой координаты, т.е. оставляют в рамках одной и той же *обобщенной* *системы отсчета.* В такой теории физическим смыслом наделяются лишь калибровочно инвариантные тензоры, т.е. величины, ковариантные относительно преобразований (7.1.2) и инвариантные при преобразованиях (7.1.3).

Заметим, что в 5-мерной теории с условием цилиндричности (т.е. независимости) по 5-ой координате следует ограничиться более узкими преобразованиями, нежели (7.1.3),

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{7.1.4}$$

Именно такие преобразования генерируют известные калибровочные преобразования электромагнитного векторного потенциала A_μ. (Напомним, что в теории Калуцы-Клейна $A_\mu \sim G_{5\mu}$, где G_{AB} – 5-мерный метрический тензор.)

4. Преобразования, дополняющие (7.1.2) и (7.1.3) до полной группы (7.1.1), имеют вид

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5), \tag{7.1.5}$$

где обязательно справа должна присутствовать зависимость от координаты x^5. По аналогии с методом хронометрических инвариантов в ОТО, такие преобразования связываются с *переходом к новой обобщенной системе отсчета.* С позиций 4-мерной теории такие преобразования меняют физическую ситуацию, в частности, генерируют или изменяют электромагнитное поле.

5. В бинарной геометрофизике в рамках БСКО ранга (4,4) имеет место аналогичный метод (1+3,1+3)-расщепления бинарного многомерия на БСКО ранга (3,3) и нечто дополнительное, т.е. метод редукции БСКО ранга (4,4) к понятиям БСКО ранга (3,3) [17, 18]. В рамках получающихся из БСКО ранга (4,4) унарных геометрий это будет означать своеобразный метод 4+5-расщепления 9-мерного многообразия. При этом просматриваются далеко идущие аналогии и в имеющихся группах преобразований в двух теориях. Так, 5-мерную группу допустимых координатных преобразований (7.1.1) следует сопоставить с группой унимодулярных преобразований $SL(3,C)$ в теории БСКО ранга (4,4). Как уже отмечалось, эта группа характеризуется 16 параметрами. Подгруппе 4-мерных преобразований ОТО (7.1.2) следует сопоставить группу $SL(2,C)$ – ключевую группу в теории БСКО ранга (3,3). Как уже отмечалось, это 6-параметрическая группа.

6. Забегая вперед, отметим, что в теории БСКО ранга (4,4) можно выделить другую подгруппу преобразований, которая соответствует преобразованиям 5-ой (и других дополнительных)

координаты (7.1.3). Назовем такие преобразования также калибровочными. Как будет показано в разделе 7.5, они характеризуются 4 параметрами. Кроме того, оказывается, можно выделить преобразования, дополняющие названные до группы $SL(3,C)$ и в этом смысле аналогичные (7.1.5). В разделе 7.6 показано, что среди них выделяется некая 4-параметрическая подгруппа, соответствующая так называемым суперсимметричным преобразованиям в современных суперсимметричных теориях, и, наконец, своеобразная совокупность преобразований типа конформных (см. раздел 7.7). В итоге имеем

$$\Big(\; SL(3,C) \;\Big) = \Big(\; SL(2,C) \;\Big) + \Big(\quad\Big) + \\ + \Big(\quad\Big) + \Big(\quad\Big). \tag{7.1.6}$$

Поскольку все названные преобразованиями характеризуются своими числами параметров, то (7.1.6) соответствует баланс параметров

$$16 = 6 + 4 + 4 + 2. \tag{7.1.7}$$

В разделе 9.3 отмечена аналогия этих преобразований с близкими как по духу, так и по числу параметров, конформными преобразованиями в 6-мерной теории.

7. Аналогично тому, как в теории Калуцы-Клейна 5-мерная (многомерная) метрика G_{AB} расщепляется

$$G_{AB} \to \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & \frac{2\sqrt{k}}{c^2} G_{5\nu} \\ \hline \frac{2\sqrt{k}}{c^2} G_{\mu 5} & G_{55} = -\varphi^2 \end{array} \right), \tag{7.1.8}$$

где $g_{\mu\nu}$ – 4-мерный метрический тензор, A_μ – компоненты электромагнитного векторного потенциала, k – ньютоновская гравитационная постоянная, φ – некое скалярное поле, так и в теории БСКО ранга (4,4) из ключевых 9-мерных векторов можно выделить компоненты 4-мерных векторов и некоторые дополнительные величины, которые должны иметь некую физическую интерпретацию.

Наконец, заметим, что соотношения теории БСКО ранга (4,4) могут быть записаны в редуцированном к БСКО ранга (3,3) виде. В частности, это относится и к прообразу уравнений Дирака.

В последующих разделах этой главы все названные подгруппы и связанные с их выделенем понятия охарактеризованы более подробно.

7.2 Подгруппа 4-мерных преобразований $SL(2,C)$

1. Выделим из группы преобразований $SL(3,C)$ подгруппу $SL(2,C)$. Она описывается следующим частным случаем преобразований (5.2.1)

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2.1}$$

Легко видеть, что в этом случае общее условие на коэффициенты преобразований (5.3.4) переходит в стандартное условие (2.4.4) для группы $SL(2,C)$.

Отметим, что из группы $SL(3,C)$ эквивалентным образом можно выделить три подгруппы $SL(2,C)$. Они различаются номерами выделяемых параметров. В подгруппе $SL(2,C)$, записанной в (7.2.1), симметричным образом преобразуются параметры с номерами 1 и 2, тогда как параметры с номером 3 остаются инвариантными. Назовем этот случай (1,2)-подгруппой $SL(2,C)$. Очевидным образом определяются (1,3)- и (2,3)- подгруппы $SL(2,C)$, т.е. преобразования $SL(2,C)$ в соответствующих 4- мерных сечениях (1,3) и (2,3). Произвольное преобразование из группы $SL(3,C)$ можно представить в виде произведения трех типов преобразований из (1,2)-, (1,3)- и (2,3)- подгрупп $SL(2,C)$ так, что

$$\begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1(12) & C^1_2(12) & 0 \\ C^2_1(12) & C^2_2(12) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} C^1_1(13) & 0 & C^1_3(13) \\ 0 & 1 & 0 \\ C^3_1(13) & 0 & C^3_3(13) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2_2(23) & C^2_3(23) \\ 0 & C^3_2(23) & C^3_3(23) \end{pmatrix}. \tag{7.2.2}$$

В этом разделе ограничимся рассмотрением одной подгруппы (1,2). Для упрощения записи значок (12) при параметрах преобразований писать не будем.

2. Рассмотрим, как изменяются при преобразованиях (7.2.1) компоненты 9-мерных векторов, пусть это будут векторы P^A. Подставляя коэффициенты C^s_r из (7.2.1) в общую формулу (A.2.1), находим $P'^A = L^A_{\cdot B} P^B$, где

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^{\mu}_{\cdot\nu} & 0 & 0 \\ \hline 0 & L^{\xi}_{\cdot\eta} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.2.3}$$

Компоненты 4x4-блока $L^{\mu}_{\cdot\nu}$ совпадают с (2.7.1) и выписаны в (2.7.2). Они характеризуют преобразования 4-мерного вектора $p'^{\mu} = L^{\mu}_{\cdot\nu}p^{\nu}$ в теории БСКО ранга (3,3). Другой 4x4-блок характеризует преобразование четверки компонент

$$P'^{\xi} = L^{\xi}_{\cdot\eta}P^{\eta}, \tag{7.2.4}$$

где $\xi, \eta = 4, 5, 6, 7$. Подматрица $(L^{\xi}_{\cdot\eta})$ имеет следующий вид

$$2(L^{\xi}_{\cdot\eta}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C^1_1 + C^{*1}_1 & -i(C^1_1 - C^{*1}_1) & C^1_2 + C^{*1}_2 & -i(C^1_2 - C^{*1}_2) \\ i(C^1_1 - C^{*1}_1) & C^1_1 + C^{*1}_1 & i(C^1_2 - C^{*1}_2) & C^1_2 + C^{*1}_2 \\ C^2_1 + C^{*2}_1 & -i(C^2_1 - C^{*2}_1) & C^2_2 + C^{*2}_2 & -i(C^2_2 - C^{*2}_2) \\ i(C^2_1 - C^{*2}_1) & C^2_1 + C^{*2}_1 & i(C^2_2 - C^{*2}_2) & C^2_2 + C^{*2}_2 \end{pmatrix}. \tag{7.2.5}$$

Компонента P^8 является инвариантной относительно таких преобразований.

3. Образуем из дополнительных компонент P^{ξ} 9-мерного вектора следующие комбинации:

$$\begin{aligned} &\pi^1 \equiv P^4 - iP^5; \quad \pi^2 \equiv P^6 - iP^7; \\ &\pi^{\dot 1} \equiv P^4 + iP^5; \quad \pi^{\dot 2} \equiv P^6 + iP^7. \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Используя (7.2.4) и (7.2.5) легко показать, что эти комбинации преобразуются при (7.2.1) следующим образом

$$\begin{pmatrix} \pi'^1 \\ \pi'^2 \\ \pi'^{\dot 1} \\ \pi'^{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & 0 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{*1}_1 & C^{*1}_2 \\ 0 & 0 & C^{*2}_1 & C^{*2}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^{\dot 1} \\ \pi^{\dot 2} \end{pmatrix}. \tag{7.2.7}$$

Отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} \pi'^1 \\ \pi'^2 \\ \pi'_{\dot 1} \\ \pi'_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 & 0 & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{*2}_2 & -C^{*2}_1 \\ 0 & 0 & -C^{*1}_2 & C^{*1}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi_{\dot 1} \\ \pi_{\dot 2} \end{pmatrix},$$

т.е. комбинации π^s, $\pi^{\dot s}$ образуют 4- компонентный биспинор, что отражено в их обозначениях. В новых терминах матрица $L'^{\xi}_{\cdot\eta}$

принимает блочный вид, где каждый блок определяется коэффициентами преобразований 2-компонентных спиноров i^s и $\alpha^{\dot{s}}$, где $s = 1, 2$.

4. Выразим обратно из (7.2.6) компоненты P^ξ через π^s и $\pi^{\dot{s}}$

$$\begin{aligned} P^4 &= \tfrac{1}{2}(\pi^1 + \pi^{\dot{1}}); \quad P^5 = \tfrac{i}{2}(\pi^1 - \pi^{\dot{1}}); \\ P^6 &= \tfrac{1}{2}(\pi^2 + \pi^{\dot{2}}); \quad P^7 = \tfrac{i}{2}(\pi^2 - \pi^{\dot{2}}). \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

Подставим эти выражения в характерные комбинации из дополнительных компонент импульсов, содержащихся в кубичной форме (5.5.2):

$$\begin{aligned} 2\mathcal{P}^0 &\equiv (P^4)^2 + (P^5)^2 + (P^6)^2 + (P^7)^2 = \pi^1\pi^{\dot{1}} + \pi^2\pi^{\dot{2}}; \\ 2\mathcal{P}^1 &\equiv 2(P^4P^6 + P^5P^7) = \pi^1\pi^{\dot{2}} + \pi^2\pi^{\dot{1}}; \\ 2\mathcal{P}^2 &\equiv 2(P^5P^6 - P^4P^7) = i(\pi^1\pi^{\dot{2}} - \pi^2\pi^{\dot{1}}); \\ 2\mathcal{P}^3 &\equiv (P^4)^2 + (P^5)^2 - (P^6)^2 - (P^7)^2 = \pi^1\pi^{\dot{1}} - \pi^2\pi^{\dot{2}}. \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

Сравнивая с определением 4-мерного вектора в (2.6.1), приходим к выводу, что эти характерные комбинации являются компонентами 4-мерного вектора. Следовательно, кубичную форму (5.5.2) можно записать в лоренц-ковариантном виде

$$\begin{aligned} G_{ABC}P^AP^BP^C &= P^8 g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu - 2g_{\mu\nu}P^\mu\mathcal{P}^\nu = \\ &= P^8 g_{\mu\nu}(P^\mu - \frac{1}{P^8}\mathcal{P}^\mu)(P^\nu - \frac{1}{P^8}\mathcal{P}^\nu), \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

где учтено, что вектор $\mathcal{P}^\mu$ является изотропным, т.е.

$$g_{\mu\nu}\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}^\nu = 0. \tag{7.2.11}$$

Легко видеть, что аналогичные рассуждения можно провести и для других (1,3)- и (2,3)- подгрупп $SL(2,C)$-преобразований. Такие подгруппы выделяют в 9-мерном многообразии другие 4-мерные пространственно-временные (1,3)- и (2,3)-сечения.

7.3 Внутреннее пространство обобщенной частицы

1. Более подробно рассмотрим изотропный вектор $\mathcal{P}^\mu$, определенный в (7.2.9). Для этого выразим его компоненты через

параметры трех пар сопряженных элементов, воспользовавшись формулами (5.4.9). В итоге находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mu}_{(3)} &= i^3\alpha^3 k^{\mu}(i\alpha) + i^3\beta^3 k^{\mu}(k\alpha) + i^3\gamma^3 k^{\mu}(j\alpha) + \\
&+ k^3\alpha^3 k^{\mu}(i\beta) + k^3\beta^3 k^{\mu}(k\beta) + k^3\gamma^3 k^{\mu}(j\beta) + \\
&+ j^3\alpha^3 k^{\mu}(i\gamma) + j^3\beta^3 k^{\mu}(k\gamma) + j^3\gamma^3 k^{\mu}(j\gamma), \qquad (7.3.1)
\end{aligned}$$

где изотропные 4-мерные векторы типа $k^{\mu}(i\alpha)$ определены в (2.6.1). Таким образом, компоненты $\mathcal{P}^{\mu}$ слагаются из суммы соответствующих компонент 9 вещественных изотропных векторов с коэффициентами, образованными из третьих параметров элементов. При преобразованиях из выделенной подгруппы $SL(2,C)$ эти коэффициенты будут оставаться инвариантными.

Для случая (единожды) изотропной частицы, т.е. характеризуемой лишь двумя парами сопряженных элементов (i,α) и (k,β), вид вектора $\mathcal{P}^{\mu}_{(2)}$ упрощается

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mu}_{(2)} &= i^3\alpha^3 k^{\mu}(i\alpha) + i^3\beta^3 k^{\mu}(k\alpha) \\
&+ k^3\alpha^3 k^{\mu}(i\beta) + k^3\beta^3 k^{\mu}(k\beta). \qquad (7.3.2)
\end{aligned}$$

2. При выделенной подгруппе преобразований (7.2.1) определим 3-мерное комплексное *внутреннее пространство обобщенной частицы.* Состояние обобщенной частицы во внутреннем пространстве можно охарактеризовать 3-компонентным спинором z^s (и сопряженным спинором ζ^s):

$$z^s = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i^3 \\ k^3 \\ j^3 \end{pmatrix}; \quad \zeta^s = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \beta^3 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}, \qquad (7.3.3)$$

где $s = 1,2,3$. Из этого спинора по изложенным в разделе 5.4 правилам можно образовать компоненты 9-мерного "вектора" во внутреннем пространстве:

$$Z(0) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^1 + z^2\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 + k^3\beta^3);$$

$$Z(1) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^2 + z^2\zeta^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\beta^3 + k^3\alpha^3);$$

$$Z(2) = \tfrac{i}{2}(z^1\zeta^2 - z^2\zeta^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\beta^3 - k^3\alpha^3);$$

$$Z(3) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^1 - z^2\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 - k^3\beta^3);$$

$$Z(4) = \tfrac{1}{2}(z^1\zeta^3 + z^3\zeta^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\gamma^3 + j^3\alpha^3);$$

$$Z(5) = \tfrac{i}{2}(z^1\zeta^3 - z^3\zeta^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\gamma^3 - j^3\alpha^3);$$

$$Z(6) = \tfrac{1}{2}(z^2\zeta^3 + z^3\zeta^2) = \tfrac{1}{2}(k^3\gamma^3 + j^3\beta^3);$$

$$Z(7) = \tfrac{i}{2}(z^2\zeta^3 - z^3\zeta^2) = \tfrac{i}{2}(k^3\gamma^3 - j^3\beta^3);$$

$$Z(8) = z^3\zeta^3 = j^3\gamma^3. \tag{7.3.4}$$

Согласно изложенному в разделе 5.4, этот “вектор” дважды изотропен во внутреннем 9-мерном пространстве, т.е. обращаются в нуль как кубичный, так и квадратичный инварианты:

$$G(ABC)Z(A)Z(B)Z(C) = 0; \quad g(\alpha\beta)Z(\alpha)Z(\beta) = 0. \tag{7.3.5}$$

Здесь и в дальнейшем компоненты вектора во внутреннем пространстве помещаются в круглые скобки.

3. Для изотропной частицы, характеризуемой двумя парами сопряженных элементов, также можно ввести внутреннее комплексное пространство, однако оно будет двумерным. Определим 2-компонентные внутренние “спиноры”:

$$x^s = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i^3 \\ k^3 \end{pmatrix}; \quad \chi^s = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \beta^3 \end{pmatrix}. \tag{7.3.6}$$

Из компонент этого “спинора” по известным правилам построим компоненты 4-мерного вектора в 4-мерном внутреннем пространстве:

$$\begin{aligned}
X(0) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^1 + x^2\chi^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 + k^3\beta^3);\\
X(1) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^2 + x^2\chi^1) = \tfrac{1}{2}(i^3\beta^3 + k^3\alpha^3);\\
X(2) &= \tfrac{i}{2}(x^1\chi^2 - x^2\chi^1) = \tfrac{i}{2}(i^3\beta^3 - k^3\alpha^3);\\
X(3) &= \tfrac{1}{2}(x^1\chi^1 - x^2\chi^2) = \tfrac{1}{2}(i^3\alpha^3 - k^3\beta^3).
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Очевидно, что компоненты этого “вектора” совпадают с 4-мерной частью $Z(\alpha)$, определенной в (7.3.4). Этот вектор изотропен во внутреннем пространстве, т.е.

$$g_{\alpha\beta}X(\alpha)X(\beta) = 0. \tag{7.3.8}$$

4. Воспользовавшись тождеством

$$aA + bB \equiv \frac{a+b}{2}(A+B) + \frac{a-b}{2}(A-B), \tag{7.3.9}$$

можно представить компоненты вектора $\mathcal{P}^{\mu}_{(3)}$ из (7.3.1) в виде

$$\mathcal{P}^{\mu}_{(3)} = Z(A)p^{\mu}(A), \tag{7.3.10}$$

где по A производится суммирование от 0 до 8; величинами $p^{\mu}(A)$ обозначены компоненты девяти 4-мерных (неизотропных) векторов, строящихся из параметров двух пар элементов. Выпишем временно-подобные компоненты этих векторов:

$$\begin{aligned}
p^0(0) &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2);\\
p^0(1) &= \tfrac{1}{2}(k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2 + i^1\beta^1 + i^2\beta^2);\\
p^0(2) &= -\tfrac{i}{2}(k^1\alpha^1 + k^2\alpha^2 - i^1\beta^1 - i^2\beta^2);\\
p^0(3) &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 - k^1\beta^1 - k^2\beta^2);\\
p^0(4) &= \tfrac{1}{2}(j^1\alpha^1 + j^2\alpha^2 + i^1\gamma^1 + i^2\gamma^2);\\
p^0(5) &= -\tfrac{i}{2}(j^1\alpha^1 + j^2\alpha^2 - i^1\gamma^1 - i^2\gamma^2);\\
p^0(6) &= \tfrac{1}{2}(j^1\beta^1 + j^2\beta^2 + k^1\gamma^1 + k^2\gamma^2);\\
p^0(7) &= -\tfrac{i}{2}(j^1\beta^1 + j^2\beta^2 - k^1\gamma^1 - k^2\gamma^2);\\
p^0(8) &= \tfrac{1}{2}(j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2).
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Вид оставшихся (пространственно-подобных) компонент этих векторов очевиден. Легко видеть, что $p^{\mu}(0)$ является ранее определенным вектором, тогда как $p^{\mu}(3)$ совпадает с рассмотренным ранее псевдовектором относительно выделенных преобразований $SL(2,C)$.

5. Аналогичная ситуация имеет место для изотропной частицы. Для нее вектор (7.3.5) представляется в виде

$$\mathcal{P}^{\mu}_{(2)} = X(\alpha)p^{\mu}(\alpha), \tag{7.3.12}$$

где подразумевается суммирование по α от 0 до 3 с сигнатурой $(++++)$. Очевидно, что четыре вектора $p^\mu(\alpha)$ в (7.3.12) совпадают с первыми четырьмя векторами в (7.3.11).

6. Выше при определении спиноров и векторов во внутренних пространствах подразумевалось наличие групп линейных преобразований для неизотропных обобщенных частиц:

$$z'^s = \tilde{C}^s_r z^r; \quad \zeta'^{\dot{s}} = \tilde{C}^{\dot{s}}_{\dot{r}} \zeta^{\dot{r}}, \tag{7.3.13}$$

при $s, r = 1, 2, 3$, и для изотропных обобщенных частиц:

$$x'^s = \tilde{C}^s_r x^r; \quad \chi'^{\dot{s}} = \tilde{C}^{\dot{s}}_{\dot{r}} \chi^{\dot{r}}, \tag{7.3.14}$$

при $s, r = 1, 2$.

Естественно потребовать, чтобы для неизотропных частиц оставалась инвариантной квадратичная форма

$$i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3 = P^8. \tag{7.3.15}$$

это выделяет 9-параметрическую группу $U(3)$. Такими преобразованиями можно описывать переходы обобщенной неизотропной частицы из одного внутреннего состояния в другое. Для изотропных обобщенных частиц естественно ограничиться группой преобразований $U(2)$ во внутреннем пространстве.

7.4 Редукция уравнений Дирака

1. При преобразованиях (7.2.1) 6-компонентные столбцы $\Psi(s)$, определенные в (6.2.1), сводятся к 4-компонентным, т.к. компоненты типа i^3 и $(\beta\gamma)_3 = \beta^1\gamma^2 - \beta^2\gamma^1$ при этих преобразованиях являются инвариантными, т.е.

$$\Psi(1) \to \Psi_0(1) = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2\gamma^3 - \beta^3\gamma^2 \\ \beta^3\gamma^1 - \beta^1\gamma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ (\beta\gamma)_{\dot{1}} \\ (\beta\gamma)_{\dot{2}} \end{pmatrix};$$

$$\Psi(2) \to \Psi_0(2) = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ \gamma^2\alpha^3 - \gamma^3\alpha^2 \\ \gamma^3\alpha^1 - \gamma^1\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ (\gamma\alpha)_{\dot{1}} \\ (\gamma\alpha)_{\dot{2}} \end{pmatrix};$$

$$\Psi(3) \to \Psi_0(3) = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2 \\ \alpha^3\beta^1 - \alpha^1\beta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ (\alpha\beta)_{\dot{1}} \\ (\alpha\beta)_{\dot{2}} \end{pmatrix}. \qquad (7.4.1)$$

Здесь ковариантные компоненты ранее определенных 3-компонентных спиноров являются ковариантными и в рамках теории 2-компонентных спиноров.

Заметим, что в частном случае, когда

$$\alpha^3 = \beta^3 = 0; \quad j^1 = j^2 = 0, \qquad (7.4.2)$$

третий столбец из (7.4.1) тождественно равен нулю, а информация, заключенная в первых двух столбцах, дублируется, – так что можно ограничиться лишь одним первым 4-компонентным столбцом, как в теории БСКО ранга (3,3).

2. В связи с выделением внутренних степеней свободы еще раз обсудим обобщенную частицу в собственной системе отношений. Оказывается, состояние этой частицы можно охарактеризовать двумя внешними параметрами (с номерами 1 и 2) одного из элементов (пусть это будут параметры i_c^1 и i_c^2) и тремя внутренними комплексными параметрами: i_c^3, k_c^3, j_c^3. (Конечно, на них наложены еще два условия, так что число независимых вещественных параметров по-прежнему равно восьми.) Чтобы показать это, обратимся к общим условиям (6.3.11) на параметры элементов обобщенной частицы в ее собственной системе отношений. Выделим из них следующие 3 условия:

$$\begin{aligned} \sqrt{Mc}k_c^{*3} &= j_c^1 i_c^2 - j_c^2 i_c^1; \\ \sqrt{Mc}j_c^{*3} &= i_c^1 k_c^2 - i_c^2 k_c^1; \\ \sqrt{Mc}i_c^{*1} &= k_c^2 j_c^3 - k_c^3 j_c^2. \end{aligned} \qquad (7.4.3)$$

Их можно понимать как систему из 3 линейных уравнений относительно k_c^2, j_c^1, j_c^2. Решая ее и подставляя найденные выражения в еще одно условие из (6.3.11)

$$\sqrt{Mc}i_c^{*3} = k_c^1 j_c^2 - k_c^2 j_c^1,$$

получаем уравнение для одной неизвестной k_c^1. Решая его и подставляя в ранее найденные выражения, находим решение поставленной задачи в виде

$$k_c^1 = -\frac{\sqrt{Mc}i_c^{*2}j_c^{*3} + i_c^1 k_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}; \quad k_c^2 = \frac{\sqrt{Mc}i_c^{*1}j_c^{*3} - i_c^2 k_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}};$$

$$j_c^1 = \frac{\sqrt{Mc} i_c^{*2} k_c^{*3} - i_c^1 j_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}; \quad j_c^2 = -\frac{\sqrt{Mc} i_c^{*1} k_c^{*3} + i_c^2 j_c^3 i_c^{*3}}{k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3}}, \quad (7.4.4)$$

т.е. четыре "внешних" параметра в собственной системе отношений выражаются через два оставшихся "внешних" параметра i_c^1, i_c^2 и через три "внутренних" параметра. При этом на эти параметры наложены условия:

$$i_c^3 i_c^{*3} + k_c^3 k_c^{*3} + j_c^3 j_c^{*3} = i_c^1 i_c^{*1} + i_c^2 i_c^{*2} + i_c^3 i_c^{*3} = Mc. \quad (7.4.5)$$

3. Рассмотрим обобщенные уравнения Дирака в данном частном случае. Теперь необходимо из общей совокупности 8- параметрических бустов выделить бусты с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (6.4.4). Легко видеть, что матрицы из компонент (6.5.4) и (6.5.2) соответственно принимают вид

$$\sqrt{Mc}(K^{s\dot{r}}) = \begin{pmatrix} 2b_0(b_0+b_3)-1 & 2b_0(b_1-ib_2) & 0 \\ 2b_0(b_1+ib_2) & 2b_0(b_0-b_3)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.4.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{Mc}}(K_{\dot{r}s}) = \begin{pmatrix} 2(b_0-b_3)-1 & -2b_0(b_1-ib_2) & 0 \\ -2b_0(b_1+ib_2) & 2b_0(b_0+b_3)-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4.7)$$

Очевидно, 2x2-подматрицы в левых верхних углах (7.4.3) и (7.4.4) с точностью до коэффициента совпадают с аналогичными выражениями (с обратными знаками) в (3.5.12) и (3.5.3) в теории БСКО ранга (3,3). Следовательно, можно утверждать, что 6-компонентный комплект (для $\Psi(1)$) обобщенных уравнений Дирака переходит в стандартные 4-компонентные уравнения Дирака.

7.5 Подгруппа калибровочных преобразований

1. Отдельно рассмотрим 4-параметрические преобразования, характеризуемые матрицей вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_1^3 & C_2^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.5.1)$$

где C^3_1 и C^3_2 – два комплексных параметра. Подставляя эти коэффициенты в условие (5.3.4) для преобразований $SL(3,C)$, убеждаемся, что на эти коэффициенты не наложено дополнительных ограничений, т.е. эти преобразования характеризуются 4 вещественными параметрами. Легко убедиться, что преобразования с матрицами вида (7.5.1) образуют абелеву группу [1]. В частности, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.5.2}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные комплексные числа.

2. Рассмотрим, как ведут себя компоненты 9-мерного вектора P^A при этих преобразованиях. Подставляя коэффициенты (7.5.1) в матрицу $L^A_{\cdot B}$ в (A.2.1), находим ее вид

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & 0 & 0 \\ \hline L^\xi_{\cdot\mu} & I_4 & 0 \\ \hline L^8_{\cdot\mu} & L^8_{\cdot\xi} & 1 \end{array}\right), \tag{7.5.3}$$

где I_4 – 4-рядные единичные матрицы,

$$2(L^\xi_{\cdot\mu}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C^3_1+C^{*3}_1 & C^3_2+C^{*3}_2 & i(C^3_2-C^{*3}_2) & C^3_1+C^{*3}_1 \\ -i(C^3_1-C^{*3}_1) & -i(C^3_2-C^{*3}_2) & C^3_2+C^{*3}_2 & -i(C^3_1-C^{*3}_1) \\ C^3_2+C^{*3}_2 & C^3_1+C^{*3}_1 & -i(C^3_1-C^{*3}_1) & -(C^3_2+C^{*3}_2) \\ -i(C^3_2-C^{*3}_2) & -i(C^3_1-C^{*3}_1) & -(C^3_1+C^{*3}_1) & i(C^3_2-C^{*3}_2) \end{pmatrix}; \tag{7.5.4}$$

$$\begin{array}{ll} L^8_{\cdot 0} = C^3_1 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*3}_2; & L^8_{\cdot 1} = C^3_1 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*3}_1; \\ L^8_{\cdot 2} = i(C^3_2 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*3}_2); & L^8_{\cdot 3} = C^3_1 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*3}_2; \end{array} \tag{7.5.5}$$

$$\begin{array}{lll} L^8_{\cdot 4} = C^3_1 + C^{*3}_1; & L^8_{\cdot 5} = -i(C^3_1 - C^{*3}_1) & \\ L^8_{\cdot 6} = C^3_2 + C^{*3}_2; & L^8_{\cdot 7} = -i(C^3_2 - C^{*3}_2) & L^8_{\cdot 8} = 1. \end{array} \tag{7.5.6}$$

---

[1] В общем случае можно говорить о 6-параметрической группе преобразований, описываемых треугольными матрицами вида

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C^2_1 & 1 & 0 \\ C^3_1 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix},$$

однако эта группа уже не является абелевой.

Из этих формул видно, что 4-мерные компоненты импульса P^μ при таких преобразованиях не меняются, тогда как дополнительные компоненты P^ξ и P^8 преобразуются с участием 4-мерных компонент, т.е.

$$P'^\mu = P^\mu; \tag{7.5.7}$$
$$P'^\xi = P^\xi + L^\xi_{\cdot\mu} P^\mu; \tag{7.5.8}$$
$$P'^8 = P^8 + L^8_{\cdot\xi} P^\xi + L^8_{\cdot\mu} P^\mu. \tag{7.5.9}$$

3. Перепишем (7.5.8) в спинорной форме, используя формулы (7.2.6), выражающие компоненты P^ξ через π^s и $\pi^{\dot{s}}$. Для этого возьмем 4 комбинации из соотношений (7.5.8):

$$\begin{aligned}
\pi'^1 = (P^4 - iP^5)' &= C_1^{*3}(P^0 + P^3) + C_2^{*3}(P^1 - iP^2);\\
\pi'^{\dot{1}} = (P^4 + iP^5)' &= C_1^3(P^0 + P^3) + C_2^3(P^1 + iP^2);\\
\pi'^2 = (P^6 - iP^7)' &= C_2^{*3}(P^0 - P^3) + C_1^{*3}(P^1 + iP^2);\\
\pi'^{\dot{2}} = (P^6 + iP^7)' &= C_2^3(P^0 - P^3) + C_1^3(P^1 - iP^2).
\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

Очевидно, что из этих комплексных соотношений независимыми являются только два, например, для π'^1 и π'^2.

Введем спинорные обозначения для двух комплексных параметров:

$$C_1^3 = \rho_1; \;\; C_2^3 = \rho_2; \;\; C_1^{*3} = \rho_{\dot{1}}; \;\; C_2^{*3} = \rho_{\dot{2}}. \tag{7.5.11}$$

Переходя от комбинаций 4-мерных компонент вектора P^μ к спинтензорным выражениям, соотношения (7.5.8) можно переписать в виде

$$\pi'^s = \pi^s + B^{s\dot{r}}\rho_{\dot{r}}, \tag{7.5.12}$$

где, напомним, $B^{s\dot{r}}$ задано в (4.4.8).

4. Перепишем в новых обозначениях выражение (7.5.9). Легко убедиться, что комбинация $L^8_{\cdot\xi}P^\xi$ записывается в следующих $SL(2,C)$-инвариантных формах:

$$L^8_{\cdot\xi} = \rho_s\pi^s + \rho_{\dot{s}}\pi^{\dot{s}} = (\pi^1\rho^2 - \pi^2\rho^1) + (\pi^{\dot{1}}\rho^{\dot{2}} - \pi^{\dot{2}}\rho^{\dot{1}}). \tag{7.5.13}$$

Здесь использованы формулы (2.5.10) для подъема индексов 2-компонентных спиноров.

Смешанные компоненты $L^8_{\cdot\mu}$ из (7.5.5) можно переписать в виде

$$L^8_{\cdot 0} = \rho^1\rho^{\dot 1} + \rho^2\rho^{\dot 2} \equiv R^0; \qquad L^8_{\cdot 1} = -(\rho^1\rho^{\dot 2} + \rho^2\rho^{\dot 1}) \equiv -R^1;$$

$$L^8_{\cdot 2} = -i(\rho^1\rho^{\dot 2} - \rho^2\rho^{\dot 1}) \equiv -R^2; \quad L^8_{\cdot 3} = -(\rho^1\rho\dot{1} - \rho^2\rho^{\dot 2}) \equiv -R^3. \tag{7.5.14}$$

В итоге (7.5.9) представляется в виде

$$P'^8 = P^8 + \rho_s\pi^s + \rho_{\dot s}\pi^{\dot s} + g_{\mu\nu}P^\mu R^\nu. \tag{7.5.15}$$

5. Очевидно, преобразования (7.5.1) можно разбить на два последовательные 2-параметрические преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C^3_1 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C^3_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.5.16}$$

каждое из которых, в свою очередь, можно представить в виде произведения двух преобразований: из группы 3-мерных поворотов $SU(2)$ и бустов в соответствующем 4-мерном сечении 9-мерного многообразия. Первое из преобразований справа в (7.5.16) осуществляется в 4-мерном сечении (1,3), а второе – в 4-мерном сечении (2,3).

Продемонстрируем это на примере последнего слагаемого справа в (7.5.16), которое можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & C^3_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ 0 & b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ 0 & -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \tag{7.5.17}$$

Далее можно ограничиться 2x2-матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C^3_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix},$$

где стоящие справа матрицы соответствуют рассмотренным во 2-ой главе $SU(2)$-преобразованиям (2.4.6) и бустам (2.4.9) (в 4-мерном сечении (1,2)) с условиями на параметры (2.4.7) и (2.4.10).

Перемножая матрицы справа в (7.5.17) и приравнивая соответствующие матричные элементы слева и справа, получаем 8 вещественных уравнений на 8 коэффициентов: a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3. Решая эту систему уравнений, находим все 8 коэффициентов через вещественную и мнимую части комплексного параметра C_3^2:

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm\frac{2}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}; & a_1 = b_2 &= \pm\frac{\Im(C_2^3)}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}; \\ a_3 &= 0; & a_2 = -b_1 &= \pm\frac{\Re(C_2^3)}{\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}; \\ b_0 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}; & b_3 &= \pm\frac{4 - C_2^3 C_2^{*3}}{2\sqrt{C_2^3 C_2^{*3}}}. \end{aligned} \tag{7.5.18}$$

Для первого слагаемого справа в (7.5.16) можно получить аналогичный результат с той лишь разницей, что преобразования должны осуществляться в сечении (1,3) и коэффициент C_2^3 нужно заменить на C_1^3.

7.6 Подгруппа суперсимметричных преобразований

1. Рассмотрим еще одну 4-параметрическую подгруппу преобразований, характиризуемую матрицей

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.6.1}$$

где C_3^1 и C_3^2 – два комплексных параметра, не связанные какими-либо дополнительными условиями. Легко убедиться, что такие преобразования составляют абелеву группу [2], в частности

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.6.2}$$

[2]Заметим, что в общем случае можно говорить о 6-параметрической группе преобразований, описываемых треугольными матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} 1 & C_2^1 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

однако такая группа уже не является абелевой.

где a_1, a_2, b_1, b_2 – произвольные комплексные числа.

2. Рассмотрим, как изменяются при этих преобразованиях компоненты 9-мерного вектора P^A. Подставляя коэффициенты (7.6.1) в компоненты матрицы $L^A_{\cdot B}$ в (A.2.1), находим

$$(L^A_{\cdot B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^\mu_{\cdot\xi} & L^\mu_{\cdot 8} \\ \hline 0 & I_4 & L^\xi_{\cdot 8} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{7.6.3}$$

где опять I_4 – единичные 4-рядные матрицы,

$$2(L^\mu_{\cdot\xi}) =$$

$$= \begin{pmatrix} C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^2_3 - C^{*2}_3) \\ C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^2_3 - C^{*2}_3) & C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) \\ -i(C^2_3 - C^{*2}_3) & C^2_3 + C^{*2}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & -(C^1_3 + C^{*1}_3) \\ C^1_3 + C^{*1}_3 & i(C^1_3 - C^{*1}_3) & -(C^2_3 + C^{*2}_3 & -i(C^2_3 - C^{*2}_3) \end{pmatrix}; \tag{7.6.4}$$

$$\begin{array}{ll} L^0_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3); & L^1_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_3); \\ L^2_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*1}_3); & L^3_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3); \end{array} \tag{7.6.5}$$

$$\begin{array}{lll} L^4_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^1_3 + C^{*1}_3); & L^5_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^1_3 - C^{*1}_3); & \\ L^6_{\cdot 8} = \frac{1}{2}(C^2_3 + C^{*2}_3); & L^7_{\cdot 8} = \frac{i}{2}(C^2_3 - C^{*2}_3); & L^8_{\cdot 8} = 1. \end{array} \tag{7.6.6}$$

Из (7.6.3) видно, что компоненты 9-мерного вектора изменяются следующим образом

$$P'^\mu = P^\mu + L^\mu_{\cdot\xi} P^\xi + L^\mu_{\cdot 8} P^8; \tag{7.6.7}$$

$$P'^\xi = P^\xi + L^\xi_{\cdot 8} P^8; \tag{7.6.8}$$

$$P'^8 = P^8. \tag{7.6.9}$$

3. Вспомним 4-компонентный биспинор из компонент P^ξ, определенный в (7.2.6). Введем для него обозначение

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi_{\dot 1} \\ \pi_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^1 \\ \pi^2 \\ \pi^{\dot 2} \\ -\pi^{\dot 1} \end{pmatrix}. \tag{7.6.10}$$

Кроме того, введем спинорные обозначения для параметров преобразований C^1_3 и C^2_3:

$$C^1_3 = \theta^1; \quad C^2_3 = \theta^2; \quad C^{*1}_3 = \theta^{\dot 1}; \quad C^{*2}_3 = \theta^{\dot 2}. \tag{7.6.11}$$

Введем также 4-рядные обозначения для нового биспинора:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta_{\dot{1}} \\ \theta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^{\dot{2}} \\ -\theta^{\dot{1}} \end{pmatrix}; \tag{7.6.12}$$

$$\theta^\dagger = (\theta^{\dot{1}}, \theta^{\dot{2}}, \theta^2, -\theta^1); \quad \overline{\theta} = \theta^\dagger \gamma_0 = (-\theta^2, \theta^1, -\theta^{\dot{1}}, -\theta^{\dot{2}}).$$

4. Легко убедиться, что в новых обозначениях

$$L^\mu_{\cdot\xi} P^\xi = \frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu \pi, \tag{7.6.13}$$

а компоненты $L^\mu_{\cdot 8}$ также принимают 4-мерный векторный вид

$$L^\mu_{\cdot 8} = \frac{1}{4}\overline{\theta}\gamma^\mu \theta. \tag{7.6.14}$$

Легко также видеть,что компоненты $L^\xi_{\cdot 8}$ имеют вид

$$\begin{aligned} L^4_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(\theta^1 + \theta^{\dot{1}}); \quad L^5_{\cdot 8} = \tfrac{i}{2}(\theta^1 - \theta^{\dot{1}}); \\ L^6_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(\theta^2 + \theta^{\dot{2}}); \quad L^7_{\cdot 8} = \tfrac{i}{2}(\theta^2 + \theta^{\dot{2}}), \end{aligned} \tag{7.6.15}$$

схожий с выражениями (7.2.8). На этом основании эти величины можно переобозначить

$$L^\xi_{\cdot 8} \equiv \theta^\xi. \tag{7.6.16}$$

Используя (7.6.13) - (7.6.15), преобразования (7.6.7) - (7.6.8) можно переписать в виде

$$P'^\mu = P^\mu + \frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^\mu \pi + \frac{1}{4}\overline{\theta}\gamma^\mu \theta P^8; \tag{7.6.17}$$

$$P'^\xi = P^\xi + \theta^\xi P^8 \to \pi' = \pi + \theta P^8. \tag{7.6.18}$$

Последнее выражение означает некую трансляцию в спинорном пространстве, определяемую биспинором θ и скаляром P^8. Аналогичные формулы имеют место в теориях с суперсимметриями (см., например, [8]). Они описывают преобразования, перемешивающие бозонные и фермионные компоненты супермультиплета. По этой причине здесь эти преобразования названы *суперсимметричными*.

5. Аналогично случаю калибровочных преобразований суперсимметричные преобразования (7.6.1) расщепляются на два:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_3^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (7.6.19)$$

каждое из которых опять можно представить как последовательные $SU(2)$ -преобразования и бусты в соответствующем 4-мерном сечении 9-мерного многообразия. В частности, последнее из преобразований справа в (7.6.18) можно записать через преобразования в (2,3)-сечении:

$$\begin{pmatrix} 1 & C_3^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 + \tilde{b}_3 & \tilde{b}_1 - i\tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_1 + i\tilde{b}_2 & \tilde{b}_0 - \tilde{b}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{a}_0 + i\tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 + i\tilde{a}_1 \\ -\tilde{a}_2 + i\tilde{a}_1 & \tilde{a}_0 - i\tilde{a}_3 \end{pmatrix}, \qquad (7.6.20)$$

где вещественные параметры $\tilde{b}_\mu$ и $\tilde{a}_\mu$ удовлетворяют условиям типа (2.4.10) и (2.4.7). Из (7.6.19) легко получить 8 уравнений на эти параметры. Решение этой системы находится в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; && \tilde{a}_1 = -\tilde{b}_2 = \pm\frac{\Im(C_3^2)}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; \\ &\tilde{a}_3 = 0; && \tilde{a}_2 = \tilde{b}_1 = \pm\frac{\Re(C_3^2)}{\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}; \qquad (7.6.21) \\ &\tilde{b}_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}; && \tilde{b}_3 = \pm\frac{C_3^2C_3^{*2}}{2\sqrt{4+C_3^2C_3^{*2}}}. \end{aligned}$$

В аналогичном виде находятся параметры преобразований в 4-мерном сечении (1,3) для первого слагаемого справа в (7.6.18).

7.7 Подгруппа квазиконформных преобразований

1. Рассмотрим подгруппу 2-параметрических преобразований, определяемых матрицами вида

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} \pm(C_3^3)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm(C_3^3)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & C_3^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi^{-2} \end{pmatrix}, \qquad (7.7.1)$$

где C_3^3 – произвольное комплексное число. Очевидно, что такие преобразования составляют 2-параметрическую абелеву группу.

2. Подставим параметры $C_1^1 = \phi$, $C_2^2 = \phi$, $C_3^3 = \phi^{-2}$ в выражения для $L^A_{.B}$, выписанные в Приложении 3. В итоге находим

$$(L^A_{.B}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \varphi_1 I_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_2 I_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varphi_3 \end{array}\right), \tag{7.7.2}$$

где

$$\varphi_1 = \phi\phi^*; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}[\phi^{-2}\phi^* + (\phi^*)^{-2}\phi]; \quad \varphi_3(\phi\phi^*)^{-2} \tag{7.7.3}$$

– три вещественных числа. Из (7.7.3) следует, что компоненты 9-мерного вектора изменяются следующим образом:

$$P'^{\mu} = \varphi_1 P^{\mu}; \tag{7.7.4}$$

$$P'^{\xi} = \varphi_2 P^{\xi}; \to \pi'^{s} = \varphi_2 \pi^{s}; \tag{7.7.5}$$

$$P'^{8} = \varphi_3 P^{8}. \tag{7.7.6}$$

Такие преобразования 4-мерных векторов и спиноров принято называть конформными преобразованиями или дилатациями (см. раздел 9.3). В данном случае назовем их *квазиконформными*. Напомним, что при конформных преобразованиях изменяются длины векторов, но остаются неизменными углы. Очевидно, что при этих преобразованиях кубичная форма (5.5.2) остается инвариантной.

3. Выделяя из ϕ модуль ρ и фазу α

$$\phi = \rho e^{i\alpha}, \tag{7.7.7}$$

приходим к выводу, что преобразование (7.7.1) можно представить в виде произведения

а) однопараметрического вещественного преобразования (дилатации), когда

$$\phi = \rho; \quad \varphi_1 = \rho^2; \quad \varphi_2 = \rho^{-1}; \quad \varphi_3 = \rho^{-4}, \tag{7.7.8}$$

б) однопараметрического унитарного преобразования, когда

$$\phi = e^{i\alpha}; \quad \varphi_1 = 1; \quad \varphi_2 = \cos 3\alpha; \quad \varphi_3 = 1. \tag{7.7.9}$$

Очевидно, при таких преобразованиях 4-мерные компоненты P^{μ}, а также P^8, остаются инвариантными. Преобразуются лишь спинорные компоненты π^s.

Глава 8

Алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия и БСКО ранга (4,4;a)

В главах 5 и 6 рассматривалась такие аспекты теории БСКО ранга (4,4), в которых все три параметра элементов выступали симметричным образом. В предыдущей главе сделан важный шаг по выделению одного из параметров, что соответствует редукции бинарного многомерия на БСКО ранга (3,3). Как известно из теории Калуцы-Клейна, аналогичная редукция понятий многомерной геометрии на 4-мерные пространственно-временные сечения приводит к появлению выражений, описывающих электромагнитные (и слабые) взаимодействия. В бинарной геометрофизике предлагается таким же образом вводить взаимодействия между элементарными частицами. В частности, в рамках теории БСКО ранга (4,4) можно описать электрослабые взаимодействия лептонов. Подробно этот вопрос намечено обсудить в другой части книги. Для его решения необходимо использовать специальные приемы и новые понятия. В этой главе изложены самые элементарные алгебраические аспекты введения взаимодействий: указан алгебраический прообраз лагранжиана взаимодействия пары массивных лептонов и обсуждены некоторые свойства вырожденной БСКО ранга (4,4;a), связанной с описанием взаимодействий.

8.1 Базовое 4х4-отношение

1. В теории БСКО ранга (4,4) имеется характерное выражение, соответствующее общепринятому определению действия для двух взаимодействующих частиц. Это так называемое *базовое* 4×4-*отношение*, симметричным образом содержащее две четверки элементов двух частиц в начальных и конечных состояниях [20, 32]. Пусть состояния двух частиц описываются двумя четверками элементов (i, k, j, s) и $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, тогда базовое 4х4-отношение имеет вид

$$\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{Bmatrix} \equiv -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta}\\ 1 & u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta}\\ 1 & u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta}\\ 1 & u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ i^1 & k^1 & j^1 & s^1\\ i^2 & k^2 & j^2 & s^2\\ i^3 & k^3 & j^3 & s^3\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3\end{vmatrix}. \qquad (8.1.1)$$

Это выражение играет ключевую роль при описании взаимодействующих частиц, аналогичную лагранжиану или гамильтониану в стандартной теории поля. В каком-то смысле базовое 4х4-отношение аналогично фундаментальным 2х2-отношениям в главе 2 или фундаментальным 3х3-отношениям в главе 5. Для него принято обозначение, близкое к ранее использованным. Так же, как и фундаментальные отношения, оно записывается через произведение двух определителей, составленных из параметров однотипных элементов. Каждый из этих определителей записывается как выражение для объема в унарных геометриях (см. (1.5.10)).

2. Расписывая окаймленный определитель из парных отношений в (8.1.1) по первой строке или первому столбцу, легко убедиться, что базовое 4х4-отношение представляется через совокупность из 16 фундаментальныз 3х3-отношений, введенных в главе 5:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ ikjs\end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ kjs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ kjs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ kjs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ kjs\end{bmatrix} -\\ &- \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ ijs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ ijs\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ ijs\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ ijs\end{bmatrix} +\\ &+ \begin{bmatrix}\beta\gamma\delta\\ iks\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\delta\\ iks\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha\beta\delta\\ iks\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ iks\end{bmatrix} -\end{aligned}$$

$$- \quad \begin{bmatrix} \beta\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\gamma\delta \\ ikj \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha\beta\delta \\ ikj \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ iks \end{bmatrix}. \qquad (8.1.2)$$

Они образованы из всевозможных выборок 3 элементов из 4 в каждом из двух множеств. Очевидно, базовое 4x4-отношение, как и все его отдельные части в (8.1.2) инвариантны относительно преобразований из группы $SL(3,C)$.

3. В рассматриваемой в этой главе теории БСКО ранга (4,4) осуществляется *редукция* на теорию БСКО ранга (3,3). В данном случае она означает ограничение преобразованиями из группы $SL(2,C)$, которые осуществляются над параметрами с номерами 1 и 2, тогда как параметры с индексом 3 остаются инвариантными. Запишем базовое 4x4-отношение (8.1.1) через 4-мерные ("внешние") комбинации (из параметров с индексами 1 и 2) и через инвариантные ("внутренние") параметры (с индексом 3). Для этого достаточно расписать определители справа в (8.1.1) по последним строкам [32]. В итоге находим комбинацию из 36 слагаемых вида

$$\begin{Bmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{Bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\delta \\ js \end{pmatrix}, \qquad (8.1.3)$$

где суммирование производится по всем возможным перестановкам из двух четверок индексов: α, β, γ, δ и i, k, j, s. В этом выражении использованы обозначения:

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i^3 & k^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} = (i^3 - k^3)(\beta^3 - \alpha^3). \qquad (8.1.4)$$

В квадратных скобках в (8.1.3) стоят фундаментальные 2x2- отношения вида (2.4.1), построенные из невырожденных параметров с индексами 1 и 2.

4. Проиллюстрируем физический смысл базового 4x4-отношения. Вспоминая выражение для скалярного произведения двух векторов (3.1.4), выражающегося через комбинацию из четырех фундаментальных 2x2-отношений, легко убедиться, что из 36 выражений в (8.1.3), в частности, можно построить скалярное произведение импульсов двух частиц. Поскольку в него входят 4 элемента в начальном состоянии и 4 элемента в конечном состояни, то 4x4-отношение будем графически изображать 8-хвосткой (см. рис. 8.1а). Объединяя их парами, соответствующими двум частицам в начальных и в конечных состояниях, приходим еще к двум диаграммам, иллюстрирующим взаимодействие двух массивных лептонов (см. рис 8.1б и 8.1в). На рисунке 8.1а элементы i и k описывают первый лептон (e_1) в начальном состоянии, а

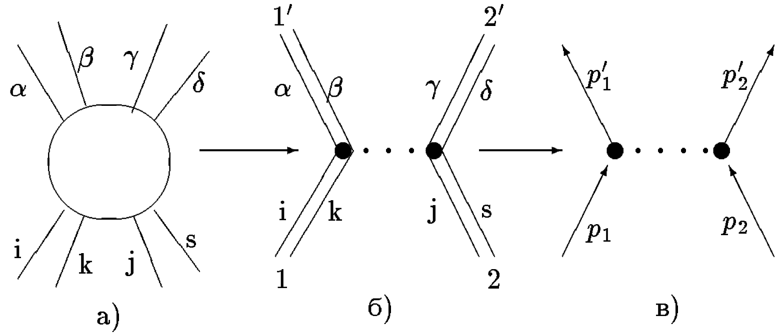


Рис. 8.1: Физическая иллюстрация базового 4х4-отношения

элементы j и s – второй лептон (e_2) в начальном состоянии. Аналогично, α и β описывают первый лептон в конечном состоянии, а элементы γ и β – второй лептон в конечном состоянии (см. рис 8.1б). На рисунке 8.1в изображена стандартная диаграмма фейнмановского типа, описывающая рассеяние двух массивных лептонов из-за взаимодействия через промежуточные электромагнитное поле A_μ или поле Z- бозонов. Во второй части книги базовое 4х4-отношение будет составлять основу как для описания электрослабого взаимодействия двух массивных лептонов, так и для перехода к макропонятиям.

8.2 Переход от невырожденной БСКО ранга (4,4) к вырожденной

1. В связи с записанным выше базовым 4х4-отношением с нарушенной симметрией между параметрами рассмотрим переход от произвольной БСКО ранга (4,4) к вырожденной БСКО ранга (4,4;a), где также один из параметров выделен. Как уже отмечалось в 1-ой главе, бинарные системы отношений типа a можно рассматривать как вырожденные бинарные системы соответствующего ранга. Такой же случай можно рассмотреть и в рамках комплексифицированных бинарных систем. Переход от БСКО ранга (4,4) к БСКО ранга (4,4;a) можно формально осуществить следующим образом. Выделим в парном отношении (5.1.2) третьи параметры, положив, что они представляются в виде

$$i^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{\varepsilon i_0}; \qquad \alpha^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{\varepsilon \alpha_0}, \tag{8.2.1}$$

где $\varepsilon \ll 1$ – некий универсальный малый параметр, i_0 и α_0 – новые параметры, соответствующие исходным i^3 и α^3. Представим парное отношение (5.1.2) в следующей форме

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} \equiv$$
$$\equiv i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} - 1\right) + \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (8.2.2)$$

Закон невырожденной БСКО ранга (4,4) перепишем в окаймленном виде, т.е.

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\varepsilon & u_{i\alpha} & u_{i\mu} & u_{i\nu} & u_{i\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{m\alpha} & u_{m\mu} & u_{m\nu} & u_{m\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{n\alpha} & u_{n\mu} & u_{n\nu} & u_{n\lambda} \\ -1/\varepsilon & u_{l\alpha} & u_{l\mu} & u_{l\nu} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.2.3)$$

Добавляя первый столбец ко всем остальным, добьемся исключения слагаемого $1/\varepsilon$ во всех парных отношениях в (8.2.2) и появления единиц в первой строке определителя. Умножив первый столбец справа в (8.2.3) на $-\varepsilon$, приходим к выражению

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'_{i\alpha} & a'_{i\mu} & a'_{i\nu} & a'_{i\lambda} \\ 1 & a'_{m\alpha} & a'_{m\mu} & a'_{m\nu} & a'_{m\lambda} \\ 1 & a'_{n\alpha} & a'_{n\mu} & a'_{n\nu} & a'_{n\lambda} \\ 1 & a'_{l\alpha} & a'_{l\mu} & a'_{l\nu} & a'_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.2.4)$$

где

$$a'_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon(i_0+\alpha_0)} - 1\right). \qquad (8.2.5)$$

2. При устремлении ε к нулю выражение (8.2.5) переходит в парное отношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a'_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i_0 + \alpha_0 \equiv a_{i\alpha}, \qquad (8.2.6)$$

а (8.2.4) переходит в закон вырожденной БСКО ранга (4,4;a)

$$\tilde{\Phi} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\mu} & a_{m\nu} & a_{m\lambda} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\mu} & a_{n\nu} & a_{n\lambda} \\ 1 & a_{l\alpha} & a_{l\mu} & a_{l\nu} & a_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.2.7)$$

8.3 Фундаментальные отношения в теории БСКО ранга (4,4;а)

1. Выразим парное отношение между двумя произвольными элементами вырожденной БСКО ранга (4,4;а) через их отношения к трем парам других, в общем случае также произвольных, элементов этой же БСКО. Поскольку эти элементы будем считать базисными, обозначим отношения между ними тильдой сверху. Из закона (8.2.7) находим

$$
\begin{gathered}
a_{i\alpha}\Delta' = \Delta + \\
+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_{m\alpha} & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ a_{n\alpha} & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \\ a_{l\alpha} & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} + \\
+a_{i\mu}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\mu}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} + \\
+a_{i\mu}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\nu}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} + \\
+a_{i\nu}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} - a_{i\nu}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\lambda} \end{vmatrix} + \qquad (8.3.1) \\
+a_{i\lambda}a_{m\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} \end{vmatrix} - a_{i\lambda}a_{n\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} \end{vmatrix} + \\
+a_{i\lambda}a_{l\alpha}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} \end{vmatrix},
\end{gathered}
$$

где использованы обозначения для определителей:

$$
\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ 1 & \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \\ 1 & \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (8.3.2)
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \tilde a_{m\mu} & \tilde a_{m\nu} & \tilde a_{m\lambda} \\ \tilde a_{n\mu} & \tilde a_{n\nu} & \tilde a_{n\lambda} \\ \tilde a_{l\mu} & \tilde a_{l\nu} & \tilde a_{l\lambda} \end{vmatrix}.
$$

2. Выражение (8.3.1) можно привести к виду (8.2.6). Из последних в (8.3.1) девяти слагаемых, квадратичных по отношениям небазисных элементов к базисным, можно получить две комбинации из невырожденных параметров в (8.2.6). Чтобы убедиться в этом, выпишем их отдельно в виде 3х3-матрицы. Перенеся коэффициент Δ' из левой части (8.3.1) в знаменатель правой, это выражение представим в виде

$$\begin{array}{lll} a_{i\mu}a_{m\alpha}A_{11} & +a_{i\mu}a_{n\alpha}A_{12} & +a_{i\mu}a_{l\alpha}A_{13}+ \\ +a_{i\nu}a_{m\alpha}A_{21} & +a_{i\nu}a_{n\alpha}A_{22} & +a_{i\nu}a_{l\alpha}A_{23}+ \\ a_{i\lambda}a_{m\alpha}A_{31} & +a_{i\lambda}a_{n\alpha}A_{32} & +a_{i\lambda}a_{l\alpha}A_{33}, \end{array} \tag{8.3.3}$$

где коэффициенты A_{sr} не являются независимыми, а связаны между собой условиями:

$$\begin{array}{c} A_{13} = -A_{11} - A_{12}; \quad A_{31} = -A_{11} - A_{21}; \\ A_{23} = -A_{21} - A_{22}; \quad A_{32} = -A_{12} - A_{22}; \\ A_{33} = -A_{13} - A_{23} = A_{11} + A_{22} + A_{12} + A_{21}. \end{array} \tag{8.3.4}$$

Из этих свойств коэффициентов квадратичной формы (относительно отношений небазисных элементов к базисным) следует, что ее можно привести к некой квадратичной форме из двух (диагональных) квадратичных слагаемых вида $i^1\alpha^1+i^2\alpha^2$ в (8.2.6).

Для вырожденных параметров из (8.3.1) получаем выражения:

$$i_0 = \frac{1}{\Delta'}\left(\frac{1}{2}\Delta + \begin{vmatrix} 0 & a_{i\mu} & a_{i\nu} & a_{i\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ 1 & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix}\right);$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\Delta'}\left(\frac{1}{2}\Delta + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_{m\alpha} & \tilde{a}_{m\mu} & \tilde{a}_{m\nu} & \tilde{a}_{m\lambda} \\ a_{n\alpha} & \tilde{a}_{n\mu} & \tilde{a}_{n\nu} & \tilde{a}_{n\lambda} \\ a_{l\alpha} & \tilde{a}_{l\mu} & \tilde{a}_{l\nu} & \tilde{a}_{l\lambda} \end{vmatrix}\right). \tag{8.3.5}$$

По аналогии с изложенным в предыдущих главах можно ввести понятие собственного базиса БСКО ранга (4,4;а).

3. В рассмотренных выше БСКО рангов (3,3) и (4,4) ключевую роль играли детерминанты, характеризующие частицы и наборы базисных элементов. Они представляли собой отличные от нуля миноры максимального ранга в определителе, через который записывался закон соответствующей БСКО. Они возникали в знаменателях выражений для отношений между парами произвольных элементов в формулах (2.2.3) и (5.1.3) и были названы фундаментальными $n\times n$-отношениями. Исходя из свойств этих детерминантов строилась теория соответствующей БСКО.

В данном случае вырожденной БСКО ранга (4,4;а) роль фундаментального 3х3-отношения призван играть определитель Δ' в (8.3.2).

Легко показать, что этот определитель представляется в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}. \qquad (8.3.6)$$

Здесь отсутствуют параметры с индексом 3. Раскрывая определители справа и перемножая их, приходим к комбинации из фундаментальных 2х2-отношений из теории БСКО ранга (3,3), каждое из которых инвариантно относительно преобразований пары парметров с индексами 1 и 2 из группы $SL(2, C)$. Таким образом, *в теории вырожденной БСКО ранга (4,4;а) естественным образом выделяется группа преобразований* $SL(2, C)$.

4. Для БСКО ранга (4,4;а) формально можно назвать фундаментальным 4х4-отношением еще один тип минора максимального ранга в определителе (8.2.7) – неокаймленный минор чевертого ранга

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{Bmatrix}_0 . \qquad (8.3.7)$$

Расписывая этот определитель, легко показать, что он представляется в виде 6х6-таблицы, приведенной в (8.1.3), где попрежднему комбинации в квадратных скобках строятся из невырожденных параметров (с индексами 1 и 2), а комбинации в круглых скобках строятся из вырожденных параметров аналогично (8.1.4):

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix}_0 = (i_0 - k_0)(\beta_0 - \alpha_0). \qquad (8.3.8)$$

В этой и в предыдущуй формулах приняты обозначения раздела 8.1 с индексом "0" внизу, означающем, что параметры с индексом "3" заменены на параметры с индексом "0". Выражение (8.4.2) естественно по-прежнему называть базовым 4х4-отношением.

5. Обратим внимание на характерный вид коэффициентов A_{sr} в 3х3-матрице (8.3.3). Из (8.3.1) видно, что все они представляются в форме

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} + a_{k\alpha} - a_{i\alpha} - a_{k\beta} =$$

$$= -(i^1 - k^1)(\alpha^1 - \beta^1) - (i^2 - k^2)(\alpha^2 - \beta^2), \qquad (8.3.9)$$

т.е. не зависят от параметров с индексом 3. Все они остаются инвариантными при преобразованиях параметров с индексами 1 и 2 из группы $SU(2)$.

6. В рамках теории БСКО ранга (4,4;а) формально можно построить фундаментальное 3х3-отношение для трех пар сопряженных элементов. В общем случае оно отлично от нуля и представляется в виде

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \qquad (8.3.10)$$

Вводя обозначения для комбинаций из параметров:

$$\tilde{u}_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2; \quad v_{i\alpha} = i^3 + \alpha^3;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{pmatrix} = (i^3 - k^3)(\beta^3 - \alpha^3); \qquad (8.3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix},$$

выражения справа в (8.3.10) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \ & \tilde{u}_{i\alpha}\binom{\beta\gamma}{kj} - \tilde{u}_{k\alpha}\binom{\beta\gamma}{ij} + \tilde{u}_{j\alpha}\binom{\beta\gamma}{ik} - \\ & -\tilde{u}_{i\beta}\binom{\alpha\gamma}{kj} + \tilde{u}_{k\beta}\binom{\alpha\gamma}{ij} - \tilde{u}_{j\beta}\binom{\alpha\gamma}{ik} + \\ & +\tilde{u}_{i\gamma}\binom{\alpha\beta}{kj} - \tilde{u}_{k\gamma}\binom{\alpha\beta}{ij} + \tilde{u}_{j\gamma}\binom{\alpha\beta}{ik}; \end{aligned} \qquad (8.3.12)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \ & v_{i\alpha}\begin{bmatrix}\beta\gamma \\ kj\end{bmatrix} - v_{k\alpha}\begin{bmatrix}\beta\gamma \\ ij\end{bmatrix} + v_{j\alpha}\begin{bmatrix}\beta\gamma \\ ik\end{bmatrix} - \\ & -v_{i\beta}\begin{bmatrix}\alpha\gamma \\ kj\end{bmatrix} + v_{k\beta}\begin{bmatrix}\alpha\gamma \\ ij\end{bmatrix} - v_{j\beta}\begin{bmatrix}\alpha\gamma \\ ik\end{bmatrix} + \\ & +v_{i\gamma}\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ kj\end{bmatrix} - v_{k\gamma}\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ ij\end{bmatrix} + v_{j\gamma}\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ ik\end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad (8.3.13)$$

Если положить, что параметры с индексом 3 не изменяются, то легко видеть, что Σ_1 инвариантно относительно преобразований параметров с индексами 1 и 2 из группы $SU(2)$, а выражение Σ_2 инвариантно относительно преобразований $SL(2,C)$.

8.4 Промежуточный вариант БСКО ранга (4,4)

1. Можно рассмотреть промежуточный вариант между общим случаем БСКО ранга (4,4) и БСКО ранга (4,4;a), когда фактор ε, рассмотренный в разделе 8.2, не стремится к нулю, а лишь мал по сравнению с единицей. В этом случае базовое 4x4-отношение БСКО ранга (4,4) представляется в виде

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta\gamma\delta \\ ikjs \end{matrix} \right\} = -\varepsilon \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} + 0(\varepsilon^2). \qquad (8.4.1)$$

В это выражение явно входит фактор ε. Если данное выражение описывает некую реальность (взаимодействия массивных лептонов), то естественно поставить вопрос о физическом смысле этого фактора.

2. Опираясь на ряд естественных предположений, произведем оценку фактора ε. Прежде всего отметим, что согласно (8.2.1) этот фактор вместе с параметром вида i_0 входит в показатель экспоненты $\exp \varepsilon i_0$, следовательно, комбинация εi_0 должна быть безразмерной. Параметр i_0 можно оценить, опираясь на идеологию многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна. Как уже отмечалось, в бинарной геометрофизике БСКО ранга(4,4) рассматривается как бинарное многомерие, где дополнительные параметры (с индексами 3 или 0) имеют смысл характеристик, описывающих взаимодействие, т.е. зарядов. В 5-мерной теории Калуцы-Клейна имеет место аналогичная ситуация, – электрический заряд e связан с 5-ой компонентой 5-мерной скорости u^5 следующим образом [13]

$$u^5 = \frac{e}{2m\sqrt{k}}, \qquad (8.4.2)$$

где k – ньютоновская гравитационная постоянная, m – масса частицы.

3. Далее следует более точно указать, с какой физической величиной следует сопоставить дополнительные параметры с индексом 0. Учтем, что согласно (8.2.6) парное отношение БСКО

ранга (4,4;а) представляется в виде

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i_0 + \alpha_0 + 0(\varepsilon), \qquad (8.4.3)$$

следовательно, i_0 имеет размерность первых двух слагаемых справа. В главах 3 и 6 слагаемые такого типа определяли импульсы (точнее, временно-подобную компоненту импульса). Однако, строго говоря, такая интерпретация определялась нормировокой, т.е. умножением этих выражений на множитель mc. Ничто не мешало трактовать такие комбинации как безразмерные компоненты 4-мерных скоростей. В этом случае параметры с индексом 0 также должны быть безразмерными. Естественно их напрямую связать с также безразмерной пятой компонентой 5- мерной скорости (8.4.2), т.е. положить [1]

$$i_0 \sim u^5 = \frac{e}{2m\sqrt{k}}. \qquad (8.4.4)$$

4. При такой интерпретации i_0 фактор ε также должен быть безразмерным. Поскольку этот фактор имеет универсальное значение, т.е. одинаков для всех элементов БСКО, то он должен выражаться через фундаментальные физические константы. Наиболее подходящим выражением является отношение массы частицы к планковской массе

$$\varepsilon = \frac{m}{m_{Pl}} = \frac{l_{Pl}mc}{\hbar} = m\sqrt{\frac{k}{\hbar c}}, \qquad (8.4.5)$$

где планковская масса следующим образом выражается через фундаментальные константы

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \sim 10^{-5},$$

а для планковской длины имеем

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar k}{c^3}} \sim 1,6 \cdot 10^{-33} cm.$$

[1]В следующей части книги будет показано, электрический заряд частицы и заряд, характеризующий слабое взаимодействие, определяются суммой или разностью дополнительных параметров $i_0 \pm k_0$, однако это не сказывается на проводимой здесь оценке величин.

Подставляя в (8.4.5) значение массы электрона, получаем оценку

$$\varepsilon \sim 10^{-23}, \tag{8.4.6}$$

т.е. действительно этот фактор чрезвычайно мал.

5. Собирая вместе выражения (8.4.4) и (8.4.5), находим оценку для показателя экспоненты

$$\varepsilon i_0 = \frac{e}{2\sqrt{\hbar c}}, \tag{8.4.7}$$

т.е. он порядка корня квадратного из постоянной тонкой структуры $e^2/\hbar c \sim 1/137$. Отсюда находим, что согласно (8.2.1) вырожденные параметры стремятся к следующему значению

$$i^3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon i_0} \sim 10^{12}. \tag{8.4.8}$$

6. Рассмотрим другую нормировку невырожденных параметров, когда их квадратичная комбинация определяет компоненты 4-мерного импульса. В этом случае, согласно (8.2.6), параметры с индексом 0 должны иметь размерность импульса, т.е. следует положить

$$i_0 \sim u^5 mc = \frac{ec}{2\sqrt{k}}. \tag{8.4.9}$$

Теперь малый фактор оказывается размерным, и его следует взять в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{mc} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{k}{\hbar c}} = \frac{1}{m_{Pl} c}. \tag{8.4.10}$$

Безразмерный показатель экспоненты имеет прежнее значение, а в парном отношении $u_{i\alpha}$ (размерности импульса), согласно (8.2.2), возникает некое затравочное значение

$$1/\tilde{\varepsilon} = m_{Pl} c \sim 10^5 ../. \tag{8.4.11}$$

æ

Глава 9

Бинарная система комплексных отношений ранга (5,5)

Обсудим основные черты БСКО ранга (5,5), с одной стороны, распространяя (обобщая) на ранг (5,5) общие свойства БСКО, уже изложенные на примерах рангов (3,3) и (4,4), и, с другой стороны, обращая внимание на черты теории отношений, присущие именно рангу (5,5), или проявляющиеся, начиная с ранга (5,5).

9.1 Закон и ключевые группы преобразований БСКО ранга (5,5)

1. Законы и парные отношения для невырожденных БСКО произвольного ранга (r, r) записаны в (1.2.1) и (1.2.2). В частности, для ранга (5,5) закон записывается для пяти пар элементов и имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\delta} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\delta} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\delta} & u_{j\lambda} \\ u_{s\alpha} & u_{s\beta} & u_{s\gamma} & u_{s\delta} & u_{s\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\delta} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{9.1.1}$$

где парные отношения записываются через четверки параметров элементов следующим образом

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i^4\alpha^4. \tag{9.1.2}$$

Параметры опять можно трактовать через отношения к соответствующим элементам базиса. Последний определяется четверкой пар сопряженных элементов и характеризуется фундаментальным 4x4-отношением.

2. В теории БСКО произвольного ранга (r, r) фундаментальное $(r-1) \times (r-1)$-отношение записывается в форме

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \cdots & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \cdots & u_{k\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & \cdots & u_{l\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & \dots & l^1 \\ i^2 & k^2 & \dots & l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^{r-1} & k^{r-1} & \dots & l^{r-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \dots & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \dots & \lambda^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{r-1} & \beta^{r-1} & \dots & \lambda^{r-1} \end{vmatrix}, \qquad (9.1.3)$$

т.е. как и в (2.4.1), (5.3.1) правая часть распадается на произведение определителей, каждый из которых строится из параметров одного сорта. В частности, для БСКО ранга (5,5) фундаментальное 4x4-отношение имеет вид

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \lambda^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \lambda^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \lambda^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \lambda^4 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\;k\;j\;s \end{bmatrix}. \qquad (9.1.4)$$

3. В теории БСКО ранга (5,5) из группы линейных преобразований параметров

$$i'^s = C^s_{\cdot r} i^r; \quad \alpha'^s = C^{*s}_{\cdot r} \alpha^r, \qquad (9.1.5)$$

где $s, r = 1, 2, 3, 4$, и коэффициенты преобразований в двух пространствах по-прежнему комплексно сопряжены, можно выделить несколько ключевых видов преобразований. Назовем их:

а) Преобразования, не выводящие за пределы собственной системы отношений (сохраняющие парные отношения (9.1.2)). Они характеризуются 16 условиями на параметры типа (2.3.5) или (5.2.3) - (5.2.4) и составляют *16-параметрическую унитарную группу* $U(4)$.

б) *Группа унимодулярных преобразований* $SL(4,C)$, оставляющая инвариантным каждый из определителей справа в (9.1.3). Она характеризуется условием на коэффициенты

$$\begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & C_4^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & C_4^3 \\ C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 \end{vmatrix} = 1, \qquad (9.1.6)$$

соответствующим (2.4.4) и (5.3.4) в теориях БСКО меньших рангов. Такие преобразования определяются 30 вещественными параметрами.

в) *Группа унитарных унимодулярных преобразований* $SU(4)$ характеризуется 15 параметрами. Коэффициенты ее преобразований удовлетворяют как условию (9.1.6), так и упомянутым выше условиям для группы $U(4)$.

г) Важное место в теории БСКО ранга (5,5) занимают *обобщенные бусты*, т.е. семейство преобразований, дополняющих группу $SU(4)$ до группы $SL(4,C)$. Это 15-параметрическое семейство не составляет группу; оно описывает переходы между обобщенными системами отношений.

В рамках теории БСКО ранга (5,5) имеются и другие важные подгруппы преобразований, которые будут рассмотрены ниже.

4. В каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ по ранее установленным правилам можно ввести 4-компонентные спиноры [59, 60]. Они определяются как векторы в 4-мерных комплексных пространствах, для которых заданы антисимметричные инвариантные относительно группы $SL(4,C)$ (четверные) скалярные произведения:

$$(\vec{i},\vec{k},\vec{j},\vec{l}) = \varepsilon_{srpq} i^s k^r j^p l^q; \quad (\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\lambda}) = \varepsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{p}\dot{q}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} \gamma^{\dot{p}} \lambda^{\dot{q}}. \qquad (9.1.7)$$

Еще раз подчеркнем, что это определение спиноров дано в рамках использованного в этой книге канала и отличается от традиционного определения 4-компонентных спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел.

9.2 6-Мерные пространства состояний

1. В теории БСКО ранга (5,5) имеется новый принципиально важный момент в описании состояний (частиц) отдельно в каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Он связан со значением ранга 4 (с четным характером) каждого из определителей справа в (9.1.4).

Это позволяет расписать эти определители по парам столбцов. Выберем определитель в множестве $\mathcal{M}$ и распишем его по первым двум столбцам

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} = \varepsilon_{srpq} i^s k^r j^p l^q =$$

$$= A^{12}(i,k)A^{34}(j,l) + A^{14}(i,k)A^{23}(j,l) + A^{13}(i,k)A^{42}(j,l) +$$
$$+A^{23}(i,k)A^{14}(j,l) + A^{42}(i,k)A^{13}(j,l) + A^{34}(i,k)A^{12}(j,l), \quad (9.2.1)$$

где использованы обозначения:

$$A^{rs}(i,k) = \begin{vmatrix} i^r & k^r \\ i^s & k^s \end{vmatrix}; \quad A^{rs}(j,l) = \begin{vmatrix} j^r & l^r \\ j^s & l^s \end{vmatrix}. \quad (9.2.2)$$

Величины A^{rs} являются компонентами антисимметричных спинтензоров, построенных на парах элементов одного множества $\mathcal{M}$, т.е. при преобразованиях (9.1.5) изменяются по закону

$$A'^{sr} = C^s_p C^r_q A^{pq}. \quad (9.2.3)$$

Их можно также понимать как компоненты двух бивекторов в 6-мерном комплексном пространстве.

2. В самом общем случае 6 комплексных компонент бивектора $A^{rs}(i,k)$ можно переобозначить через 6 комплексных величин V^1, V^2, $\cdots$, V^6 посредством формул:

$$\begin{aligned} A^{12}(i,k) &= V^1 + iV^2; & A^{34}(i,k) &= V^1 - iV^2; \\ A^{23}(i,k) &= V^3 + iV^4; & A^{14}(i,k) &= V^3 - iV^4; \\ A^{13}(i,k) &= V^5 + iV^6; & A^{42}(i,k) &= V^5 - iV^6, \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

тогда матрица из компонент спинтензора A^{sr} имеет вид

$$(A^{rs}) = \begin{pmatrix} 0 & V^1 + iV^2 & V^5 + iV^6 & V^3 - iV^4 \\ -V^1 - iV^2 & 0 & V^3 + iV^4 & -V^5 + iV^6 \\ -V^5 - iV^6 & -V^3 - iV^4 & 0 & V^1 - iV^2 \\ -V^3 + iV^4 & V^5 - iV^6 & -V^1 + iV^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{a=1}^{6} \Gamma_a V^a, \quad (9.2.5)$$

где Γ_a – шесть 4-рядных матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{9.2.6}$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что из матриц Γ_a можно построить 8-рядные матрицы $\tilde{\gamma}_a$, которые составляют набор образующих алгебры Клиффорда $C(6)$:

$$\tilde{\gamma}_1 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_2 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_2 \\ -\Gamma_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\gamma}_3 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_3 \\ \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_4 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_4 \\ -\Gamma_4 & 0 \end{pmatrix}; \tag{9.2.7}$$

$$\tilde{\gamma}_5 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_5 \\ \Gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\gamma}_6 = i\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_6 \\ -\Gamma_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\tilde{\gamma}_a\tilde{\gamma}_b + \tilde{\gamma}_b\tilde{\gamma}_a = 2G_{ab}, \tag{9.2.8}$$

где G_{ab} метрический тензор 6-мерного многообразия с сигнатурой $(+ + + + + +)$.

3. Выражения, аналогичные (9.2.4), можно записать для компонент $A^{rs}(j,l)$, только через другой набор из 6 комплексных величин: $W^1, W^2, \cdots, W^6$. Легко видеть, что в новых обозначениях квадратичная по A^{rs} форма (9.2.1) принимает диагональный вид

$$\varepsilon_{rspq} i^r k^s j^p l^q = 2\sum_{a=1}^{6} V^a W^a. \tag{9.2.9}$$

Очевидно, величины V^a и W^a можно выразить обратно через компоненты спинтензора, например:

$$\begin{array}{ll} V^1=\frac{1}{2}\left(A^{12}(i,k)+A^{34}(i,k)\right); & V^2=-\frac{i}{2}\left(A^{12}(i,k)-A^{34}(i,k)\right); \\ V^3=\frac{1}{2}\left(A^{23}(i,k)+A^{14}(i,k)\right); & V^4=-\frac{i}{2}\left(A^{23}(i,k)-A^{14}(i,k)\right); \\ V^5=\frac{1}{2}\left(A^{13}(i,k)+A^{42}(i,k)\right); & V^6=-\frac{i}{2}\left(A^{13}(i,k)-A^{42}(i,k)\right). \end{array} \tag{9.2.10}$$

Из (9.2.3) легко получить векторный закон преобразования

$$V'^a=\Lambda^a_{.b}V^b, \tag{9.2.11}$$

где в общем случае коэффициенты преобразований $\Lambda^a_{.b}$ комплексные.

При преобразованиях параметров из группы $SL(4,C)$ квадратичная форма (9.2.9) остается инвариантной, следовательно, преобразования (9.2.11) образуют группу $O(6,C)$.

4. Легко убедиться, что при более узких преобразованиях параметров из группы $SU(4)$ коэффициенты $\Lambda^a_{.b}$ в (9.2.11) становятся вещественными и образуют группу $SO(6)$, характеризующуяся, как и группа $SU(4)$, 15 параметрами. Таким образом, унитарные преобразования из группы $SU(4)$ индуцируют вещественные ортогональные повороты в 6-мерном евклидовом пространстве. Это утверждение соответствует хорошо известному в теории представлений групп факту двулистного накрытия $SU(4)\to SO(6)$.

Возвращаясь к выражениям (9.2.4) и (9.2.10), видим, что в общем случае величины V^a и W^a не обязаны быть вещественными. Тем не менее, если они в какой-то системе отношений оказались вещественными, то $SU(4)$-преобразования, не выводящие за пределы используемой системы отношений, оставляют их компоненты вещественными.

Поскольку компоненты 6-мерного вектора V^a в (9.2.10) строятся из параметров элементов квадратично, а из двух четверок параметров элементов i и k можно образовать 8- компонентные столбцы, то легко понять, что данные рассуждения приводят к общепринятому каналу введения 8-компонентных спиноров в рамках алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел (см. [26, 54]).

5. Еще раз подчеркнем, что 6-мерное евклидово пространство было введено в рамках одного множества элементов $\mathcal{M}$, т.е. в рамках унарной системы отношений. То же самое можно сделать в рамках второго множества $\mathcal{N}$. Если параметры элементов в двух множествах комплексно сопряжены, то с учетом (9.2.9)

фундаментальное 4x4-отношение (9.1.4) может быть представлено в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\;k\;j\;l \end{bmatrix} = 4G_{ab}G_{cd}(V^aV^c)(W^bW^d). \tag{9.2.12}$$

9.3 Группа преобразований $SO(2,4)$

1. Согласно принятой в книге методике далее следовало бы расмотреть преобразования, дополняющие группу $SU(4)$ до полной группы $SL(4,C)$. Это семейство 15-параметрических преобразований не образует группу и представляет собой дальнейшее обобщение бустов. Такие преобразования описывают переходы между различными обобщенными системами отношений в рамках теории БСКО ранга (5,5). Однако мы поступим иначе: рассмотрим (также 15-параметрическую) подгруппу группы $SL(4,C)$, включающую в себя как часть преобразований из $SU(4)$, так и часть из семейства обобщенных бустов.

Чтобы это сделать, формально переопределим в (9.2.4) выражения комплексных компонент $A^{sr}(i,k)$ через комплексные же величины $\tilde V^l$, изменив знак в $A^{42}(i,k)$. В итоге вместо (9.2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} A^{12}(i,k) &= \tilde V^1 + i\tilde V^2; & A^{34}(i,k) &= \tilde V^1 - i\tilde V^2; \\ A^{23}(i,k) &= \tilde V^3 + i\tilde V^4; & A^{14}(i,k) &= \tilde V^3 - i\tilde V^4; \\ A^{13}(i,k) &= \tilde V^5 + i\tilde V^6; & A^{42}(i,k) &= -\tilde V^5 + i\tilde V^6. \end{aligned} \tag{9.3.1}$$

Тогда вместо комплексной квадратичной формы (9.2.8) с сигнатурой $(+\,+\,+\,+\,+\,+)$ будем иметь квадратичную форму с сигнатурой $(+\,+\,+\,+\,-\,-)$. Теперь компоненты комплексных векторов $\tilde V^l$ записываются через $A^{sr}(i,k)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde V^1 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{12}(i,k) + A^{34}(i,k)\right); & \tilde V^2 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{12}(i,k) - A^{34}(i,k)\right); \\ \tilde V^3 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{23}(i,k) + A^{14}(i,k)\right); & \tilde V^4 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{23}(i,k) - A^{14}(i,k)\right); \\ \tilde V^5 &= \tfrac{1}{2}\left(A^{13}(i,k) - A^{42}(i,k)\right); & \tilde V^6 &= -\tfrac{i}{2}\left(A^{13}(i,k) + A^{42}(i,k)\right). \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

2. Зная закон преобразований (9.2.3), из (9.3.3) легко найти коэффициенты $\tilde\Lambda^l_{\cdot q}$ в векторном законе

$$\tilde V^l = \tilde\Lambda^l_{\cdot q}\tilde V^q. \tag{9.3.3}$$

Ограничимся такими преобразованиями из группы $SL(4,C)$, которые характеризуются вещественными коэффициентами $\tilde{\Lambda}^{l}_{\cdot q}$. Они образуют *15-параметрическую группу* $SU(2,2)$. Можно сказать, что эти преобразования представляют собой другое, по сравнению с подгруппой $SU(4)$, сечение группы $SL(4,C)$.

Подчеркнем, что компоненты $\tilde{V}^l$, так же, как и $\tilde{W}^l$, в общем случае являются комплексными. Наложим на элементы, определяющие эти векторы, условия, потребовав, чтобы компоненты $\tilde{V}^l$ в (9.3.3) были вещественными. В этом случае комплексная квадратичная форма вида (9.2.8) превращается в вещественную квадратичную форму

$$\varepsilon_{rspq} i^r k^s j^p l^q = 2\sum_{a=1}^{6} \tilde{V}^a \tilde{W}^a, \tag{9.3.4}$$

с сигнатурой $(++++--)$. При этом имеет место закон инерции (сохранения сигнатуры) этой формы. Таким образом, преобразования $SU(2,2)$ генерируют 15-параметрическую группу преобразований $SO(2,4)$ в вещественном 6-мерном многообразии [22]. Очевидно, что описанным способом можно образовать три таких сечения группы $SL(4,C)$.

3. Введем собирательные обозначения B^M для векторов типа $\tilde{V}^M$, $\tilde{W}^M$ и рассмотрим ортогональные преобразования в таком 6-мерном (плоском) многообразии:

$$B'^M = L^M_{\cdot N} B^N, \tag{9.3.5}$$

где $M, N = 0,1,2,3,4,5$. Здесь и в дальнейшем индексами 0 и 4 будем обозначать временно-подобные компоненты, а остальными - - пространственно-подобные. Вещественные коэффициенты $L^M_{\cdot N}$ соответствуют комплексным коэффициентам $\tilde{\Lambda}^l_{\cdot q}$ в (9.3.3). Очевидно, они образуют 6х6-матрицу. Группу таких преобразований можно разложить на 4 подгруппы [22].

а) Подгруппа 4-мерных преобразований характеризуется матрицей $L^M_{\cdot N}$ вида

$$(L^M_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^\mu_{\cdot\nu} & L^\mu_{\cdot 4} & L^\mu_{\cdot 5} \\ \hline L^4_{\cdot\nu} & L^4_{\cdot 4} & L^4_{\cdot 5} \\ \hline L^5_{\cdot\nu} & L^5_{\cdot 4} & L^5_{\cdot 5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} L^\mu_{\cdot\nu} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{9.3.6}$$

где подматрица 4-мерных преобразований $L^{\mu}_{\cdot\nu}$ определяется 6 параметрами. Очевидно, что при этих преобразованиях [1]

$$\begin{aligned} B'^{\mu} &= L^{\mu}_{\cdot\nu}B^{\nu}; && (9.3.7)\\ B'^{4} &= B^{4}; && (9.3.8)\\ B'^{5} &= B^{5}. && (9.3.9) \end{aligned}$$

б) 4-Параметрическая подгруппа преобразований вида

$$(L^{M}_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^{\mu}_{\cdot 4} & L^{\mu}_{\cdot 5} \\ \hline L^{4}_{\cdot\nu} & L^{4}_{\cdot 4} & L^{4}_{\cdot 5} \\ \hline L^{5}_{\cdot\nu} & L^{5}_{\cdot 4} & L^{5}_{\cdot 5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & a^{\mu} & a^{\mu} \\ \hline -a_{\nu} & 1-a^2/2 & -a^2/2 \\ \hline a_{\nu} & a^2/2 & 1+a^2/2 \end{array}\right) \tag{9.3.10}$$

характеризуется 4 вещественными параметрами a_{μ}. Здесь использовано обозначение

$$a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2.$$

Легко видеть, что определитель подматрицы

$$\begin{vmatrix} L^{4}_{\cdot 4} & L^{4}_{\cdot 5} \\ L^{5}_{\cdot 4} & L^{5}_{\cdot 5} \end{vmatrix} = 1. \tag{9.3.11}$$

При таких преобразованиях имеем

$$\begin{aligned} B'^{\mu} &= B^{\mu} + a^{\mu}B^4 + a^{\mu}B^5; && (9.3.12)\\ B'^{4} &= -a_{\nu}B^{\nu} + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)B^4 - \frac{a^2}{2}B^5; && (9.3.13)\\ B'^{5} &= a_{\nu}B^{\nu} + \frac{a^2}{2}B^4 + \left(1 + \frac{a^2}{2}\right)B^5. && (9.3.14) \end{aligned}$$

Для 4-мерных компонент B^{μ} это означает трансляцию, зависящую от дополнительных компонент B^4 и B^5. [2]

---

[1] Эти преобразования можно сопоставить с преобразованиями (7.2.3) – (7.2.4) 4-мерных компонент P^{μ} и P^{8}, порождаемых группой $SL(2,C)$ в рамках теории БСКО ранга(4,4).

[2] Эти преобразования можно уподобить суперсимметричным преобразованиям (7.6.7) и (7.6.8) в рамках теории БСКО ранга (4,4).

в) 4-Параметрическая подгруппа преобразований вида

$$(L^{M}_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & L^{\mu}_{\cdot 4} & L^{\mu}_{\cdot 5} \\ \hline L^{4}_{\cdot \nu} & L^{4}_{\cdot 4} & L^{4}_{\cdot 5} \\ \hline L^{5}_{\cdot \nu} & L^{5}_{\cdot 4} & L^{5}_{\cdot 5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & c^{\mu} & -c^{\mu} \\ \hline -c^{\nu} & 1-c^2/2 & c^2/2 \\ \hline -c^{\nu} & -c^2/2 & 1+c^2/2 \end{array}\right) \tag{9.3.15}$$

характеризуется 4 вещественными параметрами c^{μ}. Здесь использовано обозначение

$$c^2 = (c^0)^2 - (c^1)^2 - (c^2)^2 - (c^3)^2.$$

При этих преобразованиях компоненты 6-мерного вектора изменяются следующим образом

$$B'^{\mu} = B^{\mu} + c^{\mu}B^4 + -c^{\mu}B^5; \tag{9.3.16}$$

$$B'^{4} = -c_{\nu}B^{\nu} + \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)B^4 + \frac{c^2}{2}B^5; \tag{9.3.17}$$

$$B'^{5} = -c_{\nu}B^{\nu} - \frac{c^2}{2}B^4 + \left(1 + \frac{c^2}{2}\right)B^5, \tag{9.3.18}$$

аналогичным (9.3.12) – (9.3.14). Разница состоит в знаках при векторных параметрах.

г) 1-Параметрическая подгруппа, характеризуемая матрицей

$$(L^{M}_{\cdot N}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \hline 0 & \varphi_2 & \varphi_1 \end{array}\right), \tag{9.3.19}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1+\rho^2}{2\rho}; \quad \varphi_2 = \frac{1-\rho^2}{2\rho},$$

так что $\varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 1$. В качестве независимого параметра выступает величина ρ. При этих преобразованиях имеем

$$B'^{\mu} = B^{\mu}; \tag{9.3.20}$$

$$B'^{4} = \frac{1+\rho^2}{2\rho}B^4 + \frac{1-\rho^2}{2\rho}B^5; \tag{9.3.21}$$

$$B'^{5} = \frac{1-\rho^2}{2\rho}B^4 + \frac{1+\rho^2}{2\rho}B^5. \tag{9.3.22}$$

4. Эти четыре типа преобразований интересны тем, что от них можно перейти к 4 видам известных в 4-мерной теории преобразованиям, на первый взгляд, имеющих совершенно различную природу. Чтобы это показать, перейдем к новой системе компонент 6-мерного вектора. Пусть

$$\tilde{B}^{\mu} = \frac{1}{B^4+B^5} B^{\mu}; \tag{9.3.23}$$

$$\tilde{B}^{4} = -B^4+B^5; \tag{9.3.24}$$

$$\tilde{B}^{5} = B^4+B^5. \tag{9.3.25}$$

Отдельно рассмотрим преобразования новых компонент $\tilde{B}^M$ при охарактеризованных выше подгруппах преобразований.

а) При преобразованиях (9.3.6) – (9.3.7) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = L^{\mu}_{\cdot\nu} \tilde{B}^{\nu}; \tag{9.3.26}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4}; \tag{9.3.27}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5}. \tag{9.3.28}$$

Это обычный закон для 4-мерных преобразований Лоренца.

б) При преобразованиях (9.3.10) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \tilde{B}^{\mu} + a^{\mu}; \tag{9.3.29}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4} + 2a_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + a^2\tilde{B}^5; \tag{9.3.30}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5}. \tag{9.3.31}$$

Для 4-мерных компонент $\tilde{B}^{\mu}$ это группа трансляций с параметрами a^{μ}. Компонента $\tilde{B}^5$ остается инвариантной.

в) При преобразованиях (9.3.15) – (9.3.18) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \frac{\tilde{B}^{\mu} - c^{\mu}\tilde{B}^4/\tilde{B}^5}{1 - 2c_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + c^2\tilde{B}^4/\tilde{B}^5}; \tag{9.3.32}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \tilde{B}^{4}; \tag{9.3.33}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \tilde{B}^{5} - 2c_{\nu}\tilde{B}^{\nu} + c^2\tilde{B}^4. \tag{9.3.34}$$

Ограничимся случаем 6-мерного изотропного вектора B^M, такого что

$$G_{MN}B^M B^N = g_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu} + (B^4)^2 - (B^5)^2 = 0. \tag{9.3.35}$$

Переходя к новым компонентам (9.3.23) – (9.3.25), отсюда имеем

$$g_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu}\tilde{B}^{\nu} = \frac{\tilde{B}^4}{\tilde{B}^5}. \tag{9.3.36}$$

Подставляя это соотношение в (9.3.32), имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \frac{\tilde{B}^{\mu} - c^{\mu}(g_{\alpha\beta}\tilde{B}^{\alpha}\tilde{B}^{\beta})}{1 - 2c_{\lambda}\tilde{B}^{\lambda} + c^2(g_{\lambda\sigma}\tilde{B}^{\lambda}\tilde{B}^{\sigma})}. \tag{9.3.37}$$

Такие преобразования называются *специальными конформными преобразованиями (СКП)*. Они характеризуются четырьмя параметрами c^{μ}.

г) При преобразованиях (9.3.19) имеем

$$\tilde{B}'^{\mu} = \rho\tilde{B}^{\mu}; \tag{9.3.38}$$

$$\tilde{B}'^{4} = \rho\tilde{B}^{4}; \tag{9.3.39}$$

$$\tilde{B}'^{5} = \frac{1}{\rho}\tilde{B}^{5}. \tag{9.3.40}$$

Для 4-мерных компонент $\tilde{B}^{\mu}$ эти преобразования называются *дилатацией* или конформными преобразованиями (в узком смысле понимания этого термина).

Таким образом, четыре типа преобразований (9.3.26), (9.3.29), (9.3.32), (9.3.37) 4-мерных компонент вектора $\tilde{B}^{\mu}$ можно описать 15-параметрическими преобразованиями (9.3.5) типа Лоренца в 6-мерном многообразии с сигнатурой $(+---+-)$. [3]

9.4 16-Мерные векторы и обобщенная метрика

1.Вернемся к ранее изложенной методике развития теории БСКО. Из 4-компонентных спиноров и коспиноров формальным

[3] Охарактеризованные здесь четыре типа преобразований в 6-мерном многообразии в некотором смысле можно уподобить преобразованиям, индуцированным четырьмя подгруппами группы $SL(3, C)$ в 9-мерном многообразии. При этом 4-мерные преобразования напрямую соответствуют друг другу в этих двух случаях, преобразования трансляций и СКП (в совокупности 8-параметрические) соответствуют преобразованиям (7.5.1) и (7.6.1) в теории БСКО ранга (4,4), а дилатации в 6-мерии (9.3.19) можно поставить в соответствие вещественной части конформных преобразований (7.7.2) в теории БСКО ранга (4,4).

образом можно задать спинтензоры произвольного ранга. Опять рассмотрим смешанные спинтензоры 2-го ранга

$$B^{s\dot{r}} = c_1 i^s \alpha^{\dot{r}} + c_3 k^s \beta^{\dot{r}} + c_3 j^s \gamma^{\dot{r}} + c_4 l^s \lambda^{\dot{r}}, \tag{9.4.1}$$

которые играли ключевую роль в теории БСКО рангов (3,3) и (4,4). Выделим случаи, когда коэффициенты c_μ принимают значения: $+1$, -1, 0. Из компонент $B^{s\dot{r}}$ построим матрицу. Когда в (9.4.1) пары элементов характеризуются комплексно сопряженными параметрами, эта матрица представляется в виде

$$(B^{s\dot{r}}) = \sum_{l=1}^{16} \kappa_l B^l, \tag{9.4.2}$$

где $B^0, B^1, \cdots, B^{15}$ – 16 вещественных чисел, κ_l – шестнадцать 4-рядных матриц, обобщающих матрицы Паули и матрицы Гелл-Манна (5.4.3). Запишем их в следующем представлении

$$\kappa_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\kappa_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \kappa_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.4.3}$$

Эти матрицы не образуют алгебру Клиффорда.

2. Из матричного соотношения (9.4.2) легко выразить компоненты B^a через матричные элементы $B^{s\dot{r}}$:

$$\begin{aligned}
&B^0 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}); && B^1 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}); \\
&B^2 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}); && B^3 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}); \\
&B^4 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{3}} + B^{3\dot{1}}); && B^5 = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{3}} - B^{3\dot{1}}); \\
&B^6 = \tfrac{1}{2}(B^{2\dot{3}} + B^{3\dot{2}}); && B^7 = \tfrac{i}{2}(B^{2\dot{3}} - B^{3\dot{2}}); \\
&B^8 = B^{3\dot{3}}; && B^9 = \tfrac{1}{2}(B^{1\dot{4}} + B^{4\dot{1}}); \\
&B^{10} = \tfrac{i}{2}(B^{1\dot{4}} - B^{4\dot{1}}); && B^{11} = \tfrac{1}{2}(B^{2\dot{4}} + B^{4\dot{2}}); \\
&B^{12} = \tfrac{i}{2}(B^{2\dot{4}} - B^{4\dot{2}}); && B^{13} = \tfrac{1}{2}(B^{3\dot{4}} + B^{4\dot{3}}); \\
&B^{14} = \tfrac{i}{2}(B^{3\dot{4}} - B^{4\dot{3}}); && B^{15} = B^{4\dot{4}}.
\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

Можно показать, что при $SL(4, C)$-преобразованиях (9.1.5) величины (9.3.4) преобразуются как компоненты вектора.

3. Записав определитель из элементов матрицы (9.4.2) через компоненты вектора, получаем форму четвертой степени [60]

$$\begin{aligned}
&||B^{s\dot{r}}|| = B_{15}[B_8(B_0^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2)+ \\
&+2B_1(B_4B_6 + B_5B_7) - B_0(B_4^2 + B_5^2 + B_6^2 + B_7^2)+ \\
&2B_2(B_5B_6 - B_4B_7) + B_3(B_4^2 + B_5^2 - B_6^2 - B_7^2)]+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+B_0[2B_4(B_9B_{13} + B_{10}B_{14}) - 2B_5(B_9B_{14} - B_{10}B_{13})+ \\
&+2B_6(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14}) - 2B_7(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13})- \\
&-B_8(B_9^2 + B_{10}^2 + B_{11}^2 + B_{12}^2)]-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-B_1[2B_4(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14}) - 2B_5(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13})+ \\
&+2B_6(B_9B_{13} + B_{10}B_{14}) - 2B_7(B_9B_{14} - B_{10}B_{13})+ \\
&-B_8(B_9B_{11} + B_{10}B_{12})]-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-B_2[2B_4(B_{11}B_{14} - B_{12}B_{13}) + 2B_5(B_{11}B_{13} + B_{12}B_{14})- \\
&-2B_6(B_9B_{14} - B_{10}B_{13}) - 2B_7(B_9B_{13} + B_{10}B_{14})- \\
&-B_8(B_{10}B_{11} - B_9B_{12})]-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-B_3[2B_4(B_9B_{13}+B_{10}B_{14})-2B_5(B_9B_{14}-B_{10}B_{13})-\\
&-2B_6(B_{11}B_{13}+B_{12}B_{14})-2B_7(B_{11}B_{14}-B_{12}B_{13})-\\
&-B_8(B_9^2+B_{10}^2-B_{11}^2-B_{12}^2)]-\\
&\qquad -(B_4B_6+B_5B_7)(B_9B_{11}+B_{10}B_{12})-\\
&\qquad -(B_4B_7-B_5B_6)(B_9B_{12}-B_{10}B_{11})-\\
&-\frac{1}{2}(B_4^2+B_5^2-B_6^2-B_7^2)(B_9^2+B_{10}^2-B_{11}^2-B_{12}^2)+\\
&+\frac{1}{2}(B_4^2+B_5^2+B_6^2+B_7^2)(B_9^2+B_{10}^2+B_{11}^2+B_{12}^2)-\\
&\qquad -(B_0^2-B_1^2-B_2^2-B_3^2)(B_{13}^2+B_{14}^2)=\\
&\qquad\qquad =G^{(16)}_{ABCD}B^AB^BB^CB^D.
\end{aligned}
\tag{9.4.5}
$$

(Здесь для удобства все индексы вектора записаны снизу.) Эта формула обобщает квадратичную форму (2.6.4) в теории БСКО ранга (3,3) или кубичную форму (5.5.2) в теории БСКО ранга (4,4).

Аналогично случаю БСКО ранга (4,4) можно говорить о неизотропных (в общем случае) векторах, построенных на четырех парах сопряженных элементов (в формуле (9.4.1) все c_μ отличны от нуля), об единожды изотропных векторах, построенных на трех парах элементов, о дважды изотропных векторах, построенных на двух парах элементов, и о трижды изотропных векторах. Для всех изотропных векторов

$$
G^{(16)}_{ABCD}B^AB^BB^CB^D=0,
\tag{9.4.6}
$$

но для дважды и трижды изотропных векторов равны нулю и другие инварианты. Заметим, что произведенные в предыдущих разделах расщепления четырех пар элементов на две части могут оказаться полезными при рассмотрении дважды изотропных частиц. Согласно такому подходу фундаментальное 4x4-отношение в форме (9.2.11) можно понимать как парное отношение между двумя дважды изотропными частицами.

9.5 К теории четырехточечной геометрии

1. Назовем *гиперпространством-временем* четырехточечную унарную конструкцию, выводимую из БСКО ранга (5,5) по

такому же рецепту, как в разделе 2.8 определялся двухточечный прообраз 4-мерного пространства-времени из БСКО ранга (3,3), или как строилась трехточечная геометрия из БСКО ранга (4,4) в разделах 5.6 - 5.8. Под "точками" по-прежнему будем понимать новые элементы, образованные сшивкой пар сопряженных элементов из двух множеств. Поставим в соответствие элементам БСКО ранга (5,5) элементы унарной четырехточечной геометрии согласно рисунку 9.1. Вместо квадрата парных отношений

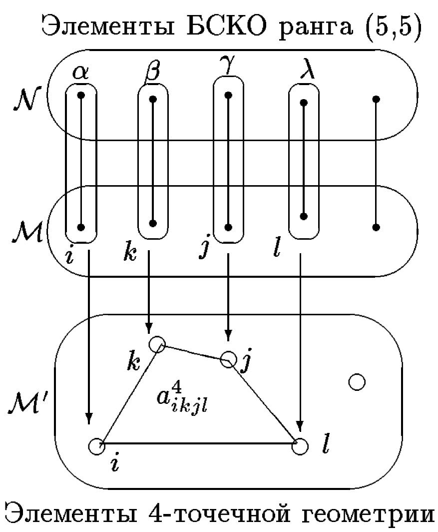


Рис. 9.1: Переход от БСКО ранга (5,5) к унарной четырехточечной геометрии

(2.6.10) в пространстве Минковского или куба отношений (5.6.1) в трехточечной геометрии определим четверные отношения через фундаментальное 4x4- отношение:

$$a^4_{(ikjl)} = \begin{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\lambda \\ i\ k\ j\ l \end{bmatrix} \equiv B^4(ikjl). \qquad (9.5.1)$$

2. Определим *скалярное произведение четырех 16-мерных векторов*, построенных на четырех (в общем случае различных) восьмерках сопряженных элементов БСКО ранга (5,5), через введенные выше инварианты. Это скалярное произведение можно записать в следующих формах:

$$\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(mnrs), \vec{B}(qtvw), \vec{B}(fhdg)\right) \equiv$$

$$\equiv G_{ABCD} B^A_{(4)}(ikjl) B^B_{(4)}(mnrs) B^C_{(4)}(qtvw) B^D_{(4)}(fhdg) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{24} \varepsilon_{abce} \varepsilon_{\dot{x}\dot{y}\dot{z}\dot{u}} B^{a\dot{x}}(ikjl) B^{b\dot{y}}(mnrs) B^{c\dot{z}}(qtvw) B^{e\dot{u}}(fhdg) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{24} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma\lambda \\ ikjl \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu\nu\rho\sigma \\ mnrs \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \kappa\tau\upsilon\omega \\ qtvw \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \phi\chi\delta\eta \\ fhdg \end{bmatrix} \right\}. \qquad (9.5.2)$$

Эти формулы справедливы для векторов B^A с любой внутренней сигнатурой, т.е. для любых знаков комбинаций элементов в определении $B^{s\dot{r}}$ в (8.4.1). Выражение (9.5.2) расписывается через $4^4 = 256$ комбинаций типа (9.5.1). Когда все четыре восьмерки элементов совпадают, формула (9.5.2) переходит в (9.5.1).

3. Построение четырехточечной геометрии, как и в двух предыдущих случаях, следует начать с обобщения на БСКО ранга (5,5) теоремы косинусов. Теперь эта обобщенная теорема косинусов записывается для пяти пар элементов, изображенных на рисунке 9.2. Выделим "точку" i. С ее участием можно образовать

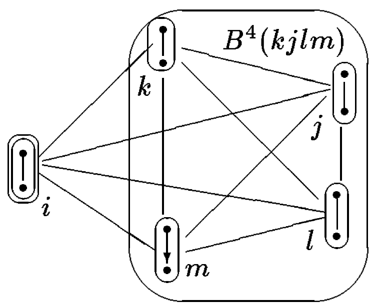


Рис. 9.2: Обобщенная теорема косинусов в четырехточечной геометрии записывается для пяти пар элементов

четыре четырехугольника: $(ikjl)$, $(ikjm)$, $(ijlm)$, $(iklm)$. Сопоставим этим четырехугольникам четыре 16-мерных вектора и запишем согласно (9.5.2) их скалярное произведение. Учитывая, что отдельные инварианты из 256 слагаемых справа в (9.5.2) обращаются в нуль как только две пары элементов совпадают, получим более компактные выражение, представляющее обобщенную теорему косинусов.

Как и в двух предыдущих случаях вид обобщенной теоремы косинусов существенно зависит от внутренней сигнатуры векторов B^A. Запишем вид этих теорем отдельно для всех возможных внутренних сигнатур: для сигнатур $(++++)$ и $(----)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\frac{11}{9}\left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ +\frac{8}{3}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right); \tag{9.5.3}$$

для сигнатур $(-+++)$ и $(+---)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \frac{11}{9}\left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ +\frac{8}{9}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right); \tag{9.5.4}$$

для сигнатур $(+-+-)$ и $(-+-+)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \frac{1}{9}\left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ +\frac{8}{3}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right); \tag{9.5.5}$$

для сигнатур $(--+-)$ и $(++-+)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\frac{1}{9}\left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ +\frac{8}{9}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right); \tag{9.5.6}$$

для сигнатур $(-+--)$, $(---+)$, $(+-++)$ и $(+++-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = -\left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ +\frac{1}{8}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right); \tag{9.5.7}$$

для сигнатур $(++--)$, $(+--+)$, $(--++)$ и $(-++-)$ имеем

$$B^4(kjlm) = \left(B^4(ikjl) + B^4(ikjm) + B^4(ijlm) + B^4(iklm)\right) + \\ -\frac{1}{8}\left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right). \tag{9.5.8}$$

Такое разнообразие возможностей можно трактовать как наличие нескольких типов четырехточечных геометрий, обобщающих общепринятую двухточечную геометрию Минковского.

4. Опираясь на обобщенные теоремы косинусов можно построить *пространственную матрицу* с элементами M_{jklm}. Ее элементы характеризуются соответствующими четырьмя "точками" j, k, l, m при одной общей для всех элементов "точке" i. Далее следует оставить за "точкой" i индивидуальный характер, а остальным четырем придать собирательный смысл. Они могут принимать некоторое число разных значений. Элементы такой матрицы будут иметь вид

$$M_{jklm} = \left(\vec{B}(ikjl), \vec{B}(ikjm), \vec{B}(ijlm), \vec{B}(iklm)\right). \qquad (9.5.9)$$

5. От матрицы (9.5.9) можно перейти к пространственному (четверному) определителю, обобщающему известный определитель Грама. Далее, используя методику и теоремы, изложенные в разделах 5.7 и 5.8, можно найти закон четырехточечной геометрии. Не производя выкладки, отметим лишь несколько характерных черт этой процедуры. Во-первых, пространственный определитель должен строиться на 17 векторах, т.е. он обладает $N = 17^4$ элементами. Во-вторых, наибольший интерес представляет случай выбора *гипердетерминанта*, т.е., напомним, когда все четыре ориентации являются альтернативными. В третьих, в этом случае отсутствуют ограничения, указанные в разделе 5.8.

9.6 Гиперчастицы

1. Выберем вектор B^A с внутренней сигнатурой $(+ + + +)$. Для таких векторов по аналогии с БСКО рангов (3,3) и (4,4) можно построить обобщение импульсного пространства Лобачевского. Назовем такое пространство *гиперпространством Лобачевского*. Его закон записывается для 17 новых элементов в виде равенства нулю пространственного (четверичного) определителя

$$\Phi = \left| B_{\underset{i}{\pm}\underset{k}{\pm}\underset{j}{\pm}\underset{l}{\pm}} \right| = 0, \qquad (9.6.1)$$

где стоящие на главной диагонали элементы обладают свойством

$$a_{iiii} = a_{kkkk} = a_{jjjj} = \cdots = \tilde{M}^4 c^4. \qquad (9.6.2)$$

Это выражение соответствует (3.1.12) в теории БСКО ранга (3,3) и (6.1.4) в теории БСКО ранга (4,4). Оно означает, что

16-мерные компоненты гиперимпульсов удовлетворяют соотношениям:

$$G^{(16)}_{ABCD} P^A_{(4)} P^B_{(4)} P^C_{(4)} P^D_{(4)} = \tilde{M}^4 c^4, \qquad (9.6.3)$$

где $\tilde{M}$ играет роль массы гиперчастицы. Левая часть этой формулы расписывается через компоненты гиперимпульса с помощью выражения вида (9.3.12).

2. Очертим основные положения теории неизотропных *гиперчастиц*, т.е. частиц, описываемых четверками элементов в каждом их множеств $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ БСКО ранга (5,5). Действуя по правилам, примененным в главах 3 и 6, их следует описывать четырьмя комплектами 8-компонентных столбцов вида

$$\begin{array}{ll} \Psi(1) = \begin{pmatrix} i^s \\ (\beta\gamma\lambda)_{\dot r} \end{pmatrix}; & \Psi(2) = \begin{pmatrix} k^s \\ (\gamma\lambda\alpha)_{\dot r} \end{pmatrix}; \\ \Psi(3) = \begin{pmatrix} j^s \\ (\lambda\alpha\beta)_{\dot r} \end{pmatrix}; & \Psi(4) = \begin{pmatrix} l^s \\ (\alpha\beta\gamma)_{\dot r} \end{pmatrix}. \end{array} \qquad (9.6.4)$$

Очевидным образом через сопряженные элементы записывается комплект из четырех 8-компонентных строк: $\Psi^\dagger(1)$, $\Psi^\dagger(2)$, $\Psi^\dagger(3)$, $\Psi^\dagger(4)$.

Выражения в (9.6.4) следует назвать 8-компонентными биспинорами. При преобразованиях параметров (9.1.5) они преобразуются по закону

$$\Psi'(s) = S\Psi(s), \qquad (9.6.5)$$

где $s = 1, 2, 3, 4$, а матрица S приводима к двум блокам из 4x4-матриц, определяемых коэффициентами из (9.1.5),

$$S = \begin{pmatrix} C^s_q & 0 \\ 0 & Q^{*\dot p}_{\dot r} \end{pmatrix}. \qquad (9.6.6)$$

3. Подберем матрицу $\tilde{\Upsilon}_0$ такую, чтобы для любого s выполнялось соотношение

$$\Psi^\dagger(s)\tilde{\Upsilon}_0\Psi = \varepsilon_{srpq} i^s k^r j^p l^q + \varepsilon_{\dot s\dot r\dot p\dot q} \alpha^{\dot s}\beta^{\dot r}\gamma^{\dot p}\lambda^{\dot q} \equiv \overline{\Psi}(s)\Psi(s). \qquad (9.6.7)$$

Далее из 4-рядных матриц из (9.4.3) можно построить такие 8-рядные матрицы Υ^A, чтобы выполнялись соотношения:

$$2(P^A + \tilde{P}^A) = \sum_{s=1}^{4} \tilde{\Psi}(s)\Upsilon^A\Psi(s), \qquad (9.6.8)$$

где компоненты 16-мерного вектора P^A определены формулами (9.4.4), а компоненты $\tilde{\Psi}(s)$ строятся из компонент ковариантного 4-спинора так же, как компоненты P^A образуются из контравариантного 4-спинора. Такие 8-рядные матрицы имеют вид

$$\Upsilon^0 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_0 \\ \kappa_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Upsilon^l = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_l \\ \kappa_l & 0 \end{pmatrix}. \qquad (9.6.9)$$

Расщепить векторы слева в (9.6.8) можно с помощью формул, аналогичных (6.2.11) – (6.2.14).

4. Для определения гиперчастицы опять следует ввести понятие ее "собственной системы отношений" и в ней определить условия на отношения между элементами гиперчастицы. Они обобщают соотношения, введенные в главах 3 и 6, и имеют вид

$$u_{i\alpha} = u_{k\beta} = u_{j\gamma} = u_{l\lambda} = \tilde{M}c; \qquad (9.6.10)$$

$$u_{i\beta} = u_{k\alpha} = \cdots = u_{j\lambda} = u_{l\gamma} = 0, \qquad (9.6.11)$$

где в последнем соотношении имеются ввиду все парные отношения между несопряженными элементами.

Далее аналогично разделам 3.3 и 6.3 приходим к двум возможным знакам определителей для составляющих гиперчастицу элементов из одного множества:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 & l^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 & l^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 & l^3 \\ i^4 & k^4 & j^4 & l^4 \end{vmatrix} = \pm(\tilde{M}c)^2. \qquad (9.6.12)$$

Сопоставим *гиперчастице* знак плюс, а *гиперантичастице* – знак минус. Отсюда можно прийти к формулам, аналогичным (6.3.11) – (6.3.14), записанным для обобщенных частиц в рамках БСКО(4,4). Вид этих соотношений не меняется при преобразованиях из группы $SU(4)$.

5. Гипербусты, дополняющие $SU(4)$ до группы $SL(4, C)$, характеризуются 16 вещественными параметрами

$$(\tilde{C}^s_r) = \begin{pmatrix} b_0 + b_3 & b_1 - ib_2 & b_4 - ib_5 & b_9 - ib_{10} \\ b_1 + ib_2 & b_0 - b_3 & b_6 - ib_7 & b_{11} - ib_{12} \\ b_4 + ib_5 & b_6 + ib_7 & b_8 & b_{13} - ib_{14} \\ b_9 + ib_{10} & b_{11} + ib_{12} & b_{13} + ib_{14} & b_{16} \end{pmatrix}, \qquad (9.6.13)$$

на которые наложено условие

$$\left|\tilde{C}^s_r\right| = 1. \qquad (9.6.14)$$

Таким образом, независимыми являются только 15 параметров. Эти условия обобщают (2.4.10) в теории БСКО(3,3) или (6.4.2) в теории БСКО(4,4).

6. Используя преобразования гипербустов, можно записать в произвольной системе отношений четыре комплекта соотношений между контра- и ковариантными компонентами составляющих биспиноров (9.6.4) типа

$$i^s = K^{s\dot{r}}(\beta\gamma\lambda)_{\dot{r}}; \quad (\beta\gamma\lambda)_{\dot{r}} = \tilde{K}_{\dot{r}s}i^s. \tag{9.6.15}$$

От них несложно перейти к аналогам уравнений Дирака в импульсном гиперпространстве. Напомним, что они представляют собой четыре комплекта из 8-компонентных матричных выражений.

9.7 Редукция БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4)

1. Для физических приложений теории БСКО ранга (5,5) важно ее записать в терминах БСКО ранга (3,3), из которой уже выводятся понятия наблюдаемого 4-мерного классического пространства-времени. Чтобы это сделать следует дважды применить метод редукции БСКО к понятиям БСКО на единицу меньшего ранга.

Заметим, что в современной теоретической физике широко используется аналогичная процедура редукции (унарных) многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы-Клейна к понятиям 4-мерного классического пространства-времени. Эта процедура известна как метод последовательного $1+1+\cdots+n$-расщепления многомерного многообразия. Для случая двукратного расщепления эта процедура называется диадным методом. Этот метод был применен в нашей книге [13] для записи 6-мерной геометрической модели грави- электро-слабых взаимодействий в терминах 4-мерной теории. Он также полезен при записи 5-мерной теории Калуцы-Клейна в терминах наблюдателя, т.е. через спроектированные величины на направление времени и на 3-мерные пространственные сечения используемой системы отсчета.

В случае теории БСКО ранга (5,5) фактически речь идет о разработке аналогичного *бинарного диадного метода*. В этом разделе ограничимся обсуждением первого шага такого метода — переходом от БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (4,4), помня, что второй шаг, т.е. переход от БСКО ранга (4,4) к понятиям БСКО ранга (3,3), уже был обсужден в предыдущей главе.

2. Легко видеть, что из группы преобразований параметров $SL(4, C)$ можно выделить подгруппу $SL(3, C)$ четырьмя способами. Учитывая, что в рамках каждой из таких подгрупп имеются по три вида выделения подгруппы $SL(2, C)$, формально получаем 12 вариантов редукции БСКО ранга (5,5) к понятиям БСКО ранга (3,3). Остановимся на выделении одной из подгрупп $SL(4, C)$ и рассмотрим вопрос о дополнении ее до полной группы $SL(4, C)$. Это производится аналогично изложенному в главе 7. Группа $SL(4, C)$ расщепляется на 4 подгруппы:

$$\left(\; SL(4,C) \; \right) = \left(\; SL(3,C) \; \right) + \left(\; ^{-} \; \right) + \\ + \left(\; ^{-} \; \right) + \left(\; ^{-} \; \right). \tag{9.7.1}$$

Кроме подгруппы $SL(3, C)$ справа указаны гиперкалибровочные преобразования, гиперсуперсимметричные преобразования, гиперконформные преобразования. Каждая из этих подгрупп характеризуется своим числом параметров. Выпишем баланс этих параметров:

$$30 = 16 + 6 + 6 + 2. \tag{9.7.2}$$

Кратко охарактеризуем каждую из этих подгрупп.

3. Выберем вариант подгруппы $SL(3, C)$, преобразования которой задаются матрицами:

$$(C_r^s) = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & 0 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 & 0 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.7.3}$$

Условия на коэффициенты такого преобразования выписаны в (9.1.6), т.е., напомним, они характеризуются 16 независимыми вещественными параметрами.

Из комбинаций с участием параметров с номером 4 можно образовать дополнительные унарные 9-мерные величины. Аналогично изложенному в разделе 7.3 из комбинаций исключительно из параметров с номером 4 строится внутреннее пространство обобщенной частицы.

4. Подгруппа гиперкалибровочных преобразований характеризуется матрицами вида

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C^4_1 & C^4_2 & C^4_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.7.4}$$

где C^4_1, C^4_2, C^4_3 – три комплексных параметра, на котороые не наложено никаких дополнительных условий, т.е. эта группа определяется шестью вещественными параметрами. Очевидно, как и в случае (8.5.1), эта подгруппа является абелевой.

Аналогично изложенному в разделе 8.5 легко показать, что при этих преобразованиях 9-мерные компоненты вектора не меняются, тогда как все дополнительные компоненты изменяются. Эти изменения можно трактовать как обобщенные калибровочные преобразования.

5. Подгруппа гиперсуперсимметричных преобразований определяется матрицами вида

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & C^1_4 \\ 0 & 1 & 0 & C^2_4 \\ 0 & 0 & 1 & C^3_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.7.5}$$

где опять на три комплексных параметра не наложено какихлибо условий, т.е. эта также абелева подгруппа характеризуется шестью вещественными параметрами.

При таких преобразованиях компоненты 9-мерных векторов перемешиваются с дополнительными компонентами аналогично тому, как это происходит при суперсимметричных преобразованиях. Заметим, что эти преобразования вместе с суперсимметричными преобразованиями, описанными в разделе 7.6, могут трактоваться в духе 4-мерной суперсимметричной теории с $N = 2$.

6. Наконец, двухпараметрическая подгруппа гиперконформных преобразований задается матрицами вида

$$(C^s_r) = \begin{pmatrix} C^1_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^3_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^4_4 \end{pmatrix}, \tag{9.7.6}$$

где четыре комплексных параметра связаны следующими условиями:

$$C^1_1 = C^2_2 = C^3_3; \quad C^4_4 = (C^1_1)^{-2}. \tag{9.7.7}$$

Как и в разделе 7.7, из этих преобразований можно выделить фазовые преобразования и изменения модуля.

9.8 К физической интерпретации БСКО более высоких рангов

В бинарной геометрофизике БСКО более высоких рангов могут применяться для описания различных аспектов физической реальности. Назовем некоторые из них.

1. Прежде всего, с помощью БСКО ранга (4,4) и более высоких рангов можно описывать внутренние симметрии элементарных частиц, которые в современных теориях описываются группами SU(4), SU(5) и т.д. О характере такого использования БСКО уже сделано замечание в разделе 6.7.

2. Другое, более естественное применение БСКО более высоких рангов, состоит в описании как внешних, так и внутренних симметрий неких обобщенных частиц. Не исключено, что среди уже наблюдаемых резонансов или тяжелых элементарных частиц имеются такие, которые должны описываться комплексными отношениями более высоких рангов.

3. Наконец, с помощью БСКО, например, ранга (5,5) можно описывать взаимодействия между уже рассмотренными выше элементарными частицами (лептонами и барионами). Для этого можно использовать базовое 5x5-отношение, построенное по рецепту базового 4x4-отношения в (8.1.1). Оно записывается через 5 элементов в начальном и 5 элементов в конечном состояниях. Полагая, что по три элемента в каждом состоянии описывают барион, а оставшиеся две пары соответствуют лептону, приходим к некому алгебраическому выражению, соответствующему лагранжиану взаимодействия лептона и бариона. Аналогичным образом можно построить выражение, которое могло бы описывать взаимодействие двух барионов. Для этого следовало бы записать базовое 6x6-отношение, взятое из теории БСКО ранга (6,6).æ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

I. Завершая книгу, еще раз подчеркнем, что в ней рассматривались только алгебраические аспекты бинарной геометрофизики, составляющие лишь прообраз (первооснову для построения) классического пространства-времени. Исходя из изложенного, можно сделать следующие выводы:

1. В рамках БСКО низших рангов (2,2), (3,3) и (4,4) описывается ряд ключевых свойств элементарных частиц. Понятиями БСКО ранга (3,3) описываются свойства идеализированных лептонов, а с помощью БСКО ранга (4,4) удается ввести ряд понятий из хромодинамики. Примечательно, что это делается без использования уравнений поля или каких-либо сведений из теории классического пространства-времени.

2. Для описания прообраза классического пространства-времени достаточно ограничиться БСКО ранга (4,4). Из нее можно выделить как подсистему БСКО ранга (3,3), а из последней БСКО ранга (2,2). Каждая из них ответственна за свой блок свойств пространства-времени и элементарных частиц.

3. Из изложенного в главах 2 и 3 можно сделать вывод, что 4- мерность и сигнатура $(+ - - -)$ классического пространства-времени обусловлены БСКО ранга (3,3). Таким образом, данный подход претендует на решение проблемы обоснования наблюдаемой размерности пространства (-времени). Другими словами, предложен ответ на вопрос, волновавший еще Э,Маха: “Почему пространство трехмерно?” Напомним, что данная проблема с разных сторон обсуждалась в работах А.Эддингтона, П.Эренфеста, А.Эйнштейна и других авторов.

4. Из теории БСКО ранга (3,3) следует, что параметры элементов являются компонентами спиноров, т.е. описываемые ими частицы (лептоны) автоматически оказываются фермионами. Таким образом, в бинарной геометрофизике 2-компонентные спиноры не постулируются, как это имеет место, например, в твисторной программе Р.Пенроуза, а естественным образом возникают в теории БСКО первого невырожденного ранга (3,3).

5. Векторные и тензорные характеристики частиц (импульсы, моменты) получаются из спиноров в виде известных квадратичных комбинаций. Они вводятся в результате перехода от БСКО к унарной системе вещественных отношений. Можно утверждать, что импульсное пространство возникает из первичных понятий (параметров элементов) ранее классических (координатных) пространственно-временных отношений. В этом смысле импульсное пространство первичнее координатного.

6. В рамках теории БСКО ранга (3,3) предложен новый взгляд на суть уравнений Дирака для массивных лептонов в импульсном пространстве. Показано, что они имеют смысл алгебраического соотношения между значениями двух компонент лептона в начальном и конечном состояниях.

7. БСКО минимального ранга (2,2), являющаяся вырожденной, ответственна за возникновение таких важных понятий классической физики, как действие, расстояние и вообще за идею эволюции.

8. Особо следует подчеркнуть, что в микромире параметры элементов БСКО ранга (2,2) имеют модуль, равный единице, т.е. характеризуются циклической зависимостью от вещественной фазы. В этом смысле параметры являются компактифицированными. Переход к классическому параметру эволюции, удовлетворяющему аксиоме Архимеда, будет рассмотрен в следующей части.

9. БСКО ранга (4,4) выступает в двух ролях. Во-первых, она, редуцированная к БСКО ранга (3,3), описывает взаимодействия между лептонами. Как показано в главе 8, 4-мерные импульсы частиц определяются параметрами, общими с БСКО ранга (3,3), а дополнительные (третьи) параметры описывают характеристики взаимодействия (заряды). Аналогичная ситуация имеет место в многомерных теориях Калуцы-Клейна, где дополнительные импульсы соответствуют зарядам частиц.

10. В другой роли БСКО ранга (4,4) описывает цветовые характеристики частиц, участвующих в сильных взаимодействиях, - - адронов. Такая теория строится по образу и подобию теории идеализированных лептонов, развитой в главе на основе БСКО ранга (3,3). Введены так называемые “обобщенные частицы”, имеющие составной характер наподобие трехкварковой структуры барионов в хромодинамике.

11. Показано, что при переходе к БСКО более высоких рангов естественно возникает еще один канал обобщения теории спиноров, отличный от общепринятого в рамках алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел. В рамках БСКО ранга (4,4) возникают 3-компонентные спиноры, комплекты из 6-компонентных биспиноров и ряд других понятий.

12. Аналогично теориям БСКО ранга (3,3) и БСКО ранга (4,4) можно построить теории БСКО еще более высоких рангов, начало которым положено в главе 9. Показано, что наряду с общими свойствами, присущими всем таким теориям, каждый новый ранг приводит к неким принципиально новым свойствам теории. Это продемонстрировано на примере БСКО ранга (5,5).

Таким образом, можно утверждать, что уже в рамках алгебры бинарной геометрофизики реализуется значительная часть свойств реляционной теории классического пространства-времени, перечисленных во введении.

II. В рамках развитого в книге математического аппарата теории систем отношений различного ранга высказан ряд гипотез по физической интерпретации введенных понятий:

1. Высказана идея, что (идеализированные) адроны – частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, должны описываться БСКО ранга (4,4). Это навеяно далеко идущей аналогией между теорией БСКО ранга (4,4) и известными свойствами хромодинамики, в частности, тройственным характером обобщенных частиц и трехкварковой структурой барионов, ключевой ролью группы $SU(3)$ в двух теориях и т.д.

2. Поскольку в бинарной геометрофизике теории лептонов и обобщенных частиц (адронов) строятся единообразно, то можно высказать гипотезу, что левая и правая компоненты массивных лептонов (в теории БСКО ранга (3,3)) имеют тот же характер, что и кварки, образующие адроны (в теории БСКО ранга (4,4)). Те и другие являются самыми элементарными понятиями, отличающимися лишь рангами.

3. Предсказан новый вид 6-компонентных уравнений Дирака, которые должны иметь место в теории сильно взаимодействующих частиц и от которых должен осуществляться переход к общепринятым 4-компонентным уравнениям Дирака для взаимодействующих частиц.

4. В рамках БСКО ранга (4,4) можно поставить вопрос о введении аналога (прообраза) классических пространственно-временных отношений. Возникает своеобразное 9-мерное унарное многообразие с кубичными метрическими отношениями. Высказана гипотеза, что такая унарная геометрия может иметь непосредственное отношение к теории атомного ядра.

5. Невольно напрашивается гипотеза, что три вида возможных 4-мерных пространственно-временных сечений, которые можно выделить в 9-мерном многообразии, можно связать с наличием трех поколений элементарных частиц.

6. В связи со вскрытыми теориями БСКО более высоких рангов можно высказать предположение, что возможны элементарные частицы, которые должны описываться БСКО рангов, более

высоких, нежели (4,4). Не исключено, что среди множества уже известных элементарных частиц и резонансов имеются частицы такого рода.

7. В изложенной части пока не рассматривались непосредственно фундаментальные взаимодействия элементарных частиц. Тем не менее, уже подчеркивалось, что БСКО ранга (4,4) описывает ряд свойств известных видов взаимодействий. Наличие БСКО более высоких рангов наводит на мысль о возможности существования за сильными взаимодействиями последующих "сверхсильных".

8. Поскольку из теории БСКО более высоких рангов, нежели (4,4), можно строить более сложные аналоги унарных пространственно-временных отношений, то возникает естественный вопрос о возможных их проявлениях в природе. Выскажем гипотезу, что в основу теории нейтронных звезд (пульсаров) следует положить одну из таких обобщенных унарных геометрий (может быть, следующую из БСКО ранга (5,5)).

III. Дальнейшее развитие бинарной геометрофизики будет изложено во второй части книги с тем же названием, но с подзаголовком "Теория физических взаимодействий". Как отсюда видно, вторая часть будет посвящена обсуждению перехода от алгебраических аспектов бинарной геометрофизики к теориям известных видов физических взаимодействий. Кратко очертим круг вопросов, решаемых во второй части:

1. Прежде всего, охарактеризуем основную идею перехода к макропонятиям. На протяжении всей этой части подчеркивалось, что частицы описываются параметрами элементов, которые определяются отношениями к некоторому набору эталонных (базисных) элементов. В качестве эталонных элементов выступают такие же элементарные частицы. При переходе к макрофизике необходимо заменить эталоны – отдельные частицы на базисный макроприбор, который содержит в себе огромное количество элементарных частиц – возможных базисов. Следовательно, макроотношения должны представлять собой некие понятия, полученные в результате усреднения (суммирования) по всем эталонным микроэлементам. В итоге возникают интегрирования по импульсам, соответствующие в обычной теории переходам к координатному представлению при помощи интегралов Фурье.

2. В определении интегралов Фурье ключевую роль играют параметры элементов БСКО ранга (2,2), имеющие экспоненциальный характер с мнимым показателем. Переход от эталонных микроэлементов к макроприбору фактически решает задачу перехода от компактифицированных параметров БСКО ранга (2,2) к некомпактифицированному параметру эволюции s (к понятию

времени и расстояния), а следовательно, и к понятиям классического пространства-времени (к многообразию, в котором имеет место аксиома Архимеда).

3. В алгебраической основе бинарной геометрофизики нет места для понятия поля, так же как не было места для самостоятельной категории непрерывного пространства-времени, по которому поля могут распространяться. При переходе к макроприбору пространственно-временные отношения возникают из первичных отношений БСКО, – таким же образом возникают и понятия, описывающие взаимодействия, т.е. из характеристик самих частиц. Это свидетельствует о том, что возникающая теория должна иметь дальнодействующий характер. Известно, что концепция дальнодействия реализуется в теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана. Следовательно, переход от алгебраических основ бинарной геометрофизики к известной теории должен осуществляться в духе теории прямого межчастичного взаимодействия. Во введении уже отмечалось, что идеи дальнодействия явились одной из составных частей бинарной геометрофизики.

4. Существенно отметить, что при переходе к макропонятиям из базового 4x4-отношения (см. главу 8) возникает выражение для интервала в многомерном многообразии. Для получения общепринятой теории необходимо осуществить редукцию к 4-мерному многообразию в духе аналогичной редукции многомерной теории Калуцы-Клейна к 4-мерному пространственно-временному сечению. В итоге получается метрика 4-мерного искривленного пространства- времени, описывающая гравитационное взаимодействие. Дополнительные понятия характеризуют электромагнитное и другие взаимодействия, опять-таки, в духе стандартной теории Калуцы- Клейна. Во введении уже отмечалось, что идеи многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна составляют третью составную часть бинарной геометрофизики.

Поднятые вопросы не исчерпывают проблем, решаемых бинарной геометрофизикой. Переосмысление квантовой теории с позиций бинарной геометрофизики предполагается изложить в другой части книги.

Приложения А

А.1 Вывод закона бинарной системы вещественных отношений ранга (2,2)

В работах группы Ю.И.Кулакова использовалось несколько методов для нахождения законов систем отношений [27, 40]. Продемонстрируем характер решения этой задачи с помощью одного из них — метода параметризации на простейшем примере БСВО ранга (2,2). В этом случае закон записывается для двух произвольных элементов i и k из множества $\mathcal{M}$ и двух элементов α и β из множества $\mathcal{N}$. Согласно изложенному, каждый из элементов должен характеризоваться лишь одним параметром. Обозначим их через x и y:

$$i^1 \equiv x_1; \quad k^1 \equiv x_2; \quad \alpha^1 \equiv y_1; \quad \beta^1 \equiv y_2,$$

тогда закон записывается в виде

$$\Phi\left(u(x_1,y_1), u(x_1,y_2), u(x_2,y_1), u(x_2,y_2)\right) = 0, \tag{A.1.1}$$

где

$$u(x_1,y_1) = u_{i\alpha}; \quad u(x_1,y_2) = u_{i\beta}; \quad u(x_2,y_1) = u_{k\alpha}; \quad u(x_2,y_2) = u_{k\beta}.$$

Предположим, что функция Φ дифференцируема по всем аргументам. Продифференцируем (А.1.1) последовательно по x_1, x_2, y_1, y_2:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\alpha}}\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1} & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\beta}}\frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial x_1} & +0 & +0 & =0; \\
0 & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\alpha}}\frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial x_2} & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\beta}}\frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial x_2} & =0; \\
\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\alpha}}\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1} & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\alpha}}\frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial y_1} & +0 & =0; \\
0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{i\beta}}\frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial y_2} & +0 & +\frac{\partial\Phi}{\partial u_{k\beta}}\frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial y_2} & =0.
\end{array} \tag{A.1.2}$$

Рассматривая эти выражения как алгебраическую систему линейных однородных уравнений относительно четырех неизвестных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_{i\alpha}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_{i\beta}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k\alpha}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k\beta}},$$

получаем условие существования нетривиальных решений этой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1} & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_1)}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u(x_1,y_2)}{\partial y_2} & 0 & \frac{\partial u(x_2,y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) \\ F(x_1,y_1) & 0 & F(x_2,y_1) & 0 \\ 0 & F(x_1,y_2) & 0 & F(x_2,y_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A.1.3)}$$

Использованные здесь переобозначения очевидны. Деля столбцы соответственно на $F(x_1,y_1)$, $F(x_1,y_2)$, $F(x_2,y_1)$, $F(x_2,y_2)$ и вводя обозначение $w(x_s,y_r) \equiv f(x_s,y_r)/F(x_s,y_r)$, находим

$$\begin{vmatrix} w(x_1,y_1) & w(x_1,y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w(x_2,y_1) & w(x_2,y_2) \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} w(x_1,y_1) & w(x_1,y_2) \\ w(x_2,y_1) & w(x_2,y_2) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A.1.4)}$$

Отсюда имеем

$$w(x_1,y_1) = \frac{\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial y_1}} = \frac{w(x_2,y_1)w(x_1,y_2)}{w(x_2,y_2)} \equiv A(x_1)B(y_1). \qquad \text{(A.1.5)}$$

Выражение (А.1.5) представляет собой функционально- дифференциальное уравнение для функции u:

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - B(y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0. \qquad \text{(A.1.6)}$$

Общее решение этого уравнения находится в виде

$$u(x,y) = \chi\left[\int A(x)dx + \int \frac{dy}{B(y)}\right] \equiv \chi\left(\tilde{A}(x)\tilde{B}(y)\right), \qquad \text{(A.1.7)}$$

где $\chi()$ – произвольная функция одной переменной. Следовательно, парное отношение БСВО ранга (2,2) должно представляться в виде

$$u_{i\alpha}(x_1, y_1) = \chi\left(\tilde{A}(x_1)\cdot\tilde{B}(y_1)\right) \equiv \chi(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \qquad \text{(A.1.8)}$$

где χ, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ три произвольные функции, каждая от одного аргумента. Все остальные парные отношения имеют такой же вид с теми же самыми произвольными функциями. Без ущерба для общности можно перейти к новым параметрам $\tilde{x} \equiv \tilde{A}(x)$ и $\tilde{y} \equiv \tilde{B}(y)$. Кроме того, в качестве парного отношения вместо $u_{i\alpha}$ можно рассматривать

$$\tilde{u}_{i\alpha} \equiv \chi^{-1}(u_{i\alpha}) = \tilde{x}_1\tilde{y}_1. \qquad \text{(A.1.9)}$$

Чтобы найти закон БСВО ранга (2,2) продифференцируем закон (A.1.1) по любому из новых параметров. Пусть таковым является $\tilde{x}_1$, тогда имеем

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{y}_1 + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{y}_2 = 0. \qquad \text{(A.1.10)}$$

Умножим это выражение отдельно на $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$. В итоге будем иметь два соотношения:

$$\begin{array}{c} \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{u}_{i\alpha} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{u}_{i\beta} = 0; \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}\tilde{u}_{k\alpha} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}\tilde{u}_{k\beta} = 0, \end{array} \qquad \text{(A.1.11)}$$

которые можно рассматривать как алгебраическую систему из двух линейных однородных уравнений относительно двух неизвестных: $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\alpha}}$ и $\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\tilde{u}_{i\beta}}$. Как известно, эта система имеет нетривиальное решение при условии обращения в нуль ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} \tilde{u}_{i\alpha} & \tilde{u}_{i\beta} \\ \tilde{u}_{k\alpha} & \tilde{u}_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A.1.12)}$$

Однако это выражение представляет собой алгебраическое соотношение между всеми четырьмя парными отношениями для двух пар элементов из двух множеств. Его можно понимать как искомый закон БСВО ранга (2,2). Отбрасывая тильды, видим, что этот закон совпадает с приведенным в (1.2.1).

А.2 Определение спиноров через алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел

Общепринятое понятие спинора в наиболее общем виде определяется через алгебры Клиффорда $C(p,q)$ над полем вещественных чисел [26, 54]. Такое определение имеет ряд преимуществ перед другими, менее общими. В частности, в таком подходе проявляется однозначная связь между числом компонент и видом спиноров, с одной стороны, и размерностью $p+q$ и сигнатурой $p-q$ многообразия, в котором они задаются, с другой стороны. В литературе приводится ряд эквивалентных определений алгебр Клиффорда; выберем опирающееся на определение общей алгебры.

1. *Общая алгебра* определена, если:

во-первых, заданы два множества элементов:

а) α_1, α_2, $\cdots$, принадлежащих некоторому полю ;

б) b_1, b_2, $\cdots$, принадлежащих некоторому множеству B;

во-вторых, для этих множеств определены три операции:

1) умножения элементов $b_i \in B$ на элементы $\alpha_k \in A$ $(\alpha_k b_i)$;

2) сложения, т.е. образования векторов линейного пространства:

$$y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n + \cdots; \tag{A.2.1}$$

3)умножения элементов $b_i \in B$ друг на друга, не выводящее за пределы линейного пространства:

$$b_i b_j = \sum_k C_{ij}^k b_k, \tag{A.2.2}$$

где C_{ij}^k принадлежат полю .

Конкретизируя свойства множеств B, A и вид коэффициентов C_{ij}^k, можно получить частные случаи общей алгебры: алгебры Клиффорда, Грассмана, Ли, Фробениуса и др.

2. Так *алгебры Клиффорда* $C(p,q)$ получаются тогда, когда множество B определяется n элементами (*образующими* алгебры Клиффорда) e_i, произведения которых (третья операция) обладают свойствами:

$$\begin{array}{ll} e_i^2 = +1, & i = 1, 2, 3, \cdots, p; \\ e_i^2 = -1, & i = p+1, p+2, \cdots, p+q; \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i \neq j. \end{array} \tag{A.2.3}$$

Легко понять, что (А.2.3) полностью определяет как само множество B (вид и число его элементов), так и операцию умножения (А.2.2). Множество B состоит из 2^n элементов:

$$1,\ e_i,\ e_ie_j,\ e_ie_je_k,\ \cdots,\ e_1e_2\cdots e_n, \qquad (\text{A.2.4})$$

где везде $i < j < k, \cdots \leq n$. В качестве поля используется поле действительных чисел R. Вместо него можно было бы взять поле комплексных чисел C, тогда это будет алгебра Клиффорда над полем комплексных чисел $C^c(n)$. Таким образом, алгебра Клиффорда $C(p,q)$ образует 2^n-мерное векторное пространство с базисом (А.2.4). Произвольный элемент алгебры может быть записан в виде

$$y = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i e_i + \sum_i \sum_{j>i} \alpha_{ij} e_i e_j + \cdots + \alpha_\omega e_1 e_2 \cdots e_n. \qquad (\text{A.2.5})$$

Произведение всех n образующих играет особую роль в теории алгебр Клиффорда; для него используется специальное обозначение: $e_1e_2\cdots e_n \equiv \omega$.

3. Алгебры Клиффорда тесно связаны с *действительными векторными пространствами* $V^{p,q}$ (размерности $n = p + q$ и сигнатуры $p - q$), которые используются в физике для описания n- мерных пространственно-временных многообразий. Очевидно, что $V^{p,q}$ можно рассматривать как подпространство алгебры Клиффорда, натянутое на образующие алгебры $\{e_i\}$.

Линейное пространство алгебры Клиффорда разлагается на прямую сумму линейных подпространств, каждое из которых натянуто на базисные элементы, образованные из произведения k образующих $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$; k фиксировано для каждого подпространства):

$$C(p,q) = \sum_{k=0}^{n} \oplus C^k. \qquad (\text{A.2.6})$$

Элементы C^0 образуют скаляры, C^1 – векторы, C^2 – антисимметричные тензоры второго ранга, $\cdots$, C^n – псевдоскаляры в пространственно-временном многообразии размерности n.

4. Алгебры Клиффорда можно реализовать в виде *алгебры квадратных матриц*. Эта реализация связана с понятием представления алгебры (любой, не обязательно алгебры Клиффорда), формулируемым следующим образом. Пусть K^s – векторное пространство конечной размерности s, где K – поле действительных чисел R, поле комплексных чисел C или тело кватернионов H. Соответственно R^s, C^s и H^s являются вещественным,

комплексным и кватернионным пространствами размерности s. Множество всех эндоморфизмов $EndK^s$ пространства K^s отождествляется с алгеброй $\mathcal{M}(s, K)$ квадратных матриц порядка s над полем (или телом) K. Линейное представление алгебры C в K^s является гомоморфизмом C в $\mathcal{M}(s, K)$ $(= End\ K^s)$ и, обратно, всякий гомоморфизм алгебры C в $\mathcal{M}(s, K)$ является линейным представлением C в K^s (теорема Бернсайда). Размерность s пространства K^s (называемого пространством представления) называется *размерностью представления.*

Следует подчеркнуть, что матричное представление $\mathcal{M}(s, K)$ алгебры Клиффорда $C(p, q)$ полностью определяется размерностью $n - p + q$ пространства $V^{p,q}$ и его сигнатурой $p - q$.

5. В соответствии с общим определением пространства представления алгебры, *спинорами*, соответствующими $V^{p,q}$, будут векторы (вектор-столбцы), принимающие значения в поле (теле) K, т.е. в поле R, поле C или теле кватернионов H. Число компонент спинора равно порядку s матричного представления. Введем обозначения: $\Psi(R^s)$, $\Psi(C^s)$ и $\Psi(H^s)$ – соответственно для s-компонентных столбцов пространтв R^s, C^s, H^s. (Заметим, что спиноры $\Psi(H^s)$ в физике практически не рассматриваются.)

Как уже отмечалось, характер $\Psi(K^s)$ существенно зависит от размерности $p+q$ и сигнатуры $p-q$ многообразия $V^{p,q}$. Алгебры Клиффорда (и соответствующие им спиноры) можно разделить на четыре типа, характеризующиеся соотношением между алгеброй $C(p, q)$ и ее четной подалгеброй C^+.

6. Конкретный вид спиноров, соответствующих $V^{p,q}$, можно установить с помощью ряда полезных теорем из теории алгебр Клиффорда: теорем редукции, периодичности по модулю 8, законов композиции и других. В частности, эти теоремы изложены в работах [26, 54]. В нашей работе [13, с.200] приведена таблица спиноров для алгебр Клиффорда, начиная с $C(0, 0)$, до $C(8, 8)$. С помощью теоремы периодичности по модулю 8 из этой таблицы можно получить вид спиноров для всех других алгебр Клиффорда $C(p, q)$ над полем вещественных чисел.

А.3 Коэффициенты 9-мерных преобразований

В главе 5 показано, что при преобразованиях 3-компонентного спинора

$$i'^s = C^s_r i^r$$

компоненты 9-мерного вектора P^A изменяются по закону

$$P'^A = L^A_{\cdot B} P^B .$$

Коэффициенты этого преобразования вещественны и имеют вид:

$$
\begin{aligned}
L^0_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_2 + C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_2 C^{*2}_1);\\
L^0_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*1}_1 + C^2_2 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 + C^2_1 C^{*2}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_1 + C^2_3 C^{*2}_1);\\
L^0_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_1 + C^2_3 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_3 - C^2_1 C^{*2}_3);\\
L^0_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_2 + C^2_3 C^{*2}_2);\\
L^0_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_2 + C^2_3 C^{*2}_2 - C^1_2 C^{*1}_3 - C^2_2 C^{*2}_3);\\
L^0_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 + C^2_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^1_{\cdot 0} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 1} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1);\\
L^1_{\cdot 2} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 3} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 + C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 4} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 + C^2_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_1 + C^2_3 C^{*1}_1);\\
L^1_{\cdot 5} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_1 + C^2_3 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*2}_3 - C^2_1 C^{*1}_3);\\
L^1_{\cdot 6} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 + C^2_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_2 + C^2_3 C^{*1}_2);\\
L^1_{\cdot 7} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_2 + C^2_3 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*2}_3 - C^2_2 C^{*1}_3);\\
L^1_{\cdot 8} &= \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^2_{\cdot 0} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 1} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 - C^2_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*1}_1);\\
L^2_{\cdot 2} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*2}_1);\\
L^2_{\cdot 3} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 4} &= \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 - C^2_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_1 - C^2_3 C^{*1}_1);\\
L^2_{\cdot 5} &= \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*2}_1);\\
L^2_{\cdot 6} &= \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 - C^2_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*2}_2 - C^2_3 C^{*1}_2);\\
L^2_{\cdot 7} &= \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*2}_2);\\
L^2_{\cdot 8} &= \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*1}_3);
\end{aligned}
$$

$$L^3_{\cdot 0} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*2}_1 + C^1_2 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_2);$$
$$L^3_{\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^2_2 C^{*2}_1);$$
$$L^3_{\cdot 2} = \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*2}_2 + C^1_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*1}_2 - C^2_2 C^{*2}_1);$$
$$L^3_{\cdot 3} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_1 - C^2_1 C^{*2}_1 - C^1_2 C^{*1}_2 + C^2_2 C^{*2}_2);$$
$$L^3_{\cdot 4} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*1}_3 - C^2_1 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_1 - C^2_3 C^{*2}_1);$$
$$L^3_{\cdot 5} = \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_1 - C^2_3 C^{*2}_1 - C^1_1 C^{*1}_3 + C^2_1 C^{*2}_3);$$
$$L^3_{\cdot 6} = \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*1}_3 - C^2_2 C^{*2}_3 + C^1_3 C^{*1}_2 - C^2_3 C^{*2}_2);$$
$$L^3_{\cdot 7} = \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*1}_2 - C^2_3 C^{*2}_2 - C^1_2 C^{*1}_3 + C^2_2 C^{*2}_3);$$
$$L^3_{\cdot 8} = \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*1}_3 - C^2_3 C^{*2}_3);$$

$$L^4_{\cdot 0} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*1}_2);$$
$$L^4_{\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 + C^3_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1);$$
$$L^4_{\cdot 2} = \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2);$$
$$L^4_{\cdot 3} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*1}_2);$$
$$L^4_{\cdot 4} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 + C^3_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1);$$
$$L^4_{\cdot 5} = \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1 - C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3);$$
$$L^4_{\cdot 6} = \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 + C^3_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2);$$
$$L^4_{\cdot 7} = \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3);$$
$$L^4_{\cdot 8} = \tfrac{1}{2}(C^1_3 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*1}_3);$$

$$L^5_{\cdot 0} = \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*1}_1 + C^1_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*1}_2);$$
$$L^5_{\cdot 1} = \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2 + C^1_2 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*1}_1);$$
$$L^5_{\cdot 2} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*1}_2 - C^1_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*1}_1);$$
$$L^5_{\cdot 3} = \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*1}_1 - C^1_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*1}_2);$$
$$L^5_{\cdot 4} = \tfrac{i}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_1 - C^3_3 C^{*1}_1);$$
$$L^5_{\cdot 5} = \tfrac{1}{2}(C^1_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*1}_1);$$
$$L^5_{\cdot 6} = \tfrac{i}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3 + C^1_3 C^{*3}_2 - C^3_3 C^{*1}_2);$$
$$L^5_{\cdot 7} = \tfrac{1}{2}(C^1_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*1}_3 - C^1_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*1}_2);$$
$$L^5_{\cdot 8} = \tfrac{i}{2}(C^1_3 C^{*3}_3 - C^3_3 C^{*1}_3);$$

$$L^6_{\cdot 0} = \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*2}_2);$$
$$L^6_{\cdot 1} = \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 + C^3_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1);$$
$$L^6_{\cdot 2} = \tfrac{i}{2}(C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2);$$
$$L^6_{\cdot 3} = \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 + C^3_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*2}_2);$$
$$L^6_{\cdot 4} = \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 + C^3_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1);$$
$$L^6_{\cdot 5} = \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1 - C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3);$$
$$L^6_{\cdot 6} = \tfrac{1}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 + C^3_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2);$$
$$L^6_{\cdot 7} = \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3);$$
$$L^6_{\cdot 8} = \tfrac{1}{2}(C^2_3 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*2}_3);$$

$$
\begin{aligned}
L^7_{.0} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*2}_1 + C^2_2 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^7_{.1} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2 + C^2_2 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*2}_1);\\
L^7_{.2} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_2 - C^3_1 C^{*2}_2 - C^2_2 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*2}_1);\\
L^7_{.3} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*2}_1 - C^2_2 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*2}_2);\\
L^7_{.4} &= \tfrac{i}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_1 - C^3_3 C^{*2}_1);\\
L^7_{.5} &= \tfrac{1}{2}(C^2_1 C^{*3}_3 - C^3_1 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*3}_1 + C^3_3 C^{*2}_1);\\
L^7_{.6} &= \tfrac{i}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3 + C^2_3 C^{*3}_2 - C^3_3 C^{*2}_2);\\
L^7_{.7} &= \tfrac{1}{2}(C^2_2 C^{*3}_3 - C^3_2 C^{*2}_3 - C^2_3 C^{*3}_2 + C^3_3 C^{*2}_2);\\
L^7_{.8} &= \tfrac{i}{2}(C^2_3 C^{*3}_3 - C^3_3 C^{*2}_3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^8_{.0} &= C^3_1 C^{*3}_1 + C^3_2 C^{*3}_2;\\
L^8_{.1} &= C^3_1 C^{*3}_2 + C^3_2 C^{*3}_1;\\
L^8_{.2} &= i(C^3_2 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*3}_2);\\
L^8_{.3} &= C^3_1 C^{*3}_1 - C^3_2 C^{*3}_2;\\
L^8_{.4} &= C^3_1 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*3}_1;\\
L^8_{.5} &= i(C^3_3 C^{*3}_1 - C^3_1 C^{*3}_3);\\
L^8_{.6} &= C^3_2 C^{*3}_3 + C^3_3 C^{*3}_2;\\
L^8_{.7} &= i(C^3_3 C^{*3}_2 - C^3_2 C^{*3}_3);\\
L^8_{.8} &= C^3_3 C^{*3}_3.
\end{aligned}
\qquad (A.3.1)
$$

Библиография

[1] *Александров А.Д., Овчинникова В.В.* Замечания к основам теории относительности //Вестник ЛГУ. 1953. N 11, с.95-100.

[2] *Арифов Л.Я.* Общая теория относительности и тяготение. Ташкент. Изд-во ФАН, 1983.

[3] *Блохинцев Д.И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.

[4] *Блюменталь Л.М.* (Blumental L.M.). Theory and application of distance geometry. Oxford, 1953.

[5] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.

[6] *Бройль Л.де* (De Broglie L.). Революция в физике. М.: Госатомиздат, 1963.

[7] *Васильев С.А., Владимиров Ю.С.* Кубичный аналог 9-мерного пространства Минковского //Тезисы докл. Междунар. школы-семинара "Многомерная гравитация и космология". М.: 1994, с.7.

[8] *Весс Ю., Беггер Дж.* (Wess J., Bagger J.). Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.

[9] *Владимиров Ю.С.* Аксиоматизация свойств пространства-времени общей теории относительности //Сб. Современные проблемы гравитации. Тбилиси. Изд-во Тб.ГУ, 1967, с.407-412.

[10] *Владимиров Ю.С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.

[11] *Владимиров Ю.С., Гаврилов В.Р.* Некоторые приложения теории физических структур //Сб. Исследования по классической и квантовой теории гравитации. Днепропетровск. Изд-во ДГУ, 1985, с. 18-26.

[12] *Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.

[13] *Владимиров Ю.С.* Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[14] *Владимиров Ю.С.* Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.42-60.

[15] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.

[16] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Физическая структура ранга (4,4;б) и трехкомпонентные спиноры //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.44-66.

[17] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Бинарное многомерие и теория Калуцы-Клейна //Сб. Тезисов докладов 8-й Рос. грав. конф. "Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации". М.: 1993, с.25.

[18] *Владимиров Ю.С., Соловьев А.В.* Группа $SL(3,C)$ и преобразования 9-мерных векторов //Тезисы докладов Междунар. школы-семинара "Многомерная гравитация и космология". М.: 1994, с.9.

[19] *Владимиров Ю.С.* Спиноры в бинарной геометрофизике //Сб. Проблемы современной физики. Вып.1. М.: Изд-во "Белка", 1994, с.48-53.

[20] *Владимиров Ю.С.* Пространство-время и электрослабые взаимодействия в бинарной геометрофизике //Gravitation and Cosmology. Vol.1 (1995). No.2, p.1-7.

[21] *Владимиров Ю.С.* Фундаментальная физика, философия и религия. Кострома. Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.

[22] *Ингрэхем Р.Л.* (Ingraham R.L.). Conformal relativity //Nuovo Cim., 1978. Vol.46B. N 1, p.1-32; N 2, p.217-286; Vol.47B. N 2, p.151-191.

[23] *Ионин В.К.* Абстрактные группы как физические структуры //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.40-43.

[24] *Калуца Т.* (Kaluza T.). К проблеме единства физики //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир, 1979, с.529-534.

[25] *Кассандров В.В.* Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1992.

[26] *Кокуре Р.* (Coquereaux R.). Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics //Phys. Rev. Vol.115B. N 5, p.389.

[27] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Г.Г.Михайличенко). Новосибирск. Изд-во Новосиб. ГУ, 1968.

[28] *Кулаков Ю.И.* О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа //Доклады АН СССР, 1971. Том 201. N 3, с.570-572.

[29] *Кулаков Ю.И.* О теории физических структур //Записки научных семинаров ЛОМИ. 1983. Том 127. Ленинград, с.103-151.

[30] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. Ч.1 //Вычислительные системы. N 110. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1985, с.52-88.

[31] *Кулаков Ю.И.* Теория размерности физических величин. Ч.2 //Вычислительные системы. N 118. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1986, с.5-27.

[32] *Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Изд-во Архимед, 1991.

[33] *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3) //Вычислительные системы. N 101. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1984, с.91-113.

[34] *Лев В.Х.* Двумерные и трехмерные геометрии в теории физических структур //Вычислительные системы. N 118. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1986, с.28-36.

[35] *Лев В.Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.90-103.

[36] *Лев В.Х.* Трехмерные и четырехмерные пространства в теории физических структур. Канд. дис. Новосибирск, 1990.

[37] *Лейбниц Г.В.* Переписка с Кларком. Сочинения. Том 1. М.: Мысль, 1982, с.430-528.

[38] *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: Изд-во С.Скирмунта, 1909.

[39] *Мах Э.* Механика //Сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". М.: Мир. 1979, с.73-84.

[40] *Михайличенко Г.Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур //Доклады АН СССР, 1972. Том 206. N 5, с.1056-1058.

[41] *Михайличенко Г.Г.* Двумерные геометрии //Доклады АН СССР, 1981. Том 260. N 4, с.803-805.

[42] *Михайличенко Г.Г.* Групповые свойства физических структур. Докторск. дис. Новосибирск, 1991.

[43] *Моулд Р.А.* (Mould R.A.). An axiomatization of General Relativity //Proc. Amer. Philos. Soc., 1959. Vol.103. N 3, p.485-529.

[44] *Нарликар Дж.В.* (Narlikar J.V.). Инерция и космология в теории относительности Эйнштейна //Сб. "Астрофизика, кванты и теория относительности". М.: Мир, 1982, с.498-534.

[45] *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990.

[46] *Пенроуз Р.* (Penrose R.). Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

[47] *Пенроуз Р., Риндлер В.* (Penrose R., Rindler V.) Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987.

[48] *Пименов Р.И.* Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л.: Наука, 1968.

[49] *Пименов Р.И.* Основы теории темпорального универсума. Сыктывкар, 1991.

[50] *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии //Сб. “Альберт Эйнштейн и теория гравитации”. М.: Мир, 1979, с.18-33.

[51] *Румер Ю.Б.* Спинорный анализ. М-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

[52] *Румер Ю.Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.

[53] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970.

[54] *Салингарес Н.* (Salingaros N.). On the classification of Clifford algebras and their relation to spinor in n dimensions //Journ.Math.Phys., 1982. Vol.23, N 1, p.1-7.

[55] *Самохвалов К.Ф.* К обоснованию теории физических структур //Вычислительные системы. N 125. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988, с.33-41.

[56] *Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А.* N-Точечная геометрия типа Евклида //Сб. Математические методы и физико-механические поля. Киев. Наукова думка, 1975. Вып.1, с.5-10.

[57] *Соколов Н.П.* Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматгиз, 1960.

[58] *Соколов Н.П.* Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова думка, 1972.

[59] *Соловьев А.В.* К теории бинарных физических структур ранга (5,5;б) и выше //Вычислительные системы. N 135. Новосибирск. Изд-во Института математики СО АН СССР, 1990, с.67-77.

[60] *Соловьев А.В.* N-Спинорное исчисление в реляционной теории пространства-времени. Канд. дис. М., 1996.

[61] Твисторы и калибровочные поля. М.: Мир, 1983.

[62] *Фейнман Р.* (Feynman R.) Нобелевская лекция “Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте” //Сб. Характер физических законов. М.: Мир. 1968, с.193-231.

[63] *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F, Narlikar J.V.). Action at a distance in physics and cosmology. San Francisco: W.N.Freeman and Comp., 1974.

[64] *Хуанг К.* (Huang K.). Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.

[65] *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.

Научное издание

Владимиров Юрий Сергеевич

Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий

Часть 1
Теория систем отношений

Н/К

ЛР N 040414 от 27.03.92.

Подписано в печать 13.05.96. Формат 60×90/16. Бумага офсет. N 1. Офсетная печать. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 16,1. Тираж 500 экз. Заказ N .

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7.

Типография