РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 2

Издание выходит с 2003 года

В. С. Владимиров

Таблицы интегралов комплекснозначных функций p-адических аргументов

Москва
2003

УДК 512.625.5
ББК (В)22.161.1
В57

Владимиров В. С.

В57 Таблицы интегралов комплекснозначных функций p-адических аргументов / В. С. Владимиров. — М.: МИАН, 2003. — 90 стр. — (Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова (МИАН); вып. 2.)

ISBN 5-98419-001-X

ISBN 5-98419-001-X

Часть I. Краткие сведения из p-адического анализа

Всюду впредь, если это не оговорено особо, будем предполагать, что p пробегает все простые числа, $p = 2, 3, 5, \dots, 137, \dots$, а γ пробегает все целые (рациональные) числа, $\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\gamma \in Z$; через Z_+ будем обозначать множество натуральных чисел $\gamma = 1, 2, \dots$. Если $\mathbb{K}$ – некоторое поле (или кольцо), то через $\mathbb{K}^\times$ будем обозначать его мультипликативную группу.

§ 1. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$

Обозначим: $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел.

Пусть p – простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ однозначно представляется в виде

$$x = \pm p^\gamma \frac{a}{b}\,,$$

где $\gamma \in Z$ и a, b – натуральные числа, не делящиеся на p и не имеющие общих множителей. *p-Адическая норма* $|x|_p$ числа $x \in \mathbb{Q}$ определяется равенствами

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \qquad x \neq 0, \qquad |0|_p = 0.$$

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$ дает *поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$*.

Каноническая форма произвольного p-адического числа $x \neq 0$ есть

$$x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots), \tag{1.1}$$

где $\gamma = \gamma(x) \in Z$, $x_j = 0, 1, \dots, p-1$, $x_0 \neq 0$, $j = 0, 1, \dots$; при этом $|x|_p = p^{-\gamma}$. Число $-\gamma$ называется *порядком* числа x и обозначается $\operatorname{ord} x$, $\operatorname{ord} x = -\gamma(x)$, $\operatorname{ord} 0 = -\infty$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 96-01-01008 и 96-15-96131.

Норма $|\cdot|_p$ обладает следующими характерными свойствами:

$$\begin{aligned}
&1) \quad |x|_p \geqslant 0, \qquad |x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0,\\
&2) \quad |xy|_p = |x|_p|y|_p,\\
&3) \quad |x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
&3') \quad |x+y|_p = \max(|x|_p, |y|_p), \qquad |x|_p \neq |y|_p,\\
&3'') \quad |x+y|_p \leqslant |2x|_p, \qquad |x|_p = |y|_p.
\end{aligned}$$

Таким образом, в силу (1.2), норма $|\cdot|_p$ *неархимедова*, а пространство $\mathbb{Q}_p$ – *ультраметрическое.*

Обозначим:

$$B_\gamma(a) = [x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leqslant p^\gamma]$$

– *диск* с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса p^γ, $B_\gamma = B_\gamma(0)$;

$$S_\gamma(a) = [x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^\gamma]$$

– *окружность* с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса p^γ, $S_\gamma = S_\gamma(0)$.

Очевидные соотношения:

$$B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma' \leqslant \gamma} S_{\gamma'}(a), \qquad S_\gamma(a) = B_\gamma(a) \setminus B_{\gamma-1}(a),$$
$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\gamma \in Z} B_\gamma(a), \qquad \mathbb{Q}_p^\times = \bigcup_{\gamma \in Z} S_\gamma(a).$$

Геометрия пространства $\mathbb{Q}_p$ весьма необычна: все треугольники в нем равнобедренные; всякая точка диска является его центром, диск не имеет границы, диск есть объединение конечного числа непересекающихся дисков меньшего радиуса; если два диска пересекаются, то один из них содержится в другом; диск есть открытый компакт.

Множество поля $\mathbb{Q}_p$, которое является открытым и замкнутым, называется *клопен* (clopen).

Обозначим: $Z_p = B_0$ – максимальное компактное подкольцо поля $\mathbb{Q}_p$ (кольцо целых p-адических чисел); мультипликативная группа $Z_p^\times = S_0$ кольца Z_p – это группа единиц поля $\mathbb{Q}_p$; $I_p = pZ_p = B_{-1}$ – максимальный идеал кольца Z_p.

Классы вычетов Z_p/I_p образуют конечное поле, изоморфное классу вычетов по модулю p: $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Введем специальные множества:

$$G_p = [x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant |2p|_p];$$
$$J_p = [x \in Z_p^\times : 1 - x \in G_p],$$

J_p – мультипликативная группа;

$$S_{\gamma, k_0 k_1 \dots k_n} = [x \in S_\gamma : x_0 = k_0, x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n],$$
$$S_\gamma^{k_0 k_1 \dots k_n} = [x \in S_\gamma : x_0 \neq k_0, x_1 \neq k_1, \dots, x_n \neq k_n],$$

где $k_j = 0, 1, \dots, p-1,\ \ k_0 \neq 0,\ \ j = 1, 2, \dots, n.$

Введенные множества – открытые компакты в $\mathbb{Q}_p$.

Дробная часть $\{x\}_p$ числа $x \in \mathbb{Q}_p$:

$$\{x\}_p = 0, \quad \text{если} \quad \gamma(x) \geqslant 0,$$

и

$$\{x\}_p = p^\gamma (x_0 + x_1 p + \dots + x_{-\gamma-1} p^{-\gamma-1}), \quad \text{если} \quad \gamma(x) \leqslant -1. \tag{1.3}$$

Мультипликативную *группу квадратов* p-адических чисел обозначим через $\mathbb{Q}_p^{\times 2}$.

Для того чтобы число $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ *принадлежало* $\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma(x)$ *было четным и*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{p}\right) = 1, & p \neq 2; \\ x_1 = x_2 = 0, & p = 2. \end{cases}$$

Здесь

$$\left(\frac{a}{p}\right), \qquad a \in Z, \quad a \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p),$$

– *символ Лежандра*, равный 1 или -1 в зависимости от того, является ли число x квадратичным вычетом или невычетом по модулю p.

Таким образом, группа $\mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ состоит из четырех элементов $(1, \epsilon, -p, \epsilon p)$, где ϵ – любая единица поля $\mathbb{Q}_p$, не являющаяся квадратом в $\mathbb{Q}_p$, при $p \neq 2$, и из восьми элементов $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$ при $p = 2$.

§ 2. Некоторые функции на $\mathbb{Q}_p$

Характеры поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\chi(x)$ – *аддитивный характер поля* $\mathbb{Q}_p$:

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \qquad |\chi(x)| = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.1}$$

Стандартный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ имеет вид

$$\chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p), \tag{2.2}$$

где $\{x\}_p$ – дробная часть $x \in \mathbb{Q}_p$, определенная формулой (1.3).

Общий вид аддитивного характера поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\chi(x) = \chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}_p) \tag{2.3}$$

при некотором $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Пусть $\pi(x)$ – *мультипликативный характер* поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \qquad |\pi(x)| = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^\times. \tag{2.4}$$

Общий вид мультипликативного характера поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\pi(x) = \pi_{i\alpha,\theta}(x) = |x|_p^{i\alpha}\theta(x), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \tag{2.5}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ определяется равенством $\pi(p) = p^{-i\alpha}$ и $\theta(t)$, $t \in Z_p^\times$, – характер компактной группы $Z_p^\times$, нормированный условием $\theta(p) = 1$. (Множество последних счетно и дискретно.)

Если условие унитарности $|\pi(x)| = 1$ в (2.4) не выполнено, то функция $\pi(x)$ есть *представление* группы $\mathbb{Q}_p^\times$ в $\mathbb{C}$, и ее общий вид дается формулой (2.5), в которой $i\alpha$ – уже любое комплексное число,

$$\pi_{\alpha,\theta}(x) = |x|_p^{\alpha-1}\theta(x), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.5$'$}$$

Такие функции называются *квазихарактерами*. Квазихарактер $\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1}$, для которого $\theta = 1$, называется *главным*.

Пусть $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. Без ограничения общности можно считать, что d свободно от квадратов p-адических чисел, т. е. имеет один из перечисленных в § 1 видов: $p, \epsilon, p\epsilon$, $|\epsilon|_p = 1$, $\epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ при $p \neq 2$ и $2, 3, 5, 6, 7, 10, 14$ при $p = 2$.

Множество p-адических чисел из $\mathbb{Q}_p^\times$, представимых в виде $\alpha^2 - d\beta^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$, обозначим $\mathbb{Q}_p^\times(d)$; $\mathbb{Q}_p^\times(d)$ – мультипликативная группа.

Символ Гильберта $\left(\frac{x,y}{p}\right)$, $x,y\in\mathbb{Q}_p^\times$, по определению равен 1 или -1 в зависимости от того, представляет ли форма $x\alpha^2+y\beta^2-\gamma^2$ нетривиально нуль в $\mathbb{Q}_p$ или нет.

Символ Гильберта обладает следующими очевидными свойствами [12]:

$$\left(\frac{x,y}{p}\right)=\left(\frac{y,x}{p}\right),\quad \left(\frac{x,-x}{p}\right)=1,\quad \left(\frac{x,yz}{p}\right)=\left(\frac{x,y}{p}\right)\left(\frac{x,z}{p}\right)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p,\epsilon}{p}\right)=\left(\frac{\epsilon_0}{p}\right), && \left(\frac{\epsilon,\eta}{p}\right)=1, && p\neq 2;\\
&\left(\frac{2,\epsilon}{2}\right)=(-1)^{(\epsilon^2-1)/2}, && \left(\frac{\epsilon,\eta}{2}\right)=(-1)^{(\epsilon-1)(\eta-1)/4}, && p=2.
\end{aligned}$$

Здесь ϵ и η – любые единицы поля $\mathbb{Q}_p$.

Отсюда следует критерий того, что p-адическое число x принадлежит $\mathbb{Q}_p^\times(d)$ при $p\neq 2$: *для того чтобы* $x\in\mathbb{Q}_p^\times(d)$, *необходимо и достаточно*: *при* $d=\epsilon$ $\gamma(x)$ *– четное*; *при* $d=p$ $\gamma(x)$ *– четное и* $(x_0/p)=1$ *или* $\gamma(x)$ *– нечетное и* $(-x_0/p)=1$; *при* $D=p\epsilon$ $\gamma(x)$ *– четное и* $(x_0/p)=1$ *или* $\gamma(x)$ *– нечетное и* $(-x_0/p)=-1$. (Аналогичный критерий имеет место и при $p=2$.)

Отсюда выводим: *группа* $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^\times(d)$ *изоморфна группе* $(1,-1)$ *и функция*

$$\operatorname{sgn}_{p,d}x=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}_p^\times(d),\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}_p^\times(d)\end{cases} \tag{2.6}$$

есть мультипликативный характер группы $\mathbb{Q}_p^\times$ *(поля* $\mathbb{Q}_p$*)*.

Непосредственно из определений следует

$$\operatorname{sgn}_{p,d}x=\left(\frac{x,-dx}{p}\right),\qquad x\in\mathbb{Q}_p^\times,\qquad d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}.$$

(Отметим, что всегда $\left(\frac{x,-dx}{p}\right)=1$, если $d\in\mathbb{Q}_p^{\times 2}$.)

λ_p-функция поля $\mathbb{Q}_p$ определяется следующим образом [1], [2], [13], [14]:

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} 1, & \gamma(x) = 2k, \quad p \neq 2, \\ \sqrt{\left(\dfrac{-1}{p}\right)}\left(\dfrac{x_0}{p}\right), & \gamma(x) = 2k+1, \quad p \neq 2, \\ \exp[\pi i(1/4 + x_1)], & \gamma(x) = 2k, \quad p = 2, \\ \exp[\pi i(1/4 + x_1/2 + x_2)], & \gamma(x) = 2k+1, \quad p = 2. \end{cases}$$

Свойства функции $\lambda_p \colon \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}$:

$$\begin{gathered} |\lambda_p(x)| = 1, \\ \lambda_p(x)\lambda_p(-x) = 1, \\ \lambda_p(x) = \lambda_p(y), \qquad xy \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \\ \frac{\lambda_p(x)\lambda_p(y)}{\lambda_p(x+y)} = \lambda_p\left(\frac{xy}{x+y}\right), \\ \lambda_p(x)\lambda_p(y) = \left(\frac{x, y}{p}\right)\lambda_p(xy)\lambda_p(1). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Полагая в (2.7) $y = -dx$ и пользуясь формулой (2.6), получим соотношение [13]

$$\operatorname{sgn}_{p,d} x = \lambda_p(x)\lambda_p(-dx)\lambda_p(d)\lambda_p(-1), x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}. \tag{2.8}$$

Отметим следующую формулу [13]:

$$\operatorname{sgn}_{p,d} x = \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{p}\right)^{\gamma(d)}\left(\dfrac{d_0}{p}\right)^{\gamma(x)}\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{\gamma(x)\gamma(d)}, & p \neq 2, \\ (-1)^{d_1x_1 + (d_1+d_2)\gamma(x) + (x_1+x_2)\gamma(d)}, & p = 2. \end{cases} \tag{2.9}$$

В частности, при $d \equiv 3 \pmod 4$ имеем [14]:

$$\operatorname{sgn}_{p,d} x = \begin{cases} 1, & \left(\dfrac{d}{p}\right) = 1, \quad p \neq d, \quad p \neq 2, \\ (-1)^{\gamma(x)}, & \left(\dfrac{d}{p}\right) = -1, \quad p \neq d, \quad p \neq 2, \\ \left(\dfrac{x_0}{p}\right)(-1)^{\gamma(x)}, & p = d, \\ (-1)^{x_1}, & p = 2, \quad d \equiv 7 \pmod 8, \\ (-1)^{x_1+\gamma(x)}, & p = 2, \quad d \equiv 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства при $x, y \in \mathbb{Q}_p^\times$:

$$|x|_\infty \prod_{p=2}^{\infty} |x|_p = 1, \qquad |x|_\infty = |x|, \tag{2.10}$$

$$\chi_\infty(x) \prod_{p=2}^{\infty} \chi_p(x) = 1, \qquad \chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x), \tag{2.11}$$

$$\lambda_\infty(x) \prod_{p=2}^{\infty} \lambda_p(x) = 1, \qquad \lambda_\infty(x) = \exp(-i\pi/4 \operatorname{sgn} x), \tag{2.12}$$

$$\left(\frac{x, y}{\infty}\right) \prod_{p=2}^{\infty} \left(\frac{x, y}{p}\right) = 1, \tag{2.13}$$

где

$$\left(\frac{x, y}{\infty}\right) = \begin{cases} -1, & x < 0, \quad y < 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}_{\infty,d} x \prod_{p=2}^{\infty} \operatorname{sgn}_{p,d} x = 1, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{sgn}_{\infty,d} x = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & d < 0, \\ 1, & d > 0. \end{cases}$$

Бесконечные произведения в формулах (2.10)–(2.14) сходятся для всех рациональных значений x и y, поскольку лишь конечное число множителей в них отлично от 1. Такого типа формулы называются *адельными*.

Обозначаем: $\Omega(|x|_p)$ – характеристическую функцию диска B_0 (так что $\Omega(t) = 1$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\Omega(t) = 0$, если $t > 1$); $\delta(|x|_p - p^\gamma)$ – характеристическую функцию окружности S_γ; $\delta(x_\ell - k)$ – характеристическую функцию множества $[x \in \mathbb{Q}_p : x_\ell = k]$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ при $\ell = 0$ и $k = 0, 1, \ldots, p-1$ при $\ell = 1, 2, \ldots$.

§ 3. Аналитические функции

Пусть $\mathscr{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p$. Функция $f\colon \mathscr{O} \to \mathbb{Q}_p$ называется *аналитической* в $\mathscr{O}$, если для любой точки $a \in \mathscr{O}$ существует такое $\gamma \in Z$, что в диске $B_\gamma(a)$ она представляется сходящимся степенным рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k. \tag{3.1}$$

Радиус сходимости $r = r(f)$ ряда (3.1) есть

$$r = p^{\sigma},$$
$$\sigma = -\frac{1}{\ln p} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |f_n|_p,$$

где

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k.$$

Ряд (3.1) сходится тогда, и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| p^{\gamma k}, \qquad \gamma = \gamma(x-a),$$

и его можно дифференцировать почленно в $B_\gamma(a)$ бесконечное число раз

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k(x-a)^{k-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

причем

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots . \tag{3.3}$$

При каждом дифференцировании ряда (3.1) радиус сходимости продифференцированного ряда (3.2) может разве лишь увеличиться.

Функции e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ аналитические, они определяются следующими рядами:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in G_p, \tag{3.4}$$

$$\ln x = \ln[1-(1-x)], \qquad x \in J_p,$$
$$\ln x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in G_p, \tag{3.5}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad x \in G_p, \tag{3.6}$$

$$\cos x = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in G_p, \tag{3.7}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \in G_p, \tag{3.8}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}, \qquad x \in G_p, \tag{3.9}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad x \in G_p. \tag{3.10}$$

Справедливы соотношения:

$$(e^x)' = e^x, \qquad e^x e^y = e^{x+y}, \qquad x, y \in G_p, \tag{3.11}$$

$$|e^x|_p = 1, \qquad |e^x - 1|_p = |x|_p, \qquad x \in G_p, \tag{3.12}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad x, y \in G_p, \tag{3.13}$$

$$|\ln(1+x)|_p = |x|_p, \qquad x \in G_p, \tag{3.14}$$

$$\ln e^x = x, \quad x \in G_p; \qquad e^{\ln x} = x, \qquad x \in J_p. \tag{3.15}$$

Функция e^x реализует аналитический диффеоморфизм аддитивной группы G_p на мультипликативную группу J_p. Обратное отображение осуществляется функцией $\ln x$.

Справедливы все формулы классической тригонометрии. Их доказательство легко следует из формального соотношения

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad x \in G_p, \tag{3.16}$$

где символ e^{ix} определяется рядом (3.3) при условии, что $i^2 = -1$.

В частности,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad x \in G_p, \tag{3.17}$$

$$e^{\theta x} = \cos x + \theta \sin x, \qquad x \in G_p, \quad \theta^2 = -1, \quad \theta \in \mathbb{Q}_p \tag{3.18}$$

(последнее возможно лишь при $p \equiv 1 \pmod 4$).

Функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ реализуют аналитические изоморфизмы группы G_p на G_p; обратные отображения даются функциями $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ соответственно.

§ 4. Мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$

Так как $\mathbb{Q}_p$ есть коммутативная группа по сложению, то на ней существует единственная (с точностью до множителя) инвариантная мера, – мера Хаара, – которую мы обозначим через $d_p x$:

$$d_p(x+a) = d_p x, \quad a \in \mathbb{Q}_p; \qquad d_p(ax) = |a|_p d_p x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times.$$

Нормируем меру dx условием

$$\int_{Z_p} d_p x = 1. \tag{4.1}$$

Нормированная мера Хаара $d_p^\times x$ на $\mathbb{Q}_p^\times$ есть

$$d_p^\times x = (1-p^{-1})^{-1} \frac{d_p x}{|x|_p}, \qquad d_p^\times (ax) = d_p^\times x, \qquad a, x \in \mathbb{Q}_p^\times, \tag{4.2}$$

так что

$$\int_{Z_p^\times} d_p^\times x = 1.$$

Пусть $M \subset \mathbb{Q}_p$ – измеримое по мере Хаара множество. Интеграл функции $f\colon M \to \mathbb{C}$ по множеству M будем записывать в виде

$$\int_M f(x)\, d_p x, \qquad \int f(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\, d_p x.$$

Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Множество функций $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, для которых $f(x) = 0$, $x \notin M$, и

$$\|f\|_q = \left[\int_M |f(x)|^q\, d_p x\right]^{1/q} < \infty, \qquad \text{если } q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in M} |f(x)| < \infty, \qquad \text{если } q = \infty,$$

обозначим через $\mathscr{L}^q(M)$, $\mathscr{L}^q = \mathscr{L}^q(\mathbb{Q}_p)$. Если $\mathscr{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p$, то множество функций $f\colon \mathscr{O} \to \mathbb{C}$, для которых для любого компакта $K \subset \mathscr{O}$ $f \in \mathscr{L}^q(K)$, обозначим через $\mathscr{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathscr{O})$, $\mathscr{L}^q_{\mathrm{loc}} = \mathscr{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p)$.

Функции из множества $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathscr{O})$ называются *локально-интегрируемыми в* $\mathscr{O}$.

Пусть функция $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p^\times)$. (*Несобственным*) *интегралом* функции f по $\mathbb{Q}_p$,

$$\int f(x)\,d_px = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)\,d_px,$$

называется предел (если он существует)

$$\lim_{N,M\to\infty} \int_{B_N \setminus B_{-M-1}} = \lim_{N,M\to\infty} \sum_{\gamma=-M}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)\,dx.$$

Пример. Интеграл

$$\int_{Z_p} |x|^{\alpha-1}\,d_px = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} \tag{4.3}$$

существует при $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Формула замены переменных в интеграле: *если* $x(y)$ *– аналитический диффеоморфизм открыто-замкнутого множества* $D' \subset \mathbb{Q}_p$ *на* $D \subset \mathbb{Q}_p$, *причем* $x'(y) \neq 0$, $y \in D'$, *то для любой* $f \in \mathscr{L}^1(D)$ *справедлива формула*

$$\int_D f(x)\,dx_p = \int_{D'} f(x(y))|x'(y)|_p\,d_py. \tag{4.4}$$

Пример. Пусть $x = (py)^{-1}$, $d_px = p|y|_p^{-2}\,d_py$. Тогда в силу (3.4) имеем

$$\int_{|x|_p>1} |x|_p^{\alpha-1}\,d_px = p^\alpha \int_{Z_p} |y|_p^{-\alpha-1}\,d_py = \frac{1-p^{-1}}{p^{-\alpha}-1}\,, \qquad \operatorname{Re}\alpha < 0.$$

Пример. Для дробно-линейного преобразования

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{Q}_p, 2),$$

$$d_px = \frac{|ad-dc|_p}{|cx+d|_p^2}\,d_py.$$

§ 5. n-мерное пространство $\mathbb{Q}_p^n$

Пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ (n раз) состоит из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$, снабженных нормой

$$|x|_p = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|_p. \tag{5.1}$$

Эта норма обладает свойствами 1)–3) § 1, так что пространство $\mathbb{Q}_p^n$ ультраметрическое (неархимедово).

Скалярное произведение

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \qquad x, y \in \mathbb{Q}_p^n,$$

удовлетворяет неравенству

$$|(x, y)|_p \leqslant |x|_p |y|_p, \qquad x, y \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Меру Хаара на $\mathbb{Q}_p^n$ обозначаем $d_p^n x = d_p x_1 d_p x_2 \cdots d_p x_n$, $d_p^1 x_1 = d_p x$,

$$d_p^n(x + a) = d_p^n x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^n, \qquad d_p^n(Ax) = |\det A|_p \, d_p^n x,$$

где $x \to Ax$ – линейный изоморфизм $\mathbb{Q}_p^n$ на $\mathbb{Q}_p^n$ ($\det A \neq 0$).

Впредь условимся в интегралах по всему пространству $\mathbb{Q}_p^n$ опускать область интегрирования,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) \, d_p^n x = \int f(x) \, d_p^n x.$$

Пространства функций $\mathscr{L}^q(M)$ и $\mathscr{L}^q_{\mathrm{loc}}(\mathscr{O})$, $M, \mathscr{O} \in \mathbb{Q}_p^n$, определяются аналогично случаю $n = 1$ (см. § 4).

Как и в случае $n = 1$, с помощью введенной нормы, определяем: $B_\gamma^n(a)$ – шар радиуса p^γ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p^n$ и $S_\gamma^n(a)$ – сфера радиуса p^γ с центром в точке a; $B_\gamma^n(0) = B_\gamma^n$, $B_\gamma^1(a) = B_\gamma(a)$, $S_\gamma^n(0) = S_\gamma^n$, $S_\gamma^1(a) = S_\gamma(a)$,

$$B_\gamma^n(a) = B_\gamma(a_1) \times B_\gamma(a_2) \times \cdots \times B_\gamma(a_n).$$

Теорема Фубини. *Если функция $f\colon \mathbb{Q}_p^{n+m} \to \mathbb{C}$ такова, что повторный интеграл*

$$\int \left[\int |f(x, y)| \, d_p^m y \right] d_p^n x$$

существует, то $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ *и справедливы равенства*

$$\int\left[\int f(x,y)\,d_p^m y\right] d_p^n x = \int f(x,y)\,d_p^n x\,d_p^m y$$
$$= \int\left[\int f(x,y)\,d_p^n x\right] d_p^m y. \tag{5.2}$$

Замена переменных. *Если* $x = x(y)$ *– аналитический диффеоморфизм открыто-замкнутого множества* $D' \subset \mathbb{Q}_p^n$ *на множество* $D \subset \mathbb{Q}_p^n$, *причем*

$$\det\frac{\partial x(y)}{\partial y} = \det\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right) \neq 0, \qquad y \in D',$$

то для любой $f \in \mathscr{L}^1(D)$ *справедливо равенство*

$$\int_D f(x)\,d_p^n x = \int_{D'} f(x(y))\left|\det\frac{\partial x(y)}{\partial y}\right|_p d_p^n y. \tag{5.3}$$

Теорема Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла). *Если последовательность* f_k, $k \to \infty$, *функций* $f_k \in \mathscr{L}^1$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$ *и существует функция* $\psi \in \mathscr{L}^1$ *такая, что*

$$|f_k(x)| \leqslant \psi(x) \quad \text{\textit{при почти всех}}\ x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int f_k(x)\,d_p^n x = \int f(x)\,d_p^n x.$$

§ 6. Обобщенные функции на $\mathbb{Q}_p^n$

Пусть $\mathscr{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p^n$. Функция $\varphi\colon \mathscr{O} \to \mathbb{C}$ называется *локально-постоянной* в $\mathscr{O}$, если для любой точки $x \in \mathscr{O}$ существует такое $\gamma \in Z$, что

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \qquad x' \in B_\gamma^n, \quad x \in \mathscr{O}.$$

Множество локально-постоянных функций в $\mathscr{O}$ обозначим через $\mathscr{E}(\mathscr{O})$; $\mathscr{E}=\mathscr{E}(\mathbb{Q}_p^n)$. Всякая функция $\varphi\in\mathscr{E}(\mathscr{O})$ непрерывна в $\mathscr{O}$. Ее носитель, – замыкание множества тех точек $x\in\mathscr{O}$, для которых $\varphi(x)\neq 0$, – будем обозначать $\operatorname{spt}\varphi$.

Примеры.

$$|x|_p\in\mathscr{E}(\mathbb{Q}_p^n\setminus\{0\}),$$

$$\chi_p((\xi,x))\in\mathscr{E},\qquad \xi\in\mathbb{Q}_p^n.$$

Функция $\varphi\in\mathscr{E}(\mathscr{O})$ называется *основной* в $\mathscr{O}$ (функцией Брюа–Шварца), если ее носитель есть компакт в $\mathscr{O}$. Множество основных функций в $\mathscr{O}$ обозначим $\mathscr{S}(\mathscr{O})$; $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^n)$. Всякая функция $\varphi\in\mathscr{S}(\mathscr{O})$ равномерно локально-постоянна в $\mathscr{O}$.

Примеры.

$$\Omega_k(x)=\Omega(p^{-k}|x|_p)\in\mathscr{S},\qquad k\in Z, \tag{6.1}$$

$$\Delta_k(x)=p^k\Omega(p^k|x|_p)\in\mathscr{S},\qquad k\in Z, \tag{6.2}$$

$$|x|_p\Omega(|x|_p)\in\mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^n\setminus\{0\}),$$

$$\chi_p((\xi,x))\Omega(|x|_p)\in\mathscr{S},\qquad \xi\in\mathbb{Q}_p^n,$$

$$\delta(|x|_p-p^\gamma)\in\mathscr{S}(S_\gamma),\qquad \gamma\in Z,$$

$$\delta(|x|_p-p^\gamma)\delta(x_0-k)\in\mathscr{S}(S_\gamma),\qquad k=1,2,\dots,p-1,\quad \gamma\in Z.$$

Если K – открытый компакт в $\mathbb{Q}_p^n$, то $\theta_K\in\mathscr{S}(K)$. Здесь θ_M – характеристическая функция множества $M\subset\mathbb{Q}_p^n$: $\theta_M(x)=1$, $x\in M$, $\theta_M(x)=0$, $x\notin M$.

Сходимость в $\mathscr{S}(\mathscr{O})$,

$$\varphi_k\to 0,\quad k\to\infty\quad \text{в } \mathscr{S}(\mathscr{O}),$$

обозначает:

(i) существует компакт $K\subset\mathscr{O}$, не зависящий от k и такой, что $\operatorname{spt}\varphi_k\in K$ при всех k;

(ii) существует $\gamma\in Z$, не зависящее ни от k, ни от x, такое что

$$\varphi_k(x+x')=\varphi_k(x),\qquad x'\in B_\gamma^n,\quad x\in K;$$

(iii) $\varphi_k(x)\rightrightarrows 0$, $x\in K$, $k\to\infty$.

Обобщенной функцией в $\mathscr{O}$ называется всякий линейный непрерывный функционал $f\colon \varphi \to (f,\varphi)$ на $\mathscr{S}(\mathscr{O})$. Множество всех обобщенных функций в $\mathscr{O}$ обозначим $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$; $\mathscr{S}' = \mathscr{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$.

Сходимость в $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$,

$$f_k \to 0, \qquad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}'(\mathscr{O}),$$

определяется как слабая сходимость функционалов из $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$, т. е.

$$(f_k,\varphi) \to 0, \qquad k \to \infty, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}).$$

Всякий линейный на $\mathscr{S}(\mathscr{O})$ *функционал* f *непрерывен на* $\mathscr{S}(\mathscr{O})$, *т. е.* $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$.

В открытом множестве $\mathscr{O}$ существует “*разложение единицы*” с функциями из $\mathscr{S}(\mathscr{O})$, а именно: если

$$\mathscr{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \qquad G_k \cap G_j = \varnothing, \quad k \neq j,$$

где G_k, $k = 1, 2, \dots,$ – клопен компакты, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_{G_k}(x) = 1, \qquad x \in \mathscr{O}. \tag{6.3}$$

Обобщенная функция f из $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$ *обращается в нуль в открытом множестве* $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$, если $(f,\varphi) = 0$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O})'$; при этом пишем: $f(x) = 0$, $x \in \mathscr{O}'$. Обобщенные функции f и g из $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$ *совпадают* (*равны*) *в* $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O}$, $f = g$ в $\mathscr{O}'$, если $f(x) - g(x) = 0$, $x \in \mathscr{O}'$. Наибольшее открытое множество, в котором обращается в нуль $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$, называется *нулевым множеством* f и оно обозначается $\mathscr{O}_f \subset \mathscr{O}$. Замкнутое в $\mathscr{O}$ множество $\mathscr{O} \setminus \mathscr{O}_f$ называется *носителем* f и обозначается $\operatorname{spt} f$, $\operatorname{spt} f = \mathscr{O} \setminus \mathscr{O}_f$.

Множество обобщенных функций с компактным носителем в $\mathscr{O}$ обозначим через $\mathscr{E}'(\mathscr{O})$, $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(\mathbb{Q}_p^n)$; $\mathscr{E}'(\mathscr{O})$ – сильно сопряженное пространство к $\mathscr{E}(\mathscr{O})$.

Пример. δ-*Функция*

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \qquad \operatorname{spt} \delta = \{0\}. \tag{6.4}$$

Обратно, всякая $f \in \mathscr{S}'$, $\operatorname{spt} f = \{0\}$, имеет вид

$$f = C\delta, \tag{6.5}$$

где $C \neq 0$ – произвольная постоянная.

Последовательность $\{\delta_k, k \to \infty\}$ функций $\delta_k(x)$ из $\mathscr{S}$ называется *δ-образной*, если она ограничена в $\mathscr{L}^1$ и для любого $\gamma \in Z$

$$\int_{B_\gamma^n} \delta_k(x)\, d_p^n x \to 1, \qquad \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} |\delta_k(x)|\, d_p^n x \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\delta_k \to \delta, \quad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}'. \tag{6.6}$$

Последовательность $\{\omega_k, k \to \infty\}$ функций $\omega_k(x)$ из $\mathscr{S}$ называется *1-образной*, если она есть преобразование Фурье (см. ниже § 7) некоторой δ-образной последовательности $\{\delta_k, k \to \infty\}$.

1-Образная последовательность обладает свойствами: ограничена в $\mathscr{L}^\infty$ и для любого $\gamma \in Z$

$$\omega_k(x) \rightrightarrows 1, \qquad x \in B_\gamma^n, \quad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\omega_k \to 1, \quad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}'. \tag{6.7}$$

Если $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathscr{O})$, то $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$, причем

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, d_p^n x, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}). \tag{6.8}$$

Обобщенные функции типа (6.8) называются *регулярными в $\mathscr{O}$*; остальные обобщенные функции называются *сингулярными*. δ-Функция сингулярна в $\mathbb{Q}_p^n$ и регулярна в $\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}$.

Пусть $0 \in \mathscr{O}$. Если $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O} \setminus \{0\})$, то она допускает *продолжение* (*регуляризацию*) $f_1 \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$ на $\mathscr{O}$, и все ее регуляризации, $\operatorname{reg} f$, задаются формулой

$$\operatorname{reg} f = f_1 + C\delta, \tag{6.9}$$

где C – произвольная постоянная, а f_1 можно взять в виде

$$(f_1, \varphi) = (f, \varphi - \Omega_\gamma \varphi(0)), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}),$$

причем $\gamma \in Z$ таково, что $B_\gamma^n \subset \mathscr{O}$. Заметим, что этот факт не имеет места для обобщенных функций вещественных аргументов! Примером такой f является функция $f(x) = \exp(x^{-1})$.

Для $f = |x|_p^{-1}$ в качестве регуляризации можно взять функционал

$$\big(\operatorname{reg}|x|_p^{-1}, \varphi\big) = \int |x|_p^{-1}[\varphi(x) - \Omega(|x|_p)\varphi(0)]\, d_p^n x, \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Обобщенная функция $\operatorname{reg}|x|_p^{-1}$ является другим примером сингулярной обобщенной функции в $\mathbb{Q}_p^n$.

Произведение обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$ на функцию $a \in \mathscr{E}(\mathscr{O})$ определяется формулой

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}), \quad af \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}). \tag{6.10}$$

Примеры. Если $a \in \mathscr{E}$, то

$$a(x)\,\delta(x) = a(0)\,\delta(x).$$

Если $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathscr{O})$, то af совпадает с обычным произведением функций $a(x)$ и $f(x)$.

Если $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$ и $\operatorname{spt} f$ – открыто-замкнутое множество в $\mathscr{O}$, то

$$f(x) = \theta_{\operatorname{spt} f}(x) f(x). \tag{6.11}$$

Наконец, если $f \in \mathscr{S}'$, то

$$\omega_k f \to f, \quad k \to \infty \quad \text{ в } \mathscr{S}', \tag{6.12}$$

где $\{\omega_k, k \to \infty\}$ – любая 1-образная последовательность.

В $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$ справедлива *теорема о "кусочном склеивании"*. Пусть задан набор обобщенных функций $f_k \in \mathscr{S}'(G_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где G_k – открыто-замкнутые компакты, причем $G_k \cap G_j = \varnothing$, $k \neq j$. Тогда существует (единственная) обобщенная функция $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$, где $\mathscr{O} = \bigcup_{k\geqslant 1} G_k$, такая что $f = f_k$ в G_k, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема о "ядре". *Пусть $\varphi \to A(\varphi)$ – линейное отображение $\mathscr{S}(\mathscr{O})$, $\mathscr{O} \in \mathbb{Q}_p^n$, в $\mathscr{S}'(\mathscr{O}')$, $\mathscr{O}' \in \mathbb{Q}_p^m$. Тогда существует (единственная) обобщенная функция $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O} \times \mathscr{O}')$ такая, что*

$$\big(A(\varphi), \psi\big) = \big(f, \varphi(x)\psi(y)\big), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}), \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}').$$

Пространства $\mathscr{S}(\mathscr{O})$ и $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$ – полные, рефлексивные и ядерные; $\mathscr{S}(\mathscr{O})$ плотно в $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$.

Линейная замена переменных $y = Ax + b$, $\det A \neq 0$, переводит обобщенную функцию $f(y)$ из $\mathscr{S}'(\mathscr{O}')$ в обобщенную функцию $f(Ax+b)$ из $\mathscr{S}'(\mathscr{O})$ по формуле

$$\big(f(Ax+b),\varphi\big) = \frac{1}{|\det A|_p}\big(f(y),\varphi(A^{-1}(y-b))\big), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}). \tag{6.13}$$

Примеры. $\delta(x) = \delta(-x)$, $\quad (\delta(x-x_0),\varphi) = \varphi(x_0)$.

Прямое произведение $f(x)\times g(y)$ обобщенных функций $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}_1)$, $\mathscr{O}_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$, и $g \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}_2)$, $\mathscr{O}_2 \subset \mathbb{Q}_p^m$, определяется формулой

$$(f(x)\times g(y),\varphi) = \big(f(x),(g(y),\varphi(x,y))\big), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_1\times\mathscr{O}_2).$$

Прямое произведение *коммутативно*, так что

$$f(x)\times g(y) = g(y)\times f(x) \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}_1\times\mathscr{O}_2). \tag{6.14}$$

При $g = 1$ формула (6.14) принимает вид

$$\begin{gathered}\Big(f(x),\int_{\mathscr{O}_2}\varphi(x,y)\,d^my\Big) = \int_{\mathscr{O}_2}\big(f(x),\varphi(x,y)\big)\,d^my,\\ f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}_1), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_1\times\mathscr{O}_2)\end{gathered} \tag{6.15}$$

(обобщение теоремы Фубини, см. § 5).

Свертка $f * g$ обобщенных функций $f \in \mathscr{E}$, $\operatorname{spt} f \in B_N^n$, и $g \in \mathscr{S}'$ определяется равенством

$$(f*g,\varphi) = \big(f(x)\times g(y),\Omega_N(x)\varphi(x+y)\big), \qquad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{6.16}$$

На основе этого определяется свертка обобщенных функций f и g из $\mathscr{S}'$

$$(f*g,\varphi) = \lim_{k\to\infty}\big(f(x)\times g(y),\Omega_k(x)\varphi(x+y)\big) = \lim_{k\to\infty}\big((\Omega_k f)*g,\varphi\big),$$

если предел существует для любых $\varphi \in \mathscr{S}$, так что $f*g \in \mathscr{S}'$.

Если свертка $f*g$ существует, то существует и свертка $g*f$, и они равны (*коммутативность свертки*),

$$f*g = g*f. \tag{6.17}$$

Примеры. Если $f \in \mathscr{S}'$, то

$$f*\delta = \delta*f = f. \tag{6.18}$$

Если $f \in \mathscr{S}'$ и $\psi \in \mathscr{S}$, то свертка $f * \psi$ – локально-постоянная функция в $\mathbb{Q}_p^n$, причем

$$(f * \psi)(x) = (f(y), \psi(x-y)), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{6.19}$$

Если $\{\delta_k, k \to \infty\}$ – δ-образная последовательность, то

$$f * \delta_k \to f, \quad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}', \qquad f \in \mathscr{S}'. \tag{6.20}$$

Если $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$ и существует функция $q \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$ такая, что

$$\int_{B_k} f(x-y)g(y)\, d_p^n y \to q(x), \quad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}',$$

то

$$f * g = q(x). \tag{6.21}$$

Если $f \in \mathscr{S}'$ и свертка $f * 1$ существует, то она постоянная. Эту постоянную назовем *интегралом* обобщенной функции f по всему пространству $\mathbb{Q}_p^n$, и обозначим

$$G\!\!\int f(x)\, d_p^n x = f * 1. \tag{6.22}$$

Это определение эквивалентно следующему:

$$G\!\!\int f(x)\, d_p^n x = \lim_{k \to \infty} (f, \Omega_k), \tag{6.23}$$

если предел существует.

Если $f \in \mathscr{S}'$ и $\operatorname{spt} f \subset D$, где D – открыто-замкнутое множество в $\mathbb{Q}_p^n$, то $f = \theta_D f$, и интеграл (6.22) будем обозначать так:

$$G\!\!\int_D f(x)\, d_p^n x.$$

В частности, если $f \in \mathscr{S}'$ и $\varphi \in \mathscr{S}$, $\operatorname{spt} \varphi \subset B_\gamma^n$, то

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} f(x)\varphi(x)\, d_p^n x = (f, \varphi). \tag{6.24}$$

Если $f \in \mathscr{S}'$, $\operatorname{spt} f \subset B_\gamma^n$, то

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} f(x)\, d_p^n x = (f, \Omega_\gamma). \tag{6.25}$$

Введенное понятие интеграла обобщенной функции является расширением понятия интеграла по мере Хаара (см. §§ 1 и 4).

Пример.

$$G\!\!\int \delta(x)\, d_p x = 1.$$

Умножение обобщенных функций. Пусть $f, g \in \mathscr{S}'$. *Произведением* $f \cdot g$ назовем функционал, определяемый равенством

$$f \cdot g = \lim_{k\to\infty} (f * \Delta_k) g,$$

если предел существует в $\mathscr{S}'$, и тогда $f \cdot g \in \mathscr{S}'$.

Если произведение $f \cdot g$ существует, то существует и произведение $g \cdot f$, и они равны (*коммутативность произведения*):

$$f \cdot g = g \cdot f. \tag{6.26}$$

Примеры. Если $a \in \mathscr{E}$, то

$$a \cdot f = af, \qquad a \in \mathscr{E}, \quad f \in \mathscr{S}'.$$

В частности,

$$\begin{gathered} f \cdot 1 = 1 \cdot f = f, \qquad f \in \mathscr{S}', \\ a(x) \cdot \delta(x) = a(0)\, \delta(x), \\ |x|_p^\alpha \cdot \delta(x) = 0, \quad \alpha > 0, \qquad |x|_p \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} = 1. \end{gathered} \tag{6.27}$$

Как и в вещественном случае возникает вопрос: нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы оно было ассоциативным и коммутативным? Ответ отрицательный. Известный пример Л. Шварца в p-адическом случае выглядит так: если бы такое произведение существовало, то в силу (6.27) мы имели бы следующую противоречивую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} = (|x|_p \cdot \delta(x)) \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} \\ &= \delta(x) \cdot (|x|_p \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1}) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x). \end{aligned}$$

§ 7. Преобразование Фурье

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}$. *Преобразование Фурье* $\widetilde{\varphi} = F[\varphi]$ определяется формулой

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x)\chi_p((\xi, x))\, d_p^n x, \qquad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Преобразование Фурье – линейный изоморфизм $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$, справедлива *формула обращения* преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \int \widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-(x, \xi))\, d_p^n \xi, \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Пример.

$$\widetilde{\Omega}_k = \Delta_k, \qquad \widetilde{\Delta}_k = \Omega_k, \qquad k \in Z. \tag{7.1}$$

Преобразование Фурье $\widetilde{f} = F[f]$ обобщенной функции $f \in \mathscr{S}'$ определяется формулой

$$(\widetilde{f}, \varphi) = (f, \widetilde{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathscr{S},$$

так что $\widetilde{f} \in \mathscr{S}'$.

Преобразование Фурье $f \to \widetilde{f}$ – линейный изоморфизм $\mathscr{S}'$ на $\mathscr{S}'$, и справедлива формула обращения

$$f = F^{-1}[\widetilde{f}\,] = F[\check{\widetilde{f}}\,], \qquad f \in \mathscr{S}',$$

где $\check{f}(x) = f(-x)$.

Примеры.

$$\widetilde{\delta} = 1, \qquad \widetilde{1} = \delta; \tag{7.2}$$

$$F[f(Ax+b)] = |\det A|_p^{-1}\chi_p\big(-(A^{-1}b, \xi)\big)F[f(A^{-1}\xi)], \quad \det A \neq 0. \tag{7.3}$$

В частности,

$$F[f(x-b)] = \chi_p((b, \xi))F[f(\xi)]; \tag{7.4}$$

$$\widetilde{\check{f}} = \check{\widetilde{f}}. \tag{7.5}$$

Если $f \in \mathscr{L}^1$, то

$$\widetilde{f}(\xi) = \int f(x)\chi_p((\xi,x))\,d^n x, \tag{7.6}$$

причем $\widetilde{f}$ непрерывна в $\mathbb{Q}_p^n$ и $\widetilde{f}(\xi) \to 0$, $|\xi|_p \to \infty$ (аналог *теоремы Римана–Лебега*).

Если $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$ и существует такая $q \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$, что

$$\int_{B_k^n} f(x)\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x \to q(\xi), \qquad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{S}',$$

то

$$\widetilde{f} = q. \tag{7.7}$$

Если $f \in \mathscr{S}'$, $\operatorname{spt} f \subset B_\gamma^n$, то

$$\widetilde{f}(\xi) = \bigl(f(x), \Omega_\gamma(x)\chi_p((\xi,x))\bigr). \tag{7.8}$$

Если $f \in \mathscr{L}^2$, то

$$\int_{B_k^n} f(x)\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x \to \widetilde{f}(\xi), \qquad k \to \infty \quad \text{в } \mathscr{L}^2. \tag{7.9}$$

Оператор $f \to \widetilde{f}$ – унитарный в $\mathscr{L}^2$, так что справедливо равенство *Парсеваля–Стеклова*

$$\|f\| = \|\widetilde{f}\|, \qquad f \in \mathscr{L}^2, \tag{7.10}$$

где норма $\|f\| = \|f\|_2 = (f,f)^{1/2}$ определена в § 4 и *скалярное произведение* (f,g) в $\mathscr{L}^2$ равно

$$(f,g) = \int f(x)\bar{g}(x)\,d_p^n x, \qquad f,g \in \mathscr{L}^2.$$

Справедливо *неравенство Коши–Буняковского*

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|\,\|g\|, \qquad f,g \in \mathscr{L}^2.$$

Если $f \in \mathscr{L}^2$, то

$$\lim_{k\to\infty} p^{-k/2} \int_{B_k} |f(x)|\,d_p^n x = 0. \tag{7.11}$$

Теорема. *Пусть $f, g \in \mathscr{S}'$. Свертка $f * g$ существует тогда и только тогда, когда существует произведение $\widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$, и справедливы равенства*

$$\widetilde{f * g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}, \qquad \widetilde{f \cdot g} = \widetilde{f} * \widetilde{g}. \tag{7.12}$$

Отметим следующие полезные формулы

$$\int_{S_\gamma^n} \chi_p((x,\xi))\, d_p^n x = (1-p^{-n}) p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p) - q^{(k-1)n} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}), \tag{7.13}$$

откуда

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p((x,\xi))\, d_p^n x = p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p). \tag{7.14}$$

Гауссовым интегралом $G_p(a;\xi)$ называется преобразование Фурье функции $\chi_p(ax^2)$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $p = \infty, 2, 3, 5, \ldots$,

$$G_p(a,\xi) = \int \chi_p(ax^2 + \xi x)\, d_p x = \lambda_p(a) |2a|_p^{-1/2} \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right). \tag{7.15}$$

Справедлива следующая адельная формула

$$G_\infty(a;\xi) \prod_{p=2}^{\infty} G_p(a;\xi) = 1, \qquad a \in \mathbb{Q}^\times, \quad \xi \in \mathbb{Q}, \tag{7.16}$$

вытекающая из адельных формул (2.10)–(2.12).

§ 8. Однородные обобщенные функции

Пусть $\pi(x) = \pi_{\alpha,\theta}(x) = |x|_p^{\alpha-1} \theta(x)$ – квазихарактер поля $\mathbb{Q}_p$ (см. (2.5′)). Обобщенная функция $f \in \mathscr{S}'$ называется *однородной* относительно $\pi_{\alpha,\theta}$, если

$$f(tx) = \pi_{\alpha,\theta}(t) f(x), \qquad t \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times. \tag{8.1}$$

Однородные обобщенные функции относительно главного квазихарактера

$$\pi_{\alpha,1}(x) = |x|_p^{\alpha-1}$$

называются однородными *степени однородности* $\alpha - 1$.

Квазихарактер $\pi_{\alpha,\theta}(x)$ определяет однородную относительно себя обобщенную функцию $\pi_{\alpha,\theta}$ по формуле

$$(\pi_{\alpha,\theta},\varphi)=\int |x|_p^{\alpha-1}\theta(x)\varphi(x)\,d_px, \qquad \varphi\in\mathscr{S}. \tag{8.2}$$

Обобщенная функция $\pi_{\alpha,\theta}$ при $\theta\neq 1$ – целая по α; при $\theta=1$ она голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов

$$\alpha_k=\frac{2k\pi i}{\ln p}\,, \qquad k\in Z,$$

с вычетом $\big((1-p^{-1})/\ln p\big)\,\delta(x)$.

Отметим, что обобщенная функция $|x|_p^{\alpha-1}$, заданная в области $\operatorname{Re}\alpha>0$ формулой (8.2), аналитически продолжается из этой области в область $\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, $\alpha\neq\alpha_k$, $k\in Z$ по формуле

$$\begin{aligned}\big(|x|_p^{\alpha-1},\varphi\big)&=\big(1-p^{-\alpha}\big)^{-1}\int |x|_p^{\alpha-1}\left[\varphi(x)-\varphi\Big(\frac{x}{p}\Big)\right]d_px\\ &=\int |x|_p^{\alpha-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\,d_px, \qquad \varphi\in\mathscr{S},\end{aligned} \tag{8.3}$$

поскольку

$$\int |x|_p^{\alpha-1}=0, \qquad \alpha\neq\alpha_k, \quad k\in Z. \tag{8.3$'$}$$

При $\alpha=\alpha_k$, $k\in Z$, квазихарактеру $\pi_{0,1}(x)=|x|_p^{-1}$ соответствует обобщенная функция $\delta(x)$ степени однородности -1; обратно, всякая однородная обобщенная функция $f\in\mathscr{S}'$ степени однородности -1 имеет вид $f(x)=C\delta(x)$, где C – некоторая постоянная.

Преобразование Фурье $\pi_{\alpha,\theta}$ есть однородная обобщенная функция $\widetilde{\pi}_{\alpha,\theta}$ относительно квазихарактера

$$\pi_{\alpha,\theta}^{-1}(\xi)|\xi|_p^{-1}=|\xi|_p^{-\alpha}\bar\theta(\xi)=\pi_{1-\alpha,\bar\theta}(\xi), \tag{8.4}$$

так что

$$\widetilde{\pi}_{\alpha,\theta}=\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})\pi_{1-\alpha,\bar\theta}. \tag{8.5}$$

Здесь $\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})$ – *гамма-функция* поля $\mathbb{Q}_p$, соответствующая квазихарактеру $\pi_{\alpha,\theta}(x)$,

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})=\widetilde{\pi}_{\alpha,\theta}(1)=\int |x|_p^{\alpha-1}\theta(x)\chi_p(x)\,d_px. \tag{8.6}$$

В частности, при $\theta = 1$, обозначая

$$\Gamma_p(\alpha) = \Gamma_p\big(|x|_p^{\alpha-1}\big),$$

для гамма-функции $\Gamma_p(\alpha)$ главного квазихарактера $|x|_p^{\alpha-1}$ получим представление

$$\Gamma_p(\alpha) = \int |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)\, d_px = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}\,, \qquad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z. \tag{8.7}$$

Для $\epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $|\epsilon|_p = 1$, $p \neq 2$

$$\theta(x) = \operatorname{sgn}_\epsilon x = |x|_p^{\pi i/\ln p} = (-1)^{\gamma(x)},$$

и обозначим

$$\widetilde{\Gamma}_p(\alpha) = \Gamma_p(|x|_p^{\alpha-1}\operatorname{sgn}_\epsilon x).$$

Для $\widetilde{\Gamma}_p$-функции из (8.7) следует выражение

$$\widetilde{\Gamma}_p(\alpha) = \Gamma_p\left(\alpha + \frac{\pi i}{\ln p}\right) = \frac{1+p^{\alpha-1}}{1+p^{-\alpha}}\,, \qquad \alpha \neq \alpha_k + \frac{\pi i}{\ln p}\,, \quad k \in Z. \tag{8.8}$$

Отметим, в частности, формулы для гамма-функций при $d = -1$ (ср. § 3),

$$\Gamma_p\big(\operatorname{sgn}_{p,-1}x|x|_p^{\alpha-1}\big) = \begin{cases} \Gamma_p(\alpha) = \dfrac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}}\,, & p \equiv 1 \pmod 4, \\ \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) = \dfrac{1+p^{\alpha-1}}{1+p^{-\alpha}}\,, & p \equiv 3 \pmod 4, \\ 2i4^{\alpha-1}, & p = 2. \end{cases}$$

Справедливо равенство

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})\,\Gamma_p(\pi_{1-\alpha,\bar\theta}) = \theta(-1). \tag{8.9}$$

В частности,

$$\Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(1-\alpha) = 1. \tag{8.10}$$

Свертка однородных обобщенных функций $\pi_{\alpha,\theta}$ и $\pi_{\beta,\theta'}$ существует и является однородной обобщенной функцией относительно квазихарактера

$$\pi_{\alpha,\theta}(x)\pi_{\beta,\theta'}(x)|x|_p^{-1} = \pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'}(x)$$

и стало быть

$$\pi_{\alpha,\theta} * \pi_{\beta,\theta'} = B_p(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'})\pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'}. \tag{8.11}$$

Здесь $B_p\big(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'}\big)$ – *бета-функция* поля $\mathbb{Q}_p$, соответствующая квазихарактерам $\pi_{\alpha,\theta}$ и $\pi_{\beta,\theta'}$,

$$\begin{aligned} B_p\big(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'}\big) &= \big(\pi_{\alpha,\theta} * \pi_{\beta,\theta'}\big)(1) = \frac{\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})\,\Gamma_p(\pi_{\beta,\theta'})}{\Gamma_p(\pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'})} \\ &= \Gamma_p\big(\pi_{\alpha,\theta}\big)\,\Gamma_p\big(\pi_{\beta,\theta'}\big)\,\Gamma_p\big(\pi_{\gamma,\theta''}\big)\theta''(-1), \\ &\qquad \alpha+\beta+\gamma = 1, \quad \theta\theta'\theta'' = 1. \end{aligned} \tag{8.12}$$

В частности, для главных квазихарактеров (при $\theta = \theta' = 1$) формула (8.12) превращается в такую

$$B_p(\alpha,\beta) = \Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(\beta)\,\Gamma_p(\gamma), \qquad \alpha+\beta+\gamma = 1, \tag{8.13}$$

где обозначено

$$B_p(\alpha,\beta) = B_p\big(|x|_p^{\alpha-1}, |x|_p^{\beta-1}\big).$$

Отметим другое симметричное выражение для бета-функции $B_p(\alpha,\beta)$ [27]:

$$\begin{aligned} B_p(\alpha,\beta) = (1-p^{-1})\big[&(1-p^{-\alpha})^{-1} + (1-p^{-\beta})^{-1} \\ &+ (1-p^{-\gamma})^{-1} - 1\big] - 1, \qquad \alpha+\beta+\gamma = 1. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Если ввести аналоги гамма- и бета-функций Эйлера:

$$\gamma_p(\alpha) = \int_{Z_p} |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)\,d_px = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,,$$

$$b_p(\alpha,\beta) = \int_{Z_p} |x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1}\,d_px = \gamma_p(\alpha) + \gamma_p(\beta) - 1,$$

то равенство (8.14) примет вид

$$\begin{gathered} B_p(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\,b_p(\alpha,\beta) + \frac{1}{2}\,b_p(\alpha,\gamma) + \frac{1}{2}\,b_p(\beta,\gamma) + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\,, \\ \alpha+\beta+\gamma = 1. \end{gathered} \tag{8.15}$$

Рангом $\rho(\theta)$ характера θ называется такое целое число $k \geqslant 0$, что $\theta(t) = 1$ при $|1-t|_p \leqslant p^{-k}$, $t \in Z_p$, и $\theta(t) \neq 1$ при $|1-t|_p = p^{1-k}$,

$t \in Z_p$. Ясно, что нулевой ранг имеет только главный характер $\theta(x) \equiv 1$.

Для характеров ранга $k \geqslant 1$ справедливы формулы [11]:

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) = p^{\alpha k} a_{p,k}(\theta), \tag{8.16}$$

$$a_{p,\gamma}(\theta) = \int_{S_0} \theta(t)\chi_p(p^{-\gamma}t)\, d_pt, \qquad \gamma \geqslant 1, \tag{8.17}$$

$$a_{p,\gamma}(\theta) = 0, \quad \gamma \neq k, \quad |a_{p,k}(\theta)| = p^{-k/2}, \tag{8.18}$$

$$a_{p,k}(\theta)\, a_{p,k}(\bar\theta) = p^{-k}\theta(-1), \tag{8.19}$$

$$\int_{S_k} \theta(p^k x)\chi_p(\xi x)\, d_px = p^k a_{p,k}(\theta)\, \bar\theta(\xi)\, \delta(|\xi|_p - 1), \tag{8.20}$$

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})\, \Gamma_p(\pi^{-1}_{\alpha,\theta}) = p^k\theta(-1), \tag{8.21}$$

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha+1,\theta}) = p^k\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}). \tag{8.22}$$

Примеры. Ранг характера

$$\operatorname*{sgn}_{p,d} x, \qquad |d|_p = \frac{1}{p}\,, \quad p \neq 2, \tag{8.23}$$

равен 1. Поэтому в силу (8.16) и (8.19)

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) = \pm p^{\alpha-1/2}\sqrt{\operatorname{sgn}_{p,d}(-1)}\,. \tag{8.24}$$

Например:

$$\begin{aligned}
\Gamma_3\big(|x|_3^{\alpha-1}\operatorname{sgn}_{3,3}x\big) &= -i3^{\alpha-1/2},\\
\Gamma_2\big(|x|_2^{\alpha-1}\operatorname{sgn}_{2,-1}x\big) &= 2i4^{\alpha-1},\\
\Gamma_2\big(|x|_2^{\alpha-1}\operatorname{sgn}_{2,7}x\big) &= 2i4^{\alpha-1},\\
\Gamma_2\big(|x|_2^{\alpha-1}\operatorname{sgn}_{2,3}x\big) &= 2i4^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Оператор (8.2)

$$\varphi \to (\pi_{\alpha,\theta}, \varphi) \equiv M^\pi[\varphi]$$

называется *преобразованием Меллина функции* $\varphi \in \mathscr{S}$ *относительно квазихарактера* $\pi_{\alpha,\theta}(x)$. При $\theta = 1$ функция $M^{|x|_p^{\alpha-1}}[\varphi] \equiv$

$M^\alpha[\varphi]$ называется просто преобразованием Меллина функции $\varphi \in \mathscr{S}$. В силу (8.3) его можно записать в следующем виде

$$M^\alpha[\varphi] = (1-p^{-\alpha})^{-1} \int |x|_p^{\alpha-1} \left[\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{p}\right)\right] d_p x,$$
$$\alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z.$$

В силу (8.2) и (8.5) имеет место следующее равенство

$$M^\pi[\widetilde{\varphi}] = \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) M^{\widetilde{\pi}}[\varphi], \qquad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{8.25}$$

При $\theta = 1$ формула (8.25) принимает вид

$$M^\alpha[\widetilde{\varphi}] = \Gamma_p(\alpha) M^{1-\alpha}[\varphi]. \tag{8.25$'$}$$

Преобразование Меллина $Z_p^\times$-инвариантных (обобщенных) функций и его обращение. Функция $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ называется $Z_p^\times$-*инвариантной*, если $\varphi(x) = \varphi(t|x|_p)$, $t \in Z_p^\times$, $x \in \mathbb{Q}_p^\times$, или, другими словами,

$$\varphi(x) = (1-p^{-1})^{-1} \int_{Z_p^\times} \varphi(t|x|_p)\, d_p t \equiv S[\varphi](|x|_p).$$

Всякая $Z_p^\times$-инвариантная функция $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ однозначно представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_\gamma \varphi_\gamma \delta(|x|_p - p^\gamma), \qquad \varphi_\gamma = \varphi(p^\gamma) = S[\varphi](p^\gamma).$$

Поэтому подпространство пространства $\mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$, состоящее из $Z_p^\times$-инвариантных функций, изоморфно пространству финитных последовательностей $\{\varphi_\gamma, \gamma \in N\}$, где N – ограниченное подмножество Z.

Обобщенная функция $f \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ называется $Z_p^\times$-*инвариантной*, если

$$(f, \varphi) = \big(f(x), S[\varphi](|x|_p)\big), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times).$$

Всякая $Z_p^\times$-инвариантная обобщенная функция $\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{Q}_p^\times)$ однозначно представляется в виде

$$f(x) = \sum_\gamma f_\gamma \delta\big(|x|_p - p^\gamma\big), \quad f_\gamma = \big(1-p^{-1}\big)^{-1} p^{-\gamma} \big(f(x), \delta(|x|_p - p^\gamma)\big),$$

так что подпространство пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{Q}_p^\times)$, состоящее из $Z_p^\times$-инвариантных обобщенных функций, изоморфно пространству последовательностей $\{f_\gamma, \gamma \in Z\}$.

Если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ есть $Z_p^\times$-инвариантная функция, то ее преобразование Меллина

$$M^\alpha[\varphi] = \int |x|^{\alpha-1} S[\varphi](|x|_p)\, d_p x = (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma \in M} \varphi_\gamma p^{\alpha\gamma}$$

есть целая функция α и справедлива формула обращения [30]

$$\varphi(x) = \frac{\ln p}{2\pi i(1 - p^{-1})} \int_{\sigma - i\pi/\ln p}^{\sigma + i\pi/\ln p} M^\alpha[\varphi] |x|_p^{-\alpha}\, d\alpha. \tag{8.26}$$

Формула (8.26) распространяется и на $Z_p^\times$-инвариантные обобщенные функции f из $\mathscr{S}'(\mathbb{Q}_p^\times)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\gamma \in Z} |f_\gamma| p^{c\gamma} < \infty$$

при некотором c. Ее преобразование Меллина

$$M^\alpha[f] = \bigl(f(x), |x|_p^{\alpha-1}\bigr) = \bigl(1 - p^{-1}\bigr) \sum_{\gamma \in Z} f_\gamma p^{\gamma\alpha}$$

есть голоморфная функция α в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha < c$ и справедлива формула обращения (8.26) для f, причем интеграл (8.26) не зависит от $\sigma < c$.

Пространство $\mathbb{Q}_p^n$. Ограничимся случаем главного квазихарактера $|x|_p^\alpha$. Обобщенная функция $|x|_p^{\alpha-n}$ – однородная степени однородности $\alpha - n$, голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $\alpha_k = 2k\pi i/\ln p$, $k \in Z$, с вычетом $\bigl((1 - p^{-n})/(\ln p)\bigr)\, \delta(x)$; справедлива формула преобразования Фурье [17], [18]

$$\widetilde{|x|_p^{\alpha-n}} = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \qquad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \tag{8.27}$$

где $\Gamma_p^{(n)}$ – гамма-функция векторного пространства $\mathbb{Q}_p^n$ ($\Gamma_p^{(1)} = \Gamma_p$),

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha) = \int |x|_p^{\alpha-n}\chi_p(x_1)\,d_p^n x = \frac{1-p^{\alpha-n}}{1-p^{-\alpha}}\,, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \tag{8.28}$$

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha)\,\Gamma_p^{(n)}(n-\alpha) = 1, \tag{8.29}$$

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha) = (-1)^{n-1}p^{(n-1)(n/2-\alpha)}\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma_p(\alpha-k). \tag{8.30}$$

Бета-функция $B_p^{(n)}$ пространства $\mathbb{Q}_p^n$ определяется аналогично (8.11) ($B_p^{(1)} = B_p$) равенством

$$|x|_p^{\alpha-n} * |x|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha,\beta)|x|_p^{\alpha+\beta-n}, \tag{8.31}$$

$$B_p^{(n)}(\alpha,\beta) = \Gamma_p^{(n)}(\alpha)\,\Gamma_p^{(n)}(\beta)\,\Gamma_p^{(n)}(\gamma), \qquad \alpha+\beta+\gamma = n. \tag{8.32}$$

Адельные формулы для гамма- и бета-функций. Для гамма-функций справедлива следующая адельная формула [1], [7]

$$\Gamma_\infty(\alpha)\,\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_p(\alpha) = 1, \qquad \alpha \neq 0, 1, \tag{8.33}$$

где Γ_∞ – гамма-функция поля $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Gamma_\infty(\alpha) &= \int |x|_p^{\alpha-1}\exp(-2\pi i x)\,dx \\ &= 2(2\pi)^{-\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma(\alpha) = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}\,,\end{aligned} \tag{8.34}$$

где Γ – гамма-функция Эйлера и ζ – дзета-функция Римана,

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \prod_{p=2}^{\infty}(1-p^{-\alpha})^{-1}. \tag{8.34$'$}$$

Регуляризация расходящегося бесконечного произведения в (8.33) определяется с помощью формулы

$$\prod_{p=2}^{P}\Gamma_p(\alpha)\,\mathrm{AC}\prod_{p=P_1}^{\infty}\frac{1}{(1-p^{-\alpha})} = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(1-\alpha)}\;\mathrm{AC}\prod_{p=P_1}^{\infty}\frac{1}{(1-p^{\alpha-1})}\,,$$
$$P = \infty, 2, 3, 5, \ldots, \tag{8.35}$$

вытекающей из общей формулы Тейта. Здесь P_1 – простое число, следующее за простым числом P; $\mathrm{AC}\, f(\alpha)$ – аналитическое продолжение по α функции $f(\alpha)$, голоморфной в некоторой области комплексной плоскости переменной α.

Переходя в (8.35) к пределу при $P \to \infty$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, обозначая

$$\mathrm{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(\alpha) = \lim_{P\to\infty} \prod_{p=2}^{P} \Gamma_p(\alpha)\, \mathrm{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \frac{1}{(1-p^{-\alpha})}$$

и пользуясь равенством (8.34), получим адельную формулу (8.33). При $\mathrm{Re}\,\alpha \leqslant 0$ $\mathrm{reg}\prod \Gamma_p(\alpha)$ определяется из формулы (8.33) как аналитическое (мероморфное) продолжение по α.

Аналогичная адельная формула справедлива и для бета-функций:

$$B_\infty(\alpha,\beta)\, \mathrm{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_p(\alpha,\beta) = 1, \tag{8.36}$$

где

$$B_\infty(\alpha,\beta) = \Gamma_\infty(\alpha)\,\Gamma_\infty(\beta)\,\Gamma_\infty(\gamma), \qquad \alpha+\beta+\gamma = 1, \tag{8.37}$$

– бета-функция поля $\mathbb{R}$ и, в соответствии с (8.13),

$$\mathrm{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_p(\alpha,\beta) = \prod_{x=\alpha,\beta,\gamma} \mathrm{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(x). \tag{8.38}$$

Отметим другие симметричные выражения для B_∞:

$$\begin{aligned} B_\infty(\alpha,\beta) &= B(\alpha,\beta) + B(\alpha,\gamma) + B(\beta,\gamma) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \\ &= \frac{4}{\pi} \prod_{x=\alpha,\beta,\gamma} \Gamma(x) \cos\frac{\pi x}{2} = \prod_{x=\alpha,\beta,\gamma} \frac{\zeta(1-x)}{\zeta(x)}\,. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Адельная формула для дзета-функции Римана $\zeta(\alpha)$ (см. (8.34′)). Функция $\zeta(\alpha)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$\pi^{-\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\zeta(\alpha) = \pi^{-(\alpha-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\zeta(1-\alpha). \tag{8.40}$$

Обозначим:

$$\zeta_\infty(\alpha) = \int e^{-\pi x^2}|x|^{\alpha-1}\,dx = \pi^{-\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \tag{8.41}$$

$$\zeta_p(\alpha) = \frac{1}{1-p^{-1}}\int_{Z_p}|x|_p^{\alpha-1}\,d_px = \frac{1}{1-p^{-\alpha}}\,, \tag{8.42}$$

$$\zeta_A(\alpha) = \zeta_\infty(\alpha)\zeta(\alpha). \tag{8.43}$$

Тогда будут справедливы следующие формулы:

$$\zeta_A(\alpha) = \zeta_A(1-\alpha), \qquad \text{(ср. (8.40))}, \tag{8.44}$$

$$\Gamma_\infty(\alpha) = \frac{\zeta_\infty(\alpha)}{\zeta_\infty(1-\alpha)} = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}\,, \quad \text{(ср. (8.34))}, \tag{8.45}$$

$$\zeta_\infty(\alpha)\prod_{p=2}^{\infty}\zeta_p(\alpha) = \zeta_A(\alpha), \qquad \text{(ср. (8.43))}. \tag{8.46}$$

Формула (8.46) по существу есть адельная формула для дзета-функции Римана.

§ 9. Квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$

Пусть p-адическое число $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. *Квадратичным расширением* поля $\mathbb{Q}_p$ является поле $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) = \mathbb{Q}_p + \sqrt{d}\,\mathbb{Q}_p$. Опишем все неизоморфные поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$. В силу сказанного в § 1, достаточно рассмотреть целые рациональные числа d, свободные от квадратов, т. е. $d = \pm p_1 p_2 \cdots p_n$, $d \neq 1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – различные простые числа.

Возможны следующие случаи:

$$p \neq 2,\ p_1,\ldots,p_n, \qquad \left(\frac{d}{p}\right) = 1, \qquad \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_p;$$

$$p \neq 2,\ p_1,\ldots,p_n, \qquad \left(\frac{d}{p}\right) = -1, \qquad \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{\epsilon}\,), \quad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1;$$

$$p \neq 2,\ p = p_i, \qquad \left(\frac{d/p_i}{p}\right) = 1, \qquad \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}\,);$$

$$p \neq 2,\ p = p_i, \qquad \left(\frac{d/p_i}{p}\right) = -1, \qquad \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{p\epsilon}\,), \quad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1;$$

$$p = 2, \qquad d \equiv 3, 5, 7 \pmod 8, \qquad \mathbb{Q}_2(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_2(\sqrt{\epsilon}\,),$$
$$\epsilon = 3, 5, 7 \text{ соотв.};$$

$$p = 2, \qquad d/2 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8, \qquad \mathbb{Q}_2(\sqrt{d}\,) \sim \mathbb{Q}_2(\sqrt{2\epsilon}\,),$$
$$\epsilon = 1, 3, 5, 7 \text{ соотв.}$$

Отметим, что $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ есть замыкание поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,) = \mathbb{Q} + \sqrt{d}\,\mathbb{Q}$ по метрике $\sqrt{|z\bar{z}|_p}$, где $z = x + \sqrt{d}\,y$, $\bar{z} = x - \sqrt{d}\,y$, $z\bar{z} = x^2 - dy^2$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

Меру Хаара d_pz поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ выберем в виде

$$d_pz = \frac{1}{\delta}\, d_px\, d_py, \qquad z = x + \sqrt{d}\,y, \qquad x, y \in \mathbb{Q}_p, \tag{9.1}$$

где $\delta = \delta_{p,d} = 2$, если $p = 2$, $d \equiv 5 \pmod 8$ и $\delta = 1$ в остальных случаях. Мера d_pz нормирована условием (см. [6])

$$\int_{B_0^2} d_pz = 1, \qquad B_0^2 = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar{z}|_p \leqslant 1]. \tag{9.2}$$

Имеет место равенство

$$d_p(az) = |a\bar{a}|_p\, d_pz, \qquad a \in \mathbb{Q}_p^\times(\sqrt{d}\,). \tag{9.3}$$

Величина $|a\bar{a}|_p$ называется *модулем автоморфизма* $z \to az$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$.

Максимальное компактное подкольцо $Z_p(\sqrt{d}\,)$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ есть

$$Z_p(\sqrt{d}\,) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar{z}|_p \leqslant 1], \qquad Z_p(\sqrt{d}\,) = B_0^2;$$

его мультипликативная подгруппа есть

$$Z_p^\times(\sqrt{d}\,) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar{z}|_p = 1];$$

его максимальный идеал есть

$$I_p(\sqrt{d}\,) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar{z}|_p < 1].$$

Классы вычетов $Z_p(\sqrt{d}\,)/I_p(\sqrt{d}\,)$ образуют конечное поле характеристики p, называемое *полем вычетов*; число его элементов $q = q_{p,d}$ (равное p или p^2) называется *модулем поля* $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$. Для конкретных случаев имеем: при $p = 2$, $d \equiv 5 \pmod 8$, $q = 4$, поле вычетов $\{0, 1, 1/2 \pm \sqrt{5}/2\}$; при $d \not\equiv 5 \pmod 8$, $q = 2$ поле вычетов $\{0, 1\}$; при $p \neq 2$, $|d|_p = 1$, $q = p^2$ поля вычетов $\{k + \sqrt{d}j,\ k, j = 0, 1, \dots, p-1\}$; при $|d|_p = 1/p$, $q = p$ поле вычетов $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Ранг аддитивного характера $\chi_p(z + \bar{z})$ есть наибольшее целое число $r \geqslant 0$, для которого

$$\chi_p(z + \bar{z}) \equiv 1, \qquad |z\bar{z}|_p \leqslant q^r \qquad \Bigl(q^{-r/2} = \delta\sqrt{|4d|_p}\Bigr). \tag{9.4}$$

В частности,

$$\begin{cases} r = 0, & |d|_p = 1, \quad p \neq 2 \text{ или } d \equiv 5 \pmod 8,\ p = 2; \\ r = 1, & |d|_p = \dfrac{1}{p}, \quad p \neq 2; \\ r = 2, & d \equiv 3, 7 \pmod 8, \quad p = 2; \\ r = 3, & |d|_2 = \dfrac{1}{2}, \quad p = 2. \end{cases}$$

Преобразование Фурье $\widetilde{\varphi}(\zeta)$, $\zeta = \xi + \sqrt{d}\,\eta$, основной функции $\varphi(z) \equiv \varphi(x, y)$ из $\mathscr{S}\bigl(\mathbb{Q}_p\bigl(\sqrt{d}\,\bigr)\bigr) \sim \mathscr{S}(\mathbb{Q}_p^2)$ определим формулой

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\zeta) &= \delta\sqrt{|4d|_p} \int \varphi(z)\chi_p(z\zeta + \bar{z}\bar{\zeta}\,)\,d_p z \\ &= \sqrt{|4d|_p} \int \varphi(x, y)\chi_p(2x\xi + 2dy\eta)\,d_p x\,d_p y. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Фурье выражается равенством

$$\varphi(z) = \delta\sqrt{|4d|_p} \int \widetilde{\varphi}(\zeta)\xi_p(-z\zeta - \bar{z}\bar{\zeta}\,)\,d_p\zeta.$$

Таким образом, мера $\delta\sqrt{|4d|_p}\,d_p z$ самодвойственна относительно характера $\chi_p(z + \bar{z})$.

Обобщенная функция

$$|z\bar{z}|_p^{\alpha-1} = |x^2 - dy^2|_p^{\alpha-1}$$

определяется равенством (см. § 8)

$$\begin{aligned} \bigl(|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}, \varphi\bigr) &= \int_{|z\bar{z}|_p \leqslant 1} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1}[\varphi(z) - \varphi(0)]\,d_p z + \int_{|z\bar{z}|_p > 1} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1}\,d_p z \\ &\quad + \varphi(0)\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}}, \qquad \varphi \in \mathscr{S}\bigl(\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)\bigr), \end{aligned}$$

или эквивалентно,

$$\big(|z\bar z|_p^{\alpha-1},\varphi\big)=\int |z\bar z|_p^{\alpha-1}[\varphi(z)-\varphi(0)]\,d_pz,\qquad \varphi\in\mathscr{S}\big(\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)\big).$$

Здесь мы использовали формулы:

$$\int_{B_0^2}|z\bar z|_p^{\alpha-1}\,d_pz=\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-\alpha}}\,,\qquad \alpha\neq\alpha_k,\quad k\in Z,\tag{9.5}$$

$$\int |z\bar z|_p^{\alpha-1}\,d_pz=0,\qquad \alpha\neq\alpha_k,\quad k\in Z,\tag{9.6}$$

где

$$\alpha_k=\frac{2k\pi i}{\ln q}\,,\qquad k\in Z.\tag{9.7}$$

Обобщенная функция $|z\bar z|_p^{\alpha-1}$ (степени однородности $2\alpha-2$) голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $\alpha=\alpha_k$, $k\in Z$ (см. (9.6)), с вычетом $\big((q-1)/(q\ln q)\big)\delta(x,y)$.

Справедлива формула преобразования Фурье [6]

$$F\big[|z\bar z|_p^{\alpha-1}\big]=\Gamma_{p,d}(\alpha)|\zeta\bar\zeta|_p^{-\alpha},\qquad \alpha\neq\alpha_k,\quad k\in Z,\tag{9.8}$$

где

$$\Gamma_{p,d}(\alpha)=\delta\sqrt{|4d|_p}\int |z\bar z|_p^{\alpha-1}\xi_p(z+\bar z)\,d_pz=\rho_{p,d}(\alpha)\,\Gamma_q(\alpha)\tag{9.9}$$

– гамма-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$,

$$\Gamma_q(\alpha)=\frac{1-q^{\alpha-1}}{1-q^{-\alpha}}\tag{9.10}$$

– *приведенная гамма-функция* поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$.

Из (9.8)–(9.10) вытекает следующее соотношение для гамма-функции поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$:

$$\Gamma_{p,d}(\alpha)\,\Gamma_{p,d}(1-\alpha)=1.\tag{9.11}$$

Бета-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ вводится аналогично § 8. Свертка $|z\bar z|_p^{\alpha-1}*|z\bar z|_p^{\beta-1}$ существует для всех комплексных (α,β) из трубчатой области $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1$ и выражается интегралом

$$\begin{aligned}|z\bar z|_p^{\alpha-1}*|z\bar z|_p^{\beta-1}&=\int |\zeta\bar\zeta|_p^{\alpha-1}|(z-\zeta)(\bar z-\bar\zeta)|_p^{\beta-1}\,d_p\zeta\\&=B_{p,d}(\alpha,\beta)|z\bar z|_p^{\alpha+\beta-1},\end{aligned}\tag{9.12}$$

где $B_{p,d}$ – бета-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ [11]:

$$\begin{aligned}B_{p,d}(\alpha,\beta)&=\int|\zeta\bar\zeta|_p^{\alpha-1}|(1-\zeta)(1-\bar\zeta)|_p^{\beta-1}\,d_p\zeta\\&=\frac{\Gamma_{p,d}(\alpha)\,\Gamma_{p,d}(\beta)}{\delta\sqrt{|4d|_p}\,\Gamma_{p,d}(\alpha+\beta)}\,.\end{aligned}\tag{9.13}$$

Из равенств (9.9)–(9.13) следуют такие симметричные выражения для бета-функции:

$$\begin{aligned}B_{p,d}(\alpha,\beta)&=\frac{1}{\delta\sqrt{|4d|_p}}\,\Gamma_{p,d}(\alpha)\,\Gamma_{p,d}(\beta)\,\Gamma_{p,d}(\gamma)\\&=B_q(\alpha,\beta)=\Gamma_q\,(\alpha)\,\Gamma_q(\beta)\,\Gamma_q(\gamma),\end{aligned}\tag{9.14}$$
$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad(\alpha,\beta)\neq(\alpha_k,\alpha_j),\quad(k,j)\in Z^2.$$

Отметим, что равенства (9.12)–(9.14) справедливы при всех (α,β) таких, что $(\alpha,\beta)\neq(\alpha_k,\alpha_j)$, $(k,j)\in Z^2$.

Назовем *верхней* (*нижней*) *полуплоскостью* поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$ совокупность точек $z=x+\sqrt{d}\,y$, для которых $\operatorname{sgn}_{p,d}y=1$ (соответственно $\operatorname{sgn}_{p,d}y=-1$).

Введем обобщенные функции $(x\pm\sqrt{d}\,0)^{-1}$ как преобразование Фурье функций

$$\theta_d^{\pm}(\xi)=\frac12\,(1\pm\operatorname{sgn}_{p,d}\xi),\qquad\big(x\pm\sqrt{d}\,0\big)^{-1}=\widetilde{\theta}_d^{\pm}(x).\tag{9.15}$$

Справедливы равенства [11]

$$F\big[\theta_d^{\pm}\big](x)=\big(x\pm\sqrt{d}\,0\big)^{-1}=\frac12\,\delta(x)+C_{p,d}\,\frac{\operatorname{sgn}_{p,d}\,x}{|x|_p}\,,\qquad p\neq2,\tag{9.16}$$

аналогичные формулам Сохоцкого (для поля $\mathbb{R}$). Здесь обобщенная функция $(\operatorname{sgn}_{p,d}\,x)/|x|_p$ и число $C_{p,d}$ определяются равенствами

$$\left(\frac{\operatorname{sgn}_{p,d}x}{|x|_p}\,,\varphi\right)=\int\frac{\operatorname{sgn}_{p,d}x}{|x|_p}\,\varphi(x)\,d_px,\qquad\varphi\in\mathscr{S},\tag{9.17}$$

$$C_{p,d}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{p}{p+1}}\,, & \text{если}\ \ |d|_p=1,\\ \pm\dfrac12\sqrt{p\,\operatorname{sgn}_{p,d}(-1)}\,, & \text{если}\ \ |d|_p=\dfrac1p\,.\end{cases}$$

Для Γ_q-функций справедливы следующие адельные формулы [6]

$$\Gamma_\infty^2(\alpha)\,\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^\nu(\alpha) = D^{1/2-\alpha}, \qquad d>0, \tag{9.18}$$

$$\Gamma_\omega(\alpha)\,\mathrm{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^\nu(\alpha) = |D|^{1/2-\alpha}, \qquad d<0, \tag{9.18$'$}$$

где Γ_∞ и Γ_ω – гамма-функции полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно;

$$\begin{aligned}\Gamma_\omega(\alpha) &= 2\int |z\bar{z}|^{\alpha-1}\exp(-4\pi i x)\,dx\,dy = (2\pi)^{1-2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\\ &= 2(2\pi)^{-2\alpha}\Gamma^2(\alpha)\sin\pi\alpha = i\Gamma_\infty(\alpha)\,\widetilde{\Gamma}(\alpha),\end{aligned}$$

где

$$\widetilde{\Gamma}(\alpha) = \int \mathrm{sgn}\ x|x|^{\alpha-1}\exp(-2\pi i x)\,dx = -2i(2\pi)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,;$$

$\nu=2$, если $d\in\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ и $\nu=1$, если $d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$; D – дискриминант поля $Q(\sqrt{d}\,)$, равный d, если $d\equiv 1 \pmod 4$ и равный $4d$, если $d\equiv 2,3 \pmod 4$. (Мера Хаара поля $\mathbb{C}$ выбрана самодвойственной: $|dz\wedge\bar{z}| = 2\,dx\,dy$, $z=x+iy$.)

Регуляризация расходящегося бесконечного произведения в (9.18) определяется с помощью формулы (ср. (8.35))

$$\prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^\nu(\alpha)\,\mathrm{AC}\prod_{p=P_1}^{\infty}(1-q^{-\alpha})^{-\nu} = \frac{\zeta_d(\alpha)}{\zeta_d(1-\alpha)}\,\mathrm{AC}\prod_{p=P_1}^{\infty}(1-q^{-\alpha})^{-\nu},$$
$$P=\infty,2,3,5,\ldots, \tag{9.19}$$

вытекающей из общей формулы Тейта. Здесь ζ_d – дзета-функция Дедекинда поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$,

$$\zeta_d(\alpha) = \prod_{p=2}^{\infty}(1-q^{-\alpha})^{-\nu}.$$

Дзета-функция Дедекинда удовлетворяет соотношению (ср. (8.40))

$$(2\pi)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\zeta_d(\alpha) = (2\pi)^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\zeta_d(1-\alpha)|D|^{1/2-\alpha},$$

которое эквивалентно соотношению (ср. (8.46))

$$\zeta_{A_d}(\alpha) = \zeta_{A_d}(1-\alpha)|D|^{1/2-\alpha},$$

где обозначено

$$\zeta_{A_d}(\alpha) = (2\pi)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\zeta_d(\alpha).$$

Переходя в (9.19) к пределу при $P \to \infty$, обозначая

$$\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^{\nu}(\alpha) = \lim_{P\to\infty}\prod_{p=2}^{P}\Gamma_q^{\nu}(\alpha)\,\mathrm{AC}\prod_{p=P_1}^{\infty}(1-q^{-\alpha})^{-\nu}$$

и пользуясь равенствами

$$\Gamma_{\infty}^2(\alpha) = D^{1/2-\alpha}\frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \qquad d>0, \tag{9.20}$$

$$\Gamma_{\omega}(\alpha) = |D|^{1/2-\alpha}\frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \qquad d<0, \tag{9.20$'$}$$

в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha < 0$ получим адельные формулы (9.18). При остальных α $\operatorname{reg}\prod\Gamma_q^{-\nu}(\alpha)$ определяется из формул (9.18) как аналитическое (мероморфное) продолжение по α.

Аналогичные адельные формулы справедливы и для бета-функций

$$B_{\infty}^2(\alpha,\beta)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}B_q^{\nu}(\alpha,\beta) = \sqrt{D}\,, \qquad d>0, \tag{9.21}$$

$$B_{\omega}(\alpha,\beta)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}B_q^{\nu}(\alpha,\beta) = \sqrt{|D|}, \qquad d<0, \tag{9.21$'$}$$

где B_∞ и B_ω – бета-функции полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно.

$$B_{\omega}(\alpha,\beta) = \Gamma_\omega(\alpha)\,\Gamma_\omega(\beta)\,\Gamma_\omega(\gamma), \qquad \alpha+\beta+\gamma=1 \tag{9.22}$$

и в соответствии с формулой (9.14) (ср. (8.36))

$$\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}B_q^{\nu}(\alpha,\beta) = \prod_{x=\alpha,\beta.\gamma}\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\Gamma_q^{\nu}(x).$$

Отметим другие симметричные выражения для $B_{-\omega}$:

$$B_{\omega}(\alpha,\beta) = 2\pi\prod_{x=\alpha,\beta,\gamma}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{2}{\pi^2}\prod_{x=\alpha,\beta,\gamma}\Gamma^2(x)\sin\pi x. \tag{9.23}$$

§ 10. Оператор D^α

Обобщенная функция

$$f_\alpha(x) = \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}$$

голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $1+\alpha_k$, $\alpha_k = 2k\pi i/\ln p$, $k \in Z$, с вычетом $(1-p)/(p\ln p)\,\delta(x)$, причем $f_{\alpha_k} = \delta$ и

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta},$$
$$\alpha \neq 1+\alpha_k, \quad \beta \neq 1+\alpha_j, \quad \alpha+\beta \neq 1+\alpha_i, \quad (k,j,i) \in Z^3.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ и $f \in \mathscr{S}'$ таковы, что свертка $f_{-\alpha} * f$ существует в $\mathscr{S}'$. Оператор $D^\alpha f = f_{-\alpha} * f$ называется при $\alpha > 0$ оператором (дробного) *дифференцирования порядка* α, а при $\alpha < 0$ – оператором (дробного) *интегрирования порядка* $-\alpha$; при $\alpha = 0$ $D^0 f = \delta * f = f$ – тождественный оператор. Таким образом, оператор D^α – гиперсингулярный псевдодифференциальный (РДО) с символом $|\xi|_p$.

Пример. Если $\alpha = 1$ и $\varphi \in \mathscr{S}$, то

$$(D\varphi)(x) = \frac{p^2}{p+1}\int \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|_p^2}\,d_p y = \int |\xi|_p \widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d_p\xi. \tag{10.1}$$

Пусть $\alpha = 1$. Рассмотрим локально-интегрируемую в $\mathbb{Q}_p$ функцию

$$f_1(x) = -\frac{1-p^{-1}}{\ln p}\ln|x|_p. \tag{10.2}$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\int f_\alpha(x)\varphi(x)\,d_p x \to \int f_1(x)\varphi(x)\,d_p x, \qquad \alpha \to 1, \tag{10.3}$$

если $\varphi \in \mathscr{S}$ удовлетворяет условию

$$\int \varphi(x)\,d_p x = 0; \tag{10.4}$$

$$\widetilde{f_1}(\xi) = \operatorname{reg}|\xi|_p^{-1} + \frac{1}{p}\,\delta(\xi), \tag{10.5}$$

где обобщенная функция $\operatorname{reg}|\xi|_p^{-1}$ определена в § 6;

$$f_1 * f_\alpha = f_{1-\alpha}, \qquad \alpha \geqslant 1. \tag{10.6}$$

Введем оператор интегрирования порядка 1, соответствующий значению $\alpha = -1$,

$$D^{-1} f = f_1 * f, \qquad f \in \mathscr{S}', \tag{10.7}$$

если свертка $f_1 * f$ существует. Тогда

$$D^{-\alpha} f \to D^{-1} f, \qquad \alpha \to 1 \quad \text{в } \mathscr{S}', \tag{10.8}$$

если $f \in \mathscr{E}'$ и

$$G\!\!\int f(x)\, d_p x = 0. \tag{10.9}$$

Резюмируя, получаем следующие свойства оператора D^α, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f = D^\beta D^\alpha f, \qquad f \in \mathscr{S}', \tag{10.10}$$

если $\alpha \neq -1$, $\beta \neq -1$, $\alpha + \beta \neq -1$, или $\alpha \leqslant 0$, $\beta = -1$, или $\alpha = -1$, $\beta \leqslant 0$; если f удовлетворяет условию (10.9), то равенства (10.10) справедливы при всех вещественных α и β, и $D^\alpha f$ непрерывно зависит от α в $\mathscr{S}'$.

Пример.

$$D^\alpha \chi_p(ax) = |a|_p^\alpha \chi_p(ax), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times. \tag{10.11}$$

Уравнение

$$D^\alpha \psi = g, \quad g \in \mathscr{E}', \tag{10.12}$$

разрешимо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha > 0$ его общее решение выражается формулой

$$\psi = D^{-\alpha} g + C, \tag{10.13}$$

где C – произвольная постоянная; при $\alpha \leqslant 0$ его решение единственно и выражается формулой (10.13) при $C = 0$.

Фундаментальное решение $\mathscr{E}(x)$ оператора D^α,

$$D^\alpha \mathscr{E}(x) = \delta(x), \quad \mathscr{E} \in \mathscr{S}', \tag{10.14}$$

вычислено в [3]. Оно равно

$$\mathscr{E}(x) = \begin{cases} \Gamma_p^{-1}(\alpha)|x|_p^{\alpha-1}, & \alpha \neq -1, \\ -\dfrac{1-p^{-1}}{\ln p} \ln|x|_p, & \alpha = -1. \end{cases} \tag{10.15}$$

Отметим, что фундаментальное решение существует в $\mathscr{S}'$ не для любого РДО. Например, для оператора $D_t^\alpha - D_x^\alpha$ оно не существует. Действительно, если бы решение $\mathscr{E}$ уравнения

$$(D_t^\alpha - D_x^\alpha)\,\mathscr{E}(t,x) = \delta(t,x)$$

существовало в $\mathscr{S}'$, то мы имели бы противоречивое равенство

$$(|\eta|_p^\alpha - |\xi|_p^\alpha) F[\mathscr{E}](\eta,\xi) = 1, \qquad (\eta,\xi) \in \mathbb{Q}_p^2,$$

в котором левая часть обращается в нуль в открытом множестве $|\eta|_p = |\xi|_p$ пространства $\mathbb{Q}_p^2$.

Оператор D^α при $\alpha > 0$ в открыто-замкнутом множестве G определен на тех $\psi \in \mathscr{L}^2(G)$ (см. § 4), для которых $|\xi|_p^\alpha \widetilde{\psi} \in \mathscr{L}^2$. Это множество функций называется *областью определения* оператора D^α в области G и обозначается $\mathscr{D}(D^\alpha, G)$; $\mathscr{D}(D^\alpha, \mathbb{Q}_p) = \mathscr{D}(D^\alpha)$. Справедливо равенство

$$(D^\alpha \psi, \varphi) = \int |\xi|_p^\alpha \widetilde{\psi}(\xi) \bar{\widetilde{\varphi}}(\xi)\, d_p\xi, \qquad \psi, \varphi \in \mathscr{D}(D^\alpha, G). \tag{10.16}$$

Оператор D^α в G – самосопряженный положительно-определенный, причем в силу (10.16) при всех $\psi \in \mathscr{D}(D^\alpha, G)$ имеем

$$(D^\alpha \psi, \psi) = (D^{\alpha/2}\psi, D^{\alpha/2}\psi) = \int |\xi|_p^\alpha |\psi(\xi)|^2\, d_p\xi \geqslant 0, \tag{10.17}$$

так что его спектр лежит на полуоси $\lambda \geqslant 0$.

Для оператора D^α, $\alpha > 0$, рассмотрим задачу на собственные значения

$$D^\alpha \psi = \lambda \psi, \qquad \psi \in \mathscr{D}(D^\alpha, G). \tag{10.18}$$

Теорема [1], [2]. *Спектр оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$ состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_N = p^{\alpha N}$, $N \in Z$, каждое из которых бесконечной кратности, и точки 0. Существует ортонормальный базис собственных функций в $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ оператора D^α следующего вида:*

при $p \neq 2$

$$\psi^{\ell}_{N,j,\epsilon}(x) = p^{\frac{N+1-\ell}{2}}\delta(|x|_p - p^{\ell-N})\delta(x_0 - j)\chi_p(\epsilon_\ell p^{\ell-2N}x^2), \tag{10.19}$$
$$\ell = 2,3,\dots, \quad j = 1,2,\dots,p-1, \quad \epsilon_\ell = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2}p^{\ell-2},$$
$$\varepsilon_s = 0,1,\dots,p-1, \quad \varepsilon_0 \neq 0, \quad s = 0,1,\dots,\ell-2;$$

$$\begin{gathered}\psi^{1}_{N,j,0}(x) = p^{\frac{N-1}{2}}\Omega(p^{N-1}|x|_p)\chi_p(jp^{-N}x),\\ \ell = 1, \quad j = 1,2,\dots,p-1, \quad \epsilon_\ell = 0;\end{gathered} \tag{10.19$'$}$$

при $p = 2$

$$\psi^{\ell}_{N,j,\epsilon_\ell}(x) = 2^{\frac{N-\ell}{2}}\delta(|x|_2 - 2^{\ell+1-N})\chi_2(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N}x^2 + 2^{\ell-N+j}x), \tag{10.20}$$
$$\ell = 2,3,\dots, \quad j = 0,1, \quad \epsilon_\ell = 1 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_{\ell-2}2^{\ell-2},$$
$$\varepsilon_s = 0,1, \quad s = 1,2,\dots,\ell-2;$$
$$\psi^{1}_{N,j,0}(x) = 2^{\frac{N-1}{2}}[\Omega(2^N|x - j2^{N-2}|_2) - \delta(|x - j2^{N-2}|_2 - 2^{1-N})], \tag{10.20$'$}$$
$$\ell = 1, \quad j = 0,1, \quad \epsilon_\ell = 0.$$

В [33] был найден новый, более простой, ортонормальный базис собственных функций оператора D^α, эквивалентный (10.19)–(10.20):

$$\begin{gathered}\psi_{Njn}(x) = p^{(N-1)/2}\chi_p(p{-}njx)\Omega(|p^{N-1}x - n|_p),\\ N \in Z, \quad j = 1,2,\dots,p-1, \quad n \in \mathbb{Q}_p/Z_p,\end{gathered} \tag{10.21}$$

соответствующих собственному значению $p^{\alpha N}$.

Теорема [4], [5]. *Если G – открыто-замкнутый компакт, то собственные значения λ_k, $k = 0,1,\dots$, оператора D^α, $\alpha > 0$, в G – конечной кратности, а собственные функции $\psi_k(x)$ образуют ортонормальный базис в $\mathscr{L}^2(G)$.*

Пример. Собственные значения и ортонормальный базис собственных функций оператора D^α в B_γ, $\gamma \in Z$ [4].

При $p \neq 2$:

$$\lambda_0 = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}\, p^{\alpha(1-\gamma)}, \qquad \psi_0(x) = p^{-\gamma/2}, \qquad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_k = p^{\alpha(k-\gamma)}, \qquad \psi_k(x) = \psi^{\ell}_{k-\gamma,j,\epsilon_\ell}(x),$$

$$\ell = 1,2,\dots,k, \quad j = 1,2,\dots,p-1, \quad \epsilon_\ell,$$

$$\text{кратность } (p-1)p^{k-1}, \quad k = 1,2,\dots .$$

При $p = 2$:

$$\lambda_0 = \frac{2^{\alpha(1-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1}, \qquad \psi_0(x) = 2^{-\gamma/2}, \qquad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1 = 2^{\alpha(1-\gamma)}, \qquad \psi_1(x) = \psi^1_{1-\gamma,0,0}(x), \qquad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_k = 2^{\alpha(k-\gamma)}, \quad \psi_k(x) = \psi^{\ell}_{k-\gamma,j,\epsilon_\ell}(x),$$

$$\ell = 1,2,\dots,k-1, \quad j = 0,1,$$

$$\text{кратность } 2^{k-1}, \quad k = 2,3,\dots .$$

Пример. Собственные значения и нормированный базис собственных функций оператора D^α в S_γ, $\gamma \in Z$ [4].
При $p \neq 2$:

$$\lambda_0 = \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1}-1}\, p^{\alpha(1-\gamma)}, \quad \psi_0(x) = p^{\frac{1-\gamma}{2}}(p-1)^{1/2}, \quad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1 = p^{\alpha(1-\gamma)}, \qquad \psi_1(x) = 2^{-1/2}[\psi^1_{1-\gamma,j,0}(x) - \psi^1_{1-\gamma,j+1,0}(x)],$$

$$\text{кратность } p-2;$$

$$\lambda_k = p^{\alpha(k-\gamma)}, \qquad \psi_k(x) = \psi^k_{k-\gamma,j,\epsilon_k}(x),$$

$$j = 1,2,\dots,p-1, \quad \epsilon_k,$$

$$\text{кратность } (p-1)^2 p^{k-2}, \quad k = 2,3,\dots .$$

При $p = 2$:

$$\lambda_0 = \frac{2^{\alpha(2-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1}, \qquad \psi_0(x) = 2^{\frac{1-\gamma}{2}}, \qquad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_1 = 2^{\alpha(2-\gamma)}, \qquad \psi_1(x) = \psi^1_{1-\gamma,1,0}(x), \qquad \text{кратность } 1;$$

$$\lambda_k = 2^{\alpha(k+1-\gamma)}, \qquad \psi_k(x) = \psi^k_{k+1-\gamma,j,\epsilon_k}(x),$$

$$j = 0,1, \quad \epsilon_k,$$

$$\text{кратность } 2^{k-1}, \quad k = 2,3,\dots .$$

Следует отметить, что мультипликативные характеры ранга k группы $Z_p^\times$ являются собственными функциями оператора D^α в S_0, соответствующие собственному значению λ_k [21]. С другой стороны, число линейно-независимых мультипликативных характеров ранга k группы $Z_p^\times$ вычислено (см. [30]) и оно совпадает с кратностью n_k собственного значения λ_k оператора D^α, $\alpha > 0$, в S_0 [4]. Отсюда следует такой результат:

существует ортонормальный базис собственных функций оператора D^α, $\alpha > 0$, *в* S_0, *состоящий из всех мультипликативных характеров группы* $Z_p^\times$.

С другой стороны, любой мультипликативный характер группы $Z_p^\times$ ранга k разлагается по собственным функциям $\psi_{a_k+j}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$ (при надлежащем выборе a_k [4]), т. е. разлагается по аддитивным характерам поля $\mathbb{Q}_p$.

Приведем конкретные значения для λ_k и n_k. Полагая $\gamma = 0$, получим [4]:
при $p \neq 2$

$$\lambda_0 = \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1}\, p^\alpha, \qquad n_0 = 1;$$
$$\lambda_1 = p^\alpha, \quad n_1 = p - 2;$$
$$\lambda_k = p^{\alpha k}, \quad n_k = (p-1)^2 p^{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots;$$

при $p = 2$

$$\lambda_0 = \frac{2^{2\alpha}}{2^{\alpha+1} - 1}, \qquad n_0 = 1;$$
$$\lambda_k = 2^{\alpha(k+1)}, \quad n_k = 2^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Часть II. Таблицы интегралов

§ 11. Простейшие интегралы, одна переменная

$$\int_{B_0} d_p x = 1. \tag{11.1}$$

$$\int_{B_\gamma} d_p x = p^\gamma. \tag{11.2}$$

$$\int_{S_\gamma} d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\gamma. \tag{11.3}$$

$$\int f(x)\, d_p x = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)\, d_p x. \tag{11.4}$$

$$\int_{B_\gamma} f(|x|_p)\, d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^k f(p^k). \tag{11.5}$$

$$\int f(|x|_p)\, d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k f(p^k). \tag{11.6}$$

$$\int_D f(x)\, d_p x = |a|_p \int_{\frac{D-b}{a}} f(ay+b)\, d_p y, \qquad a \neq 0. \tag{11.7}$$

$$\int_{S_\gamma} f(x)\, d_p x = p^{2\gamma} \int_{S_{-\gamma}} f\left(\frac{1}{y}\right) d_p y. \tag{11.8}$$

$$\int_{B_\gamma} f(x)\, d_p x = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_{1-\gamma}} f\left(\frac{1}{y}\right) |y|_p^{-2}\, d_p y. \tag{11.9}$$

$$\int f(x)\, d_p x = \int f\left(\frac{1}{y}\right) |y|_p^{-2}\, d_p y. \tag{11.10}$$

$$\int f(|x|_p)\, d_p x = \int f\left(\frac{1}{|y|_p}\right) |y|_p^{-2}\, d_p y. \tag{11.11}$$

$$\int_{G_p} f(x)\, d_p x = \int_{G_p} f(\sin y)\, d_p y. \tag{11.12}$$

$$\int_{G_p} f(x)\,d_px = \int_{G_p} f(\arcsin y)\,d_py. \tag{11.13}$$

$$\int_{G_p} f(x)\,d_px = \int_{G_p} f(\operatorname{tg} y)\,d_py. \tag{11.14}$$

$$\int_{G_p} f(x)\,d_px = \int_{G_p} f(\operatorname{arctg} y)\,d_py. \tag{11.15}$$

$$\int_{G_p} f(x)\,d_px = \int_{J_p} f(\ln y)\,d_py. \tag{11.16}$$

$$\int_{J_p} f(x)\,d_px = \int_{G_p} f(\exp y)\,d_py. \tag{11.17}$$

$$\int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1}\,d_px = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{11.18}$$

$$\int_{S_0} |x-1|_p^{\alpha-1}\,d_px = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})}\,, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0 \text{ [3]}. \tag{11.19}$$

$$\int_{S_\gamma} |x-a|_p^{\alpha-1}\,d_px = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})}\,|a|_p^{\alpha}, \qquad |a|_p = p^\gamma, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{11.20}$$

$$\int_{B_\gamma} \ln|x|_p\,d_px = \left(\gamma - \frac{1}{p-1}\right)p^\gamma \ln p. \tag{11.21}$$

$$\int_{S_0} \ln|x-1|_p\,d_px = -\frac{\ln p}{p-1} \text{ [3]}. \tag{11.22}$$

$$\int_{S_\gamma} \ln|x-a|_p\,d_px = \left[\left(1-\frac{1}{p}\right)\ln|a|_p - \frac{\ln p}{p-1}\right]|a|_p, \quad |a|_p = p^\gamma. \tag{11.23}$$

$$\int_{S_\gamma} \ln|x|_p\,d_px = \gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)p^\gamma \ln p. \tag{11.24}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1}\,d_px = B_p(\alpha,\beta),$$
$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1 \text{ [11]}. \tag{11.25}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1}|y-x|_p^{\beta-1}\,d_px = B_p(\alpha,\beta)|y|_p^{\alpha+\beta-1},$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1. \tag{11.26}$$

$$\int_{B_\gamma} |x^2+a^2|_p^{(\alpha-1)/2}\,d_px$$
$$= p^\gamma|a|_p^{\alpha-1},\qquad p^\gamma<|a|_p. \tag{11.27}$$
$$= \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^\alpha}\,|a|_p^\alpha + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma},$$
$$p^\gamma\geqslant|a|_p\neq0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\quad p\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \tag{11.28}$$
$$= \left[1-\frac{2}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p^{(\alpha+1)/2}-1}-\frac{1}{1-p^{-\alpha}}\right)\right]|a|_p^\alpha$$
$$-\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma},\qquad \begin{array}{l} p^\gamma\geqslant|a|_p\neq0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\\ p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \end{array} \tag{11.29}$$

$$\int |x^2+a^2|_p^{(\alpha-1)/2}\,d_px,\qquad a\neq0,$$
$$= \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^\alpha}\,|a|_p^\alpha\qquad \operatorname{Re}\alpha<0,\quad p\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{11.30}$$

$$= \left[1-\frac{2}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p^{(\alpha+1)/2}-1}-\frac{1}{1-p^{-\alpha}}\right)\right]|a|_p^\alpha,$$
$$\operatorname{Re}\alpha<0,\quad p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{11.31}$$

$$\int_{S_0} \left|1+x^2\right|_p^{\alpha-1} d_px = 1-\frac{3}{p}-2\frac{1-p^{-1}}{1-p^\alpha}\,,$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{11.32}$$

$$\int_{S_{\gamma,k_0}} d_px = p^{\gamma-1},\qquad k_0=1,2,\dots,p-1\ [3]. \tag{11.33}$$

$$\int_{S_\gamma^{k_0}} d_px = \left(1-\frac{2}{p}\right)p^\gamma,\qquad k_0=1,2,\dots,p-1\ [3]. \tag{11.34}$$

$$\int_{S_{\gamma,k_n}} d_px = \left(1-\frac{1}{p}\right)p^{\gamma-1},\qquad k_n=0,1,\dots,p-1,\quad n\in Z_+\ [3]. \tag{11.35}$$

$$\int_{S_\gamma^{k_n}} d_p x = \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 p^\gamma, \qquad k_n = 0,1,\dots,p-1, \quad n\in Z_+ \text{ [3]}. \tag{11.36}$$

$$\int_{S_{\gamma,k_0k_1\dots k_n}} d_p x = p^{\gamma-n-1}, \\ k_j = 0,1,\dots,p-1, \quad k_0\neq 0, \quad n\in Z_+ \text{ [3]}. \tag{11.37}$$

$$\int_{S_\gamma^{k_0k_1\dots k_n}} d_p x = (1-p^{-1}-p^{-n-1})p^\gamma, \\ k_j = 0,1,\dots,p-1, \quad k_0\neq 0, \quad n\in Z_+ \text{ [3]}. \tag{11.38}$$

$$\int_{\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}[|x-x_i|_p=1]} d_p x = 1-\frac{k}{p}, \qquad 1\leqslant k\leqslant p, \quad |x_j-x_j|_p = 1, \\ i,j = 1,2,\dots,k, \quad i\neq j \text{ [17]}. \tag{11.39}$$

Пусть π – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$ ранга $k\geqslant 1$.

$$\int_{S_\gamma} \pi(x)\,d_p x = 0 \text{ [11]}. \tag{11.40}$$

Обозначим: $V_0 = S_0$, $V_j = [x\in S_0 : |1-x|_p \leqslant p^{-j}]$, $j\in Z_+$.

$$\int_{V_j\setminus V_{j+1}} \pi(x)\,d_p x$$

$$= 0, \qquad 0\leqslant j< k-1. \tag{11.41}$$

$$= -p^{-k}, \qquad j = k-1. \tag{11.42}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)p^{-j}, \qquad j\geqslant k \text{ [21]}. \tag{11.43}$$

$$\int_{S_0} |1-x|_p^{\alpha-1}\pi(x)\,d_p x = \Gamma_p(\alpha)p^{-k\alpha}, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0 \text{ [21]}. \tag{11.44}$$

$$\int_{S_\gamma} \operatorname{sgn}_{p,\epsilon} x\,d_p x = \left(1-\frac{1}{p}\right)(-p)^\gamma, \\ \epsilon\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p\neq 2 \text{ [11]}. \tag{11.45}$$

$$\int_{B_\gamma} \operatorname{sgn}_{p,\epsilon} x\,d_p x = \frac{p-1}{p+1}(-p)^\gamma, \\ \epsilon\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p\neq 2 \text{ [11]}. \tag{11.46}$$

$$\int_{B_0} \operatorname{sgn}_{p,\epsilon} x \, d_p x$$

$$= \frac{p-1}{p+1}\,, \qquad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2 \; [11]. \tag{11.47}$$

$$= \frac{1}{3}\,, \qquad \epsilon \equiv 5 \pmod 8, \quad p = 2, \tag{11.48}$$

$$= 0, \qquad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}\,, \quad p \neq 2 \tag{11.49}$$

$$\text{или} \quad \epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod 8, \quad p = 2 \; [11].$$

$$\int_{B_0} \theta_\epsilon^+(x) \, d_p x$$

$$= \frac{p}{p+1}\,, \qquad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2. \tag{11.50}$$

$$= \frac{2}{3}\,, \qquad \epsilon \equiv 5 \pmod 8, \quad p = 2. \tag{11.51}$$

$$= \frac{1}{2}\,, \qquad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}\,, \quad p \neq 2 \tag{11.52}$$

$$\text{или} \quad \epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod 8, \quad p = 2 \; [11].$$

$$\int_{B_0} \theta_\epsilon^-(x) \, d_p x$$

$$= \frac{1}{p+1}\,, \qquad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2. \tag{11.53}$$

$$= \frac{1}{3}\,, \qquad \epsilon \equiv 5 \pmod 8, \quad p = 2. \tag{11.54}$$

$$= \frac{1}{2}\,, \qquad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}\,, \quad p \neq 2 \tag{11.55}$$

$$\text{или} \quad \epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod 8, \quad p = 2 \; [11].$$

$$\int_{(B_0)^2} d_p x$$

$$= \frac{p}{2(p+1)}\,, \qquad p \neq 2. \tag{11.56}$$

$$= \frac{1}{6}\,, \qquad p = 2, \tag{11.57}$$

где $(B_0)^2$ – множество квадратов целых p-адических чисел Z_p.

$$\int_{\gamma(x)=2k\leqslant 0} d_p x = \frac{p}{p+1}\,. \tag{11.58}$$

$$\int_{\gamma(x)=2k\leqslant 0} f(|x|_p)\,d_px = \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f(p^{-2\gamma}). \tag{11.59}$$

$$\int_{\gamma(x)-1=2k\leqslant 0} d_px = \frac{1}{p+1}\,. \tag{11.60}$$

$$\int_{\gamma(x)-1=2k\leqslant 0} f(|x|_p)\,d_px = \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma-1} f(p^{-2\gamma-1}). \tag{11.61}$$

$$\int_{B_0} \lambda_p(x)|x|_p^{-1/2}\,d_px$$

$$= 1, \qquad p \neq 2 \text{ [2]}. \tag{11.62}$$

$$= 2^{-3/2}, \qquad p = 2 \text{ [2]}. \tag{11.63}$$

Пусть функция f обладает свойством

$$\int_{B_0} f(x+k)\,d_px = f(k), \qquad k \in I_p,$$

где I_p множество индексов,

$$I_p = [k \in \mathbb{Q}_p : k = p^{-\gamma}(k_0 + k_1 + \cdots + k_{\gamma-1}p^{\gamma-1}),$$
$$k_j = 0,1,\ldots,p-1, \quad k_0 \neq 0, \quad j = 0,1,\ldots,\gamma-1, \quad \gamma \in Z_+.$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p\setminus B_0} f(x)\,d_px = \sum_{k\in I_p} f(k) \text{ [28]}. \tag{11.64}$$

$$\int_{B_{-1}\setminus B_{-2n}} \lambda_p^2(x)|x|_p^{-1}\,d_px, \qquad n \in Z_+,$$

$$= 1-\frac{1}{p}\,, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \text{ [2]}. \tag{11.65}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)(2n-1), \quad p \equiv 1 \pmod 4 \text{ [2]}. \tag{11.66}$$

$$\int_{B_{-2}\setminus B_{-2n}} \lambda_2^2(x)|x|_2^{-1}\,d_2x = 0, \qquad p = 2, \quad n \geqslant 2 \text{ [2]}. \tag{11.67}$$

Обозначим $|(x,m)|_p = \max(|x|_p, |m|_p)$.

$$\int |(y,m)|_p^{\alpha-1}\,|(x-y,m)|_p^{\beta-1}\,d_py = B_p(\alpha,\beta)\,|(x,m)|_p^{\alpha+\beta-1}$$
$$-\Gamma_p(\alpha)\,|pm|_p^{\alpha}\,|(x,m)|_p^{\beta-1} - \Gamma_p(\beta)\,|pm|_p^{\beta}\,|(x,m)|_p^{\alpha-1},$$
$$m\neq 0,\quad \mathrm{Re}(\alpha+\beta)<1\ [17]. \tag{11.68}$$

Обозначим:

$$\mathscr{K}_t(x,y) = \lambda_p(t)\sqrt{\left|\frac{2}{t}\right|_p}\,\chi_p\left(\frac{2xy}{\sin t} - \frac{x^2+y^2}{\operatorname{tg} t}\right),\quad t\in G_p,\quad x,y\in\mathbb{Q}_p,$$
$$\mathscr{K}_t(x) = \lambda_p(t)\sqrt{\left|\frac{2}{t}\right|_p}\,\chi_p\left(-\frac{x^2}{t}\right),\qquad t\in\mathbb{Q}_p^{\times},\quad x\in\mathbb{Q}_p.$$

$$\int \mathscr{K}_t(x,y')\mathscr{K}_\tau(y',x)\,d_py' = \mathscr{K}_{t+\tau}(x,y),$$
$$t,\tau\in G_p,\quad x,y\in\mathbb{Q}_p\ [15]. \tag{11.69}$$

$$\int_{B_0} \mathscr{K}_t(x,y)\,d_py = \Omega(|x|_p),\qquad t\in G_p,\quad x\in\mathbb{Q}_p\ [15]. \tag{11.70}$$

$$\mathscr{K}_t(x,y)\to\delta(x-y),\qquad t\to 0\ \text{ в }\ \mathscr{S}'(\mathbb{Q}_p^2)\ [15]. \tag{11.71}$$

$$\int \mathscr{K}_t(x-y)\mathscr{K}_\tau(y)\,d_py = \mathscr{K}_{t+\tau}(x),\qquad t,\tau\in\mathbb{Q}_p^{\times},\quad x\in\mathbb{Q}_p\ [15]. \tag{11.72}$$

$$\mathscr{K}_t(x)\to\delta(x),\qquad t\to 0\ \text{ в }\ \mathscr{S}'\ [15]. \tag{11.73}$$

$$\int_{|x|_p\neq 1} f(|x|_p)|1-x|_p^{-1}\,d_px = (1-p^{-1})\sum_{\gamma\neq 0} f(p^\gamma)\min(1,p^\gamma). \tag{11.74}$$

§ 12. Интегралы Фурье

Интегралом Фурье называется интеграл вида

$$\int f(x)\chi_p(\xi x)\,d_px,\qquad \xi\in\mathbb{Q}_p^{\times}.$$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)\,d_px = p^\gamma\Omega(p^\gamma|\xi|_p)\ [3]. \tag{12.1}$$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)\,d_px = \left(1-\frac{1}{p}\right)p^\gamma\Omega(p^\gamma|\xi|_p) - p^{\gamma-1}\delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) \text{ [3]}. \tag{12.2}$$

$$\int \chi_p(\xi x)\,d_px = 0, \qquad \xi \neq 0 \text{ [3]}. \tag{12.3}$$

$$\int_{B_\gamma} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,d_px$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k=-\gamma}^{\infty} p^{-k}f(p^{-k}), \qquad |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma}. \tag{12.4}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)|\xi|_p^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}f(p^{-k}|\xi|_p^{-1}) - |\xi|_p^{-1}f(p\,|\xi|_p^{-1}), \tag{12.5}$$

$$|\xi|_p > p^{-\gamma} \text{ [3]}.$$

$$= \int f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,d_px, \qquad |\xi|_p > p^{-\gamma}. \tag{12.6}$$

$$\int f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,d_px = \left(1-\frac{1}{p}\right)|\xi|_p^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}f(p^{-k}|\xi|_p^{-1})$$

$$-|\xi|_p^{-1}f(p|\xi|_p^{-1}), \qquad \xi \neq 0 \text{ [3]}. \tag{12.7}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(x)\,d_px = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} = \Gamma_p(\alpha), \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0 \text{ [11]}. \tag{12.8}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,d_px = \Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}, \qquad \xi \neq 0, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0 \text{ [11]}. \tag{12.9}$$

$$\int \ln|x|_p\chi_p(x)\,d_px = -\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ln p \text{ [3]}. \tag{12.10}$$

$$\int \ln|x|_p\chi_p(\xi x)\,d_px = -\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ln p|\xi|_p^{-1}, \qquad \xi \neq 0 \text{ [3]}. \tag{12.11}$$

$$\int \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2 + m^2}\,d_px, \qquad m \neq 0,$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p^k}{p^{2k}+m^2}\,, \qquad \xi = 0. \tag{12.12}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{|\xi|_p}{p^2 + m^2|\xi|_p^2} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} \frac{p^2 - p^{-2k}}{p^{-2k} + m^2|\xi|_p^2}, \qquad \xi \neq 0 \text{ [3]}. \tag{12.13}$$

$$\sim \frac{p^4 + p^3}{p^2 + p + 1} m^{-4}|\xi|_p^{-3} + O(|\xi|_p^{-5}), \qquad |\xi|_p \to \infty \text{ [3]}. \tag{12.14}$$

$$\mu_t^\alpha(x) = \int \exp(-t|\xi|_p^\alpha)\chi_p(\xi x)\, d_p\xi, \qquad t > 0, \quad \alpha > 0$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)|x|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \exp(-t|px|_p^{-\alpha})$$

$$\times\big(\exp[t|px|_p^{-\alpha}(1 - p^{-\alpha\gamma-\alpha})] - 1\big) > 0 \text{ [1], [2]}. \tag{12.15}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \Gamma_p(\alpha n + 1)|\xi|_p^{-\alpha n - 1} \text{ [1]}. \tag{12.16}$$

$$\int \mu_t^\alpha(x)\, d_px = 1, \qquad t > 0. \tag{12.17}$$

$$\mu_t^\alpha(x) \to \delta(x), \qquad t \to 0 \ \text{ в } \mathscr{S}' \text{ [1]}. \tag{12.18}$$

$$\mu_t^\alpha * \mu_\tau^\alpha = \mu_{t+\tau}^\alpha, \qquad t, \tau > 0 \text{ [1]}. \tag{12.19}$$

$$\int_0^\infty \mu_t^\alpha(x)\, dt = \Gamma_p^{-1}(\alpha)|x|_p^{\alpha-1} = f_\alpha(x), \tag{12.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_p^\alpha(x)|_{t=0} = \Gamma_p(\alpha + 1)|x|_p^{-\alpha-1}, \qquad \alpha > 0. \tag{12.21}$$

$$|x|_p^\alpha = -\Gamma_p^{-1}(-\alpha) \int [1 - \operatorname{Re} \chi_p(x\xi)]|\xi|_p^{-\alpha-1}\, d_p\xi, \tag{12.22}$$

причем

$$-\Gamma_p^{-1}(-\alpha)|\xi|_p^{-\alpha-1}\, d_p\xi > 0, \qquad \alpha > 0.$$

$$\int_{B_{-1}} \chi_p(a^2 \operatorname{tg} \xi - x\xi)\, d_p\xi, \qquad p \neq 2 \text{ [2]},$$

$$= \frac{1}{2} \Omega(|px|_p), \qquad |a|_p \leqslant 1. \tag{12.23}$$

$$= \frac{1}{2} \delta\big(|x|_p - p^2\big)\, \delta\big(x_0 - (a^2)_0\big), \qquad |a|_p = p. \tag{12.24}$$

$$= \frac{1}{2} \delta\big(|x|_p - |a|_p^2\big)\, \delta\big(x_0 - (a^2)_0\big)\, \delta\big(x_1 - (a^2)_1\big)\varphi_a(x), \quad |a|_p \geqslant p^2, \tag{12.25}$$

где $\varphi_a(x)$ – непрерывная функция.

$$\int |x|_p^{\alpha-1}|x-a|_p^{\beta-1}\chi_p(x)\,d_px, \qquad \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 1,$$

$$= B_p(\alpha,\beta)|a|_p^{\alpha+\beta-1} + \Gamma_p(\alpha+\beta-1), \qquad |a|_p \leqslant 1. \tag{12.26}$$

$$= \Gamma_p(\alpha)|a|_p^{\beta-1} + \Gamma_p(\beta)|a|_p^{\alpha-1}\chi_p(a), \qquad |a|_p \geqslant p. \tag{12.27}$$

$$\int_{S_\gamma} |x-a|_p^{\alpha-1}\chi_p(x-a)\,d_px = \Gamma_p(\alpha),$$
$$|a|_p = p^\gamma, \quad \gamma \geqslant 2, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{12.28}$$

Пусть $n \in Z_+$ не делится на p и P – полином степени n,

$$P(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n,$$
$$|\alpha_k|_p \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad |\alpha_n|_p = 1.$$

Тогда

$$\int_{S_\gamma} \chi_p[P(x)]\,d_px$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)p^\gamma, \qquad \gamma \leqslant 0, \quad n \in Z_+ \text{ [3]}. \tag{12.29}$$

$$= 0, \qquad \gamma = 2, 3, \dots, \ n \in Z_+ \ \text{ или } \ \gamma = 1, \ n = 2, 3, \dots \text{ [3]}. \tag{12.30}$$

$$= -1, \qquad \gamma = 1, \quad n = 1 \text{ [3]}. \tag{12.31}$$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p[P(x)]\,d_px$$

$$= p^\gamma, \qquad \gamma \leqslant 0, \quad n \in Z_+, \tag{12.32}$$

$$= 1, \qquad \gamma = 2, 3, \dots, \ n \in Z_+ \ \text{ или } \ \gamma = 1, \ n = 2, 3, \dots . \tag{12.33}$$

$$= 0, \qquad \gamma \in Z_+, \quad n = 1. \tag{12.34}$$

$$\int \chi_p[P(x)]\,d_px$$

$$= 1, \qquad n = 2, 3, \dots . \tag{12.35}$$

$$= 0, \qquad n = 1. \tag{12.36}$$

Пусть (комплексные) числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{p-1} \eta_k = 0, \qquad p \neq 2,$$

и числа $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{p-1}$ взаимны к $\{\eta_k\}$,

$$\eta'_j = \sum_{k=1}^{p-1} \eta_k \exp\left(2\pi i \frac{kj}{p}\right), \qquad \sum_{j=1}^{p-1} \eta'_j = 0.$$

Тогда

$$\int_{S_\gamma} \eta_{x_0} \chi_p(\xi x)\, d_p x = p^{\gamma-1} \eta'_{\xi_0} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) \text{ [4]}. \tag{12.37}$$

$$\int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x)\, d_p x, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$= \frac{1-p-1}{1-p^{-\alpha}}\, p^{\alpha\gamma}, \qquad |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma}. \tag{12.38}$$

$$= \Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}, \qquad |\xi|_p > p^{-\gamma} \quad \text{[1]}. \tag{12.39}$$

$$= \Gamma_p(\alpha), \qquad \xi = 1, \quad \gamma \geqslant 1 \text{ [7]}. \tag{12.40}$$

$$\int_{S_0} \delta(x_0 - k)\chi_p(\xi x)\, d_p x = p^{-1}\chi_p(k\xi)\Omega(|p\xi|_p),$$
$$k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{12.41}$$

$$\int \delta(x_0 - k)\chi_p(\xi x)\, d_p x = |\xi|_p^{-1}\left(\frac{1}{p-1} + \chi_p(k\xi_0/p)\right),$$
$$\xi \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{12.42}$$

$$\int_{B_1} \chi_p[(k-\xi)x]\, d_p x = p\delta(|\xi|_p - 1)\delta(\xi_0 - k),$$
$$k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{12.43}$$

$$\int_{S_0} \delta(x_1 - k)\chi_p(\xi x)\, d_p x = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\Omega(|\xi|_p) - p^{-2}\delta(|\xi|_p - p)$$
$$+ p^{-2}\frac{\chi_p(\xi) - \chi_p(p\xi)}{1 - \chi_p(\xi)}\, \chi_p(kp\xi)\delta(|\xi|_p - p^2),$$
$$k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{12.44}$$

$$\int \delta(x_1 - k)\chi_p(\xi x)\, d_p x = |\xi|_p^{-1} \frac{\chi_p(p^{-2}|\xi|_p\xi) - \chi_p(p^{-1}\xi_0)}{1 - \chi_p(p^{-1}\xi_0)}\, \chi_p(kp^{-1}\xi_0),$$
$$\xi \neq 0, \quad p = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{12.45}$$

$$\int_{S_0}\delta(x_2-k)\chi_p(\xi x)\,d_px=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\Omega(|\xi|_p)-p^{-2}\delta(|\xi|_p-p)$$
$$+\,p^{-3}\frac{\chi_p(\xi)-\chi_p(p\xi)}{1-\chi_p(\xi)}\;\frac{\chi_p(kp^2\xi)-\chi_p((k+1)p^2\xi)}{1-\chi_p(p\xi)}\,\delta(|\xi|_p-p^3),$$
$$k=0,1,\dots,p-1. \tag{12.46}$$

$$\int\delta(x_2-k)\chi_p(\xi x)\,d_px=|\xi|_p^{-1}\frac{\chi_p(p^{-3}|\xi|_p\xi)-\chi_p(p^{-2}|\xi|_p\xi)}{1-\chi_p(p^{-3}|\xi|_p\xi)}$$
$$\times\frac{\chi_p(kp^{-1}\xi_0)-\chi_p((k+1)p^{-1}\xi_0)}{1-\chi_p(p^{-2}|\xi|_p\xi)}\,,$$
$$\xi\neq0,\quad k=0,1,\dots,p-1. \tag{12.47}$$

$$\int|x,m|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,d_px=\Gamma_p(\alpha)\big(|\xi|_p^{-\alpha}-|pm|_p^{\alpha}\big)\Omega(|m\xi|_p),$$
$$m\neq0,\quad \operatorname{Re}\alpha<0\ [17]. \tag{12.48}$$

$$\int|x,1|_p^{-\alpha}\chi_p(\xi x)\,d_px=\Gamma_p(1-\alpha)(|\xi|_p^{\alpha-1}-p^{\alpha-1})\Omega(|\xi|_p)\equiv J_p^{\alpha}(\xi),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0. \tag{12.49}$$

$$J_p^1(\xi)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{\ln|\xi|_p}{\ln p}\right)\Omega(|\xi|_p),\qquad \alpha=1. \tag{12.50}$$

$$\int J_p^{\alpha}(\xi)J_p^{\beta}(x-\xi)\,d_p\xi=J_p^{\alpha}*J_p^{\beta}=J_p^{\alpha+\beta},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C}. \tag{12.51}$$

$$\ln|x,1|_p=\int\big(1-\operatorname{Re}\chi_p(x\xi)\big)\,d\sigma(\xi)$$
$$=\ln p\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{\gamma}\Omega(p^{\gamma}|\xi|_p),\qquad d\sigma(\xi)\geqslant0. \tag{12.52}$$

$$\int_{B_{-1}\setminus B_{-2n}}\lambda_p^2(x)|x|_p^{-1}\chi_p(\xi x)\,d_px,\qquad n\in Z_+,$$
$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)(2n-1),$$
$$\xi=0\ \text{ или }\ \gamma(\xi)\leqslant1,\quad p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)\ [2]. \tag{12.53}$$
$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)(2n-\gamma(\xi))-\frac{1}{p},,$$
$$2\leqslant\gamma(\xi)\leqslant2n,\quad p\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)\ [2]. \tag{12.54}$$

$$= 1 - \frac{1}{p}, \qquad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leqslant 1, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \ [2]. \quad (12.55)$$

$$= \frac{1}{2}\,(-1)^{\gamma(\xi)}\Big(1 + \frac{1}{p}\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$
$$2 \leqslant \gamma(\xi) \leqslant 2n, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \ [2]. \quad (12.56)$$

$$\int_{B_{-1}} \lambda_p^2(x)|x|_p^{-1}\chi_p(\xi x)\,d_px$$

$$= 1 - \frac{1}{p}\,, \qquad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leqslant 1, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \ [2]. \quad (12.57)$$

$$= \frac{1}{2}\,(-1)^{\gamma(\xi)}\Big(1 + \frac{1}{p}\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$
$$\gamma(\xi) \geqslant 2, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \ [2]. \quad (12.58)$$

$$\int_{B_{-2}\setminus B_{-2n}} \lambda_2^2(x)|x|_2^{-1}\chi_2(\xi x)\,d_2x, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

$$= 0, \qquad \gamma(\xi) \leqslant 3 \ [2]. \quad (12.59)$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^{\xi_1+1}, \qquad \gamma(\xi) \geqslant 4 \ [2]. \quad (12.60)$$

$$\int_{B_{-2}} \lambda_2^2(x)|x|_2^{-1}\chi_2(\xi x)\,d_2x$$

$$= 0, \qquad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leqslant 3 \ [2]. \quad (12.61)$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{\xi_1+1}, \qquad \gamma(\xi) \geqslant 4 \ [2]. \quad (12.62)$$

$$\int \mathrm{sgn}_{p,d}\, x|x|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,d_px, \qquad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$$

$$= \widetilde{\Gamma}_p(\alpha)\mathrm{sgn}_{p,d}\,\xi|\xi|_p^{-\alpha}, \qquad |d|_p = 1, \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \ [11]. \quad (12.63)$$

$$= \pm p^{\alpha-1/2}\sqrt{\mathrm{sgn}_{p,d}\,(-1)}\,\mathrm{sgn}_{p,d}\,\xi|\xi|_p^{-\alpha}, \quad |d|_p = \frac{1}{p}\,, \quad \alpha \in \mathbb{C} \ [11]. \quad (12.64)$$

Пусть $\varepsilon = \pm$.

$$\int_{S_\gamma} \lambda_p(x)\chi_p(\varepsilon\xi x)\,d_px \ [2], [29]$$

$$= p^{\gamma}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big), \qquad |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.65)$$

$$= 0, \qquad |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.66)$$

$$= -p^{\gamma-1}, \qquad |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k. \tag{12.67}$$

$$= \left(\frac{\xi_0}{p}\right) p^{\gamma-1/2}, \qquad \begin{array}{l} |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma+1}, \\ \gamma = 2k+1, \quad p \equiv 1 \pmod 4). \end{array} \tag{12.68}$$

$$= -\varepsilon \left(\frac{\xi_0}{p}\right) p^{\gamma-1/2}, \qquad \begin{array}{l} |\xi|_p \leqslant p^{-\gamma+1}, \\ \gamma = 2k+1, \quad p \equiv 3 \pmod 4). \end{array} \tag{12.69}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_p \geqslant p^{-\gamma+2}. \tag{12.70}$$

$$\int_{S_\gamma} \lambda_2(x) \chi_2(\varepsilon \xi x)\, d_2 x \ [20], [29]$$

$$= 2^{\gamma-3/2}, \qquad |\xi|_2 \leqslant 2^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k. \tag{12.71}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_2 \leqslant 2^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k+1. \tag{12.72}$$

$$= -2^{\gamma-3/2}, \qquad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k. \tag{12.73}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k+1. \tag{12.74}$$

$$= -\varepsilon (-1)^{\xi_1} 2^{\gamma-3/2}, \qquad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma = 2k. \tag{12.75}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma = 2k+1. \tag{12.76}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_2 \geqslant 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma = 2k. \tag{12.77}$$

$$= i^{\xi_1} (-1)^{\xi_2} 2^{\gamma-3} (1+i)(1+i\varepsilon)[1 - \varepsilon(-1)^{\xi_1}], \\ |\xi|_2 = 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma = 2k+1. \tag{12.78}$$

$$= 0, \qquad |\xi|_2 \geqslant 2^{-\gamma+4}, \quad \gamma = 2k+1. \tag{12.79}$$

$$\int_{|x|_p \geqslant 1} \lambda_p(x) |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\varepsilon \xi^2 x)\, d_p x$$

$$= 0, \qquad |\xi|_p \geqslant p, \quad p \neq 2. \tag{12.80}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1 - p^{2\alpha} |\xi|_p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha}} + p^{\alpha-1/2} |\xi|_p^{-2\alpha}, \\ |\xi|_p \leqslant 1, \quad p \equiv 1 \pmod 4). \tag{12.81}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1 - p^{2\alpha} |\xi|_p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha}} - \varepsilon p^{\alpha-1/2} |\xi|_p^{-2\alpha}, \\ |\xi|_p \leqslant 1, \quad p \equiv 3 \pmod 4). \tag{12.82}$$

$$\int_{|x|_p \geqslant 1} \lambda_p(x) |x|_p^{-3/2} \chi_p(-\xi^2 x)\, d_p x = \Omega(|\xi|_p), \qquad p \neq 2 \ [29]. \tag{12.83}$$

$$\int_{|x|_2 \geqslant 4} \lambda_2(x) |x|_2^{-3/2} \chi_2(-\xi^2 x)\, d_2 x = \sqrt{2}\,\Omega(|\xi|_2), \qquad p = 2 \ [29]. \tag{12.84}$$

§ 13. Гауссовы интегралы

Гауссовым интегралом называется интеграл вида

$$\int f(x)\chi_p(ax^2+bx)\,d_px, \qquad a\in\mathbb{Q}_p^\times, \quad b\in\mathbb{Q}_p.$$

Различные формулы для гауссовых интегралов встречаются в [3], [13]–[16], [20]. Наиболее полные списки их приведены в [1], [2]. Здесь

$$\epsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1p+\varepsilon_2p^2+\cdots.$$

$$\int_{S_\gamma}\chi_p\big[\epsilon(x-y)^2\big]\,d_py$$

$$=p^\gamma\chi_p(\epsilon x^2)\bigg[\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Omega(p^\gamma|x|_p)-\frac{1}{p}\,\delta(|x|_p-p^{1-\gamma})\bigg], \quad \gamma\leqslant 0, \quad p\neq 2. \tag{13.1}$$

$$=\delta(|x|_p-p^\gamma), \qquad \gamma\geqslant 1, \quad p\neq 2. \tag{13.2}$$

$$=2^{\gamma-1}\chi_2(\epsilon x^2)\big[\Omega(2^{\gamma-1}|x|_2)-\delta(|x|_2-2^{2-\gamma})\big], \quad \gamma\leqslant 0, \quad p=2. \tag{13.3}$$

$$=\big[\sqrt{2}\,\lambda_2(\epsilon)-1\big]\Omega(|x|_2)+\delta(|x|_2-2), \quad \gamma=1, \quad p=2. \tag{13.4}$$

$$=\sqrt{2}\,\lambda_2(\epsilon)\delta(|x|_2-2^\gamma), \qquad \gamma\geqslant 2, \quad p=2. \tag{13.5}$$

$$\int_{S_\gamma}\chi_p[\epsilon p(x-y)^2]\,d_py$$

$$=p^\gamma\chi_p\big(\epsilon px^2\big)\bigg[\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Omega\big(p^{1-\gamma}|x|_p\big)-\frac{1}{p}\,\delta\big(|x|_p-p^{2-\gamma}\big)\bigg], \quad \gamma\leqslant 0, \quad p\neq 2. \tag{13.6}$$

$$=\big[\sqrt{p}\,\lambda_p(\epsilon p)-\chi_p(\epsilon px^2)\big]\,\Omega(|px|_p), \qquad \gamma=1, \quad p\neq 2. \tag{13.7}$$

$$=\sqrt{p}\,\lambda_p(\epsilon p)\delta(|x|_p-p^\gamma), \qquad \gamma\geqslant 2, \quad p\neq 2. \tag{13.8}$$

$$=2^{\gamma-1}\chi_2(2\epsilon x^2)[\Omega(2^{\gamma-2}|x|_2)-\delta(|x|_2-2^{3-\gamma})], \quad \gamma\leqslant 0, \quad p=2. \tag{13.9}$$

$$=-\Omega(|x|_2)+\delta(|x|_2-2)+\lambda_2(2\epsilon)\,\delta(|x|_2-4), \quad \gamma=1, \quad p=2. \tag{13.10}$$

$$=2\lambda_2(2\epsilon)\,\Omega(|2x|_2), \qquad \gamma=2, \quad p=2. \tag{13.11}$$

$$=2\lambda_2(2\epsilon)\,\delta(|x|_2-2^\gamma), \qquad \gamma\geqslant 3, \quad p=2. \tag{13.12}$$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(ax^2+\xi x)\,d_px$$

$$= \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\delta\left(\left|\frac{\xi}{2a}\right|_p - p^\gamma\right), \qquad |4a|_p \geqslant p^{2-2\gamma}. \tag{13.13}$$

$$= |2a|_p^{-1/2}\left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right]\Omega\big(p^{1-\gamma}|\xi|_p\big), \qquad |a|_p = p^{1-2\gamma}. \tag{13.14}$$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(ax^2+\xi x)\,d_px = p^\gamma\Omega(p^\gamma|\xi|_p), \qquad |a|_p p^{2\gamma} \leqslant 1, \tag{13.15}$$

$$= \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega\left(p^{-\gamma}\left|\frac{\xi}{2a}\right|_p\right), \qquad |4a|_p p^{2\gamma} > 1. \tag{13.16}$$

$$= 2^\gamma\lambda_2(a)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\delta\big(|\xi|_2 - 2^{1-\gamma}\big), \qquad |a|_2 2^{2\gamma} = 2, \quad p=2. \tag{13.17}$$

$$= 2^{\gamma-1/2}\lambda_2(a)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega\big(2^\gamma|\xi|_2\big), \qquad |a|_2 2^{2\gamma} = 4, \quad p=2. \tag{13.18}$$

$$\int \chi_p(ax^2+\xi x)\,d_px, \qquad a \neq 0,$$

$$= \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right). \tag{13.19}$$

$$= \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \qquad a = \frac{1}{2}, \quad p \neq 2. \tag{13.20}$$

$$= \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \qquad a = \frac{1}{2}, \quad p = 2. \tag{13.21}$$

$$\int \exp\big(-|y|_p^2\big)\chi_p[a(x-y)^2]\,d_py, \qquad a \neq 0, \quad \gamma = \gamma(a),$$

$$= |a|_p^{-1/2}S\left(|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right), \qquad |x|_p\sqrt{|a|_p} \leqslant 1, \quad \gamma = 2k, \quad p \neq 2. \tag{13.22}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\,|a|_p^{-1/2}S\left(\frac{1}{p}\,|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right) + \left[\lambda_p(a) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right]|a|_p^{-1/2}\exp(-|pa|_p^{-1}),$$
$$|x|_p\sqrt{p|a|_p} \leqslant 1, \quad \gamma = 2k+1, \quad p \neq 2. \tag{13.23}$$

$$= \lambda_p(a)|a|_p^{-1/2}\exp(-|x|_p^2) + |ax|_p^{-1}\chi_p(ax^2)\left[S\left(|ax|_p^{-2}, \frac{1}{p}\right)\right.$$
$$\left. -\ \exp(-|pax|_p^{-2})\right], \qquad |x|_p\sqrt{|a|_p} \geqslant \sqrt{p}, \quad p \neq 2. \qquad (13.24)$$

$$= [\sqrt{2}\lambda_2(a) - 1]|a|_2^{-1/2}\exp(-|4a|_2^{-1}) + |a|_2^{-1/2}S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right),$$
$$|x|_2\sqrt{|a|_2} \leqslant 1, \quad \gamma = 2k, \quad p = 2. \qquad (13.25)$$

$$= |a|_2^{-1/2}\exp(-|4a|_2^{-1}) + [\sqrt{2}\,\lambda_2(a) - 1]|a|_2^{-1/2}S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right),$$
$$|x|_2\sqrt{|a|_2} = 2, \quad \gamma = 2k, \quad p = 2. \qquad (13.26)$$

$$= (2|a|_2)^{-1/2}S\left((2|a|_2)^{-1}, \frac{1}{2}\right) - (2|a|_2)^{-1/2}\exp(-|2a|_2^{-1})$$
$$+ \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\exp(-|8a|_2^{-1}),$$
$$|x|_2\sqrt{2|a|_2} \leqslant 1, \quad \gamma = 2k+1, \quad p = 2. \qquad (13.27)$$

$$= |2a|_2^{-1/2}S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) + \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\exp(-|8a|_2^{-1}),$$
$$|x|_2\sqrt{|a|_2} = \sqrt{2}, \quad \gamma = 2k+1, \quad p = 2. \qquad (13.28)$$

$$= \lambda_2(a)(2|a|_2)^{-1/2}S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right),$$
$$|x|_2\sqrt{|a|_2} = 2\sqrt{2}, \quad \gamma = 2k+1, \quad p = 2. \qquad (13.29)$$

$$= \lambda_2(a)|2a|_2^{-1/2}\exp(-|x|_2^2) + |2ax|_2^{-1}\chi_2(ax^2)\left[S\left(|2ax|_2^{-2}, \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. -\ 2\exp(-|4ax|_2^{-2})\right], \qquad |x|_2\sqrt{|a|_2} > 2, \quad p = 2. \qquad (13.30)$$

$$\sim \frac{p^4 + p^3}{p^2 + p + 1}\,|2ax|_p^{-3}\chi_p(ax^2) + O(|x|_p^{-5}), \qquad |x|_p \to \infty. \quad (13.31)$$

$$\sim |a|_p^{-1/2}S(|a|_p^{-1}, p^{-1}) + O[|a|_p^{-1/2}\exp(-|p^2a|_p^{-1})],$$
$$|a|_p \to 0, \quad \gamma = 2k. \qquad (13.32)$$

$$\sim (p|a|_p)^{-1/2}S((p|a|_p)^{-1}, p^{-1}) + O[|a|_p^{-1/2}\exp(-|pa|_p^{-1})],$$
$$|a|_p \to 0, \quad \gamma = 2k+1. \qquad (13.33)$$

Здесь

$$S(\alpha, q) = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^k}{k!(1-q^{2k+1})}\,, \qquad |q| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Эта функция удовлетворяет соотношению

$$S(\alpha q^2, q) = \frac{1}{q}\,S(\alpha, q) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)e^{-\alpha}. \tag{13.34}$$

§ 14. Две переменные

$$\int_{B_0^2} d_p^2 x = 1. \tag{14.1}$$

$$\int_{B_\gamma^2} d_p^2 x = p^{2\gamma}. \tag{14.2}$$

$$\int_{S_\gamma^2} d_p^2 x = (1 - p^{-2})\, p^{2\gamma}. \tag{14.3}$$

$$\int_{B_\gamma^2} f(|x|_p)\, d_p^2 x = (1 - p^{-2}) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^{2k} f(p^k). \tag{14.4}$$

$$\int f(|x|_p)\, d_p^2 x = (1 - p^{-2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^{2k} f(p^k). \tag{14.5}$$

$$\int_{B_\gamma^2} |x|_p^{\alpha-2}\, d_p^2 x = \frac{1 - p^{-2}}{1 - p^{-\alpha}}\, p^{\alpha\gamma}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{14.6}$$

$$\int_{S_\gamma^2} |x|_p^{\alpha-2}\, d_p^2 x = (1 - p^{-2})\, p^{\alpha\gamma}. \tag{14.7}$$

$$\int_{B_\gamma^2} |(x,x)|_p^{\alpha-1} \chi_p((\xi,x))\, d_p^2 x, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad |(\xi,\xi)|_p > p^{-\gamma}.$$

$$= \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \tag{14.8}$$

$$= \Gamma_p(\alpha) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \tag{14.9}$$

$$\int |(x,x)|_p^{\alpha-1} \chi_p((\xi,x))\, d_p^2 x, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad (\xi,\xi) \neq 0,$$

$$= \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \tag{14.10}$$

$$= \Gamma_p(\alpha) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)\ [9]. \tag{14.11}$$

$$\int f((x,x)) \chi_p((\xi,x))\, d_p^2 x, \qquad (\xi,\xi) \neq 0,$$

$$= |(\xi,\xi)|_p^{-1}\Big[\big(1-p^{-2}\big)\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-2\gamma}f\big(p^{-2\gamma}|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)$$

$$-f\big(p^2|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)\Big], \qquad p\equiv 3 \pmod 4 \ [1]. \tag{14.12}$$

$$= |(\xi,\xi)|_p^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\right)p^{-\gamma}f\big(p^{-\gamma}|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)\right.$$

$$\left.-2\left(1-\frac{1}{p}\right)f\big(p\,|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)+f\big(p^2|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)\right],$$

$$p\equiv 1 \pmod 4 \ [1]. \tag{14.13}$$

$$\int \frac{\chi_p((\xi,x))}{|(x,x)|_p+m^2}\,d_p^2x, \qquad m\neq 0, \quad (\xi,\xi)\neq 0,$$

$$= \frac{1-p^{-2}}{p^2+m^2|(\xi,\xi)|_p}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{p^2-p^{-2\gamma}}{1+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{1}{1+p^{2\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}-\frac{1}{p^2+p^{2\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p},$$

$$p\equiv 3 \pmod 4 \ [1],[9]. \tag{14.14}$$

$$\sim \frac{p^4}{p^2+1}\,m^{-4}|(\xi,\xi)|_p^{-2},\ |(\xi,\xi)|_p\to\infty, \qquad p\equiv 3 \pmod 4 \ [1],[9]. \tag{14.15}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\right)\frac{1}{1+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}$$

$$-2\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p+m^2|(\xi,\xi)|_p}+\frac{1}{p^2+m^2|(\xi,\xi)|_p}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty}(\gamma+1)\left(\frac{1}{1+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}-\frac{2}{p+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^2+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}\right), \qquad p\equiv 1 \pmod 4 \ [9]. \tag{14.16}$$

$$\sim -\frac{p^4}{(p+1)^2}\,m^{-4}|(\xi,\xi)|_p^{-2},\ |(\xi,\xi)|_p\to\infty, \qquad p\equiv 1 \pmod 4 \ [9]. \tag{14.17}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1}|x-y|_p^{\gamma}|y|_p^{\alpha'-1}|1-y|_p^{\beta'-1}\,d_px\,d_py$$

$$= \Gamma_p(\gamma)\int |t|_p^{2-\alpha-\beta-\alpha'-\beta'}B_p(t;\alpha,\beta)B_p(-t;\alpha',\beta')\,d_pt$$

$$
\begin{aligned}
&= B_p(\alpha,\beta)B_p(\alpha',\beta') + B_p(\alpha,\beta)B_p(\gamma,\alpha'+\beta'-1)\\
&\quad + B_p(\alpha',\beta')B_p(\gamma,\alpha+\beta-1) + B_p(\alpha+\beta-1,\alpha'+\beta'-1)\\
&\quad \times B_p(\gamma,3-\alpha-\beta-\alpha'-\beta') - B_p(\alpha,\alpha')B_p(\gamma,\alpha+\alpha')\\
&\quad - B_p(\beta,\beta')B_p(\gamma,\beta+\beta')\\
&\quad + \Gamma_p(\gamma)p^{-\gamma}\Big\{[\Gamma_p(\alpha+\beta-1)p^{1-\alpha-\beta} + B_p(\alpha,\beta)]\\
&\quad \times [\Gamma_p(\alpha'+\beta'-1)p^{1-\alpha'-\beta'} + B_p(\alpha',\beta')]\\
&\quad - [\Gamma_p(\alpha)p^{-\alpha} + \Gamma_p(\beta)p^{-\beta}][\Gamma_p(\alpha')p^{-\alpha'} + \Gamma_p(\beta')p^{-\beta'}]\Big\},\\
&\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\ \operatorname{Re}\beta>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0,\ \operatorname{Re}\alpha'>0,\ \operatorname{Re}\beta'>0. \qquad (14.18)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
B_p(t;\alpha,\beta) = \int |x|_p^{\alpha-1}|t-x|_p^{\beta-1}\chi_p(x)\,d_px.
$$

Ниже в формулах (14.19)–(14.29) используются обозначения для поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$, $d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (см. § 9). В частности (см. (9.2) и (9.6)),

$$
B_\gamma^2 = [z\in\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar z|_p \leqslant q^\gamma]; \qquad \alpha_k = \frac{2k\pi i}{\ln q}, \quad k\in Z.
$$

$$
\int_{B_0^2} d_pz = 1. \tag{14.19}
$$

$$
\int_{B_0^2} |z\bar z|_p^{\alpha-1}\,d_pz = \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-\alpha}}\,, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{14.20}
$$

$$
\int_{B_\gamma^2} |z\bar z|_p^{\alpha-1}\,d_pz = \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-\alpha}}\,q^{\alpha\gamma}, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{14.21}
$$

$$
\int_{B_0^2} f(z\bar z)\,d_pz = \frac{1}{C_{p,d}}\int_{B_0} f(x)\theta_d^+(x)\,d_px, \qquad p\neq 2\ [11], \tag{14.22}
$$

где величина $C_{p,d}$ определена в (9.16) и (9.17).

$$
\begin{aligned}
&\delta\sqrt{|4d|_p}\int |z\bar z|_p^{\alpha-1}\chi_p(z\zeta+\bar z\bar\zeta)\,d_pz, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0,\\
&\quad = \Gamma_{p,d}(\alpha)|\zeta\bar\zeta|_p^{-\alpha}, \qquad \zeta\neq 0\ [3]. \qquad (14.23)\\
&\quad = \Gamma_{p,d}(\alpha), \qquad \zeta=1. \qquad (14.24)
\end{aligned}
$$

$$\delta\sqrt{|4d|_p}\int_{B_\gamma^2}|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}\chi_p(z+\bar{z})\,d_pz=\Gamma_{p,d}(\alpha),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \gamma\geqslant 1\ [3]. \tag{14.25}$$

$$\int|\zeta\bar{\zeta}|_p^{\alpha-1}|(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})|_p^{\beta-1}\,d_p\zeta,$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)<1,$$
$$=B_q(\alpha,\beta)|z\bar{z}|_p^{\alpha+\beta-1},\qquad z\neq 0\ [3]. \tag{14.26}$$
$$=B_q(\alpha,\beta),\qquad z=1. \tag{14.27}$$

$$\int\chi_p(\xi z\bar{z})\,d_pz,\qquad \xi\neq 0,\quad p\neq 2,$$
$$=\frac{\operatorname{sgn}_{p,d}\xi}{|\xi|_p},\qquad |d|_p=1,\quad d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}\ [11], \tag{14.28}$$
$$=\pm\sqrt{p\operatorname{sgn}_{p,d}(-1)}\,\frac{\operatorname{sgn}_{p,d}\xi}{|\xi|_p},\qquad |d|_p=\frac{1}{p}\ [11], \tag{14.29}$$

$$\int_{B_\gamma^2}\chi_p(z\zeta+\bar{z}\bar{\zeta})=q^\gamma\Omega(q^{\gamma-r}|\zeta\bar{\zeta}|_p)\ [8]. \tag{14.30}$$

§ 15. n-переменных

$$\int_{B_0^n}d_p^nx=1. \tag{15.1}$$

$$\int_{S_0^n}d_p^nx=1-p^{-n}. \tag{15.2}$$

$$\int_{B_\gamma^n}d_p^nx=p^{n\gamma}. \tag{15.3}$$

$$\int_{S_\gamma^n}d_p^nx=(1-p^{-n})p^{n\gamma}. \tag{15.4}$$

$$\int_{B_\gamma^n}f(|x|_p)\,d_p^nx=(1-p^{-n})\sum_{k=-\infty}^{\gamma}p^{nk}f(p^k). \tag{15.5}$$

$$\int f(|x|_p)\,d_p^nx=(1-p^{-n})\sum_{k=-\infty}^{\infty}p^{nk}f(p^k). \tag{15.6}$$

$$\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\, d_p^n x = \frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}}\, p^{\alpha\gamma}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{15.7}$$

$$\int_{S_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\, d_p^n x = (1-p^{-n})\, p^{\alpha\gamma}. \tag{15.8}$$

$$\int_{|x|_p > p^\gamma} |x|_p^{\alpha-n}\, d_p^n x = -\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}}\, p^{\gamma\alpha}, \qquad \operatorname{Re}\alpha < 0. \tag{15.9}$$

$$\int_{S_\gamma^n} \chi_p((\xi,x))\, d_p^n x = (1-p^{-n})\, p^{\gamma n}\Omega(p^\gamma|\xi|_p)$$
$$-p^{(\gamma-1)n}\delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) \ [26], [3]. \tag{15.10}$$

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p((\xi,x))\, d_p^n x = p^{\gamma n}\Omega(p^\gamma|\xi|_p) \ [26], [3]. \tag{15.11}$$

$$\int_{B_\gamma^n} |(x,x)|_p^{\alpha-n/2}\chi_p((\xi,x))\, d_p^n x, \qquad |(\xi,\xi)|_p > p^{-\gamma}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$
$$= \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\Gamma_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad n \equiv 0 \pmod 4,$$
$$p \ne 2 \ \text{ или } \ n \equiv 2 \pmod 4, \quad p \equiv 1 \pmod 4 \ [10]. \tag{15.12}$$
$$= (-1)^{\gamma((\xi,\xi))}\Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n \equiv 2 \pmod 4, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \ [10]. \tag{15.13}$$

$$\int |(x,x)|_p^{\alpha-n/2}\chi_p((\xi,x))\, d_p^n, \qquad (\xi,\xi) \ne 0, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$
$$= \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\Gamma_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad n \equiv 0 \pmod 4, \quad p \ne 2$$
$$\text{или } \ n \equiv 2 \pmod 4, \quad p \equiv 1 \pmod 4 \ [10]. \tag{15.14}$$
$$= (-1)^{\gamma((\xi,\xi))}\Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n \equiv 2 \pmod 4, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \ [10]. \tag{15.15}$$

$$\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\chi_p(x_1)\, d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \gamma \geqslant 1. \tag{15.16}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n}\chi_p(x_1)\, d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{15.17}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n}\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x=\Gamma_p^{(n)}(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha>0,\quad \xi\ne 0. \tag{15.18}$$

$$\int |x,m|_p^{\alpha-n}\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x=\Gamma_p^{(n)}(\alpha)\bigl(|\xi|_p^{-\alpha}-|pm|_p^{\alpha}\bigr)\Omega(|m\xi|_p),$$
$$m\ne 0\ [1],[17]. \tag{15.19}$$

$$\int |x,1|_p^{-\alpha}\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x=\Gamma_p^{(n)}(n-\alpha)\bigl(|\xi|_p^{\alpha-n}-p^{\alpha-n}\bigr)\Omega(|\xi|_p)$$
$$\equiv J_p^{\alpha}(\xi),\qquad \operatorname{Re}\alpha>n. \tag{15.20}$$

Определим функцию $J_p^{\alpha}(\xi)$ при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant n$ как мероморфное продолжение с области $\operatorname{Re}\alpha>n$. В частности,

$$\lim_{\substack{\alpha\to n,\\ \alpha>n}} J_p^{\alpha}(\xi)=J_p^{n}(\xi)=(1-p^{-n})\biggl(1-\frac{\ln|\xi|_p}{\ln p}\biggr)\Omega(|\xi|_p),\qquad \alpha=n. \tag{15.21}$$

$$\int J_p^{\alpha}(\xi)J_p^{\beta}(x-\xi)\,d_p^n\xi=J_p^{\alpha}*J_p^{\beta}=J_p^{\alpha+\beta},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C}. \tag{15.22}$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n}|\varepsilon-x|_p^{\beta-n}\,d_p^n x=B_p^{(n)}(\alpha,\beta),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)<n,\quad |\varepsilon|_p=1. \tag{15.23}$$

$$\int |y|_p^{\alpha-n}|x-y|_p^{\beta-n}\,d_p^n y=B_p^{(n)}(\alpha,\beta)|x|_p^{\alpha+\beta-n},$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \operatorname{Re}\beta>0,\quad \operatorname{Re}(\alpha+\beta)<n\ [1],[17]. \tag{15.24}$$

$$\int |y,m|_p^{\alpha-n}|x-y,m|_p^{\beta-n}\,d_p^n y=B_p^{(n)}(\alpha,\beta)|x,m|_p^{\alpha+\beta-n}$$
$$-\Gamma_p^{(n)}(\alpha)|pm|_p^{\alpha}|x,m|_p^{\beta-n}-\Gamma_p^{(n)}(\alpha)|pm|_p^{\beta}|x,m|_p^{\alpha-n},$$
$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<n,\quad m\ne 0\ [17]. \tag{15.25}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p^{n-1}}\chi_p\biggl\{\sum_{k=0}^{n-1}\biggl(\frac{2x_kx_{k+1}}{\sin t_k}-\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{\operatorname{tg}t_k}\biggr)\biggr\}\,d_px_1\,d_px_2\ldots d_px_{n-1}$$
$$=\frac{\lambda_p(T_n)}{\sqrt{|T_n|_p}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{|t_k|_p}}{\lambda_p(t_k)}\chi_p\biggl(\frac{2x_0x_n}{\sin T_n}-\frac{x^2+x_n^2}{\operatorname{tg}T_n}\biggr),\qquad n=2,3,\ldots,$$
$$p\ne 2,\quad |t_k|_p\leqslant\frac{1}{p},\quad T_n=\sum_{k=0}^{n-1}t_k\ [17]. \tag{15.26}$$

Пусть $x_i \in \mathbb{Q}_p^n$, $|x_i|_p = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k < p^n$ и $|x_i - x_j|_p = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots,\ i \neq j$. Обозначим

$$D_k^n = \bigl[x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - x_i|_p = 1,\ i = 1, 2, \ldots, k\bigr].$$

Тогда

$$\int_{D_k^n} d_p^n x = 1 - kp^{-n}, \qquad k \leqslant p^n, \quad p \neq 2 \text{ [18]}. \tag{15.27}$$

Пусть $G_k^n = \bigl[(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}_p^{kn} : |x_i|_p = 1,\ |x_i - x_j|_p = 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, k,\ i \neq j\bigr]$. Тогда

$$\int_{G_k^n} d_p^n x_1\, d_p^n x_2 \ldots d_p^n x_k = \prod_{\ell=1}^{k} (1 - \ell p^{-n}) = c_{p,k}^n, \\ k \leqslant p^n, \quad p \neq 2 \text{ [18]}. \tag{15.28}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$, $|x_0|_p = 1$ и $G_k^n(x_0) = \bigl[(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}_p^{kn} : |x_i|_p = 1,\ i = 0, 1, \ldots, k,\ |x_i - x_j|_p = 1,\ i, j = 0, 1, \ldots, k,\ i \neq j\bigr]$,

$$\int_{G_k^n(x_0)} d_p^n x_1\, d_p^n x_2 \ldots d_p^n x_k = \frac{1 - (k+1)p^{-n}}{1 - p^{-n}}\, c_{k,p}^n, \\ k + 1 \leqslant p^n, \quad p \neq 2 \text{ [18]}. \tag{15.29}$$

Интеграл Миссарова–Лернера [26], [31]. Пусть G – некоторый связный конечный граф, $V = V(G)$ и $L = L(G)$ – множества вершин и ребер его соответственно. Каждой линии $l \in L$ сопоставим комплексное число a_l и обозначим $a = \{a_l,\, l \in L\}$, и каждой вершине $v \in V$ сопоставим n-мерный p-адический вектор $x_v = (x_{v1}, x_{v2}, \ldots, x_{vn}) \in \mathbb{Q}_p^n$. На множестве вершин V введем иерархию A следующим образом. Иерархия A – это семейство подмножеств множества V, таких что: 1) $V \in A$, 2) $v \in A$ для всех $v \in V$ и 3) для любой пары $V' \in A$, $V'' \in A$ либо $V' \cap V'' = \varnothing$, либо $V' \subset V''$, либо $V'' \subset V'$. Для любого $V' \in A$, $V' \neq V$, обозначим через $\theta(V')$ минимальное подмножество в A, содержащее V', но не совпадающее с ним, и пусть $K(V') = [V'' \in A : \theta(V'') = V']$. Рассматриваются только такие иерархии A, для которых

$$1 < |K(V')| \leqslant p^n, \quad V' \in A', \qquad \text{где } A' = [V' \in A : |V'| > 1].$$

Обозначим

$$a(V') = \sum_{l \in L(G(V'))} a_l, \qquad \beta(V') = a(V') + n(|V'| - 1),$$

где $L(G(V'))$ – множество ребер l графа G, начало $i(l)$ и конец $f(l)$ которых лежат в $V' \subset V = V(G)$. При условии $\beta(V') > 0$, $V' \in A'$, справедливо равенство

$$F_G(a) \equiv \int_{Z_p^{n|V|}} \prod_{l \in L} |x_{i(l)} - x_{f(l)}|_p^{a_l} \prod_{v \in V} d_p^n x_v$$
$$= p^{a(V)} \sum_A \prod_{V' \in A'} \frac{1}{p^{\beta(V')} - 1} \frac{(p^n - 1)!}{(p^n - |K(V')|)!},$$

где суммирование проводится по всем иерархиям A. (Символ $|V|$ обозначает число элементов множества V.) Вычисление различных фейнмановских интегралов сводится к вычислению интеграла $F_G(a)$ [26].

§ 16. Интегралы и свертки обобщенных функций

Интегралом (см. § 6) *обобщенной функции* $f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O})$ по открыто-замкнутому множеству $D \in \mathscr{O} \in \mathbb{Q}_p^n$ называется предел, если он существует,

$$G\!\!\int_D f(x)\, d_p^n x = \lim_{k \to \infty} (f\theta_D, \Omega_k).$$

Интегралы обобщенных функций содержатся также в §§ 12–15 и § 17.

$$G\!\!\int_{B_0^n} d_p^n x = 1. \tag{16.1}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} d_p^n x = p^{\gamma n}. \tag{16.2}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma^n} d_p^n x = (1 - p^{-n})\, p^{\gamma n}. \tag{16.3}$$

$$G\!\!\int f(x)\, d_p^n x = \int f(x)\, d_p^n x, \qquad f \in \mathscr{L}^1. \tag{16.4}$$

$$G\!\!\int f(x)\, d_p^n x = \lim_{\gamma \to \infty} \int_{B_\gamma^n} f(x)\, d_p^n x, \qquad f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}. \tag{16.5}$$

$$G\!\!\int_D f(x)\,d_p^n x = \int_D f(x)\,d_p^n x, \qquad f \in \mathscr{L}^1(D). \tag{16.6}$$

$$G\!\!\int f(x)\,d_p^n x = \lim_{\gamma\to\infty}\int_{B_\gamma^n} f(x)\,d_p^n x, \qquad f \in \mathscr{L}^p. \tag{16.7}$$

$$G\!\!\int f(x)\,d_p^n x = (f,\Omega_N), \qquad f \in \mathscr{S}', \quad \mathrm{spt} \in B_N^n. \tag{16.8}$$

$$G\!\!\int_D f(x)\,d_p^n x = (f,\theta_D), \qquad f \in \mathscr{S}'(\mathscr{O}), \tag{16.9}$$

где D – открытый компакт в $\mathscr{O}$.

$$G\!\!\int f(x)\,d_p^n x = \lim_{\gamma\to\infty}(f,\Omega_\gamma), \qquad f \in \mathscr{S}'. \tag{16.10}$$

$$G\!\!\int \delta(x)\,d_p^n x = 1. \tag{16.11}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \pi(x)\,d_p x = 0, \qquad \pi \not\equiv 1, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{ср. } (11.40)). \tag{16.12}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1}\pi(x)\,d_p x = 0, \qquad \pi \not\equiv 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{16.13}$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-1}\pi(x)\,d_p x = 0, \qquad \pi \not\equiv 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{16.14}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1}\,d_p x = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma} \quad (\text{ср. } (11.18)). \tag{16.15}$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-1}\,d_p x = 0, \qquad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z \quad (\text{ср. } (8.3')). \tag{16.16}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} |x-a|_p^{\alpha-1}\,d_p x = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})}\,|a|_p^\alpha, \\ |a|_p = p^\gamma \quad (\text{ср. } (11.20)). \tag{16.17}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma} |x^2+a^2|_p^{(\alpha-1)/2}\,d_p x = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^\alpha}\,|a|_p^\alpha + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma}, \\ 0 \neq |a|_p \leqslant p^\gamma, \quad p \equiv 3 \pmod 4 \quad (\text{ср. } (11.28)). \tag{16.18}$$

$$G\!\!\int |x^2+a^2|_p^{(\alpha-1)/2}\,d_px = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{\alpha}}\,|a|_p^{\alpha},$$
$$a\neq 0,\quad p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)\quad (\text{ ср. } (11.30)). \tag{16.19}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma} |x^2+a^2|_p^{\alpha-1}\,d_px$$
$$= \left[1-\frac{2}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p^{\alpha}-1}+\frac{1}{p^{1-2\alpha}-1}\right)\right]|a|_p^{2\alpha-1}$$
$$-\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{p^{(2\alpha-1)\gamma}}{1-p^{2\alpha-1}},$$
$$0\neq |a|_p\leqslant p^{\gamma},\quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{16.20}$$

$$G\!\!\int |x^2+a^2|_p^{\alpha-1}\,d_px = \left[1-\frac{2}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{p^{\alpha}-1}+\frac{1}{p^{1-2\alpha}-1}\right)\right]|a|_p^{2\alpha-1},$$
$$a\neq 0,\quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\quad (\text{ср. } (11.31)). \tag{16.21}$$

$$G\!\!\int_{S_0} |x^2+1|_p^{\alpha-1}\,d_px = 1-\frac{3}{p}-2\frac{1-p^{-1}}{1-p^{\alpha}},$$
$$\alpha\neq\alpha_k,\quad k\in Z,\quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\quad (\text{ср. } (11.32)). \tag{16.22}$$
$$|x|_p^{\alpha-1} * |x|_p^{\beta-1} = B_p(\alpha,\beta)|x|_p^{\alpha+\beta-1}. \tag{16.23}$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1}\,d_px = B_p(\alpha,\beta),$$

$$|x,m|_p^{\alpha-1} * |x,m|_p^{\beta-1} = B_p(\alpha,\beta)|x,m|_p^{\alpha+\beta-1}$$
$$-\Gamma_p(\alpha)|pm|_p^{\alpha}|x,m|_p^{\beta-1}-\Gamma_p(\beta)|pm|_p^{\beta}|x,m|_p^{\alpha-1}, \tag{16.24}$$
$$m\neq 0\quad (\text{ср. } (11.68)). \tag{16.25}$$

$$G\!\!\int |x,m|_p^{\alpha-1}\chi_p(\xi x)\,d_px = \Gamma_p(\alpha)(|\xi|_p^{-\alpha}-|pm|_p^{\alpha})\Omega(|m\xi|_p),$$
$$m\neq 0,\quad \alpha\in\mathbb{C}\quad (\text{см. } (12.48)). \tag{16.26}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \delta(x_0-k)\,d_px = p^{\gamma-1},\quad k=1,2,\dots,p-1\ \ (\text{см. } (11.33)). \tag{16.27}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} [1-\delta(x_0-k)]\,d_px = \left(1-\frac{2}{p}\right)p^{\gamma},$$
$$k=1,2,\dots,p-1\quad (\text{см. } (11.34)). \tag{16.28}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \delta(x_n - k)\,d_px = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)p^{\gamma-1},$$
$$k = 0,1,\dots,p-1, \quad n\in Z_+ \quad (\text{см. } (11.35)). \tag{16.29}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} [1-\delta(x_n - k)]\,d_px = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2 p^{\gamma},$$
$$k = 0,1,\dots,p-1, \quad n\in Z_+ \quad (\text{см. } (11.36)). \tag{16.30}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \delta(x_0 - k_0)\prod_{l=1}^{n}\delta(x_l-k_l) = p^{\gamma-n-1}, \qquad k_l = 0,1,\dots,p-1,$$
$$k_0\ne 0, \quad n = 0,1,\dots \quad (\text{см. } (11.37)). \tag{16.31}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \Big[1-\delta(x_0 - k_0)\prod_{l=1}^{n}\delta(x_l-k_l)\Big] = (1-p^{-1}-p^{-n-1})p^{\gamma},$$
$$k_l = 0,1,\dots,p-1, \quad k_0\ne 0, \tag{16.32}$$
$$n = 0,1,\dots \quad (\text{см. } (11.38)).$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \Big(\prod_{l=1}^{n}\delta(x_l-k_l)\Big)\,d_px = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)p^{\gamma-n},$$
$$k_l = 0,1,\dots,p-1, \quad n\in Z_+. \tag{16.33}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma} \Big[1-\prod_{l=1}^{n}\delta(x_{i_l}-k_{i_l})\Big]\,d_px = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)(1-p^{-n})\,p^{\gamma},$$
$$k_l = 0,1,\dots,p-1, \quad n\in Z_+. \tag{16.34}$$

$$G\!\!\int_{S_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\,d_p^nx = \Big(1-\frac{1}{p^{-n}}\Big)\,p^{\alpha\gamma}, \qquad \alpha\in\mathbb{C} \quad (\text{см. } (15.8)). \tag{16.35}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\,d_p^nx = \frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}}\,p^{\alpha\gamma} \quad (\text{ср. } (15.7)). \tag{16.36}$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-n}\,d_p^nx = 0, \qquad n\in Z_+. \tag{16.37}$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} |(x,x)|_p^{\alpha-n/2}\chi_p((\xi,x))\,d_p^nx, \qquad |(\xi,\xi)|_p > p^{\gamma},$$
$$= \Gamma_p\Big(\alpha-\frac{n}{2}+1\Big)\Gamma_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \quad n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p\ne 2$$
$$\text{или } \ n\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{16.38}$$

$$= (-1)^{\gamma((\xi,\xi))}\Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$\alpha \neq \left\{\alpha_k - \frac{\pi i}{\ln p},\ \alpha_k + \frac{n}{2} - 1,\ k \in Z\right\},$$
$$n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad (\text{ср. } (15.13)). \qquad (16.39)$$

$$= \Gamma_p^2(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad n = 2, \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \qquad (16.40)$$

$$= \Gamma_p(\alpha)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n = 2, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad (\text{см. } (14.9)). \qquad (16.41)$$

$$G\!\!\int |(x,x)|_p^{\alpha-n/2}\chi_p((\xi,x))\,d_p^n x, \qquad (\xi,\xi) \neq 0,$$

$$= \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\Gamma_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \quad n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \neq 2$$
$$\text{или} \ \ n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \qquad (16.42)$$

$$= (-1)^{\gamma((\xi,\xi))}\Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad (\text{см. } (15.15)). \qquad (16.43)$$

$$= \Gamma_p^2(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n = 2, \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad (\text{ср. } (14.10)). \qquad (16.44)$$

$$= \Gamma_p(\alpha)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n = 2, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \quad (\text{ср. } (14.11)). \qquad (16.45)$$

$$G\!\!\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n}\chi_p(x_1)\,d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \quad \gamma \in Z_+. \qquad (16.46)$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-n}\chi_p(x_1)\,d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha). \qquad (16.47)$$

$$G\!\!\int |x|_p^{\alpha-n}\chi_p\big((\xi,x)\big)\,d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}, \qquad \xi \neq 0 \quad (\text{ср. } (15.18)). \qquad (16.48)$$

$$|x|_p^{\alpha-n} * |x|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha,\beta)|x|_p^{\alpha+\beta-n}. \qquad (16.49)$$

$$G\!\!\int |x,m|_p^{\alpha-n}\chi_p\big((\xi,x)\big)\,d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha)\big(|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\big)\Omega(|m\xi|_p),$$
$$m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{ср. } (15.19)). \qquad (16.50)$$

$$G\!\!\int |x,1|_p^{-\alpha}\chi_p\big((\xi,x)\big)\,d_p^n x$$
$$= \Gamma_p^{(n)}(n-\alpha)\big(|\xi|_p^{\alpha-n}-p^{\alpha-n}\big)\Omega(|\xi|_p), \qquad \alpha\in\mathbb{C}. \tag{16.51}$$

$$|x,m|_p^{\alpha-n} * |x,m|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha,\beta)|x,m|_p^{\alpha+\beta-n}$$
$$= -\,\Gamma_p^{(n)}(\alpha)|pm|_p^{\alpha}\,|x,m|_p^{\beta-n} - \Gamma_p^{(n)}(\beta)|pm|_p^{\beta}\,|x,m|_p^{\alpha-n},$$
$$m\neq 0 \quad (\text{ср. } (15.25)). \tag{16.52}$$

$$(D^{\alpha}\varphi)(x) = (f_{-\alpha}*\varphi)(x), \qquad \varphi\in\mathscr{S},$$
$$= \Gamma_p^{-1}(-\alpha)\int\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\,d_p y, \qquad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{16.53}$$
$$= (1-p^{-\alpha-1})^{-1}\int[\varphi(x+y)-\varphi(x+y/p)]|y|_p^{-\alpha-1}\,d_p y. \tag{16.54}$$
$$= -\frac{p-1}{p\ln p}\int\varphi(y)\ln|x-y|_p\,d_p y, \qquad \int f(y)\,d_p y = 0,$$
$$\alpha=\alpha_k-1, \quad k\in Z. \tag{16.55}$$
$$= \varphi(x), \qquad \alpha=\alpha_k, \quad k\in Z. \tag{16.56}$$
$$= \int|\xi|_p^{\alpha}\widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d_p\xi, \qquad \operatorname{Re}\alpha>-1. \tag{16.57}$$
$$= \int|\xi|_p^{\alpha}[\widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-\xi x)-\widetilde{\varphi}(0)]\,d_p\xi, \qquad \operatorname{Re}\alpha<-1. \tag{16.58}$$
$$= \int_{Z_p}|\xi|_p^{-1}[\widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-\xi x)-\widetilde{\varphi}(0)]\,d_p\xi + \frac{1}{p}\,\widetilde{\varphi}(0)$$
$$+ \int_{\mathbb{Q}_p\setminus Z_p}|\xi|_p^{-1}\widetilde{\varphi}(\xi)\chi_p(-\xi x)\,d_p\xi, \quad \alpha=\alpha_k-1,\ k\in Z. \tag{16.59}$$

$$D^{\alpha}\chi_p(ax) = |a|_p^{\alpha}\chi_p(ax), \qquad \alpha\in\mathbb{C}, \quad a\neq 0. \tag{16.60}$$

$$D^{\alpha}\Phi(x) = p^{\gamma\alpha}\Phi(x), \qquad \alpha\in\mathbb{R}\ [1], \tag{16.61}$$
$$\text{если } \Phi(x) = F\big[\delta\big(|\xi|_p-p^{\gamma}\big)f(\xi)\big], \qquad f\in\mathscr{S}'.$$

$$D^{\alpha}\big[\delta\big(|x|_p-p^{\gamma}\big)\chi_p(ax^2)\big] = p^{\gamma\alpha}|2a|_p^{\alpha}\delta\big(|x|_p-p^{\gamma}\big)\,\chi_p(ax^2),$$
$$\alpha\in\mathbb{R}, \quad |2a|_p\leqslant p^{2-2\gamma}\ [1]. \tag{16.62}$$

$$D^{\alpha}\big[\eta(x_0)\delta\big(|x|_p-p^{\gamma}\big)\big] = p^{\alpha(1-\gamma)}\eta(x_0)\delta\big(|x|_p-p^{\gamma}\big),$$
$$\alpha\in\mathbb{R}, \quad p\neq 2, \quad \sum_{k=1}^{p-1}\eta(k)=0\ [4]. \tag{16.63}$$

$$(D^{\alpha}f)(x), \qquad f\in\mathscr{S}, \quad \operatorname{spt} f\in B_N, \quad |x|_p>p^N,$$
$$= \Gamma_p^{-1}(\alpha)|x|_p^{\alpha-1}(f,\Omega_N), \qquad \alpha\neq -1 \text{ [3]}. \tag{16.64}$$
$$= -\frac{p-1}{p\ln p}\ln|x|_p(f,\Omega_N), \qquad \alpha=-1 \text{ [3]}. \tag{16.65}$$

$$D^{\alpha}1=0, \qquad \alpha>0. \tag{16.66}$$

$$D^{\alpha}\delta(x-a)=f_{-\alpha}(x-a), \qquad \alpha\in\mathbb{C}, \quad a\in\mathbb{Q}_p. \tag{16.67}$$

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}\big[\delta\big(|x|_p-p^{\ell-N}\big)\,\delta(x_0-j)\,\chi_p\big(\epsilon_\ell p^{\ell-2N}x^2\big)\big] \\ &\quad = p^{\alpha N}\delta\big(|x|_p-p^{\ell-N}\big)\,\delta(x_0-j)\,\chi_p\big(\epsilon_\ell p^{\ell-2N}x^2\big), \qquad N\in Z, \\ &\qquad p\neq 2, \quad \alpha>0, \quad \ell=2,3,\dots, \quad j=1,2,\dots,p-1, \\ &\qquad \epsilon_\ell=\varepsilon_0+\varepsilon_1 p+\dots+\varepsilon_{\ell-2}, \\ &\qquad \varepsilon_s=0,1,\dots,p-1, \ \ \varepsilon_0\neq 0, \ \ s=0,1,\dots,\ell-2 \text{ [4]}. \end{aligned} \tag{16.68}$$

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}\big[\Omega\big(p^{N-1}|x|_p\big)\,\chi_p(jp^{-N}x)\big]=p^{\alpha N}\Omega\big(p^{N-1}|x|_p\big)\,\chi_p\big(jp^{-N}x\big), \\ &\qquad N\in Z, \quad p\neq 2, \quad \alpha>0, \quad j=1,2,\dots,p-1 \text{ [4]}. \end{aligned} \tag{16.69}$$

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}\big[\delta\big(|x|_2-2^{\ell+1-N}\big)\,\chi_2\big(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N}x^2+2^{\ell-N-j}x\big)\big] \\ &\quad = 2^{\alpha N}\delta\big(|x|_2-2^{\ell+1-N}\big)\,\chi_2\big(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N}x^2+2^{\ell-N-j}x\big), \\ &\qquad N\in Z, \quad p=2, \quad \alpha>0, \quad \ell=2,3,\dots, \quad j=0,1, \\ &\qquad \epsilon_\ell=1+\varepsilon_1 2+\dots+\varepsilon_{\ell-2}2^{\ell-2}, \\ &\qquad \varepsilon_s=0,1, s=1,2,\dots,\ell-2 \text{ [4]}. \end{aligned} \tag{16.70}$$

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}\big[\Omega\big(2^N|x-j2^{N-2}|_2\big)-\delta\big(|x-j2^{N-2}|_2-2^{1-N}\big)\big] \\ &\quad = 2^{\alpha N}\big[\Omega\big(2^N|x-j2^{N-2}|_2\big)-\delta\big(|x-j2^{N-2}|_2-2^{1-N}\big)\big], \\ &\qquad N\in Z, \quad p=2, \quad \alpha>0, \quad j=0,1 \text{ [4]}. \end{aligned} \tag{16.71}$$

$$D^{\alpha}\Omega\big(p^{-\gamma}|x|_p\big)=\frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1}\,p^{\alpha(1-\gamma)}, \qquad x\in B_\gamma, \quad \alpha>0 \text{ [5]}. \tag{16.72}$$

$$D^{\alpha}\delta\big(|x|_p-p^{\gamma}\big)=\frac{p^{\alpha}+p-2}{p^{\alpha+1}-1}\,p^{\alpha(1-\gamma)}, \quad x\in S_\gamma, \quad \alpha>0 \text{ [5]}. \tag{16.73}$$

Пусть $\mathscr{K}(t,\tau)$ – вещественное симметричное ядро

$$\mathscr{K}(t,t)=0, \qquad \mathscr{K}(t,\tau)=\rho\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}t^{-\alpha-1}, \qquad \tau<t,$$

$$\sigma=\frac{p^{\alpha}+p-2}{p^{\alpha+1}-1}\,p^{\alpha}, \qquad \rho=-\Gamma_p^{-1}(-\alpha)\left(1-\frac{1}{p}\right), \qquad \sigma+\rho=p^{\alpha},$$

и функция $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$ такова, что

$$\int_{|x|_p>1} |f(x)||x|_p^{-\alpha-1}\, d_px < \infty.$$

Тогда

$$(D^\alpha f)(x) = -\int \mathscr{K}(|x|_p, |y|_p) f(y)\, d_py + \sigma |x|_p^{-\alpha} f(x), \quad \alpha > 0 \text{ [5]}. \tag{16.74}$$

В нижеследующих формулах § 16 все интегралы

$$G\!\!\int f(z,\bar z)\, d_pz$$

понимаются по нормированной мере $d_pz = \delta^{-1}\, d_px\, d_py$, $z = x + \sqrt{d}\,y$, $\bar z = x - \sqrt{d}\,y$, поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,)$, $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (см. (9.2)). В частности,

$$B^2_\gamma = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}\,) : |z\bar z|_p \leqslant q^\gamma].$$

$$G\!\!\int_{B_0^2} d_pz = 1. \tag{16.75}$$

$$G\!\!\int_{B_0^2} |z\bar z|_p^{\alpha-1}\, d_pz = \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-\alpha}}\,. \tag{16.76}$$

$$G\!\!\int |z\bar z|_p^{\alpha-1}\, d_pz = 0. \tag{16.77}$$

$$G\!\!\int |z\bar z|_p^{\alpha-1} \chi_p(z+\bar z)\, d_pz = \frac{\Gamma_{p,d}(\alpha)}{\delta\sqrt{|4d|_p}}\,. \tag{16.78}$$

$$G\!\!\int_{B_1^2} |z\bar z|_p^{\alpha-1} \chi_p(z+\bar z)\, d_pz = \frac{\Gamma_{p,d}(\alpha)}{\delta\sqrt{|4d|_p}}\,, \tag{16.79}$$

$$|z\bar z|_p^{\alpha-1} * |z\bar z|_p^{\beta-1} = B_q(\alpha,\beta)|z\bar z|_p^{\alpha+\beta-1}. \tag{16.80}$$

$$G\!\!\int |z\bar z|_p^{\alpha-1} |(1-z)(1-\bar z)|_p^{\beta-1}\, d_pz = B_q(\alpha,\beta). \tag{16.81}$$

$$G\!\!\int \chi_p(\xi z\bar z)\, d_pz = \frac{\operatorname{sgn}_{p,d}\xi}{|\xi|_p} + \frac{1+p}{2p}\,\delta(\xi),$$
$$p \neq 2, \quad |d|_p = 1, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \text{ [11]}. \tag{16.82}$$

$$G\!\!\int \chi_p(\xi z\bar{z})\,d_pz = \pm\sqrt{p\,\mathrm{sgn}_{p,d}\,(-1)}\,\frac{\mathrm{sgn}_{p,d}\,\xi}{|\xi|_p} + \delta(\xi),$$

$$p \neq 2, \quad |d|_p = \frac{1}{p} \ [11]. \tag{16.83}$$

§ 17. Таблица преобразований Фурье

Для взаимно однозначного соответствия между *прообразом* $f \in \mathscr{S}'$ и его *образом* $\widetilde{f} \in \mathscr{S}'$ – преобразованием Фурье f – будем использовать обозначение (см. § 7)

$$f(x) \Longleftrightarrow \widetilde{f}(\xi).$$

$$\omega_\gamma(x) \Longleftrightarrow \delta_\gamma(\xi). \tag{17.1}$$

$$\delta(x) \Longleftrightarrow 1(\xi). \tag{17.2}$$

$$f(Ax+b) \Longleftrightarrow |\det A|_p^{-1}\chi_p\bigl(-(A^{-1}b,\xi)\bigr)\widetilde{f}(\bar{A}'\xi),$$

$$\det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{17.3}$$

$$f(x-b) \Longleftrightarrow \chi_p((b,\xi))\widetilde{f}(\xi), \qquad b \in \mathbb{Q}_p^n. \tag{17.4}$$

$$\check{f}(x) \Longleftrightarrow \check{\widetilde{f}}(\xi). \tag{17.5}$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\chi_p((\xi,x))\,d_p^nx, \qquad f \in \mathscr{L}^1. \tag{17.6}$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\int_{B_k^n} f(x)\chi_p((\xi,x))\,d_p^nx \ \text{ в } \ \mathscr{S}', \qquad f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}. \tag{17.7}$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty}\int_{B_k^n} f(x)\chi_p((\xi,x))\,d_p^nx \ \text{ в } \ \mathscr{L}^2, \qquad f \in \mathscr{L}^2. \tag{17.8}$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \bigl(f(x), \Omega_N(x)\chi_p((\xi,x))\bigr), \qquad \mathrm{spt}\, f \in B_N. \tag{17.9}$$

$$f * g \Longleftrightarrow \widetilde{f}\cdot\widetilde{g}. \tag{17.10}$$

$$f\cdot g \Longleftrightarrow \widetilde{f} * \widetilde{g}. \tag{17.11}$$

$$\delta\bigl(|x|_p - p^\gamma\bigr) \Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{p}\right)p^\gamma\Omega\bigl(p^\gamma|\xi|_p\bigr) - p^{\gamma-1}\delta\bigl(|\xi|_p - p^{1-\gamma}\bigr). \tag{17.12}$$

$$f\big(|x|_p\big)\Omega_\gamma\big(|x|_p\big) \Longleftrightarrow \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^k f(p^k)\Omega\big(p^\gamma|\xi|_p\big)$$

$$+|\xi|_p^{-1}\bigg[\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{k=0}^{\infty} p^{-\gamma} f\big(p^{-\gamma}|\xi|_p^{-1}\big) - f\big(p|\xi|_p^{-1}\big)\bigg]$$

$$\times\big[1-\Omega\big(p^\gamma|\xi|_p\big)\big]. \tag{17.13}$$

$$f(|x|_p) \Longleftrightarrow |\xi|_p^{-1}\bigg[\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{k=0}^{\infty} p^{-\gamma} f\big(p^{-\gamma}|\xi|_p^{-1}\big) - f\big(p|\xi|_p^{-1}\big)\bigg]. \tag{17.14}$$

$$|x|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}. \tag{17.15}$$

$$\ln|x|_p \Longleftrightarrow -\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1}\ln p\Big(\operatorname{reg}|\xi|_p^{-1} + \frac{1}{p}\,\delta(\xi)\Big). \tag{17.16}$$

$$\frac{1}{|x|_p^2+m^2} \Longleftrightarrow \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{|\xi|_p}{p^2+m^2|\xi|_p^2}$$

$$\times\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma}\frac{p^2-p^{-2\gamma}}{p^{-2\gamma}+m^2|\xi|_p^2}\,, \qquad m\neq 0. \tag{17.17}$$

$$|x|_p^{\alpha-1}|1-x|_p^{\beta-1} \Longleftrightarrow \big[\Gamma_p(\alpha+\beta-1)|\xi|_p^{1-\alpha-\beta} + B_p(\alpha,\beta)\big]\Omega(|\xi|_p)$$

$$+\big[\Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha} + \Gamma_p(\beta)|\xi|_p^{-\beta}\chi_p(\xi)\big][1-\Omega(|\xi|_p)]. \tag{17.18}$$

$$\delta(|x|_p-1)|1-x|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha)\chi_p(\xi)|\xi|_p^{-\alpha}, \qquad \gamma(\xi)\geqslant 2. \tag{17.19}$$

$$\eta_{x_0}\delta\big(|x|_p-p^\gamma\big) \Longleftrightarrow p^{\gamma-1}\eta'_{\xi_0}\delta\big(|\xi|_p-p^{1-\gamma}\big), \qquad p\neq 2, \tag{17.20}$$

$$\text{где}\quad \sum_{k=1}^{p-1}\eta_k = 0, \qquad \eta'_j = \sum_{k=1}^{p-1}\eta_k\exp\Big(2\pi i\frac{kj}{p}\Big).$$

$$|x|_p^{\alpha-1}\Omega\big(p^{-\gamma}|x|_p\big) \Longleftrightarrow \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}}p^{\alpha\gamma}\,\Omega\big(p^\gamma|\xi|_p\big)$$

$$+\Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}\big[1-\Omega\big(p^\gamma|\xi|_p\big)\big]. \tag{17.21}$$

$$\delta(|x|_p-1)\delta(x_0-p+1) \Longleftrightarrow p^{-1}\chi_p(-\xi)\Omega(|p\xi|_p). \tag{17.22}$$

$$\chi_p(x)\Omega(|px|_p) \Longleftrightarrow p\delta(|\xi|_p-1)\delta(\xi_0-p+1). \tag{17.23}$$

$$|x,m|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha)\big(|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\big)\Omega(|m\xi|_p),$$
$$m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{17.24}$$

$$f((x,x)) \Longleftrightarrow |(\xi,\xi)|_p^{-1}\Big[(1-p^{-2})\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f\big(p^{-2\gamma}|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)$$
$$- f\big(p^2|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)\Big], \qquad n=2, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.25}$$

$$f((x,x)) \Longleftrightarrow |(\xi,\xi)|_p^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\right)\right.$$
$$\times p^{-\gamma} f\big(p^{-\gamma}|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big) - 2\left(1-\frac{1}{p}\right) f\big(p|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)$$
$$\left.+ f\big(p^2|(\xi,\xi)|_p^{-1}\big)\right], \qquad n=2, \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.26}$$

$$|(x,x)|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p^2(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha}, \qquad n=2, \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.27}$$

$$|(x,x)|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n=2, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.28}$$

$$\frac{1}{|(x,x)|_p + m^2} \Longleftrightarrow \frac{1-p^{-2}}{p^2+m^2|(\xi,\xi)|_p} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{p^2-p^{-2\gamma}}{1+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p},$$
$$n=2, \quad m \neq 0, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.29}$$

$$\frac{1}{|(x,x)|_p + m^2} \Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\gamma+\frac{p-3}{p-1}\right)\frac{1}{1+p^{\gamma}m^2|(\xi,\xi)|_p}$$
$$- 2\frac{1-1/p}{p+m^2|(\xi,\xi)|_p} + \frac{1}{p^2+m^2|(\xi,\xi)|_p},$$
$$n=2, \quad m \neq 0, \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.30}$$

$$|(x,x)|_p^{\alpha-n/2} \Longleftrightarrow \Gamma_p\left(\alpha-\frac{n}{2}+1\right)\Gamma_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$\alpha \neq \left\{\alpha_k,\ a_k+\frac{n}{2}-1,\ k \in Z\right\}, \quad n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \neq 2$$
или $n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4).$ (17.31)

$$|(x,x)|_p^{\alpha-n/2} \Longleftrightarrow (-1)^{\gamma((\xi,\xi))}\Gamma_p\left(\alpha-\frac{n}{2}+1\right)\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|(\xi,\xi)|_p^{-\alpha},$$
$$n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4), \quad n \geqslant 6, \quad p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4). \tag{17.32}$$

$$|x|_p^{\alpha-n} \Longleftrightarrow \Gamma_p^{(n)}(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}. \tag{17.33}$$

$$|x,m|_p^{\alpha-n} \Longleftrightarrow \Gamma_p^{(n)}(\alpha)\big(|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^{\alpha}\big)\Omega(|m\xi|_p), \quad m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{17.34}$$

$$\sqrt{|2a|_p}\,\chi_p(ax^2)\delta(|x|_p - p^\gamma) \Longleftrightarrow \lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \times\delta\big(|\xi|_p - |2a|_p p^\gamma\big), \qquad |4a|_p \geqslant p^{2-2\gamma}. \tag{17.35}$$

$$\sqrt{|2a|_p}\,\chi_p(ax^2)\delta(|x|_p - p^\gamma) \Longleftrightarrow \left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right] \times\Omega\big(p^{1-\gamma}|\xi|_p\big), \qquad p \neq 2, \quad |a|_p = p^{1-2\gamma}. \tag{17.36}$$

$$\chi_p(ax^2)\Omega\big(p^{-\gamma}|x|_p\big) \Longleftrightarrow p^\gamma\Omega\big(p^\gamma|\xi|_p\big), \qquad |a|_p p^{2\gamma} \leqslant 1. \tag{17.37}$$

$$\sqrt{|2a|_p}\,\chi_p(ax^2)\Omega\big(p^{-\gamma}|x|_p\big) \Longleftrightarrow \lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \times\Omega\big(p^{-\gamma}|2a|_p^{-1}|\xi|_p\big), \qquad |4a|_p p^{2\gamma} \geqslant p. \tag{17.38}$$

$$\sqrt{|2a|_2}\,\chi_2(ax^2)\Omega\big(2^{-\gamma}|x|_2\big) \Longleftrightarrow \lambda_2(a)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \times\delta(|\xi|_2 - 2^{1-\gamma}), \qquad p = 2, \quad |a|_2 2^{2\gamma} = 2. \tag{17.39}$$

$$\sqrt{|2a|_2}\chi_2(ax^2)\Omega(2^{-\gamma}|x|_2) \Longleftrightarrow \lambda_2(a)\chi_2\big(-\xi^2/4a\big)\Omega(2^\gamma|\xi|_2), \quad p = 2, \quad |a|_2 2^{2\gamma} = 4. \tag{17.40}$$

$$\chi_p(ax^2) \Longleftrightarrow \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right), \qquad a \neq 0. \tag{17.41}$$

$$\chi_p\left(\frac{x^2}{2}\right) \Longleftrightarrow \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \qquad p \neq 2. \tag{17.42}$$

$$\chi_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \Longleftrightarrow \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \qquad p = 2. \tag{17.43}$$

$$\sqrt{|a|_p}\,\exp\big(-|x|_p^2\big)\,\chi_p(ax^2) \Longleftrightarrow S\left(|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega\big(|a|_p^{-1/2}|\xi|_p\big)$$
$$+ \left\{\lambda_p(a)\exp\left(-\left|\frac{\xi}{a}\right|_p^2\right)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) + |a|_p^{1/2}|\xi|_p^{-1}\left[S\left(|\xi|_p^{-2}, \frac{1}{p}\right)\right.\right.$$

$$- \exp\bigl(-|p\xi|_p^{-2}\bigr)\Bigr]\Bigr\}\bigl[1-\Omega\bigl(|a|_p^{-1/2}|\xi|_p\bigr)\bigr],$$
$$p \neq 2, \quad \gamma(a) = 2k. \tag{17.44}$$

$$\sqrt{|a|_p}\,\exp\bigl(-|x|_p^2\bigr)\chi_p(ax^2) \Longleftrightarrow \biggl\{\frac{1}{\sqrt{p}}\,S\biggl(p^{-1}|a|_p^{-1},\frac{1}{p}\biggr) + \biggl[\lambda_p(a)-\frac{1}{\sqrt{p}}\biggr]$$
$$\times \exp\bigl(-|pa|_p^{-1}\bigr)\biggr\}\chi_p\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)\Omega\bigl(\sqrt{p}\,|a|_p^{-1/2}|\xi|_p\bigr)$$
$$+\biggl\{\lambda_p(a)\exp\biggl(-\biggl|\frac{\xi}{a}\biggr|_p^2\biggr)\chi_p\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)+|a|_p^{1/2}|\xi|_p^{-1}\biggl[S\biggl(|\xi|_p^{-2},\frac{1}{p}\biggr)$$
$$- \exp\bigl(-|p\xi|_p^{-2}\bigr)\biggr]\biggr\}\bigl[1-\Omega\bigl(\sqrt{p}\,|a|_p^{-1/2}|\xi|_p\bigr)\bigr],$$
$$p \neq 2, \quad \gamma(a) = 2k+1. \tag{17.45}$$

$$\sqrt{|a|_2}\,\exp\bigl(-|x|_2^2\bigr)\chi_2(ax^2) \Longleftrightarrow \Bigl\{[\sqrt{2}\,\lambda_2(a)-1]\exp\bigl(-|4a|_2^{-1}\bigr)$$
$$+S\biggl(|a|_2^{-1},\frac{1}{2}\biggr)\biggr\}\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)\Omega\bigl(|4a|_2^{-1/2}|\xi|_2\bigr)+\Bigl\{\exp\bigl(-|4a|_p^{-1}\bigr)$$
$$+\bigl[\sqrt{2}\,\lambda_2(a)-1\bigr]S\biggl(|a|_2^{-1},\frac{1}{2}\biggr)\biggr\}\delta\bigl(|\xi|_2-|a|_2^{1/2}\bigr)\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)$$
$$+\biggl\{\sqrt{2}\,\lambda_2(a)\exp\bigl(-|2a|_2^{-2}|\xi|_2^2\bigr)\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)$$
$$+|a|_2^{1/2}|\xi|_2^{-1}\biggl[S\Bigl(|\xi|_2^{-2},1/2\Bigr)-2\exp\bigl(-|2\xi|_2^{-2}\bigr)\biggr]\biggr\}$$
$$\times\bigl[1-\Omega\bigl(|a|_2^{-1/2}|\xi|_2\bigr)\bigr], \qquad p=2, \quad \gamma(a)=2k. \tag{17.46}$$

$$\sqrt{|a|_2}\exp\bigl(-|x|_2^2\bigr)\chi_2(ax^2) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\biggl[S\biggl(\biggl|\frac{a}{2}\biggr|_2^{-1},\frac{1}{2}\biggr)-\exp\bigl(-|2a|_2^{-1}\bigr)$$
$$+2\lambda_2(a)\exp\bigl(-|8a|_2^{-1}\bigr)\biggr]\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)\Omega\bigl(|8a|_2^{-1/2}|\xi|_2\bigr)$$
$$+\sqrt{2}\,\biggl[S\biggl(|2a|_2^{-1},\frac{1}{2}\biggr)+\lambda_2(a)\exp\bigl(-|8a|_2^{-1}\bigr)\biggr]$$
$$\times\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)\delta\bigl(|\xi|_2-\sqrt{2|a|_2}\,\bigr)$$
$$+\sqrt{2}\,\lambda_2(a)S\biggl(|2a|_2^{-1},\frac{1}{2}\biggr)\chi_2\biggl(-\frac{\xi^2}{4a}\biggr)\delta\bigl(|\xi|_2-\sqrt{2|a|_2}\,\bigr)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{|a|_2^{1/2}|\xi|_2^{-1}\left[S\left(|\xi|_2^{-2},\frac{1}{2}\right)-2\exp\bigl(-|2\xi|_2^{-2}\bigr)\right]\right.\\
&\left.+\sqrt{2}\,\lambda_2(a)\exp\bigl(-|2a|_2^{-2}|\xi|_2^2\bigr)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\right\}\\
&\times\bigl[1-\Omega\bigl(2^{-1/2}|a|_2^{-1/2}|\xi|_2\bigr)\bigr],\\
&\qquad p=2,\quad \gamma(a)=2k+1. \qquad (17.47)
\end{aligned}
$$

$$
|x|_p^{\alpha-1}\theta(x)\Longleftrightarrow\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})|\xi|_p^{-\alpha}\theta^{-1}(\xi),\qquad \theta\not\equiv 1,\quad \alpha\in\mathbb{C}. \qquad (17.48)
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta(p^kx)\delta\bigl(|x|_p-p^k\bigr)\Longleftrightarrow p^ka_{p,k}(\theta)\theta^{-1}(\xi)\delta\bigl(|\xi|_p-1\bigr),\\
&\qquad k=\rho(\theta),\qquad \text{величина } a_{p,k} \text{ определена в (8.17).} \qquad (17.49)
\end{aligned}
$$

$$
|z\bar z|_p^{\alpha-1}\Longleftrightarrow\Gamma_{p,d}(\alpha)|\zeta\bar\zeta|_p^{-\alpha},\qquad d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}\quad \text{(см. (9.7)).} \qquad (17.50)
$$

$$
\begin{aligned}
&|x|_p^{\alpha-1}\mathrm{sgn}_{p,d}\,x\Longleftrightarrow\widetilde{\Gamma}_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}\mathrm{sgn}_{p,d}\,\xi,\\
&\qquad p\neq 2,\quad |d|_p=1,\quad d\notin\mathbb{Q}_p^{\times 2}\quad \text{(см. (8.8)).} \qquad (17.51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|x|_p^{\alpha-1}\mathrm{sgn}_{p,d}\,x\Longleftrightarrow\pm p^{\alpha-1/2}\sqrt{\mathrm{sgn}_{p,d}\,(-1)}\,|\xi|_p^{-\alpha}\mathrm{sgn}_{p,d}\,\xi,\\
&\qquad p\neq 2,\quad |d|_p=\frac{1}{p}\quad \text{(см. (8.24)).} \qquad (17.52)
\end{aligned}
$$

Литература

[1] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И., *p-Адический анализ и математическая физика.* – М.: Наука, 1994. То же на англ. яз. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E I., p-Adic Analysis and Mathematical Physics. – Singapore: World Scientific, 1994, XVIII

[2] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И., “Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1990. **54**(2), 275–302.

[3] Владимиров В. С., “Обобщенные функции над полем p-адических чисел” // *УМН*, 1988. **43**(5), 17–53.

[4] Владимиров В. С., “О спектре некоторых псевдо-дифференциальных операторов над полем p-адических чисел” // *Алгебра и анализ*, 1990. **2**(6), 107–124.

[5] Владимиров В. С., “О спектральных свойствах p-адических псевдо-дифференциальных операторов типа Шредингера” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1992. **56**(4), 770–789.

[6] Владимиров В. С., “Адельные формулы Фрейнда–Виттена для амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро” // *УМН*, 1993. **48**(6), 3–38.

[7] Vladimirov V. S., “On the Freund–Witten adelic formulafor Veneziano amplitudes” // *Lett. Math. Phys.*, 1993. **27**, 123–131.

[8] Vladimirov V. S., “Adelic formulas for gamma- and beta-functions in algebraic number fields” // *p-Adic Functional Analysis. Lect. Notes Pure and Appl. Math.* – New York: M. Dekker, 1997. **192**, 383–395.

[9] Бикулов А. Х., “Исследование p-адической функции Грина” // *ТМФ*, 1991. **87**(3), 376–390.

[10] Бикулов А. Х., *Частное сообщение.*

[11] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., *Теория представлений и автоморфные функции.* – М.: Наука, 1966.

[12] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел.* – М.: Наука, 1985.

[13] Ruelle Ph., Thiran E., Verstegen D., Weyers J., “Quantum mechanics on p-adic fields” // *J. Math. Phys.*, 1989. **30**(12), 2854–2874.

[14] Ruelle Ph., Thiran E., Verstegen D., Weyers J., “Adelic string and superstring amplitudes” // *Mod. Phys. Lett. A*, 1989. **4**(18), 1745–1752.

[15] Vladimirov V. S., Volovich I. V., “p-Adic quantum mechanics” // *Commun. Mathem. Phys.*, 1989. **123**, 659–676.

[16] Meurice Y., “Quantum mechanics with p-adic numbers” // *Int. J. Modern Phys. A*, 1989. **4**(19), 5133–5147.

[17] Smirnov V. A., “Renormalization in p-adic quantum mechanics” // *Modern Phys. Lett. A.*, 1991. **6**(15), 1421–1427.

[18] Smirnov V. A., “Calculation of general p-adic Feynmann amplitude” // *Commun. Math Phys.*, 1992. **149**, 623–636.

[19] Zelenov E. I., “p-adic path integrals” // *J. Math. Phys.*, 1991. **32**, 147–152.

[20] Зеленов Е. И., “p-Адическая квантовая механика при $p = 2$” // *ТМФ*, 1989. **80**(2), 253–264.

[21] Kochubei A. N., “Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of p-adic numbers” // *p-Adic Functional Analysis, Lect. Notes Pure and Appl. Math.* – New York: M.Dekker, 1997. **192**, 275–280.

[22] Kochubei A. N., “A Schrödinger-type equation over the field of p-adic numbers” // *J. Math. Phys.*, 1993. **34**(8), 3420–3428.

[23] Кочубей А. Н., “Параболические уравнения над полем p-адических чисел” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1991. **55**(6), 1312–1330.

[24] Кочубей А. Н., “Гауссовы интегралы и спектральная теория над локальным полем” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1994. **58**(6), 69–78.

[25] Кочубей А. Н., “Об асимптотике p-адических функций Грина” // *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.* 1994. **203**, 116–125.

[26] Missarov M. D., “Renormalization group and renormalization theory in p-adic and adelic scalar models” // *Adv. Soviet Math.*, 1991. **3**, 143–164.

[27] Frampton P. H., “Retrospective on p-adic string theory” // *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.* 1994. **203**, 287–291.

[28] Бикулов А. Х., Волович И. В., “p-Адическое броуновское движение” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997. **61**(3), 75–90.

[29] Dragović B. G., *Частное сообщение.*

[30] Taibleson M. H., *Fourier Analysis on Local Fields.* – Princeton: Princeton Univ. Press and Univ. of Tokio Press, 1975.

[31] Lerner E. Yu., Missarov M. D., “p-Adic Feynman and string amplitudes” // *Commun. Math. Phys.*, 1989. **121**, 35–48.

[32] Brekke L., Freund P. G. O., “p-Adic numbers in physics” // *Physics Reports* (*Rev. Sect. of Phys. Lett.*), 1993. **233**(1), 1–66.

[33] Козырев С. В., Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002. **66**(2), 149–158.

[34] Хренников А. Ю., *Неархимедов анализ и его приложения.* – М.: Физматлит, 2003.

Оглавление

Часть I. Краткие сведения из p-адического анализа . 3

§ 1. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ 3
§ 2. Некоторые функции на $\mathbb{Q}_p$ 6
§ 3. Аналитические функции 9
§ 4. Мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$ 12
§ 5. n-мерное пространство $\mathbb{Q}_p^n$ 14
§ 6. Обобщенные функции на $\mathbb{Q}_p^n$ 15
§ 7. Преобразование Фурье 23
§ 8. Однородные обобщенные функции 25
§ 9. Квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$ 34
§ 10. Оператор D^α 41

Часть II. Таблицы интегралов 47

§ 11. Простейшие интегралы, одна переменная 47
§ 12. Интегралы Фурье 53
§ 13. Гауссовы интегралы 61
§ 14. Две переменные 64
§ 15. n-переменных 67
§ 16. Интегралы и свертки обобщенных функций 71
§ 17. Таблица преобразований Фурье 79

Литература 84

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 2

Василий Сергеевич Владимиров

Таблицы интегралов комплекснозначных функций p-адических аргументов

Ответственный за выпуск *А. Д. Изаак*
Компьютерная верстка *Е. И. Иванникова*

Сдано в набор 15.07.2003. Подписано в печать 08.09.2003.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 5,63. Уч.-изд. л. 5,6. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/spm/ e-mail: spm@mi.ras.ru