

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ, Л. А. ОВЧАРОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших технических
учебных заведений*

5-е издание, исправленное

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я73
В29

Рецензент —

директор Института проблем передачи информации РАН академик *Н.А.Кузнецов*

Вентцель Е. С.

В29 Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — 5-е изд., испр. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 448 с.
ISBN 5-7695-1054-4

Настоящее пособие представляет собой систематизированную подборку задач и упражнений по теории вероятностей. Все задачи снабжены ответами, а большинство — и решениями. В начале каждой главы приведена сводка основных теоретических положений и формул, необходимых для решения задач.

Для студентов высших технических учебных заведений. Может быть использовано преподавателями, инженерами и научными работниками, заинтересованными в освоении вероятностных методов для решения практических задач.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN 5-7695-1054-4

© Вентцель Е. С., Овчаров Л. А., 2003
© Издательский центр «Академия», 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания теории вероятностей в высшем техническом учебном заведении, а также опыта применения вероятностных методов для решения практических задач. В начале каждой главы книги дана краткая сводка теоретических сведений и формул, необходимых для решения задач, помещенных в главе.

Задачи, имеющиеся в пособии, весьма различны по трудности: одни предназначены для приобретения навыков применения готовых формул и теорем, другие требуют некоторой изобретательности. При этом простые задачи снабжены только ответами, более сложные — развернутыми решениями. В ряде случаев решения содержат оригинальные методические приемы, которые могут пригодиться при решении встречающихся на практике задач, так как являются достаточно общими. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой. Номера рисунков и формул к задачам соответствуют номерам задач.

Особенностью, отличающей данную книгу от аналогичных изданий, является больший объем решений и разборов задач по сравнению с текстами самих задач. В связи с этим пособие занимает своеобразное промежуточное положение между обычным задачником и учебником. Для удобства чтения авторы отступили от традиционного деления текста на «задачи» и «ответы» к ним, а предпочли давать ответ или решение каждой задачи непосредственно за ее формулировкой. Добросовестному читателю это не мешает самостоятельно решить каждую из предложенных задач, обращаясь к решению только в случае неудачи.

Пособие предназначено для лиц, знакомых с теорией вероятностей в объеме, например, учебника Е. С. Вентцель «Теория вероятностей», а также учебных пособий Е. С. Вентцель, Л. А. Овчарова «Теория вероятностей и ее инженерные приложения» и «Теория случайных процессов и ее инженерные приложения». Некоторые дополнительные сведения, необходимые для решения отдельных задач, приводятся в тексте.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту первого издания книги профессору Б. В. Гнеденко, сделавшему ряд полезных замечаний, а также научному редактору книги доценту Л. З. Румшискому, который взял на себя нелегкий труд проверки решений всех задач и этим помог устранить некоторые ошибки.

Книга впервые вышла в свет в 1969 г. и переиздана в 1973 г., 2000 г. и 2002 г. В четвертом издании переработана гл. 10 и введена новая гл. 11, выполненная на основе книги авторов [4].

В общей сложности книга издана 10 раз, включая издания на английском, французском и дважды на немецком и испанском языках.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событием (или «случайным событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятностью события называется численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A обозначается $P(A)$, P или p .

Достоверным называется событие U , которое в результате опыта непременно должно произойти.

$$P(U) = 1.$$

Невозможным называется событие V , которое в результате опыта не может произойти.

$$P(V) = 0.$$

Вероятность любого события A заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий в данном опыте называются *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Если несколько событий: 1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны, то они называются *случаями* («шансами»).

Случай называется *благоприятным событием*, если появление этого случая влечет за собой появление события.

Если результаты опыта сводятся к схеме случаев, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — общее число случаев; m — число случаев, благоприятных событию A .

1.1. Образуют ли полную группу следующие группы событий:

а) опыт — бросание монеты; события: A_1 — появление герба; A_2 — появление цифры;

б) опыт — бросание двух монет; события: B_1 — появление двух гербов; B_2 — появление двух цифр;

в) опыт — два выстрела по мишени; события: A_0 — ни одного попадания; A_1 — одно попадание; A_2 — два попадания;

г) опыт — два выстрела по мишени; события: C_1 — хотя бы одно попадание; C_2 — хотя бы один промах;

д) опыт — вынимание карты из колоды; события: D_1 — появление карты червонной масти; D_2 — появление карты бубновой масти; D_3 — появление карты трефовой масти?

О т в е т: а) да; б) нет; в) да; г) да; д) нет.

1.2. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт — бросание монеты; события: A_1 — появление герба; A_2 — появление цифры;

б) опыт — бросание двух монет; события: B_1 — появление герба на первой монете; B_2 — появление цифры на второй монете;

в) опыт — два выстрела по мишени; события: C_0 — ни одного попадания; C_1 — одно попадание; C_2 — два попадания;

г) опыт — два выстрела по мишени; события: D_1 — хотя бы одно попадание; D_2 — хотя бы один промах;

д) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: E_1 — появление двух черных карт; E_2 — появление туза; E_3 — появление дамы?

О т в е т: а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

1.3. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт — бросание симметричной монеты; события: A_1 — появление герба; A_2 — появление цифры;

б) опыт — бросание неправильной (погнутой) монеты; события: B_1 — появление герба; B_2 — появление цифры;

в) опыт — выстрел по мишени; события: C_1 — попадание; C_2 — промах;

г) опыт — бросание двух монет; события: D_1 — появление двух гербов; D_2 — появление двух цифр; D_3 — появление одного герба и одной цифры;

д) опыт — вынимание одной карты из колоды; события: E_1 — появление карты червонной масти; E_2 — появление карты бубновой масти; E_3 — появление карты трефовой масти;

е) опыт — бросание игральной кости; события: F_1 — появление не менее трех очков; F_2 — появление не более четырех очков?

О т в е т: а) да; б) нет; в) общем случае нет; г) нет; д) да; е) да.

1.4. Являются ли случаями следующие группы событий:

а) опыт — бросание монеты; события: A_1 — появление герба; A_2 — появление цифры;

б) опыт — бросание двух монет; события: B_1 — появление двух гербов; B_2 — появление двух цифр; B_3 — появление одного герба и одной цифры;

в) опыт — бросание игральной кости; события: C_1 — появление не более двух очков; C_2 — появление трех или четырех очков; C_3 — появление не менее пяти очков;

г) опыт — выстрел по мишени; события: D_1 — попадание; D_2 — промах;

д) опыт — два выстрела по мишени; события: E_0 — ни одного попадания; E_1 — одно попадание; E_2 — два попадания;

е) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: F_1 — появление двух красных карт; F_2 — появление двух черных карт?

О т в е т: а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет.

1.5. Приведите примеры:

а) трех событий, образующих группу случаев;

б) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы;

в) двух событий, несовместных и образующих полную группу, но не равновозможных;

г) двух событий, равновозможных и образующих полную группу, но совместных.

О т в е т: а) см. 1.4 в); б) см. 1.3 д); в) см. 1.3 в); г) см. 1.3 е).

1.6. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

О т в е т. $\frac{a}{a+b}$.

1.7. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

О т в е т. $\frac{a-1}{a+b-1}$.

1.8. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

О т в е т. $\frac{a-1}{a+b-1}$.

1.9. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

О т в е т. $\frac{a}{a+b}$.

1.10. Из урны, в которой a белых шаров и b черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

О т в е т. $\frac{a}{a+b}$.

1.11. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 2$). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Р е ш е н и е. Общее число случаев

$$n = C_{a+b}^2 = \frac{(a+b)(a+b-1)}{1 \cdot 2}.$$

Число благоприятных случаев

$$m = C_a^2 = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}.$$

Вероятность события A — два белых шара — равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

1.12. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 2, b \geq 3$). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность p того, что два из них будут белыми, а три черными.

Р е ш е н и е.

$$n = C_{a+b}^5 = \frac{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

$$m = C_a^2 C_b^3 = \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2} \frac{b(b-1)(b-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$p = \frac{m}{n} = \frac{10a(a-1)b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)}.$$

1.13. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля r изделий. Найти вероятность p того, что из них ровно s изделий будут дефектными.

О т в е т. $p = \frac{C_l^s C_{k-l}^{r-s}}{C_k^r}.$

1.14. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A — появление четного числа очков; B — появление не менее 5 очков; C — появление не более 5 очков.

Ответ. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{5}{6}$.

1.15. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность p того, что оба раза появится одинаковое число очков.

Решение. $n = 6^2$; $m = 6$; $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

(Другое решение. Искомая вероятность есть вероятность того, что при втором бросании выпадет то же число очков, которое выпало при первом бросании: $n = 6$, $m = 1$, $p = \frac{1}{6}$.)

1.16. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A — сумма выпавших очков равна 8;

B — произведение выпавших очков равно 8;

C — сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

Ответ. $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{11}{36}$.

1.17. Бросаются две монеты. Какое из событий является более вероятным:

A — монеты лягут одинаковыми сторонами;

B — монеты лягут разными сторонами?

Ответ. $P(A) = P(B)$.

1.18. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 2$; $b \geq 2$). Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно:

A — шары одного цвета;

B — шары разных цветов?

Решение. $P(A) = \frac{C_a^2 + C_b^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a(a-1) + b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$;

$$P(B) = \frac{C_a^1 C_b^1}{C_{a+b}^2} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Сравнивая числители этих дробей, находим

$$P(A) < P(B) \text{ при } a(a-1) + b(b-1) < 2ab,$$

т.е. $(a-b)^2 < a+b$;

$$P(A) = P(B) \text{ при } (a-b)^2 = a+b;$$

$$P(A) > P(B) \text{ при } (a-b)^2 > a+b.$$

1.19. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 — не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.

Решение. Из 32 карт игроку известно 10, а остальные 22 — нет. Взять 2 карты из прикупа это все равно, что взять их из 22. В числе 22 карт две бубновых. Вероятность события равна

$$\frac{1}{C_{22}^2} = \frac{1}{231}.$$

1.20. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., n .

Ответ. $\frac{1}{n!}.$

1.21. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: 1, 2, ..., n .

Ответ. $\frac{1}{n^n}.$

1.22. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий:

A — в каждой из пачек окажется по два туза;

B — в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре;

C — в одной из пачек будет один туз, а в другой — три.

Решение. Общее число случаев $n = C_{52}^{26}$. Число благоприятных событию A случаев $m = C_4^2 C_{48}^{24}$.

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}.$$

Событие B может осуществиться двумя способами: либо в первой пачке будут все четыре туза, а во второй — ни одного, либо наоборот:

$$P(B) = \frac{2C_4^4 C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}}.$$

Аналогично

$$P(C) = \frac{2C_4^3 C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}}.$$

Интересно сравнить эти вероятности:

$$P(A) : P(B) : P(C) = \frac{6}{23 \cdot 24} : \frac{2}{25 \cdot 26} : \frac{8}{23 \cdot 25} \approx 3,5 : 1 : 4,5.$$

1.23. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстракласса. Найти вероятности следующих событий: A — все команды экстракласса попадут в одну и ту же группу; B — две команды экстракласса попадут в одну из групп, а три — в другую.

О т в е т. $P(A) = \frac{2C_5^2 C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34};$

$$P(B) = \frac{C_5^2 C_{13}^7 + C_5^3 C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

1.24. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.

Р е ш е н и е. Четность числа определяется его последней цифрой, которая должна быть четной (ноль — тоже четное число). Искомая вероятность есть вероятность того, что на втором месте появится одно из чисел 0, 2, 4, 6, 8, т. е. $\frac{5}{9}$.

1.25. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.

Р е ш е н и е. Опыт имеет два возможных исхода: A — второе число больше первого, B — второе число меньше первого.

Так как условия опыта симметричны относительно A и B , то

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

1.26. Тот же вопрос, что в задаче 1.25, но первая карточка после вынимания кладется обратно и перемешивается с остальными, а стоящее на ней число записывается.

Р е ш е н и е. Возможны три исхода опыта: A — второе число больше первого; B — второе число меньше первого; C — второе число равно первому.

Всего возможно $5^2 = 25$ случаев; из них пять:

1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; 5, 5

благоприятны событию C , а остальные 20 случаев поровну делятся на благоприятные событиям A и B . Следовательно,

$$P(A) = P(B) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

1.27. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше черного.

Решение. Так как в условиях задачи наличие или отсутствие красных шаров роли не играет, то искомая вероятность равна вероятности вынуть первым белый шар из урны, в которой имеется a белых и b черных шаров, т.е. равна $\frac{a}{a+b}$.

1.28. Имеется две урны: в первой a белых и b черных шаров; во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Каждый шар из первой урны может комбинироваться с каждым шаром из второй; число случаев $n = (a+b) \times (c+d)$. Число благоприятных случаев $m = ac$; вероятность события $\frac{ac}{(a+b)(c+d)}$.

1.29. В условиях задачи 1.28 найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.

Ответ. $\frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)}$.

1.30. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность p того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

Решение. Так как любое гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым при втором, число случаев $n = 7 \cdot 7 = 49$. Число благоприятных случаев равно числу комбинаций пустых гнезд: $m = 2 \cdot 2 = 4$; $p = \frac{m}{n} = \frac{4}{49}$.

1.31. В тех же условиях найти вероятность того, что оба раза выстрел произойдет.

Решение. По-прежнему $n = 49$. Число благоприятных случаев $m = 5 \cdot 4 = 20$, так как при первом выстреле гнездо с патроном можно выбрать пятью способами, а при втором выстреле — четырьмя; $p = \frac{m}{n} = \frac{20}{49}$.

1.32. В урне имеется k шаров, помеченных номерами $1, 2, \dots, k$. Из урны l раз вынимается по одному шару ($l \leq k$), номер шара записывается и шар кладется обратно в урну. Найти вероятность p того, что все записанные номера будут различны.

Решение. Число случаев $n = k^l$. Число благоприятных случаев равно числу размещений из k элементов по l , т.е. $m = k(k-1)\dots(k-l+1)$. Вероятность события

$$p = \frac{m}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{k^l} = \frac{k!}{k^l (k-l)!}.$$

1.33. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова получилось слово «книга».

Ответ. $p = 1 / 5! = 1 / 120$.

1.34. Тот же вопрос, если было составлено слово «ананас».

Решение. Число случаев $n = 6!$; число благоприятных случаев уже не один, как в задаче 1.33, а $m = 3!2!$, так как повторяющиеся буквы «а» и «н» можно произвольным образом переставлять между собой; $p = \frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60}$.

1.35. Из полной колоды карт (52 листа, 4 масти) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей чем 0,50, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

Решение. Обозначим A_k наличие среди k вынутых карт не менее двух одной масти.

При $k = 2$: $n = C_{52}^2$; $m = C_{13}^2 \cdot 4$; $P(A_2) = \frac{12}{51} < 0,50$.

При $k = 3$: $n = C_{52}^3$; $m = C_{13}^3 \cdot 4 + C_{13}^2 C_{39}^1 \cdot 4$; $P(A_3) = 0,602 > 0,50$.

Итак, нужно вынуть $k \geq 3$ карт.

1.36. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ($N > 2$). Найти вероятность p того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

Решение. Общее число случаев $n = N!$; подсчитываем число благоприятных случаев m . Двух лиц A и B можно посадить рядом

двумя способами; остальных $(N - 2)!$ способами; $m = 2N(N - 2)!$; $p = 2N(N - 2)! / N! = 2 / (N - 1)$. Эту же задачу можно решить проще: пусть лицо A садится куда угодно, тогда для B остается $N - 1$ место, из них 2 благоприятных; $p = 2 / (N - 1)$.

1.37. Та же задача, но стол прямоугольный, и N человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

Решение. $n = N!$; благоприятные случаи делятся на две группы: 1) A сидит с краю, 2) A сидит не с краю. Число первых $m_1 = 2(N - 2)!$, число вторых $m_2 = 2(N - 2)(N - 2)!$;

$$p = (m_1 + m_2) / n = 2(N - 1)(N - 2)! / N! = 2 / N.$$

1.38. На бочонках лото написаны числа от 1 до N . Из этих N бочонков случайно выбираются два. Найти вероятности следующих событий:

A — на обоих бочонках написаны числа, меньшие чем k ($2 < k < N$);

B — на одном из бочонков написано число, большее чем k , а на другом — меньшее чем k .

Решение. Число случаев $n = C_N^2$. Для события A получим:

$$m = C_{k-1}^2; \quad \mathbf{P}(A) = \frac{C_{k-1}^2}{C_N^2} = \frac{(k-1)(k-2)}{N(N-1)}.$$

Имея в виду, что $k - 1$ бочонков имеют номера меньше чем k , $N - k$ бочонков — номера больше чем k и один бочонок — номер k , получим для события B :

$$m = C_{k-1}^1 C_{N-k}^1; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2(k-1)(N-k)}{N(N-1)}.$$

1.39. Батарея из M орудий ведет огонь по группе, состоящей из N целей ($M \leq N$). Орудия выбирают себе цели последовательно, случайным образом, при условии, что никакие два орудия стрелять по одной цели не могут. Найти вероятность p того, что будут обстреляны цели с номерами 1, 2, ..., M .

Решение. Число способов, которыми можно распределить M орудий по N целям, равно $n = N(N - 1) \dots (N - M + 1)$ (число размещений из N элементов по M). Число благоприятных случаев (при которых обстреливаются только первые M целей) $m = M!$;

$$p = \frac{M!}{N(N-1) \dots (N-M+1)} = \frac{1}{C_N^M}.$$

1.40. В урне имеется K шаров; из них:

K_1 шаров 1-го цвета;

.....

K_i шаров i -го цвета;

.....

K_m шаров m -го цвета $\left(\sum_{i=1}^m K_i = K \right)$.

Из урны вынимают одновременно k шаров. Найти вероятность того, что среди них будет:

k_1 шаров 1-го цвета;

.....

k_i шаров i -го цвета;

.....

k_m шаров m -го цвета $\left(\sum_{i=1}^m k_i = k \right)$.

Решение. Общее число случаев n равно числу способов, какими можно вынуть k шаров из K : $n = C_K^k$. Число благоприятных случаев:

$$m = C_{K_1}^{k_1} C_{K_2}^{k_2} \dots C_{K_m}^{k_m} = \prod_{i=1}^m C_{K_i}^{k_i},$$

так как группу шаров первого цвета можно выбрать $C_{K_1}^{k_1}$ способами, группу шаров второго цвета — $C_{K_2}^{k_2}$ способами и т. д. Вероятность события

$$p = \frac{\prod_{i=1}^m C_{K_i}^{k_i}}{C_K^k}.$$

1.41. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе, состоящей из l самолетов ($k \leq l$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все k орудий будут стрелять по одной и той же цели.

О т в е т. $\frac{l}{l^k} = \frac{1}{l^{k-1}}.$

1.42. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по разным целям.

Решение. Группу из k обстрелянных целей можно выбрать C_l^k способами, а в пределах группы распределить орудия $k!$ способами: $m = C_l^k k!$; общее число случаев $n = l^k$; искомая вероятность события $\frac{C_l^k k!}{l^k} = \frac{(l-1)(l-2)\dots(l-k+1)}{l^{k-1}}$.

1.43. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой — один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

Решение. Общее число случаев $n = 4^4$. Число способов, которыми можно выбрать одну лунку, где будут три шарика, $C_4^1 = 4$. Число способов, которыми можно выбрать лунку, где будет один шарик, $C_3^1 = 3$. Число способов, которыми можно выбрать из четырех шариков три, чтобы положить их в первую лунку, $C_4^3 = 4$. Общее число благоприятных случаев $m = 4 \cdot 3 \cdot 4$. Вероятность события: $p = \frac{m}{n} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{4^4} = \frac{3}{16}$.

1.44. Имеются M шариков, которые случайным образом разбрасываются по N лункам ($N > M$). Определить вероятность того, что в первых M лунках будет ровно по одному шарiku.

Ответ. $\frac{M!}{N^M}$.

1.45*. Имеется M шариков, которые случайным образом разбрасываются по N лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет ровно k_1 шариков, во вторую — k_2 шариков и т.д., в N -ю — k_N шариков,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_N = M.$$

Решение. Число случаев $n = N^M$. Число благоприятных случаев подсчитывается следующим образом. Число способов, какими можно выбрать из M шариков k_1 , равно $C_M^{k_1}$; число способов, какими можно из оставшихся $M - k_1$ шариков выбрать k_2 , равно $C_{M-k_1}^{k_2}$ и т.д.; число способов, какими можно из $M - (k_1 + k_2 + \dots + k_{N-1}) = k_N$ выбрать k_N , равно $C_{k_N}^{k_N} = 1$. Все эти числа нужно перемножить:

$$m = C_M^{k_1} C_{M-k_1}^{k_2} \dots C_{M-(k_1+k_2+\dots+k_{N-2})}^{k_{N-1}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{M!}{k_1!(M-k_1)!k_2![M-(k_1+k_2)]!} \cdots \frac{[M-(k_1+k_2+\dots+k_{N-2})]!}{k_{N-1}!k_N!} =$$

$$= \frac{M!}{k_1!k_2!\dots k_N!} = \frac{M!}{\prod_{i=1}^N k_i!}.$$

Вероятность события $p = \frac{m}{n} = \frac{M!}{N^M \prod_{i=1}^N k_i!}.$

1.46*. В условиях задачи 1.45 найти вероятность того, что в одной из лунок (все равно, в какой) будет k_1 шариков, в другой — k_2 и т.д., в N -й — k_N шариков (числа $k_1, k_2, \dots, k_N$ предполагаются *различными*).

Решение. По сравнению с задачей 1.45 число благоприятных случаев увеличится в $N!$ раз (это число способов, каким можно переставить между собой N чисел: $k_1, k_2, \dots, k_N$). Вероятность события

$$p = \frac{M!N!}{N^M \prod_{i=1}^N k_i!}.$$

1.47*. В условиях задачи 1.45 найти вероятность того, что из N лунок будет l_0 таких, в которые не попадет ни одного шарика; l_1 таких, в которые попадет ровно один шарик, и т.д.; l_M таких, в которые попадут все M шариков:

$$l_0 + l_1 + \dots + l_M = N; 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \dots + M \cdot l_M = M.$$

Решение. Общее число случаев $n = N^M$. Чтобы найти число благоприятных случаев m , нужно перемножить число способов, какими можно выбрать лунки, и число способов, какими можно выбрать шарики. Лунки можно выбрать $\frac{N!}{l_0!l_1!\dots l_M!} = \frac{N!}{\prod_{k=0}^M l_k!}$

способами.

Найдем число способов, какими можно выбрать шарики. Шарик распадается на группы: начальная группа (по 0 шариков) пустая; первая содержит l_1 шариков; вообще k -я — kl_k шариков ($k = 1, 2, \dots, M$). Группы шариков можно выбрать

$$\frac{M!}{(1l_1)!(2l_2)!(3l_3)! \dots (Ml_M)!} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (kl_k)!}$$

способами. Теперь определим, сколькими способами можно выбрать шарики внутри k -й группы так, чтобы в каждой из l_k лунок лежало по k шариков. Это число способов равно

$$\frac{(kl_k)!}{\underbrace{k!k! \dots k!}_{l_k \text{ раз}}} = \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}},$$

а число способов, какими можно выбрать все шарики для всех групп, равно произведению таких чисел для разных k : $\prod_{k=1}^M \frac{(kl_k)!}{(k!)^{l_k}}$. Перемножая, получим число способов, какими можно выбрать шарики:

$$\frac{M!}{\prod_{k=1}^M (kl_k)!} \frac{\prod_{k=1}^M (kl_k)!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}} = \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}}.$$

Умножая это на число способов, какими можно выбрать лунок, находим число благоприятных случаев:

$$m = \frac{N!}{\prod_{i=0}^M l_i!} \frac{M!}{\prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}},$$

откуда вероятность события

$$p = \frac{N!M!}{N^M \prod_{i=0}^M l_i! \prod_{k=1}^M (k!)^{l_k}}.$$

1.48. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: A — все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B — все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже); C — все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение. Задача того же типа, что и задачи о разбрасывании шариков по лункам. Этажи играют роль «лунок» ($N = 6$), пассажи-

ры—«шариков» ($M = 3$). Число случаев $n = 6^3 = 216$, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{216}$.

Вероятность события B вшестеро больше вероятности события A (так как этажей, на которых можно выйти, шесть); $m = 6$ и

$\mathbf{P}(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. Для события C число способов, которыми можно

распределить трех пассажиров по шести этажам: $m = C_6^3 = 20$;

$\mathbf{P}(C) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$. Те же вероятности $\mathbf{P}(B)$ и $\mathbf{P}(C)$ можно найти и по

общей формуле решения задачи 1.47, полагая

$$l_0 = 5; l_1 = l_2 = 0; l_3 = 1 \text{ для события } B,$$

$$l_0 = 3; l_1 = 3; l_2 = l_3 = 0 \text{ для события } C.$$

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B .

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном появлении события A и события B .

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad (*)$$

где AB — произведение событий A и B .

Теорема сложения вероятностей для нескольких событий

Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

В случае, когда события A_i совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i,j} \mathbf{P}(A_i A_j) + \\ + \sum_{i,j,k} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 \dots A_n),$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации различных индексов $i, j, k, \dots$, взятых по одному, по два, по три и т. д.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1.$$

Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию A , если оно состоит в непоявлении события A .

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = 1.$$

Условной вероятностью события A при наличии B называется вероятность события A , вычисленная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность обозначается $\mathbf{P}(A|B)$.

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A); \quad \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B).$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)$$

или

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B).$$

Для независимых событий A и B

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Теорема умножения вероятностей для нескольких событий

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1) \mathbf{P}(A_3 | A_1 A_2) \dots \mathbf{P}(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

В случае, когда события независимы, т. е. появление любого числа из них не меняет вероятностей появления остальных,

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i).$$

2.1. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением?

Решение. Да, может, если события эквивалентны (равнозначны), т.е. если из события A вытекает B и, наоборот, из B вытекает A . Например, пусть производится один выстрел по мишени. Предположим, что попадание в мишень непременно приводит к ее разрушению и никаким другим способом мишень разрушена быть не может.

Тогда два события:

A — попадание в мишень,

B — разрушение мишени — эквивалентны ($A = B$) и для них

$$A + B = A = B; \quad AB = A = B.$$

2.2. Доказать, что вероятность суммы двух событий не больше, чем сумма вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}(A + B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Решение. Это неравенство вытекает из формулы (*), так как $\mathbf{P}(AB) \geq 0$.

2.3. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A — появление герба на первой монете;

B — появление цифры на первой монете;

C — появление герба на второй монете;

D — появление цифры на второй монете;

E — появление хотя бы одного герба;

F — появление хотя бы одной цифры;

G — появление одного герба и одной цифры;

H — непоявление ни одного герба;

K — появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A + C$; 2) AC ; 3) EF ; 4) $G + E$; 5) GE ; 6) BD ; 7) $E + K$.

Ответ. 1) $A + C = E$; 2) $AC = K$; 3) $EF = G$; 4) $G + E = E$; 5) $GE = G$; 6) $BD = H$; 7) $E + K = E$.

2.4. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события A_i — попадание при i -м выстреле ($i = 1, 2, 3$).

Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\bar{A}_i$ следующие события:

A — все три попадания;

B — все три промаха;

C — хотя бы одно попадание;

D — хотя бы один промах;

E — не меньше двух попаданий;

F — не больше одного попадания;

G — попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

О т в е т. 1) $A = A_1 A_2 A_3$; 2) $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$; 3) $C = A_1 + A_2 + A_3$ или

$C = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ или $C = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$; 4) $D = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$; 5) $E = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3$; 6) $F = \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2$; 7) $G = \bar{A}_1 \bar{A}_2$.

2.5. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A — обнаружен ровно один из четырех объектов;

B — обнаружен хотя бы один объект;

C — обнаружено не менее двух объектов;

D — обнаружено ровно два объекта;

E — обнаружено ровно три объекта;

F — обнаружены все четыре объекта.

Указать, в чем состоят события:

1) $A + B$; 2) AB ; 3) $B + C$; 4) BC ; 5) $D + E + F$; 6) BF .

Совпадают ли события BF и CF ? Совпадают ли события BC и D ?

О т в е т. 1) $A + B = B$; 2) $AB = A$; 3) $B + C = B$; 4) $BC = C$; 5) $D + E + F = C$; 6) $BF = F$.

BF и CF совпадают; BC и D не совпадают.

2.6. Событие B является частным случаем события A , т.е. из появления события B достоверностью вытекает появление события A (рис. 2.6). Чему равны: 1) их сумма; 2) их произведение?

О т в е т. 1) $A + B = A$; 2) $AB = B$.

2.7. Назвать противоположные для следующих событий:

A — выпадение двух гербов при бросании двух монет;

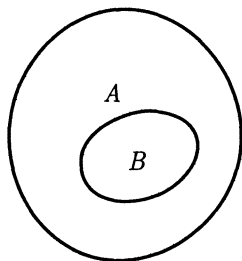


Рис. 2.6

B — появление белого шара при вынимании одного шара из урны, в которой 2 белых, 3 черных и 4 красных шара;

C — три попадания при трех выстрелах;

D — хотя бы одно попадание при пяти выстрелах;

E — не более двух попаданий при пяти выстрелах;

F — выигрыш первого игрока при игре в шахматы.

О т в е т ы. $\bar{A}$ — выпадение хотя бы одной цифры;

$\bar{B}$ — появление черного или красного шара;

$\bar{C}$ — хотя бы один промах;

$\bar{D}$ — все пять промахов;

$\bar{E}$ — более двух попаданий;

$\bar{F}$ — выигрыш второго или ничья.

2.8. Событие B есть частный случай события A , т.е. из появления события B следует, что событие A произошло. Следует ли из B , что A произошло?

О т в е т. Нет, не следует! Например: опыт состоит из двух выстрелов; A — хотя бы одно попадание; B — два попадания. Если произошло B , из этого следует, что A произошло. Если же произошло $\bar{B}$ (менее двух попаданий), из этого еще не следует, что произошло $\bar{A}$ (ни одного попадания). Наоборот, из $\bar{A}$ следует $\bar{B}$.

2.9. Если событие B представляет собой частный случай события A , зависимы эти события или нет?

О т в е т. Зависимы, если $P(A) \neq 1$, так как $P(A|B) = 1$.

2.10. Зависимы или независимы:

1) несовместные события;

2) события, образующие полную группу;

3) равновозможные события?

О т в е т. 1) Зависимы, так как появление любого из них обращает в нуль вероятности всех остальных; 2) зависимы, так как непоявление всех, кроме одного, обращает в единицу вероятность последнего; 3) могут быть как зависимы, так и независимы.

2.11. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

A — выпадение герба на первой монете;

D — выпадение хотя бы одного герба;

E — выпадение хотя бы одной цифры;

F — выпадение герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий:

1) A и E ; 2) A и F ; 3) D и E ; 4) D и F .

Определить условные и безусловные вероятности событий в каждой паре.

О т в е т.

1) $P(E) = \frac{3}{4}$; $P(E|A) = \frac{1}{2}$; события зависимы.

2) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(A|F) = \frac{1}{2}$; события независимы.

3) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(D|E) = \frac{2}{3}$; события зависимы.

4) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(D|F) = 1$; события зависимы.

2.12. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события:

A — появление туза;

B — появление карты красной масти;

C — появление бубнового туза;

D — появление десятки.

Зависимы или независимы следующие пары событий:

1) A и B ; 2) A и C ; 3) B и C ; 4) B и D ; 5) C и D ?

О т в е т:

1) независимы, так как $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $P(A|B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$;

2) зависимы, так как $P(A) = \frac{1}{13}$; $P(A|C) = 1$;

3) зависимы, так как $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(B|C) = 1$;

4) независимы, так как $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(B|D) = \frac{1}{2}$;

5) зависимы, так как несовместны.

2.13. В урне a белых (b) и b черных (c) шаров. Из урны вынимают (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми¹⁾.

О т в е т. По теореме умножения вероятностей

$$P(bb) = \frac{a}{a+b} \frac{a-b}{a+b-1}.$$

2.14. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

О т в е т. $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.

¹⁾ Данная задача, как и ряд других в гл. 2, может быть решена и с помощью непосредственного подсчета числа случаев; здесь требуется решить их с помощью теорем сложения или умножения.

2.15. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

Решение. Событие может появиться в двух несовместных вариантах: бч или чб; по теоремам сложения и умножения

$$P(бч + чб) = \frac{a}{a+b} \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2.16. Та же задача, но шары вынимаются последовательно и после вынимания первый шар возвращается в урну.

Ответ. $2 \frac{ab}{(a+b)^2}.$

2.17. В урне a белых и b черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Решение. Вероятность события может быть найдена непосредственно (см. задачу 1.10). Тот же результат может быть получен и по теоремам сложения и умножения:

$$P(бб + чб) = \frac{a}{a+b} \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b-1} = \frac{a}{a+b}.$$

2.18. В урне a белых, b черных и c красных ($к$) шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.

Решение. Чтобы найти вероятность события A — по крайней мере два шара будут одноцветными, — перейдем к противоположному $\bar{A}$ — все шары разных цветов:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\underbrace{бчк + бкч + кчб + \dots}_{6 \text{ комбинаций}}) = \\ &= 6 \frac{a}{a+b+c} \frac{b}{a+b+c-1} \frac{c}{a+b+c-2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}.$$

2.19. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей иггранные от неиггранных не отличают. Какова вероят-

ность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

Решение. Событие A может произойти единственным способом: первый раз, второй и третий из коробки будут вынуты неигранные мячи. Первый раз это обеспечено; поэтому

$$P(A) = 1 \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{1764}.$$

2.20. В коробке $N = lM$ новых теннисных мячей; для одной игры из коробки вынимают M мячей; после игры их возвращают в коробку. Найти вероятность того, что после l игр в коробке не останется неигранных мячей.

Ответ. $P(A) = \frac{(N - M)!}{[N(N - 1) \dots (N - M + 1)]^{l-1}}.$

2.21. В ящике лежат n новых теннисных мячей; k из них вынимаются и ими играют $\left(k \leq \frac{n}{2}\right)$. После игры мячи возвращаются в ящик. Следующий раз из ящика снова берут наугад k мячей. Найти вероятность того, что все эти k мячей будут новыми (неигранными).

Ответ. $p = \frac{n - k}{n} \frac{n - k - 1}{n - 1} \dots \frac{n - 2k + 1}{n - k + 1} = \frac{[(n - k)!]^2}{n! (n - 2k)!}.$

2.22. Уходя из квартиры, N гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятности следующих событий:

A — каждый гость наденет свои калоши;

B — каждый гость наденет калоши, относящиеся к одной паре (может быть и не свои).

Решение. Каждый гость выбирает одну правую калошу и одну левую; правых калош N и левых N . По теореме умножения

$$P(A) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{(N - 1)^2} \dots \frac{1}{2^2} \cdot 1 = \frac{1}{(N!)^2};$$

$$P(B) = \frac{1}{N} \frac{1}{N - 1} \dots 1 = \frac{1}{N!}.$$

2.23. В условиях предыдущей задачи найти вероятности событий A и B , если гости не могут отличить правой калоши от левой и просто берут первые попавшиеся две калоши.

Решение. По теореме умножения

$$P(A) = \frac{2}{2N} \frac{1}{2N - 1} \frac{2}{2N - 2} \frac{1}{2N - 3} \dots = \frac{2N}{(2N)!};$$

$$\mathbf{P}(B) = 1 \frac{1}{2N-1} 1 \frac{1}{2N-3} 1 \frac{1}{2N-5} \dots = \frac{1}{(2N-1)!!},$$

где $(2N-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2N-1)$.

2.24. Бросаются две монеты. Рассматриваются события:

A — выпадение герба на первой монете;

B — выпадение герба на второй монете.

Найти вероятность события $C = A + B$.

Решение. $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

или, через противоположное событие, $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2.25. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми частями которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы поразить (вывести из строя) самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна p_1 , второго двигателя p_2 , кабины пилота p_3 . Части самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Решение. Событие A — поражение самолета есть сумма двух совместных событий:

D — поражение обоих двигателей;

K — поражение кабины.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(K) - \mathbf{P}(DK) = p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3.$$

2.26. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка p_1 , для второго p_2 . Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность P_1 того, что выиграет первый стрелок.

Ответ. $P_1 = p_1^2(1-p_2)^2 + 2p_1^2 p_2(1-p_2) + 2p_1(1-p_1)(1-p_2)^2$.

2.27. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются $2k$ шаров ($2k < a$; $2k < b$). Найти вероятность того, что среди них будет больше белых, чем черных.

Решение. Данную задачу проще решить, комбинируя методы непосредственного подсчета вероятностей с теоремой сложения. Событие A — больше белых шаров, чем черных — можно представить в виде суммы

$$A = A_{k+1} + A_{k+2} + \dots + A_{2k} = \sum_{i=k+1}^{2k} A_i,$$

где A_i — появление i белых шаров ($i = k + 1, \dots, 2k$).

$$P(A_i) = \frac{C_a^i C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}, \text{ откуда } P(A) = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{C_a^i C_b^{2k-i}}{C_{a+b}^{2k}}.$$

2.28. В партии, состоящей из N изделий, имеется M дефектных. Из партии выбирается для контроля n изделий. Если среди контрольных окажется более m дефектных, бракуется вся партия. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

Решение. Событие A — партия забракована — можно представить в виде суммы

$$A = A_{m+1} + A_{m+2} + \dots + A_n = \sum_{i=m+1}^n A_i,$$

где A_i — событие, состоящее в том, что среди контрольных изделий i дефектных.

$$P(A_i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}; \quad P(A) = \sum_{i=m+1}^n \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}.$$

2.29. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события:

A — среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновой масти;

B — среди вынутых карт будет хотя бы одна червонной масти.

Найти вероятность события $C = A + B$.

Решение. Переходя к противоположному событию $\bar{C}$ — нет карты ни бубновой, ни червонной масти, имеем

$$P(\bar{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49},$$

откуда

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 0,945.$$

2.30. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

Ответ. $1 - (1 - p)^n$.

2.31. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и от других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов.

Найти вероятности следующих событий:

A — объект будет обнаружен хотя бы одной из станций;

B — объект будет обнаружен каждой из станций.

О т в е т. $P(A) = 1 - (1 - p)^m$; $P(B) = [1 - (1 - p)^n]^m$.

2.32. Имеется группа из k космических объектов, каждый из которых независимо от других обнаруживается радиолокационной станцией с вероятностью p . За группой объектов ведут наблюдение независимо друг от друга m радиолокационных станций. Найти вероятность того, что не все объекты, входящие в группу, будут обнаружены.

Р е ш е н и е. Переходим к противоположному событию $\bar{A}$ — все объекты будут обнаружены:

$$P(\bar{A}) = [1 - (1 - p)^m]^k; \quad P(A) = 1 - [1 - (1 - p)^m]^k.$$

2.33. Над изготовлением изделия работают последовательно k рабочих; качество изделия при передаче следующему рабочему не проверяется. Первый рабочий допускает брак с вероятностью p_1 , второй — p_2 и т.д. Найти вероятность того, что при изготовлении изделия будет допущен брак.

О т в е т. $1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i)$.

2.34. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».

О т в е т. $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{28} = \frac{27!}{32!}$.

2.35. Те же условия, но вынутые пять карточек можно менять местами произвольным образом. Какова вероятность того, что из вынутых пяти карточек можно сложить слово «конец».

Р е ш е н и е. Существует 5! перестановок из 5 букв; вероятность каждой из них вычисляется, как в предыдущей задаче; ис-

комая вероятность равна $\frac{5!27!}{32!} = \frac{1}{C_{32}^5}$.

2.36. В лотерее n билетов, из которых l выигрышных. Некто покупает k билетов. Определить вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.

О т в е т.

$$1 - \frac{n-l}{n} \frac{n-l-1}{n-1} \dots \frac{n-l-k+1}{n-k+1} = 1 - \frac{(n-l)!(n-k)!}{n!(n-l-k)!}.$$

2.37. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью $1/4$ по-

падает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарик упадет в соседние ячейки.

Решение. Событие A — шарик попал в соседние ячейки — разобьем на столько вариантов, сколько можно образовать пар соседних ячеек; получим

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

где A_1 — шарик попал в первую и вторую ячейки;

A_2 — шарик попал во вторую и третью ячейки;

A_3 — шарик попал в третью и четвертую ячейки.

Вероятность каждого из вариантов одна и та же и равна

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{8}; \quad \mathbf{P}(A) = \frac{3}{8}.$$

2.38. Пусть k шариков разбрасываются случайным образом и независимо друг от друга по n ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии ($k < n$). Найти вероятность того, что они займут k соседних ячеек.

Решение. k соседних ячеек из n можно выбрать $n - k + 1$ способами. Вероятность попадания k шариков в каждую из групп соседних ячеек равна $\left(\frac{1}{n}\right)^k k!$ (так как их можно разбросать по этим ячейкам $k!$ способами). Вероятность события A — шарик попал в k соседних ячеек — равна $\mathbf{P}(A) = \left(\frac{1}{n}\right)^k k! (n - k + 1)$.

2.39. Производится стрельба по самолету зажигательными снарядами. Горючее на самолете сосредоточено в четырех баках, расположенных в фюзеляже один за другим. Площади баков одинаковы. Для того чтобы зажечь самолет, достаточно попасть двумя снарядами либо в один и тот же бак, либо в соседние баки. Известно, что в область баков попало два снаряда. Найти вероятность того, что самолет загорится.

Решение. Событие A — воспламенение самолета — есть сумма двух несовместных вариантов:

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 — оба снаряда попали в один и тот же бак; A_2 — снаряды попали в соседние баки.

$$\mathbf{P}(A_1) = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Вероятность события A_2 находим согласно задаче 2.37:

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{8}; \text{ отсюда } \mathbf{P}(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

2.40. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. Первая карта может быть какой угодно масти; вторая должна быть не такой, как первая; третья — не такой, как первая и вторая; четвертая — не такой, как три первые. Искомая вероятность равна $p = 1 \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0,106$.

2.41. Та же задача, но каждая карта после вынимания возвращается в колоду.

Ответ. $p = 1 \cdot \frac{39}{52} \cdot \frac{26}{52} \cdot \frac{13}{52} \approx 0,094$.

2.42. Вычислительная машина состоит из n блоков. Надежность (вероятность безотказной работы) в течение времени T первого блока равна p_1 , второго — p_2 и т. д. Блоки отказывают независимо друг от друга. При отказе любого блока отказывает машина. Найти вероятность того, что машина откажет за время T .

Ответ. $1 - \prod_{i=1}^n p_i$.

2.43. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p . 1) Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания; 2) найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включить зажигание не более двух раз.

Ответ. 1) $(1-p)p$; 2) $1 - (1-p)^2 = (2-p)p$.

2.44. Производится обстрел некоторой цели с k позиций; с i -й позиции производится n_i выстрелов; каждый выстрел независимо от других попадает в цель с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Найти вероятности следующих событий:

A — хотя бы один выстрел попадет в цель;

B — не все выстрелы попадут в цель.

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i)^{n_i}$; $\mathbf{P}(B) = 1 - \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$.

2.45. По некоторой цели одновременно производится n выстрелов. Каждый выстрел независимо от других поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью p . Найти вероятность того, что после n выстрелов цель будет поражена. Изменится ли эта вероятность, если выстрелы производятся последовательно, результат каждого выстрела наблюдается и после поражения цели стрельба

немедленно прекращается? Сколько надо произвести выстрелов, чтобы поразить цель с вероятностью не менее $P(P > p)$?

Решение. Обозначим A поражение цели; переходя к событию $\bar{A}$, получим $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - p)^n$; при наблюдении вероятность не изменится.

Полагая $1 - (1 - p)^n \geq P$ и решая это неравенство относительно n , получим $n \geq \frac{\lg(1 - P)}{\lg(1 - p)}$. В качестве решения задачи берется

наименьшее целое число n , удовлетворяющее этому условию.

2.46. Истребитель, вооруженный двумя ракетами, посылается на перехват воздушной цели. Вероятность вывода истребителя в такое положение, из которого возможна атака цели, равна p_1 . Если истребитель выведен в такое положение, он выпускает по цели обе ракеты, каждая из которых независимо от другой выводится в окрестность цели с вероятностью p_2 . Если ракета выведена в окрестность цели, она поражает ее с вероятностью p_3 . Найти вероятность того, что цель будет поражена.

Ответ. $p_1[1 - (1 - p_2 p_3)^2]$.

2.47. Производится стрельба одним осколочным снарядом по беспилотному самолету-разведчику. Уязвимыми частями самолета являются: двигатель и отсек с аппаратурой. Поражение любой части приводит к выходу самолета из строя. При данном положении точки разрыва снаряда в двигатель попадает m_1 осколков, а в отсек аппаратуры m_2 осколков. Каждый осколок, попавший в двигатель, поражает его независимо от других с вероятностью p_1 , а попавший в отсек аппаратуры — с вероятностью p_2 . Найти вероятность вывода из строя самолета при данном положении точки разрыва.

Ответ. $1 - (1 - p_1)^{m_1} (1 - p_2)^{m_2}$.

2.48. Производится стрельба двумя снарядами по k бакам с горючим ($k > 2$), расположенным рядом друг с другом в одну линию (рис. 2.48).

Каждый снаряд независимо от других попадает в первый бак с вероятностью p_1 , во второй — с вероятностью p_2 и т.д. Для воспламенения баков требуется два попадания в один и тот же бак или два попадания в соседние баки. Найти вероятность воспламенения баков.

Решение. Событие A — воспламенение баков — распадается на сумму двух вариантов:

$$A = A_1 + A_2,$$



Рис. 2.48

где A_1 — оба снаряда попали в один бак;
 A_2 — снаряды попали в соседние баки.

$$\mathbf{P}(A_1) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_k^2 = \sum_{i=1}^k p_i^2;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2) &= p_1 p_2 + p_2 p_1 + \\ &+ p_2 p_3 + p_3 p_2 + \dots + p_{k-1} p_k + p_k p_{k-1} = 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i p_{i+1}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^k p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} p_i p_{i+1}.$$

2.49. Завод выпускает определенного вида изделия; каждое изделие может иметь дефект; вероятность дефекта p . После изготовления изделие осматривается последовательно k контролерами; i -й контролер обнаруживает дефект, если он имеется, с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \dots, k$). В случае обнаружения дефекта изделие бракуется. Определить вероятности событий:

A — изделие будет забраковано;

B — изделие будет забраковано вторым контролером;

C — изделие будет забраковано всеми контролерами.

О т в е т. $\mathbf{P}(A) = p \left(1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i) \right)$; $\mathbf{P}(B) = p(1 - p_1)p_2$;

$$\mathbf{P}(C) = p \prod_{i=1}^k p_i.$$

2.50. Завод изготавливает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью p . Изделие осматривается одним контролером; он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1 , а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α . Найти вероятности следующих событий:

A — изделие будет забраковано;

B — изделие будет забраковано, но ошибочно;

C — изделие будет пропущено в готовую продукцию с дефектом.

О т в е т. $\mathbf{P}(A) = pp_1 + (1 - p)\alpha$; $\mathbf{P}(B) = (1 - p)\alpha$; $\mathbf{P}(C) = p(1 - p_1)$.

2.51. В условиях предыдущей задачи изделие осматривается не одним контролером, а двумя. Вероятности забраковать дефектное изделие для первого и второго контролера равны соответственно p_1, p_2 , вероятности по ошибке забраковать изделие, не имеющее де-

фекта, равны соответственно α_1, α_2 . Если хотя бы один контролер бракует изделие, оно идет в брак. Найти вероятности событий A, B, C .

О т в е т. $P(A) = p[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] + (1 - p)[1 - (1 - \alpha_1) \times (1 - \alpha_2)]$; $P(B) = (1 - p)[1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)]$; $P(C) = p(1 - p_1) \times (1 - p_2)$.

2.52. Прибор состоит из n блоков (рис. 2.52); выход из строя каждого блока означает выход из строя прибора в целом. Блоки выходят из строя независимо друг от друга. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого блока равна p . Найти надежность P прибора в целом. Какова должна быть надежность p_1 каждого блока для обеспечения заданной надежности P_1 системы?

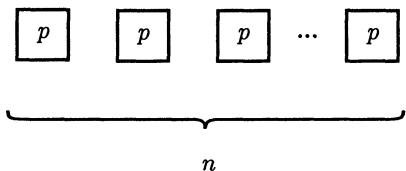


Рис. 2.52

П р и м е ч а н и е. Здесь и в дальнейшем на схемах элементы, без которых работа системы невозможна, изображаются как звенья, соединенные «последовательно»; дублирующие друг друга элементы изображаются соединенными «параллельно». Надежность каждого элемента записывается в соответствующем прямоугольнике.

О т в е т. $P = p^n$; $p_1 = \sqrt[n]{P_1}$.

2.53. Для повышения надежности прибора он дублируется другим точно таким же прибором (рис. 2.53); надежность (вероятность безотказной работы) каждого прибора равна p . При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на второй (надежность переключающего устройства равна единице). Определить надежность системы двух дублирующих друг друга приборов.

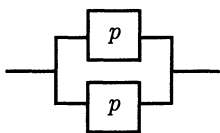


Рис. 2.53

Р е ш е н и е. Отказ системы требует совместного отказа обоих приборов; надежность системы равна $1 - (1 - p)^2$.

2.54. Та же задача, но надежность переключающего устройства Π , обеспечивающего переключение с отказавшего первого прибора на второй, равна p_1 (рис. 2.54).

О т в е т. Надежность системы $1 - (1 - p) \times (1 - p_1 p)$.

2.55. Для повышения надежности прибора он дублируется $(n - 1)$ другими такими же приборами (рис. 2.55); надежность каж-

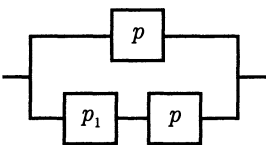


Рис. 2.54

дого прибора равна p . Найти надежность P системы. Сколько надо взять приборов, чтобы повысить надежность до заданной P_1 ?

О т в е т. $P = 1 - (1 - p)^n$; $n \geq \frac{\lg(1 - P_1)}{\lg(1 - p)}$.

2.56. Та же задача, но для включения каждого дублирующего прибора применяется устройство с надежностью p_1 (рис. 2.56).

О т в е т. $P = 1 - (1 - p)(1 - p_1 p)^{n-1}$;
 $n \geq \frac{\lg(1 - P_1) - \lg(1 - p)}{\lg(1 - p_1 p)} + 1$.

2.57*. Техническая система состоит из n блоков, надежность каждого из которых равна p . Выход из строя хотя бы одного блока влечет за собой выход из строя всей системы.

С целью повышения надежности системы производится дублирование, для чего выделено еще n таких же блоков. Надежность переключателей устройств полная. Определить, какой способ дублирования дает большую надежность системы:

а) дублирование каждого блока (рис. 2.57, а),

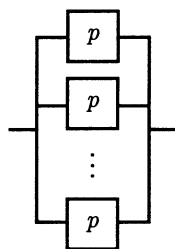


Рис. 2.55

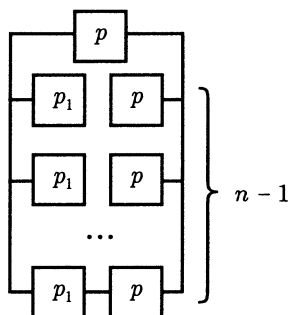
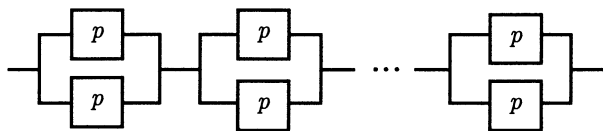
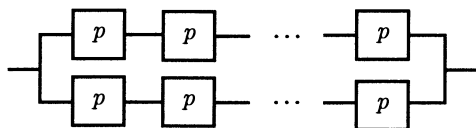


Рис. 2.56



а



б

Рис. 2.57

б) дублирование всей системы (рис. 2.57, б).

Решение. Надежность системы, дублированной по способу а), будет $p_a = [1 - (1 - p)^2]^n$, по способу б): $p_6 = 1 - (1 - p^n)^2$.

Покажем, что $p_a > p_6$ при любом $n > 1$ и $0 < p < 1$.

Так как

$$p_a = [1 - (1 - p^2)]^n = [1 - 1 + 2p - p^2]^n = p^n (2 - p)^n,$$

$$p_6 = 1 - (1 - p^n)^2 = 1 - 1 + 2p^n - p^{2n} = p^n (2 - p^n),$$

то достаточно доказать неравенство: $(2 - p)^n > 2 - p^n$.

Положим $q = 1 - p$ ($q > 0$); неравенство примет вид

$$(2 - 1 + q)^n > 2 - (1 - q)^n$$

или

$$(1 + q)^n + (1 - q)^n > 2.$$

Применяя формулу бинома, замечаем, что все отрицательные члены уничтожаются:

$$\begin{aligned} (1 + q)^n + (1 - q)^n &= \left[1 + nq + \frac{n(n-1)}{2}q^2 + \dots \right] + \\ &+ \left[1 - nq + \frac{n(n-1)}{2}q^2 - \dots \right] = 2 + n(n-1)q^2 + \dots > 2, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое неравенство.

2.58. В технической системе дублированы не все, а только некоторые (наименее надежные) узлы. Надежности узлов проставлены на рис. 2.58. Определить надежность P системы.

Ответ. $P = [1 - (1 - p_1)^2][1 - (1 - p_2)^3]p_3p_4[1 - (1 - p_5)^2]$.

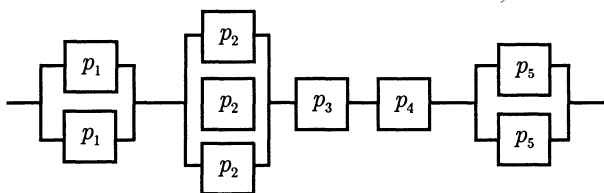


Рис. 2.58

2.59. Прибор состоит из трех узлов. В первом узле n_1 элементов, во втором n_2 и в третьем n_3 . Для работы прибора безусловно необходим узел I; два других узла II и III дублируют друг друга (рис. 2.59). Надежность каждого элемента одна и та же и равна p . Выход из строя одного элемента означает выход из строя всего

узла. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти надежность прибора P .

Решение. Надежность узла I: $p_I = p^{n_1}$.

Надежность узла II: $p_{II} = p^{n_2}$.

Надежность узла III: $p_{III} = p^{n_3}$.

Надежность дублированного узла (II и III):

$$1 - (1 - p^{n_2})(1 - p^{n_3}).$$

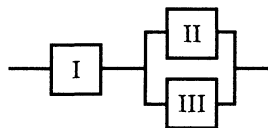


Рис. 2.59

Надежность прибора

$$P = p^{n_1} [1 - (1 - p^{n_2})(1 - p^{n_3})].$$

2.60. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p ; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью p_1 . Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; на базе имеется боезапас n ракет ($n > 2$). Найти вероятность того, что не весь этот боезапас будет израсходован.

Решение. Переходим к противоположному событию $\bar{A}$ — весь боезапас израсходован. Чтобы произошло событие $\bar{A}$, первые $n - 1$ ракет не должны поразить цель:

$$P(\bar{A}) = (1 - pp_1)^{n-1}; \text{ отсюда } P(A) = 1 - (1 - pp_1)^{n-1}.$$

2.61. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что после поражения цели в запасе останутся неизрасходованными не менее двух ракет.

Решение. Противоположное событие $\bar{A}$ — останется менее двух ракет — равносильно тому, что первые $n - 2$ ракет не поразили цели:

$$P(\bar{A}) = (1 - pp_1)^{n-2}; \quad P(A) = 1 - (1 - pp_1)^{n-2}.$$

2.62. В условиях задачи 2.60 найти вероятность того, что будет израсходовано не более двух ракет.

Решение. Чтобы было израсходовано не более двух ракет, достаточно, чтобы при первых двух выстрелах цель была поражена; вероятность этого $P(A) = 1 - (1 - pp_1)^2$.

2.63. Производится стрельба двумя ракетами по самолету. Самолет имеет оборонительное вооружение, позволяющее ему произвести по каждой ракете два независимых выстрела. Каждым из этих выстрелов ракета поражается с вероятностью p . Если ракета не поражена, то она независимо от другой поражает самолет с вероятностью P . Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Решение. Чтобы поразить самолет, ракета должна быть не поражена. Вероятность поражения самолета одной ракетой с уче-

том противодействия будет $(1 - p)^2 P$, а двумя ракетами $1 - [1 - (1 - p)^2 P]^2$.

2.64. Радиолокационная станция ведет наблюдение за k объектами. За время наблюдения i -й объект может быть потерян с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Найти вероятности следующих событий:

A — ни один объект не будет потерян;

B — будет потеряно не менее одного объекта;

C — будет потеряно не более одного объекта.

Ответ. $P(A) = \prod_{i=1}^k (1 - p_i)$; $P(B) = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i)$;

$$P(C) = \prod_{i=1}^k (1 - p_i) + p_1(1 - p_2) \dots (1 - p_k) + \\ + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) \dots (1 - p_k) + \\ + \dots + (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{k-1})p_k.$$

Последнюю вероятность можно записать в виде

$$P(C) = \prod_{i=1}^k (1 - p_i) + \sum_{j=1}^k \frac{p_j}{1 - p_j} \prod_{i=1}^k (1 - p_i).$$

2.65. Техническое устройство, состоящее из k узлов, работало в течение некоторого времени t . За это время первый узел оказывается неисправным с вероятностью q_1 , второй — с вероятностью q_2 и т.д. Наладчик, вызванный для осмотра устройства, обнаруживает и устраняет неисправность каждого узла, если она имеется, с вероятностью p , а с вероятностью $q = 1 - p$ объявляет узел исправным. Найти вероятность того, что после осмотра наладчиком хотя бы один узел устройства будет неисправным.

Решение. Вероятность i -му узлу быть неисправным после осмотра равна вероятности того, что он стал неисправным за время t , умноженной на вероятность того, что наладчик не обнаружит этой неисправности: $q_i q$. Вероятность того, что это событие случится хотя бы с одним из узлов, равна $1 - \prod_{i=1}^k (1 - q_i q)$.

2.66. К условиям предыдущей задачи добавляется новое: по истечении времени t с вероятностью Q наладчика не оказывается на месте, и устройство пускается в ход без профилактического осмотра. Найти вероятность того, что после пуска хотя бы один узел устройства будет неисправным.

Ответ. $(1 - Q) \left[1 - \prod_{i=1}^k (1 - q_i q) \right] + Q \left[1 - \prod_{i=1}^k (1 - q_i) \right]$.

2.67. N стрелков независимо один от другого ведут стрельбу каждый по своей мишени. Каждый из них имеет боезапас k патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для i -го стрелка равна p_i ($i = 1, 2, \dots, N$). При первом же попадании в свою мишень стрелок прекращает стрельбу. Найти вероятности следующих событий:

A — у всех стрелков вместе останется неизрасходованным хотя бы один патрон;

B — ни у кого из стрелков не будет израсходован весь боезапас;

C — какой-либо один из стрелков израсходует весь боезапас, а все остальные — не весь.

Решение. Событие $\bar{A}$ — весь боезапас израсходован — требует, чтобы у всех N стрелков первые $k - 1$ выстрелов дали промах:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \prod_{i=1}^N (1 - p_i)^{k-1}; \quad \mathbf{P}(A) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - p_i)^{k-1}.$$

Событие B требует, чтобы у каждого стрелка хотя бы один из первых $k - 1$ выстрелов дал попадание:

$$\mathbf{P}(B) = \prod_{i=1}^N [1 - (1 - p_i)^{k-1}].$$

Событие C может осуществиться в N вариантах: $C = C_1 + \dots + C_N$, где C_i — i -й стрелок израсходовал весь боезапас, а остальные — не весь ($i = 1, \dots, N$).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}(C_1) + \dots + \mathbf{P}(C_N) = \\ &= (1 - p_1)^{k-1} [1 - (1 - p_2)^{k-1}] \dots [1 - (1 - p_N)^{k-1}] + \dots + \\ &+ (1 - p_N)^{k-1} [1 - (1 - p_1)^{k-1}] \dots [1 - (1 - p_{N-1})^{k-1}] = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{(1 - p_i)^{k-1}}{1 - (1 - p_i)^{k-1}} \prod_{j=1}^N [1 - (1 - p_j)^{k-1}] \right\}. \end{aligned}$$

2.68. Для стрельбы по некоторой цели выделено n снарядов. Каждый снаряд попадает в цель независимо от других с вероятностью p . Сразу же после попадания дается команда о прекращении стрельбы, но за время передачи команды установка успевает произвести еще s выстрелов ($s < n - 1$). Найти вероятности следующих событий:

A — в запасе останется не менее m неизрасходованных снарядов ($1 \leq m < n - s$);

B — k -й по порядку выстрел не будет осуществлен ($s + 1 < k \leq n$).

Решение. Событие $\bar{A}$ означает, что при первых $n - s - m$ выстрелах попадание не произойдет; поэтому

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = (1 - p)^{n-s-m}; \quad \mathbf{P}(A) = 1 - (1 - p)^{n-s-m}.$$

Событие B означает, что не позже, чем за s выстрелов до $(k - 1)$ -го, произошло попадание в цель; вероятность события B равна вероятности хотя бы одного попадания при первых $(k - 1) - s = k - (s + 1)$ выстрелах. $\mathbf{P}(B) = 1 - (1 - p)^{k-(s+1)}$.

2.69*. N стрелков стреляют поочередно по одной мишени. Стрельба ведется до первого попадания. Вероятность попасть в мишень для каждого стрелка равна p_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Выигравшим считается тот стрелок, который первым попадет в мишень. У каждого стрелка в запасе имеется n патронов. Определить вероятность того, что выиграет i -й стрелок.

Решение. Рассмотрим событие A_{ij} , состоящее в том, что i -й стрелок выиграет соревнование, израсходовав j патронов.

$$\mathbf{P}(A_{ij}) = p_i \prod_{k=1}^{i-1} q_k \left(\prod_{k=1}^N q_k \right)^{j-1} = p_i Q_{i-1} Q_N^{j-1},$$

где

$$q_k = 1 - p_k, \quad Q_i = \prod_{k=1}^i q_k.$$

Вероятность выиграть i -му стрелку равна

$$\mathbf{P}(A_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(A_{ij}) = p_i Q_{i-1} \sum_{j=1}^n Q_N^{j-1} = p_i Q_{i-1} \frac{1 - Q_N^n}{1 - Q_N}.$$

2.70*. По некоторому объекту ведется стрельба n независимыми выстрелами. Объект состоит из k частей (элементов). Вероятность попадания в i -й элемент при одном выстреле равна p_i ($i = 1, \dots, k$). Найти вероятность $P_{l_0, l_1, \dots, l_k}$ того, что в результате стрельбы будет l_0 промахов, l_1 попаданий в первый элемент и т.д., вообще l_i попаданий в i -й элемент ($i = 1, 2, \dots, k$), $\sum_{i=0}^k l_i = n$.

Решение. Число способов, какими можно из n снарядов выбрать l_0 таких, которые дадут промахи; l_1 таких, которые попадут в 1-й элемент, и т.д., равно $\frac{n!}{k!}$ (см. задачу 1.45).

$$\prod_{i=0}^k l_i !$$

Вероятность каждого конкретного варианта расположения попаданий равна $p_0^{l_0}, p_1^{l_1}, \dots, p_k^{l_k}$, где $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^k p_i$ (вероятность промаха). Умножая эту вероятность на число вариантов, получим

$$P_{l_0, l_1, \dots, l_k} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^k l_i!} \prod_{i=0}^k p_i^{l_i} = n! \prod_{i=0}^k \frac{p_i^{l_i}}{l_i!}.$$

2.71*. В условиях предыдущей задачи найти вероятность поражения (вывода из строя) объекта, если для этого требуется поразить не менее двух элементов, а для поражения элемента достаточно одного попадания.

Решение. Обозначим A — поражение объекта. Противоположное событие $\bar{A}$ может осуществиться в $(k+1)$ вариантах:

$$\bar{A} = B_0 + B_1 + \dots + B_i + \dots + B_k,$$

где B_0 — ни один элемент не поражен;

B_i — поражен только i -й элемент, остальные не поражены ($i = 1, 2, \dots, k$).

$$P(B_0) = p_0^n \text{ (все выстрелы дали промах).}$$

Вероятность события B_i подсчитаем, разложив его на ряд слагаемых: $B_i = B_i^{(1)} + B_i^{(2)} + \dots + B_i^{(s)} + \dots + B_i^{(n)}$, где $B_i^{(s)}$ — элемент поражен ровно s снарядами ($s = 1, 2, \dots, n$).

$$P(B_i^{(s)}) = C_n^s p_i^s p_0^{n-s};$$

$$P(B_i) = \sum_{s=1}^n C_n^s p_i^s p_0^{n-s},$$

откуда

$$P(\bar{A}) = p_0^n + \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^n C_n^s p_i^s p_0^{n-s};$$

$$P(A) = 1 - p_0^n - \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^n C_n^s p_i^s p_0^{n-s}.$$

2.72. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят — она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают, и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

Решение. Чтобы событие A — появление туза при втором вынимании — имело место, нужно прежде всего, чтобы мы вынули не ту карту, которую вынули первый раз (вероятность этого $1/2$); затем, чтобы вторая карта была тузом. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{51} = \frac{2}{51}$.

2.73. Условия опыта те же, что в предыдущей задаче, но первая (посмотренная) карта оказалась тузом; найти вероятность того, что при втором вынимании мы получим тоже туз.

Решение. Событие A — туз при втором вынимании — может произойти в двух вариантах:

A_1 — второй раз появился тот же туз, что первый раз;

A_2 — второй раз появился не тот, а другой туз.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2);$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2}; \quad P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{51}; \quad P(A) = \frac{27}{51}.$$

2.74. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу n карт ($n < 52$); одну из них смотрят; она оказывается тузом, после чего ее перемешивают с остальными вынутыми. Найти вероятность того, что при втором вынимании карты из этих n снова получим туз.

$$\text{О т в е т. } P(A) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{3}{51}.$$

2.75. Происходит воздушный бой между двумя самолетами: истребителем и бомбардировщиком. Стрельбу начинает истребитель: он дает по бомбардировщику один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1 . Если бомбардировщик этим выстрелом не сбит, он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2 . Если истребитель этим выстрелом не сбит, он еще раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3 . Найти вероятности следующих исходов боя:

A — сбит бомбардировщик;

B — сбит истребитель;

C — сбит хотя бы один из самолетов.

$$\text{О т в е т. } P(A) = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3; \quad P(B) = (1 - p_1)p_2; \quad P(C) = P(A) + P(B).$$

2.76. Происходит воздушный бой между бомбардировщиком и двумя атакующими его истребителями. Стрельбу начинает бомбардировщик; он дает по каждому истребителю один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1 . Если данный истребитель не сбит, то он независимо от судьбы другого стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_2 .

Определить вероятности следующих исходов боя:

A — сбит бомбардировщик;

B — сбиты оба истребителя;

C — сбит хотя бы один истребитель;

D — сбит хотя бы один самолет;

E — сбит ровно один истребитель;

F — сбит ровно один самолет.

Решение. Вероятность того, что один истребитель соьет бомбардировщик, равна $(1 - p_1)p_2$; вероятность того, что хотя бы один из них соьет бомбардировщика:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - [1 - (1 - p_1)p_2]^2; \quad \mathbf{P}(B) = p_1^2;$$

$$\mathbf{P}(C) = 1 - (1 - p_1)^2; \quad \mathbf{P}(D) = 1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)^2;$$

$$\mathbf{P}(E) = 2p_1(1 - p_1).$$

Событие F представляется в виде

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

где F_1 — сбит бомбардировщик, а оба истребителя целы;

F_2 — первый истребитель сбит, а второй истребитель и бомбардировщик целы;

F_3 — второй истребитель сбит, а первый истребитель и бомбардировщик целы.

$$\mathbf{P}(F_1) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2];$$

$$\mathbf{P}(F_2) = \mathbf{P}(F_3) = p_1(1 - p_1)(1 - p_2);$$

$$\mathbf{P}(F) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2).$$

2.77. Условия и вопросы те же, что в задаче 2.76, но с тем изменением, что истребители идут в атаку только попарно: если сбит один из них, то другой выходит из боя.

Ответ. $\mathbf{P}(A) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2]$; $\mathbf{P}(B) = p_1^2$; $\mathbf{P}(C) = 1 - (1 - p_1)^2$; $\mathbf{P}(D) = 1 - (1 - p_1)^2(1 - p_2)^2$; $\mathbf{P}(E) = 2p_1(1 - p_1)$; $\mathbf{P}(F) = (1 - p_1)^2[1 - (1 - p_2)^2] + 2p_1(1 - p_1)$.

2.78. Прибор состоит из трех узлов; один из них безусловно необходим для работы прибора; два других дублируют друг друга. В результате работы устройства в нем появляются неисправности; каждая неисправность с одной и той же вероятностью появляется в любом из элементов, составляющих узлы. Первый узел состоит из n_1 элементов; второй — из n_2 элементов, третий — из n_3 элемен-

тов ($n_1 + n_2 + n_3 = n$). При неисправности хотя бы одного элемента узел выходит из строя.

Известно, что в приборе имеется четыре неисправности (в четырех разных элементах). Найти вероятность того, что наличие этих неисправностей делает невозможной работу прибора.

Решение. Событие A — невозможность работы прибора — распадается на два варианта:

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 — вышел из строя первый узел;

A_2 — первый узел не вышел из строя, но второй и третий — вышли.

Чтобы произошло событие A_1 , нужно, чтобы хотя бы одна из четырех неисправностей пришлось на первый узел:

$$P(A_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{n - n_1}{n} \frac{n - n_1 - 1}{n - 1} \frac{n - n_1 - 2}{n - 2} \frac{n - n_1 - 3}{n - 3}.$$

Для определения вероятности события A_2 надо вероятность события $\bar{A}_1$ — первый узел не вышел из строя — умножить на вероятность того, что второй и третий узлы вышли из строя (с учетом того, что все четыре неисправности приходятся на второй и третий узлы). Последнее событие может осуществиться в трех вариантах: или одна неисправность будет во втором, а три других — в третьем узле, или наоборот: три во втором и одна в третьем; или же во втором и третьем узлах будет по две неисправности.

Вероятность первого варианта:

$$C_4^1 \frac{n_2}{n_2 + n_3} \frac{n_3}{n_2 + n_3 - 1} \frac{n_3 - 1}{n_2 + n_3 - 2} \frac{n_3 - 2}{n_2 + n_3 - 3}.$$

Вероятность второго варианта:

$$C_4^1 \frac{n_3}{n_2 + n_3} \frac{n_2}{n_2 + n_3 - 1} \frac{n_2 - 1}{n_2 + n_3 - 2} \frac{n_2 - 2}{n_2 + n_3 - 3}.$$

Вероятность третьего варианта:

$$C_4^2 \frac{n_2}{n_2 + n_3} \frac{n_2 - 1}{n_2 + n_3 - 1} \frac{n_3}{n_2 + n_3 - 2} \frac{n_3 - 1}{n_2 + n_3 - 3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(\bar{A}_1) \times \\ &\times \frac{n_2 n_3 [C_4^1(n_3 - 1)(n_3 - 2) + C_4^1(n_2 - 1)(n_2 - 2) + C_4^2(n_2 - 1)(n_3 - 1)]}{(n_2 + n_3)(n_2 + n_3 - 1)(n_2 + n_3 - 2)(n_2 + n_3 - 3)} = \\ &= \frac{2n_2 n_3 [2(n_3 - 1)(n_3 - 2) + 2(n_2 - 1)(n_2 - 2) + 3(n_2 - 1)(n_3 - 1)]}{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)}. \end{aligned}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2).$$

2.79. Имеется электроприбор, который может выходить из строя (перегорать) только в момент включения. Если прибор включался до сих пор $k - 1$ раз и еще не перегорел, то условная вероятность ему перегореть при k -м включении равна Q_k . Найти вероятности следующих событий:

- A — прибор выдержит не менее n включений;
 B — прибор выдержит не более n включений;
 C — прибор перегорит точно при n -м включении.

Решение. Вероятность события A равна вероятности того, что при первых n включениях он не перегорит:

$$P(A) = \prod_{i=1}^n (1 - Q_k).$$

Чтобы найти вероятность события B , переходим к противоположному:

B — прибор выдержит более n включений.

Для этого достаточно, чтобы при первых $(n + 1)$ включениях прибор не перегорел:

$$P(\bar{B}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 - Q_k); \quad P(B) = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} (1 - Q_k).$$

Чтобы прибор перегорел точно при n -м включении, надо, чтобы он не перегорел при первых $(n - 1)$ включениях, а при n -м перегорел: $P(C) = Q_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - Q_k)$.

2.80. Прибор состоит из четырех узлов; два из них (I и II) безусловно необходимы для исправной работы прибора, а два (III и IV) дублируют друг друга (рис. 2.80). Узлы могут выходить из строя только при включении. При k -м включении исправный узел I (независимо от других) выходит из строя с вероятностью $q_I^{(k)}$; узел II — с вероятностью $q_{II}^{(k)}$; узлы III и IV — с одинаковой вероятностью

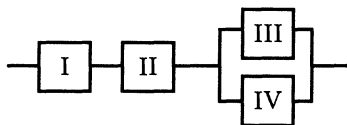


Рис. 2.80

стью $q_{\text{III}}^{(k)} = q_{\text{IV}}^{(k)} = q_k$. Найти вероятности тех же событий A, B, C , что в задаче 2.79.

Решение. Задача сводится к предыдущей, но здесь находим условную вероятность Q_k выхода из строя исправного прибора при k -м включении:

$$Q_k = 1 - (1 - q_I^{(k)})(1 - q_{\text{II}}^{(k)})(1 - q_k^2).$$

2.81. В урне a белых и b черных шаров. Два игрока поочередно вынимают из урны по одному шару, каждый раз вкладывая его обратно и перемешивая шары. Выигравшим считается тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность $P(I)$ того, что выигрывает первый игрок (тот, кто вынимал шар первым).

Решение. Выигрыш первого игрока может осуществиться или при первом же вынимании, или при третьем (для чего первые два вынимания должны дать черные шары, а третье — белый), и т.д.

$$\begin{aligned} P(I) &= \frac{a}{a+b} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \frac{a}{a+b} + \dots + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} \frac{a}{a+b} + \dots = \\ &= \frac{a}{a+b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{2k} = \frac{a}{a+b} \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{a+b}{a+2b} \end{aligned}$$

(очевидно, $P(I) > \frac{1}{2}$ — при любых a и b).

2.82. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность $P(I)$ того, что выигрывает первый игрок.

Решение. $P(I) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$

2.83. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью p . После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго — признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k -м испытании.

Решение. Для того чтобы произошло данное событие, нужно, во-первых, чтобы прибор вышел из строя при k -м испытании — вероятность этого p . Кроме того, нужно, чтобы за предыдущие $k-1$ испытаний прибор вышел из строя ровно один раз; вероятность этого равна $(k-1)p(1-p)^{k-2}$. Искомая вероятность равна $(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

2.84. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей: 1) кабина летчика и двигатель, 2) топливные баки и 3) планер. Для поражения самолета достаточно одного попадания в первую часть или двух попаданий во вторую, или трех попаданий в третью. При попадании в самолет одного снаряда он с вероятностью p_1 попадает в первую часть, с вероятностью p_2 — во вторую и с вероятностью p_3 — в третью. Попавшие снаряды распределяются по частям независимо друг от друга. Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность поражения самолета $P(A|m)$ при этом условии для $m = 1, 2, 3, 4$.

Решение. Чтобы самолет оказался пораженным при одном попадании, нужно, чтобы снаряд попал в первую часть: $P(A|1) = p_1$.

Для того чтобы найти $P(A|m)$ при $m > 1$, перейдем к противоположному событию $P(\bar{A}|m)$ — непоражение самолета при m попаданиях.

Чтобы самолет не был поражен при двух попаданиях, надо, чтобы оба снаряда попали в планер или один — в баки, а другой — в планер:

$$P(\bar{A}|2) = p_3^2 + 2p_2p_3;$$

$$P(A|2) = 1 - (p_3^2 + 2p_2p_3).$$

Аналогично получаем

$$P(A|3) = 1 - 3p_2p_3^2; \quad P(A|4) = 1.$$

2.85. Те же условия, что в предыдущей задаче, но первая часть бронирована и сделана неуязвимой для попадающих в нее снарядов. Найти $P(A|1)$, $P(A|2)$ и $P(A|m)$ при $m > 2$.

Ответ. $P(A|1) = 0$; $P(A|2) = p_2^2$; $P(A|m) = 1 - [p_1^m + mp_1^{m-1} \times (p_2 + p_3) + C_m^2 p_1^{m-2} (p_3^2 + 2p_2p_3) + C_m^3 p_1^{m-3} 3p_2p_3^2]$.

2.86. Прибор состоит из трех узлов. При включении прибора с вероятностью p_1 появляется неисправность в первом узле, с вероятностью p_2 — во втором узле, с вероятностью p_3 — в третьем узле. Неисправности в узлах возникают независимо друг от друга. Каждый из трех узлов безусловно необходим для работы прибора. Для того чтобы узел отказал, необходимо, чтобы в нем было не менее двух неисправностей. Найти вероятность того, что прибор благополучно выдержит n включений.

Решение. Чтобы прибор работал (событие A), нужно, чтобы работали все три узла. Вероятность того, что первый узел выдержит n включений, равна вероятности того, что при n вклю-

чениях в нем окажется не более одной неисправности (0 или 1): $(1 - p_1)^n + np_1(1 - p_1)^{n-1}$.

Вероятность того, что все три узла выдержат n включений, равна

$$P(A) = \prod_{i=1}^3 [(1 - p_i)^n + np_i(1 - p_i)^{n-1}].$$

2.87. Авиабомба, предназначенная для бомбометания по наземной цели, снабжена радиовзрывателем, работающим по сигналу от поверхности земли. Взрыватель срабатывает на высоте h . Эффективное действие бомбы по наземной цели имеет место тогда, когда $h_1 < h < h_2$. При $h > h_2$ наблюдается преждевременный разрыв; при $h < h_1$ — запоздалый разрыв; оба неэффективны. Вероятность нормального разрыва равна p , преждевременного — p_1 , запоздалого — p_2 ; $p_1 + p_2 + p = 1$.

С целью повысить вероятность нормального разрыва на бомбе устанавливается второй взрыватель, имеющий те же характеристики, что и первый, но работающий независимо от него.

При каком условии эта мера повысит вероятность нормального разрыва бомбы?

Решение. При одном взрывателе вероятность нормального разрыва $p = 1 - p_1 - p_2$. При двух взрывателях вероятность нормального разрыва равна $p' = p^2 + 2pp_2$ (либо оба взрывателя срабатывают нормально, либо один нормально, другой запоздает). Решая неравенство $p' = p^2 + 2pp_2 > p$, получаем требуемое условие для $p' > p$:

$$p + 2p_2 > 1, \quad \text{т.е.} \quad p_2 > p_1.$$

ГЛАВА 3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Если об обстановке опыта можно сделать n исключаящих друг друга предположений (гипотез)

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

и если событие A может появиться только при одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i),$$

где $P(H_i)$ — вероятность гипотезы H_i ; $P(A|H_i)$ — условная вероятность события A при этой гипотезе.

Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A , то с учетом этого события «новые», т.е. условные, вероятности гипотез вычисляются по *формуле Бейеса*:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формула Бейеса дает возможность «пересмотреть» вероятности гипотез с учетом наблюдаемого результата опыта.

Если после опыта, закончившегося появлением события A , производится еще один опыт, в котором может появиться или не появиться событие B , то вероятность (условная) этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(H_i)$, а новые $P(H_i | A)$:

$$P(B|A) = \sum_{i=1}^n P(H_i | A)P(B|H_i A).$$

3.1. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие A — появление белого шара. Формулируем гипотезы:

H_1 — выбор первой урны;

H_2 — выбор второй урны;

H_3 — выбор третьей урны.

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{3};$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{a}{a+b}; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{c}{c+d}; \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3} \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right).$$

3.2. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора; ненормальный — в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном — 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя за время t .

Решение. $p = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,22$.

3.3. Группа самолетов в составе: один ведущий и два ведомых, направляется на бомбометание по объекту. Каждый из них несет по одной бомбе. Ведущий самолет имеет прицел, ведомые — не имеют и производят бомбометание по сигналу ведущего. По пути к объекту группа проходит зону противовоздушной обороны, в которой каждый из самолетов, независимо от других, сбивается с вероятностью p . Если к цели подойдет ведущий самолет с обоими ведомыми, они поразят объект с вероятностью $P_{1,2}$. Ведущий самолет, сопровождаемый одним ведомым, поразит объект с вероятностью $P_{1,1}$. Один ведущий самолет, без ведомых, поразит объект с вероятностью $P_{1,0}$. Если ведущий самолет сбит, то каждый из ведомых, если он сохранился, выходит к объекту и поражает его с вероятностью $P_{0,1}$.

Найти полную вероятность поражения объекта с учетом противодействия.

Решение. Формулируем гипотезы:

H_1 — к объекту вышли все три самолета;

H_2 — к объекту вышел ведущий с одним ведомым;

H_3 — к объекту вышел один ведущий;
 H_4 — к объекту вышли два ведомых (без ведущего);
 H_5 — к объекту вышел один ведомый.
 Вероятности этих гипотез: $\mathbf{P}(H_1) = (1 - p)^3$;

$$\mathbf{P}(H_2) = 2p(1 - p)^2; \quad \mathbf{P}(H_3) = p^2(1 - p);$$

$$\mathbf{P}(H_4) = p(1 - p)^2; \quad \mathbf{P}(H_5) = 2p^2(1 - p).$$

Обозначим A — поражение объекта.

$$\mathbf{P}(A|H_1) = P_{1,2}; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = P_{1,1}; \quad \mathbf{P}(A|H_3) = P_{1,0};$$

$$\mathbf{P}(A|H_4) = 1 - (1 - P_{0,1})^2; \quad \mathbf{P}(A|H_5) = P_{0,1}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) = & (1 - p)^3 P_{1,2} + 2p(1 - p)^2 P_{1,1} + p^2(1 - p) P_{1,0} + \\ & + p(1 - p)^2 [1 - (1 - P_{0,1})^2] + 2p^2(1 - p) P_{0,1}. \end{aligned}$$

3.4. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может применять или не применять помехи. Если объект не применяет помех, то за один цикл обзора станция обнаруживает его с вероятностью p_0 ; если применяет — с вероятностью $p_1 < p_0$. Вероятность того, что во время цикла будут применены помехи, равна p и не зависит от того, как и когда применялись помехи в остальных циклах. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора.

Решение. Полная вероятность обнаружения за один цикл $(1 - p)p_0 + pp_1$; вероятность хотя бы одного обнаружения за n циклов равна $1 - [1 - (1 - p)p_0 - pp_1]^n$.

3.5. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе работают три контролера; изделие осматривается только одним контролером, с одинаковой вероятностью первым, вторым или третьим. Вероятность обнаружения дефекта (если он имеется) для i -го контролера равна p_i ($i = 1, 2, 3$). Если изделие не было забраковано в цехе, то оно попадет в ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0 .

Определить вероятности следующих событий:

A — изделие будет забраковано;

B — изделие будет забраковано в цехе;

C — изделие будет забраковано в ОТК завода.

Решение. Так как события B и C несовместны и $A = B + C$, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$.

Находим $\mathbf{P}(B)$. Для того чтобы изделие было забраковано в цехе, нужно, чтобы оно, во-первых, имело дефект, и, во-вторых, этот дефект был обнаружен. Вероятность обнаружения имеющегося

дефекта по формуле полной вероятности равна $\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$;

отсюда $P(B) = p \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$.

Аналогично

$$P(C) = p \left(1 - \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} \right) p_0.$$

3.6. Группа, состоящая из трех самолетов-разведчиков, высылается в район противника с целью уточнить координаты объекта, который предполагается подвергнуть обстрелу ракетами. Для поражения объекта выделено n ракет. При уточненных координатах объекта вероятность его поражения одной ракетой равна p_1 , при неуточненных — p_2 . Каждый разведчик перед выходом в район объекта может быть сбит противовоздушными средствами противника; вероятность этого p_3 . Если разведчик не сбит, он сообщает координаты объекта по радио. Радиоаппаратура разведчика имеет надежность p_4 . Для уточнения координат достаточно приема сообщения от одного разведчика. Найти вероятность поражения объекта с учетом деятельности разведки.

Р е ш е н и е. Гипотезы:

H_1 — координаты объекта уточнены;

H_2 — координаты не уточнены.

$$P(H_1) = 1 - [1 - (1 - p_3)p_4]^3; \quad P(H_2) = [1 - (1 - p_3)p_4]^3;$$

$$P(A|H_1) = 1 - (1 - p_1)^n; \quad P(A|H_2) = 1 - (1 - p_2)^n.$$

Полная вероятность события A — поражение объекта:

$$P(A) = \{1 - [1 - (1 - p_3)p_4]^3\} [1 - (1 - p_1)^n] + \\ + [1 - (1 - p_3)p_4]^3 [1 - (1 - p_2)^n].$$

3.7. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Р е ш е н и е. Событие A — появление белого шара; гипотезы:

H_1 — переложен белый шар;

H_2 — переложен черный шар.

$$P(H_1) = \frac{a}{a+b}; \quad P(H_2) = \frac{b}{a+b};$$

$$P(A|H_1) = \frac{c+1}{c+d+1}; \quad P(A|H_2) = \frac{c}{c+d+1};$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{a}{a+b} \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \frac{c}{c+d+1}.$$

3.8. В условиях предыдущей задачи из первой урны во вторую перекладывают не один, а три шара (предполагается, что $a \geq 3$; $b \geq 3$). Найти вероятность того, что из второй урны появится белый шар.

Решение. Можно было бы выдвинуть четыре гипотезы:

H_1 — переложены 3 белых шара;

H_2 — переложены 2 белых шара и 1 черный;

H_3 — переложены 1 белый шар и 2 черных;

H_4 — переложены 3 черных шара,

но проще решить задачу, имея всего две гипотезы:

H_1 — вынутый из 2-й урны шар принадлежит 1-й урне;

H_2 — вынутый из 2-й урны шар принадлежит 2-й урне. Так как во второй урне три шара принадлежат первой урне, а $c+d$ — второй, то

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{3}{c+d+3}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{c+d}{c+d+3}.$$

Вероятность появления белого шара из первой урны не зависит от того, вынимается ли этот шар непосредственно из первой урны или после перекладывания во вторую:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{a}{a+b}; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{c}{c+d},$$

откуда

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{c+d+3} \frac{a}{a+b} + \frac{c+d}{c+d+3} \frac{c}{c+d}.$$

3.9. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Вероятность события A_2 — извлечения белого шара из второй урны после перекладывания — найдем так же, как в задаче 3.7 (при $c = a$, $d = b$):

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{a}{a+b} \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}.$$

Таким образом, вероятность извлечения белого шара из второй урны после перекладывания будет такой же, как и до перекладывания.

вания. Следовательно, такой же будет и вероятность вынуть белый шар из третьей, четвертой и т. д., n -й урны:

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{a}{a+b}.$$

3.10. Приборы одного наименования изготавливаются двумя заводами; первый завод поставляет $2/3$ всех изделий, поступающих на производство; второй $1/3$. Надежность (вероятность безотказной работы) прибора, изготовленного первым заводом, равна p_1 ; второго — p_2 . Определить полную (среднюю) надежность p прибора, поступившего на производство.

О т в е т. $p = \frac{2}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2$.

3.11. Производится стрельба по цели одним снарядом. Цель состоит из трех частей, площади которых равны S_1, S_2, S_3 ($S_1 + S_2 + S_3 = S$). Для попавшего в цель снаряда вероятность попасть в ту или другую часть пропорциональна площади части. При попадании в первую часть цель поражается с вероятностью p_1 ; во вторую часть — с вероятностью p_2 ; в третью — p_3 . Найти вероятность поражения цели, если известно, что в нее попал один снаряд.

О т в е т. $p = \frac{S_1}{S} p_1 + \frac{S_2}{S} p_2 + \frac{S_3}{S} p_3$.

3.12. Имеется две партии однородных изделий; первая партия состоит из N изделий, среди которых n дефектных; вторая партия состоит из M изделий, среди которых m дефектных. Из первой партии берется случайным образом K изделий, а из второй L изделий ($K < N$; $L < M$); эти $K + L$ изделий смешиваются и образуется новая партия. Из новой смешанной партии берется наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

Р е ш е н и е. Событие A — изделие будет дефектным. Гипотезы:

H_1 — изделие принадлежит первой партии;

H_2 — изделие принадлежит второй партии.

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{K}{K+L}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{L}{K+L}; \quad \mathbf{P}(A) = \frac{K}{K+L} \frac{n}{N} + \frac{L}{K+L} \frac{m}{M}.$$

3.13. В условиях предыдущей задачи из новой, смешанной, партии берется не одно изделие, а три. Найти вероятность того, что хотя бы одно изделие из трех окажется дефектным.

Р е ш е н и е. Гипотезы:

H_0 — все три изделия принадлежат первой партии;

H_1 — два изделия принадлежат первой партии, а одно — второй;

H_2 — одно изделие принадлежит первой партии, а два — второй;

H_3 — все три изделия принадлежат второй партии.

$$\mathbf{P}(H_0) = \frac{K(K-1)(K-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{3K(K-1)L}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{3KL(L-1)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathbf{P}(H_3) = \frac{L(L-1)(L-2)}{(K+L)(K+L-1)(K+L-2)};$$

$$\mathbf{P}(A|H_0) = 1 - \frac{(N-n)(N-n-1)(N-n-2)}{N(N-1)(N-2)};$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 1 - \frac{(N-n)(N-n-1)(M-m)}{N(N-1)M};$$

$$\mathbf{P}(A|H_2) = 1 - \frac{(N-n)(M-m)(M-m-1)}{NM(M-1)};$$

$$\mathbf{P}(A|H_3) = 1 - \frac{(M-m)(M-m-1)(M-m-2)}{M(M-1)(M-2)};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(H_0)\mathbf{P}(A|H_0) + \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \\ &+ \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2) + \mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A|H_3). \end{aligned}$$

3.14. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; шары перемешиваются и затем из второй урны в первую перекладывается один шар. После этого из первой урны берут наугад один шар. Найти вероятность того, что он будет белым.

Решение. Гипотезы:

H_1 — состав шаров в первой урне не изменился;

H_2 — в первой урне один черный шар заменен белым;

H_3 — в первой урне один белый шар заменен черным.

$$\mathbf{P}(H_1) \frac{a}{a+b} \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \frac{d+1}{c+d+1};$$

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{b}{a+b} \frac{c}{c+d+1}; \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{a}{a+b} \frac{d}{c+d+1};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \left(\frac{a}{a+b} \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \frac{d+1}{c+d+1} \right) \frac{a}{a+b} + \\ &+ \frac{b}{a+b} \frac{c}{c+d+1} \frac{a+1}{a+b} + \frac{a}{a+b} \frac{d}{c+d+1} \frac{a-1}{a+b} = \\ &= \frac{a(a+b)(c+d+1) + bc - ad}{(a+b)^2(c+d+1)} = \frac{a}{a+b} + \frac{bc - ad}{(a+b)^2(c+d+1)}. \end{aligned}$$

Полученное решение показывает, что вероятность вынуть белый шар не изменится, если доли белых и черных шаров в обоих урнах одинаковы: $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ ($bc - ad = 0$).

3.15. Из чисел $1, 2, \dots, n$ одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m ($m > 0$).

Решение. Событие A состоит в том, что разность между первым выбранным числом k и вторым выбранным числом l будет не меньше m (т.е. $k - l \geq m$).

Гипотезы H_k — первым вынута число k ($k = m+1, \dots, n$);

$$\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{n}; \quad \mathbf{P}(A|H_k) = \frac{k-m}{n-1};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{k=m+1}^n \frac{k-m}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=m+1}^n (k-m) = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} [1 + 2 + \dots + (n-m)] = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}. \end{aligned}$$

3.16*. Из N стрелков можно выделить четыре группы: a_1 отличных стрелков, a_2 хороших, a_3 посредственных и a_4 плохих. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для стрелка i -й группы равна p_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Вызываются наугад два стрелка и стреляют по одной и той же мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

Решение. Событие A — хотя бы одно попадание в мишень. Гипотезы H_i — первым вызван стрелок i -й группы ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$\mathbf{P}(H_i) = \frac{a_i}{N}; \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{N} \mathbf{P}(A|H_i),$$

где $\mathbf{P}(A|H_i)$ снова находим по формуле полной вероятности при четырех гипотезах о том, какой стрелок был вызван вторым:

$$\mathbf{P}(A|H_i) = \frac{a_i - 1}{N - 1} [1 - (1 - p_i)^2] + \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{N - 1} [1 - (1 - p_i)(1 - p_j)].$$

3.17. Производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p . Если в резервуар попал один снаряд, горючее воспламеняется с вероятностью p_1 ; если два снаряда — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

Решение. Гипотезы:

H_1 — в резервуар попал один снаряд;

H_2 — в резервуар попало два или более снарядов.

$$\mathbf{P}(H_1) = np(1-p)^{n-1}; \quad \mathbf{P}(H_2) = 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}.$$

Искомая вероятность равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(H_1)p_1 + \mathbf{P}(H_2)1 = \\ &= np(1-p)^{n-1}p_1 + 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} = \\ &= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}(1-p_1). \end{aligned}$$

3.18. Группа студентов состоит из a отличников, b хорошо успевающих и c занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена вызывается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку.

Решение. Гипотезы:

H_1 — вызван отличный студент;

H_2 — вызван хороший студент;

H_3 — вызван слабый студент.

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{a}{a+b+c}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{b}{a+b+c}; \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{c}{a+b+c}.$$

Искомая вероятность равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(H_1)1 + \mathbf{P}(H_2)\frac{1}{3} + \mathbf{P}(H_3)\frac{1}{3} = \\ &= \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{1}{3} \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+\frac{c}{3}}{a+b+c}. \end{aligned}$$

3.19. В условиях предыдущей задачи вызываются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получают отметки: отлично, хорошо и удовлетворительно (в любом порядке).

Решение. Событие A — получение отличной, хорошей и удовлетворительной отметок — возможно только при одной из следующих гипотез:

H_1 — вызваны один слабый студент, один хороший и один отличник;

H_2 — вызваны один слабый студент и два хороших;

H_3 — вызваны два слабых студента и один хороший;

H_4 — вызваны два слабых студента и один отличник.

$$\mathbf{P}(H_1) = 6 \frac{a}{N} \frac{b}{N-1} \frac{c}{N-2}; \quad \mathbf{P}(H_2) = 3 \frac{b}{N} \frac{b-1}{N-1} \frac{c}{N-2};$$

$$\mathbf{P}(H_3) = 3 \frac{b}{N} \frac{c}{N-1} \frac{c-1}{N-2}; \quad \mathbf{P}(H_4) = 3 \frac{a}{N} \frac{c}{N-1} \frac{c-1}{N-2}$$

$$(N = a + b + c).$$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1) 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \mathbf{P}(H_2) \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \mathbf{P}(H_3) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \mathbf{P}(H_4) 1 \cdot \frac{2}{9}.$$

3.20. В автобусе едут n пассажиров. На очередной остановке каждый из них выходит с вероятностью p ; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ — один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после очередной остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

Решение. Событие A — после остановки снова n пассажиров. Гипотезы:

H_0 — не вошел никто;

H_1 — вошел один пассажир.

$$\mathbf{P}(H_0) = p_0; \quad \mathbf{P}(H_1) = 1 - p_0;$$

$$\mathbf{P}(A|H_0) = (1 - p)^n; \quad \mathbf{P}(A|H_1) = np(1 - p)^{n-1};$$

$$\mathbf{P}(A) = p_0(1 - p)^n + (1 - p_0)np(1 - p)^{n-1}.$$

3.21*. Условия предыдущей задачи сохраняются, но надо найти вероятность того, что после *двух* остановок в автобусе будет по-прежнему n пассажиров (при расчете учесть, что новый пассажир также выходит с вероятностью p на последующей остановке).

Решение. Гипотезы:

$H_{0,0}$ — за две остановки не вошел никто;

$H_{1,0}$ — на первой остановке вошел один пассажир, а на второй — ни одного;

$H_{0,1}$ — на первой остановке не вошел ни один пассажир, а на второй — один;

$H_{1,1}$ — на каждой остановке вошло по пассажиру.

$$\mathbf{P}(H_{0,0}) = p_0^2; \mathbf{P}(H_{1,0}) = (1 - p_0)p_0;$$

$$\mathbf{P}(H_{0,1}) = p_0(1 - p_0); \mathbf{P}(H_{1,1}) = (1 - p_0)^2.$$

Чтобы при гипотезе $H_{0,0}$ число пассажиров осталось n , нужно, чтобы ни один из n пассажиров не вышел ни на первой, ни на второй остановках:

$$\mathbf{P}(A|H_{0,0}) = [(1 - p)^n]^2 = (1 - p)^{2n}.$$

Чтобы при гипотезе $H_{1,0}$ число пассажиров осталось прежним, нужно, чтобы или на первой остановке вышел один пассажир, а на второй — никто, или на первой остановке не вышел никто, а на второй — один пассажир:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A|H_{1,0}) &= np(1 - p)^{n-1}(1 - p)^n + (1 - p)^n(n + 1)p(1 - p)^n = \\ &= p(1 - p)^{2n-1}[n + (n + 1)(1 - p)]. \end{aligned}$$

Аналогично, но учитывая, что вошедший на второй остановке пассажир не выходит:

$$\mathbf{P}(A|H_{0,1}) = np(1 - p)^{n-1}(1 - p)^n + (1 - p)^n np(1 - p)^{n-1} = 2np(1 - p)^{2n-1}.$$

Чтобы при двух вошедших пассажирах число их после двух остановок оставалось неизменным, нужно или чтобы на первой остановке вышли два пассажира, а на второй — никто; или на первой — никто, а на второй — два; или чтобы вышло по пассажиру на каждой остановке:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A|H_{1,1}) &= C_n^2 p^2 (1 - p)^{n-2} (1 - p)^{n-1} + \\ &+ (1 - p)^n C_{n+1}^2 p^2 (1 - p)^{n-1} + C_n^1 p (1 - p)^{n-1} C_n^1 p (1 - p)^{n-1} = \\ &= p^2 (1 - p)^{2n-3} \left[\frac{n(n-1)}{2} + n^2 (1 - p) + \frac{n(n+1)}{2} (1 - p)^2 \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(H_{0,0}) \mathbf{P}(A|H_{0,0}) + \mathbf{P}(H_{1,0}) \mathbf{P}(A|H_{1,0}) + \\ &+ \mathbf{P}(H_{0,1}) \mathbf{P}(A|H_{0,1}) + \mathbf{P}(H_{1,1}) \mathbf{P}(A|H_{1,1}). \end{aligned}$$

3.22. Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью p . Найти вероятность того, что из трех целей две будут поражены, а третья нет.

Решение. Гипотезы:

H_1 — обстреляны все три цели;

H_2 — все орудия стреляют по одной цели;

H_3 — две цели из трех обстреляны, а третья нет.

$$\mathbf{P}(H_1) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9};$$

$$\mathbf{P}(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}; \mathbf{P}(H_3) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3};$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 3p^2(1-p); \mathbf{P}(A|H_2) = 0;$$

$$\mathbf{P}(A|H_3) = [1 - (1-p)^2]p = p^2(2-p);$$

$$\mathbf{P}(A) = 2p^2 \left(1 - \frac{2}{3}p \right).$$

3.23. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга узлов I и II (рис. 3.23) и может случайным образом работать в одном из двух режимов: благоприятном и неблагоприятном. В благоприятном режиме надежность каждого из узлов равна p_1 , в неблагоприятном p_2 . Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятном режиме, равна P_1 , в неблагоприятном $1 - P_1$. Найти полную (среднюю) надежность прибора p .

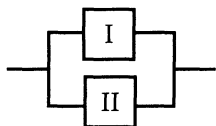


Рис. 3.23

Ответ. $p = P_1[1 - (1 - p_1)^2] + (1 - P_1)[1 - (1 - p_2)^2]$.

3.24. На телефонную станцию поступает случайный поток вызовов; вероятность приема k вызовов за время t равна $p_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Число вызовов, принятых за промежуток времени t , не зависит от того, сколько вызовов поступило до или после этого промежутка. Найти вероятность того, что за промежуток времени $2t$ будет s вызовов.

Решение. Разделим промежуток $2t$ на две части: первую и вторую, каждая длительности t . Гипотезы H_k — на первый участок попало k вызовов ($k = 0, 1, \dots, s$).

$$\mathbf{P}(H_k) = p_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, s).$$

Для того чтобы при гипотезе H_k на промежуток $2t$ попало s вызовов, нужно, чтобы на второй участок поступило $s - k$ вызовов. Условная вероятность этого равна $p_{s-k}(t)$. Полная вероятность события A — за время $2t$ поступит s вызовов — равна

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^s \mathbf{P}(H_k) \mathbf{P}(A|H_k) = \sum_{k=0}^s p_k(t) p_{s-k}(t).$$

3.25. В ящике находится a новых теннисных мячей и b иггранных. Из ящика наугад вынимается два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из

ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми ($a \geq 2; b \geq 2$).

Решение. Гипотезы:

H_1 — оба вынутых первый раз мяча были новыми;

H_2 — оба вынутых первый раз мяча были игранными;

H_3 — один из мячей был новым, а другой — игранным.

$$P(H_1) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}; \quad P(H_2) = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$P(H_3) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)};$$

$$P(A) = \frac{a(a-1)(a-2)(a-3) + b(b-1)a(a-1) + 2ab(a-1)(a-2)}{(a+b)^2(a+b-1)^2}.$$

3.26. Имеется n экзаменационных билетов, каждый из которых содержит два вопроса. Экзаменуемый знает ответ не на все $2n$ вопросов, а только на $k < 2n$. Определить вероятность p того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на оба вопроса своего билета или на один вопрос из своего билета и на один (по выбору преподавателя) вопрос из дополнительного билета.

Решение. Гипотезы:

H_1 — экзаменуемый знает оба вопроса своего билета;

H_2 — экзаменуемый из двух вопросов своего билета знает один.

$$p = \frac{k(k-1)}{2n(2n-1)} + \frac{2k(2n-k)}{2n(2n-1)} \frac{k-1}{2n-2}.$$

3.27*. Цель, по которой ведется стрельба, с вероятностью p_1 находится в пункте I, а с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$ в пункте II $\left(p_1 > \frac{1}{2}\right)$.

В нашем распоряжении имеется n снарядов, каждый из которых может быть направлен в пункт I или в пункт II. Каждый снаряд поражает цель независимо от других с вероятностью p . Какое число снарядов n_1 следует направить в пункт I для того, чтобы поразить цель с максимальной вероятностью?

Решение. Событие A — поражение цели при направлении n_1 снарядов в пункт I. Гипотезы:

H_1 — цель в пункте I;

H_2 — цель в пункте II.

$$P(H_1) = p_1; \quad P(H_2) = 1 - p_1;$$

$$\mathbf{P}(A) = p_1[1 - (1 - p)^{n_1}] + (1 - p_1)[1 - (1 - p)^{n - n_1}].$$

Рассматривая $\mathbf{P}(A)$ как функцию непрерывного аргумента n_1 , находим

$$\frac{d\mathbf{P}(A)}{dn_1} = [-p_1(1 - p)^{n_1} + (1 - p_1)(1 - p)^{n - n_1}]\ln(1 - p),$$

$$\frac{d^2\mathbf{P}(A)}{dn_1^2} = [-p_1(1 - p)^{n_1} + (1 - p_1)(1 - p)^{n - n_1}]\ln^2(1 - p) < 0,$$

откуда видно, что эта функция имеет единственный максимум в точке

$$n_1 = \frac{n}{2} + \frac{\ln \frac{1 - p_1}{p_1}}{2\ln(1 - p)}, \text{ где } \frac{d\mathbf{P}(A)}{dn_1} = 0.$$

Заметим, что $n_1 > \frac{n}{2}$ при $p_1 > \frac{1}{2}$.

Если полученное число n_1 целое и $\leq n$, то это и есть искомое число; если оно не целое (но $\leq n$), то нужно вычислить $\mathbf{P}(A)$ для двух ближайших целых значений и выбрать то из них, для которого $\mathbf{P}(A)$ больше; если полученное число окажется больше n , то следует направить все n снарядов в пункт I (это случится при $\ln \frac{1 - p_1}{p_1} \leq n \ln(1 - p)$, т.е. при $p_1 \geq \frac{1}{1 + (1 - p)^n}$).

3.28. Рассматривается посадка самолета на ВПП аэродрома. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая за состоянием ВПП визуально. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1 . Если аэродром затянут низкой облачностью, летчик сажает самолет вслепую по приборам. Надежность (вероятность безотказной работы) приборов во втором случае P . Если приборы «слепой» посадки сработали нормально, то самолет садится благополучно с той же вероятностью p_1 , что и при «визуальной» посадке. Если же приборы «слепой» посадки не сработали, то летчик может благополучно посадить самолет только с очень малой вероятностью p_1^* .

Найти полную вероятность благополучной посадки самолета, если известно, что в k % всех случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью.

Решение. Гипотезы:

H_1 — низкой облачности нет;

H_2 — низкая облачность есть.

$$\mathbf{P}(H_1) = 1 - \frac{k}{100}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{k}{100}; \quad \mathbf{P}(A|H_1) = p_1;$$

$\mathbf{P}(A|H_2)$ находим снова по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P}(A|H_2) = Pp_1 + (1 - P)p_1^*;$$

$$\mathbf{P}(A) = \left(1 - \frac{k}{100}\right)p_1 + \frac{k}{100}[Pp_1 + (1 - P)p_1^*].$$

3.29. Цель, по которой ведется стрельба, состоит из двух различных по уязвимости частей. Для поражения цели достаточно одного попадания в первую часть или двух попаданий во вторую. Для каждого попавшего в цель снаряда вероятность попадания в первую часть равна p_1 , во вторую $p_2 = 1 - p_1$. По цели производится три выстрела; вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Найти вероятность того, что данными тремя выстрелами цель будет поражена.

Решение. Гипотезы:

H_1 — в цель попал один снаряд;

H_2 — в цель попало два снаряда;

H_3 — в цель попало три снаряда.

$$\mathbf{P}(H_1) = 3p(1 - p)^2; \quad \mathbf{P}(H_2) = 3p^2(1 - p); \quad \mathbf{P}(H_3) = p^3.$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = p_1; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 1 - (1 - p_1)^2 + p_2^2; \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 1;$$

$$\mathbf{P}(A) = 3p(1 - p)^2 p_1 + 3p^2(1 - p)[1 - (1 - p_1)^2 + p_2^2] + p^3 \cdot 1.$$

3.30. Группа из трех самолетов совершает налет на объект. Объект защищен четырьмя батареями зенитных ракет. Каждая батарея простреливает угловой сектор размерами 60° , так что из полного угла 360° вокруг объекта оказываются защищенными 240° . Если самолет пролетает через защищенный сектор, его обстреливают и поражают с вероятностью p ; через незащищенный сектор самолет проходит беспрепятственно. Каждый самолет, прошедший к объекту, сбрасывает бомбу и поражает объект с вероятностью P . Экипажи самолетов не знают, где расположены батареи. Найти вероятность поражения объекта для двух способов организации налета:

1) все три самолета летят по одному и тому же направлению, выбираемому случайно;

2) каждый из самолетов выбирает себе направление случайно независимо от других.

Решение. 1) Гипотезы:

H_1 — самолеты выбрали незащищенное направление;

H_2 — самолеты выбрали защищенное направление.

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{2}{3};$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 1 - (1 - P)^3; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 1 - [1 - (1 - p)P]^3;$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}[1 - (1 - P)^3] + \frac{2}{3}\{1 - [1 - (1 - p)P]^3\}.$$

2) Находим для каждого самолета полную вероятность p_1 поразить объект: $p_1 = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}(1 - p)P$.

Для трех самолетов вероятность поражения объекта будет

$$\mathbf{P}(A) = 1 - (1 - p_1)^3 = 1 - \left[1 - \frac{1}{3}P - \frac{2}{3}(1 - p)P\right]^3.$$

Можно показать, что полученная вероятность больше, чем для способа 1).

3.31. Имеются три урны: в первой из них a белых шаров и b черных; во второй c белых шаров и d черных; в третьей — k белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из первой, второй или третьей урны.

Решение. Решаем задачу по формуле Байеса.

Гипотезы:

H_1 — выбор первой урны;

H_2 — выбор второй урны;

H_3 — выбор третьей урны.

Априори (до опыта) все гипотезы равновероятны:

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Наблюдалось событие A — появление белого шара. Находим условные вероятности:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{a}{a + b}; \quad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{c}{c + d}; \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 1.$$

По формуле Байеса вероятность того, что шар был вынут из первой урны:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3}\mathbf{P}(A|H_1)}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{\frac{a}{a + b}}{\frac{a}{a + b} + \frac{c}{c + d} + 1}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}; \quad \mathbf{P}(H_3|A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}.$$

3.32. Прибор состоит из двух узлов: работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1 , второго p_2 . Прибор испытывался в течение времени t , в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Решение. До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0 — оба узла исправны;

H_1 — первый узел отказал, а второй исправен;

H_2 — первый узел исправен, а второй отказал;

H_3 — оба узла отказали.

Вероятности гипотез:

$$\mathbf{P}(H_0) = p_1 p_2; \quad \mathbf{P}(H_1) = (1 - p_1) p_2; \quad \mathbf{P}(H_2) = p_1 (1 - p_2);$$

$$\mathbf{P}(H_3) = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Наблюдалось событие A — прибор отказал.

$$\mathbf{P}(A|H_0) = 0; \quad \mathbf{P}(A|H_1) = \mathbf{P}(A|H_2) = \mathbf{P}(A|H_3) = 1.$$

По формуле Байеса

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{(1 - p_1) p_2}{(1 - p_1) p_2 + p_1 (1 - p_2) + (1 - p_1)(1 - p_2)} = \frac{(1 - p_1) p_2}{1 - p_1 p_2}.$$

3.33. В условиях задачи 3.28 известно, что самолет приземлился благополучно. Найти вероятность того, что летчик пользовался приборами «слепой» посадки.

Решение. Если летчик пользовался приборами «слепой» посадки, то, значит, облачность была (гипотеза H_2). По данным задачи 3.28 находим

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\frac{k}{100} [P p_1 + (1 - P) p_1^*]}{\left(1 - \frac{k}{100}\right) p_1 + \frac{k}{100} [P p_1 + (1 - P) p_1^*]}.$$

3.34. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью. Если он заки-

дывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1 ; на втором — с вероятностью p_2 ; на третьем — с вероятностью p_3 . Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

$$\text{О т в е т. } \mathbf{P}(H_1|A) = \frac{p_1(1-p_1)^2}{\sum_{i=1}^3 p_i(1-p_i)^2}.$$

3.35. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделие с равной вероятностью осматривается одним из двух контролеров. Первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1 , второй — с вероятностью p_2 . Если в цехе изделие не забраковано, оно поступает на ОТК завода, где дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p_0 . Известно, что изделие забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: 1) первым контролером; 2) вторым контролером; 3) ОТК завода.

Р е ш е н и е. Априори возможны четыре гипотезы:

H_0 — изделие не забраковано;

H_1 — изделие забраковано 1-м контролером;

H_2 — изделие забраковано 2-м контролером;

H_3 — изделие забраковано ОТК завода.

Событие A — изделие забраковано. Гипотеза H_0 нам не нужна, так как $\mathbf{P}(A|H_0) = 0$;

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{pp_1}{2}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{pp_2}{2}; \quad \mathbf{P}(H_3) = p \left(1 - \frac{p_1 + p_2}{2} \right) p_0.$$

Вероятности гипотез после опыта:

$$1) \mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(H_3)} = \frac{p_1}{2p_0 + (p_1 + p_2)(1 - p_0)};$$

$$2) \mathbf{P}(H_2|A) = \frac{p_2}{2p_0 + (p_1 + p_2)(1 - p_0)};$$

$$3) \mathbf{P}(H_3|A) = \frac{p_0[2 - (p_1 + p_2)]}{2p_0 + (p_1 + p_2)(1 - p_0)}.$$

3.36. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных

вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен:
а) отлично; б) плохо.

Решение. Гипотезы:

H_1 — студент подготовлен отлично;

H_2 — студент подготовлен хорошо;

H_3 — студент подготовлен посредственно;

H_4 — студент подготовлен плохо.

До опыта:

$$\mathbf{P}(H_1) = 0,3; \mathbf{P}(H_2) = 0,4; \mathbf{P}(H_3) = 0,2; \mathbf{P}(H_4) = 0,1;$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 1; \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0,491;$$

$$\mathbf{P}(A|H_3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0,105; \mathbf{P}(A|H_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \approx 0,009.$$

После опыта

$$\text{а) } \mathbf{P}(H_1|A) = \frac{0,3 \cdot 1}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,491 + 0,2 \cdot 0,105 + 0,1 \cdot 0,009} \approx 0,58;$$

$$\text{б) } \mathbf{P}(H_4|A) = \frac{0,1 \cdot 0,009}{0,518} \approx 0,002.$$

3.37. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает полезный сигнал с помехой, а с вероятностью $(1 - p)$ — только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1 ; если только помеха — с вероятностью p_2 . Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

Ответ. $\frac{pp_1}{pp_1 + (1 - p)p_2}$.

3.38. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3 . Вероятности того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равны: для первой кассы P_1 , для второй P_2 , для третьей P_3 . Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

Решение. $\mathbf{P}(H_1) = p_1; \mathbf{P}(H_2) = p_2; \mathbf{P}(H_3) = p_3$.

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 1 - P_1; \mathbf{P}(A|H_2) = 1 - P_2; \mathbf{P}(A|H_3) = 1 - P_3.$$

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{p_1(1 - P_1)}{p_1(1 - P_1) + p_2(1 - P_2) + p_3(1 - P_3)}.$$

3.39. Производится один выстрел по плоскости, на которой расположены две цели: I и II (рис. 3.39). Вероятность попадания в цель I равна p_1 , в цель II — p_2 . После выстрела получено известие, что попадания в цель I не произошло. Какова теперь вероятность того, что произошло попадание в цель II?



Рис. 3.39

Решение. Гипотезы:

H_1 — попадание в цель I;

H_2 — попадание в цель II;

H_3 — не попадание ни в одну из целей.

Событие A — не попадание в цель I.

$$\mathbf{P}(H_1) = p_1; \mathbf{P}(H_2) = p_2; \mathbf{P}(H_3) = 1 - (p_1 + p_2).$$

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0; \mathbf{P}(A|H_2) = 1; \mathbf{P}(A|H_3) = 1.$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{p_2}{p_2 + 1 - (p_1 + p_2)} = \frac{p_2}{1 - p_1}.$$

Эту задачу можно решить и без формулы Бейеса:

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2 A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{p_2}{1 - p_1}.$$

3.40. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных, во второй — c белых и d черных. Выбирается наугад одна из урн и из нее вынимается один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что следующий шар, который вынут из той же урны, будет тоже белым.

Решение. H_1 — выбрана первая урна;

H_2 — выбрана вторая урна.

A — появление белого шара при первом вынимании.

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}};$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}}.$$

B — появление второго белого шара.

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(H_1|A) \mathbf{P}(B|H_1 A) + \mathbf{P}(H_2|A) \mathbf{P}(B|H_2 A).$$

Условная вероятность появления второго белого шара при условии, что была выбрана первая урна и из нее вынут белый шар:

$$\mathbf{P}(B|H_1A) = \frac{a-1}{a+b-1};$$

аналогично

$$\mathbf{P}(B|H_2A) = \frac{c-1}{c+d-1};$$

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}} \left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} \right].$$

3.41. Имеется группа в составе N стрелков. При одном выстреле в мишень i -й стрелок попадает в нее с вероятностью p_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Вызывается наугад один из стрелков. Произведя один выстрел по мишени, он попал в нее. Найти вероятность того, что при следующих двух выстрелах того же самого стрелка будет одно попадание и один промах.

Решение. A — попадание при первом выстреле;

B — одно попадание и один промах при двух последующих выстрелах.

Гипотезы H_i — вызван i -й стрелок ($i = 1, 2, \dots, N$).

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{p_i}{p}, \text{ где } p = \sum_{i=1}^N p_i;$$

$$\mathbf{P}(B|H_iA) = 2p_i(1-p_i);$$

$$\mathbf{P}(B|A) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(H_i|A) \mathbf{P}(B|H_iA) = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^N p_i^2(1-p_i).$$

ГЛАВА 4

ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ

Опыты называются *независимыми*, если вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления какого-то события A во всех опытах одна и та же, во втором случае она меняется от опыта к опыту.

Частная теорема о повторении опытов

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p появляется событие A , то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n), \quad (4.0.1)$$

где $q = 1 - p$.

Формула (4.0.1) выражает так называемое *биномиальное распределение вероятностей*.

Вероятность хотя бы одного появления события A при n независимых опытах в одинаковых условиях равна

$$R_{1,n} = 1 - q^n.$$

Общая теорема о повторении опытов

Если производится n независимых опытов в различных условиях, причем вероятность события A в i -м опыте равна p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A появится в этих опытах ровно m раз, равна коэффициенту при z^m в разложении по степеням z производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z), \text{ где } q_i = 1 - p_i.$$

Вероятность хотя бы одного появления события A при n независимых опытах в различных условиях равна

$$R_{1,n} = 1 - \prod_{i=1}^n q_i.$$

Для любых условий (как одинаковых, так и различных)

$$\sum_{m=0}^n P_{m,n} = 1.$$

Вероятность $R_{k,n}$ того, что при n опытах событие A появится не менее k раз, выражается формулой

$$R_{k,n} = \sum_{m=k}^n P_{m,n} \text{ или } R_{k,n} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,n}.$$

Теоремы о повторении опытов, как частная, так и общая, допускают обобщение на тот случай, когда в результате каждого опыта возможны не два исхода (A и $\bar{A}$), а несколько исходов.

Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем каждый опыт может иметь k исключающих друг друга исходов $A_1, A_2, \dots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$ $\left(\sum_{j=1}^k p_j = 1\right)$, то вероятность того, что в m_1 опытах появится событие A_1 , в m_2 опытах — событие A_2 и т.д., в m_k опытах — событие A_k $\left(\sum_{i=1}^k m_i = n\right)$ выражается формулой

$$P_{m_1, m_2, \dots, m_k; n} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \quad (4.0.2)$$

или

$$P_{m_1, m_2, \dots, m_k; n} = n! \prod_{j=1}^k \frac{p_j^{m_j}}{m_j!}.$$

Если условия опытов различны, т.е. в i -м опыте событие A_j имеет вероятность p_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$), то вероятность $P_{m_1, m_2, \dots, m_k; n}$ вычисляется как коэффициент при члене, содержащем $z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}$ в разложении по степеням $z_1, z_2, \dots, z_k$ производящей функции:

$$\varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_k) = \prod_{i=1}^n (p_{1i} z_1 + p_{2i} z_2 + \dots + p_{ki} z_k).$$

4.1. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p . Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t : а) откажет хотя бы один узел; б) отка-

жет ровно один узел; в) откажут ровно два узла; г) откажет не менее двух узлов.

Ответ. а) $R_{1,10} = 1 - q^{10}$, где $q = 1 - p$; б) $P_{1,10} = C_{10}^1 p q^9 = 10 p q^9$; в) $P_{2,10} = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45 p^2 q^8$; г) $R_{2,10} = 1 - q^{10} - 10 p q^9 = 1 - q^9 (q + 10 p)$.

4.2. Производится четыре независимых выстрела по некоторой цели. Вероятности попадания при разных выстрелах различны и равны: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$. Найти вероятности $P_{0,4}$; $P_{1,4}$; $P_{2,4}$; $P_{3,4}$; $P_{4,4}$ ни одного, одного, двух, трех, четырех попаданий; вероятность $R_{1,4}$ хотя бы одного попадания; вероятность $R_{2,4}$ не менее двух попаданий.

Р е ш е н и е. Производящая функция

$$\varphi_4(z) = (0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, имеем

$$\varphi_4(z) \approx 0,302 + 0,460z + 0,205z^2 + 0,031z^3 + 0,002z^4;$$

откуда

$$P_{0,4} = 0,302; P_{1,4} = 0,460; P_{2,4} = 0,205;$$

$$P_{3,4} = 0,031; P_{4,4} = 0,002.$$

$$R_{1,4} = 1 - P_{0,4} = 0,698; R_{2,4} = 1 - P_{0,4} - P_{1,4} = 0,238.$$

4.3. Производится четыре независимых выстрела в одинаковых условиях, причем вероятность попадания при одном выстреле p есть средняя из четырех вероятностей предыдущей задачи:

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = 0,25.$$

Найти вероятности

$$P_{0,4}; P_{1,4}; P_{2,4}; P_{3,4}; P_{4,4}; R_{1,4}; R_{2,4}.$$

Ответ. $P_{i,4} = C_4^i p^i q^{4-i}$; $P_{0,4} = 0,314$; $P_{1,4} = 0,422$; $P_{2,4} = 0,212$; $P_{3,4} = 0,048$; $P_{4,4} = 0,004$; $R_{1,4} = 0,686$; $R_{2,4} = 0,264$.

4.4*. По некоторой цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i -м выстреле равна p_i ($i = 1, 2, \dots, n$). При вычислении вероятности хотя бы одного попадания различные вероятности p_i заменяют их средней арифметической:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}.$$

Увеличится или уменьшится от такого осреднения вероятность хотя бы одного попадания?

Решение. Точное значение $R_{1,n}$:

$$R_{1,n} = 1 - \prod_{i=1}^n q_i, \text{ где } q_i = 1 - p_i.$$

Приближенное (по осредненной вероятности):

$$R_{1,n}^* = 1 - (1 - p^*)^n = 1 - \left(\frac{n - \sum_{i=1}^n p_i}{n} \right)^n = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} \right)^n.$$

Требуется сравнить величины

$$\prod_{i=1}^n q_i \text{ и } \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} \right)^n.$$

Известно, что среднее геометрическое не равных между собой положительных величин меньше, чем их среднее арифметическое, следовательно,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n q_i} < \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} \text{ и } \prod_{i=1}^n q_i < \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} \right)^n,$$

значит, $R_{1,4} > R_{1,n}^*$; от примененного осреднения вероятность хотя бы одного попадания уменьшится.

4.5. Завод изготавливает изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе — с вероятностью 0,95; третье — с вероятностью 0,8 и четвертое — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно:

A — все четыре испытания;

B — ровно два испытания (из четырех);

C — не менее двух испытаний (из четырех).

Решение.

$$\varphi_4(z) = 0,00015 + 0,00565z + 0,06965z^2 + \\ + 0,34315z^3 + 0,58140z^4;$$

$$\mathbf{P}(A) = P_{4,4} = 0,58140; \quad \mathbf{P}(B) = P_{2,4} = 0,06965;$$

$$\mathbf{P}(C) = R_{2,4} = 1 - P_{0,4} - P_{1,4} = 0,99420.$$

4.6. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p . Для контроля из продукции завода выбирается n изделий. Найти вероятность следующих событий:

A — ни в одном из изделий не будет обнаружено дефекта;

B — среди n изделий ровно в двух будет обнаружен дефект;

C — среди n изделий не менее чем в двух будет обнаружен дефект.

Решение. Вероятность того, что в одном наугад взятом изделии будет обнаружен дефект, равна pr .

$$\mathbf{P}(A) = P_{0,n} = (1 - pr)^n;$$

$$\mathbf{P}(B) = P_{2,n} = C_n^2 (pr)^2 (1 - pr)^{n-2};$$

$$\mathbf{P}(C) = 1 - P_{0,n} - P_{1,n} = 1 - (1 - pr)^{n-1} [(1 - pr) + npr].$$

4.7. При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено $2k$ новых электролампочек. Каждая электролампочка в течение года перегорает с вероятностью r . Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включенных лампочек придется заменить новыми.

$$\text{О т в е т. } \mathbf{P}(A) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_{m,2k} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_{2k}^m r^m (1 - r)^{2k-m}.$$

4.8. Система противовоздушной обороны охраняет территорию от воздушного налета, в котором принимает участие N самолетов. Для поражения каждого из самолетов выделяется два истребителя-перехватчика; каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью p . Найти вероятность того, что во время воздушного налета будет поражено: A — ровно три самолета; B — не менее двух самолетов.

$$\text{О т в е т. } \mathbf{P}(A) = C_N^3 [1 - (1 - p)^2]^3 (1 - p)^{2(N-3)};$$

$$\mathbf{P}(B) = 1 - (1 - p)^{2N} - N(1 - p)^{2(N-1)} [1 - (1 - p)^2].$$

4.9. По самолету производится n независимых выстрелов; каждый из выстрелов с вероятностью p_1 попадает в зону, где он поражает самолет немедленно; с вероятностью p_2 попадает в топливный бак и с вероятностью p_3 не попадает в самолет вообще. Снаряд, поразивший топливный бак, оставляет в нем пробоину, через

которую вытекает k литров горючего в час. Потеряв M литров горючего, самолет становится небоеспособным. Найти вероятность того, что через час после обстрела самолет не будет боеспособен.

Р е ш е н и е. В результате каждого выстрела может произойти одно из трех событий:

A_1 — самолет поражен;

A_2 — пробоина в баке;

A_3 — нет попадания.

Вероятности этих событий p_1, p_2, p_3 . Вероятность того, что в результате n выстрелов событие A_1 произойдет m_1 раз, A_2 — m_2 раз и A_3 — m_3 раз, равна

$$P_{m_1, m_2, m_3, n} = n! \prod_{j=1}^3 \frac{p_j^{m_j}}{m_j!}.$$

Самолет может быть поражен двумя способами: или произошло хотя бы одно попадание в зону безусловного поражения, или не произошло ни одного попадания в эту зону, но зато самолет выведен из строя за счет вытекания горючего (для чего должно быть $m_2 k > M$). Обозначая $\left[\frac{M}{k} \right] = l$ наибольшее целое число, содержащееся в M/k («целая часть» от числа M/k), находим вероятность поражения самолета:

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)^n + \sum_{m_2=l+1}^n \frac{n!}{m_2! (n - m_2)!} p_2^{m_2} p_3^{n-m_2}.$$

4.10. Производится три опыта, каждый из которых заканчивается результатом A_1 с вероятностью p_{1i} , A_2 — с вероятностью p_{2i} , A_3 — с вероятностью p_{3i} и A_4 — с вероятностью p_{4i} ($i = 1, 2, 3$ — номер опыта; $\sum_{j=1}^4 p_{ji} = 1$). Требуется найти вероятность p того, что в

результате этих трех опытов событие A_1 произойдет один раз, A_2 — два раза, а A_3 и A_4 не произойдут совсем.

Написать производящую функцию и указать, коэффициент при каком члене ее разложения будет равен искомой вероятности.

Ответ. $p = p_{11}p_{22}p_{33} + p_{21}p_{12}p_{33} + p_{21}p_{22}p_{13}$. Производящая функция

$$\varphi_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = \prod_{i=1}^3 (p_{1i}z_1 + p_{2i}z_2 + p_{3i}z_3 + p_{4i}z_4);$$

вероятность p представляет собой коэффициент при $z_1 z_2^2$ в разложении $\varphi_3(z_1, z_2, z_3, z_4)$ по степеням аргументов.

4.11. Первый прибор состоит из n_1 узлов, второй из n_2 узлов. Каждый из приборов работал в течение времени t . За это время каждый из узлов первого прибора выходит из строя, независимо от других, с вероятностью q_1 , второго — с вероятностью q_2 . Найти вероятность p того, что за время t в первом приборе выйдет из строя m_1 узлов, а во втором — m_2 узлов.

Ответ. $p = C_{n_1}^{m_1} q_1^{m_1} (1 - q_1)^{n_1 - m_1} C_{n_2}^{m_2} q_2^{m_2} (1 - q_2)^{n_2 - m_2}$.

4.12*. В условиях задачи 4.11 найти вероятность того, что в первом приборе выйдет из строя больше узлов, чем во втором.

Решение. Вероятность события B — в первом приборе вышло из строя больше узлов, чем во втором — находим по формуле полной вероятности с гипотезами H_i — в первом приборе вышло из строя i узлов ($i = 1, 2, \dots, n_1$).

$$\mathbf{P}(H_i) = P_{i, n_1}^{(1)} = C_{n_1}^i q_1^i (1 - q_1)^{n_1 - i};$$

$$\mathbf{P}(B|H_i) = \sum_{j=0}^{i-1} P_{j, n_2}^{(2)} = \sum_{j=0}^{i-1} C_{n_2}^j q_2^j (1 - q_2)^{n_2 - j} \quad (i \leq n_2 + 1),$$

$$\mathbf{P}(B|H_i) = 1 \quad (i \geq n_2 + 1).$$

Если $n_1 \leq n_2 + 1$, то

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n_1} C_{n_1}^i q_1^i (1 - q_1)^{n_1 - i} \sum_{j=0}^{i-1} C_{n_2}^j q_2^j (1 - q_2)^{n_2 - j};$$

если $n_1 > n_2 + 1$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) = & \sum_{i=1}^{n_2+1} C_{n_1}^i q_1^i (1 - q_1)^{n_1 - i} \sum_{j=0}^{i-1} C_{n_2}^j q_2^j (1 - q_2)^{n_2 - j} + \\ & + \sum_{i=n_2+2}^{n_1} C_{n_1}^i q_1^i (1 - q_1)^{n_1 - i}. \end{aligned}$$

4.13. Монета бросается m раз. Найти вероятность p того, что герб появится не менее k раз и не более l раз ($k \leq l \leq m$).

Решение. $p = \sum_{i=k}^l P_{i, m} = \sum_{i=k}^l C_m^i \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{i=k}^l C_m^i$.

4.14. Прибор, состоящий из k узлов, работал в течение времени t . Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за время t равна p . По истечении времени t прибор выключается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ . Найти вероятность P

того, что через время 2τ после выключения прибор будет готов для нормальной работы.

Решение. Для этого нужно, чтобы за время t вышло из строя не более двух узлов:

$$P = p^k + k(1-p)p^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^2 p^{k-2}.$$

4.15. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:
1) три партии из четырех или пять из восьми? 2) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение.

$$1) P_{3,4} = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}; P_{5,8} = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}; P_{3,4} > P_{5,8}.$$

Три партии из четырех выиграть более вероятно.

$$2) R_{3,4} = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16};$$

$$R_{5,8} = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{93}{256}; R_{5,8} > R_{3,4}.$$

Не менее пяти партий из восьми выиграть более вероятно.

4.16. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,4 — блондином и с вероятностью 0,1 — рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

A — в составе группы не меньше четырех блондинов;

B — в составе группы хотя бы один рыжий;

C — в составе группы равное число блондинов и шатенов.

Решение.

$$P(A) = 1 - [0,6^6 + 6 \cdot 0,4 \cdot 0,6^5 + 15 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4] \approx 0,455;$$

$$P(B) = 1 - (1 - 0,1)^6 \approx 0,468; C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3,$$

где C_0 — в группе нет ни блондинов, ни шатенов;

C_1 — в группе по одному блондину и шатену, а остальные — ни то, ни другое;

C_2 — в группе по два блондина и шатена, а остальные — ни то, ни другое;

C_3 — в группе по три блондина и шатена.

$$P(C_0) = (1 - 0,7)^6 \approx 0,0007;$$

$$P(C_1) = \frac{6!}{1!1!4!} 0,3 \cdot 0,4(1 - 0,7)^4 \approx 0,0292;$$

$$P(C_2) = \frac{6!}{2!2!2!} 0,3^2 \cdot 0,4^2(1 - 0,7)^2 \approx 0,1166;$$

$$P(C_3) = \frac{6!}{3!3!} 0,3^3 \cdot 0,4^3 \approx 0,0346; \quad P(C) \approx 0,181.$$

4.17. Мишень состоит из яблока и двух колец. При одном выстреле вероятность попадания в яблоко равна p_0 , в первое кольцо — p_1 , во второе — p_2 ; вероятность не попадания в мишень p_3 . По мишени произведено пять выстрелов. Найти вероятность того, что они дадут два попадания в яблоко и одно — во второе кольцо.

$$\text{О т в е т. } P_{2, 0, 1, 2; 5} = \frac{5!}{2!0!1!2!} p_0^2 p_1^0 p_1^1 p_3^2 = 30 p_0^2 p_2 p_3^2.$$

4.18. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда — с вероятностью 0,7; если три снаряда — с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

Р е ш е н и е. Гипотезы H_i — в цель попало i снарядов ($i = 1, 2, 3$);

$$P(H_1) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432;$$

$$P(H_2) = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288;$$

$$P(H_3) = 0,4^3 = 0,064.$$

Событие A — поражение цели,

$$P(A) = 0,432 \cdot 0,3 + 0,288 \cdot 0,7 + 0,064 \cdot 0,9 \approx 0,389.$$

4.19. Производится стрельба по цели n независимыми выстрелами. При одном выстреле попадание в цель происходит с вероятностью p . Если в цель попало m снарядов ($m = 1, 2, \dots, n$), то условная вероятность поражения цели выражается формулой

$$P(A|m) = 1 - s^m, \text{ где } 0 < s < 1.$$

Определить полную вероятность поражения цели.

Р е ш е н и е. Гипотезы H_m — попало m снарядов ($m = 1, \dots, n$).

$$P(A) = \sum_{m=1}^n P(H_m) P(A|m) = \sum_{m=1}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} (1-s^m).$$

Упростим это выражение; так как $1 - s^0 = 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} (1-s^m) = \\ &= \sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - \sum_{m=0}^n C_n^m (ps)^m (1-p)^{n-m}, \end{aligned}$$

но

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = 1;$$

далее, по формуле бинома

$$\sum_{m=0}^n C_n^m (ps)^m (1-p)^{n-m} = [ps + 1 - p]^n = [1 - p(1-s)]^n;$$

поэтому

$$\mathbf{P}(A) = 1 - [1 - p(1-s)]^n.$$

Этот же результат получается проще, если заметить, что $p(1-s)$ есть вероятность поражения цели при одном выстреле и что из формулы $\mathbf{P}(A|m) = 1 - s^m$ следует независимость поражений цели при любом заданном числе попаданий.

4.20. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одна от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p . Каждая попавшая в корабль торпеда с одинаковой вероятностью попадает в любой из k отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Торпеда, попавшая в отсек, приводит к его заполнению водой. Корабль идет ко дну, если водой заполнено не менее двух отсеков. Найти вероятность того, что корабль будет затоплен.

Решение. Эту задачу удобно решать по формуле полной вероятности с гипотезами H_m — в корабль попало m торпед ($m = 1, 2, \dots, n$).

$$\mathbf{P}(H_m) = P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Найдем $\mathbf{P}(A|H_m)$. По условию $\mathbf{P}(A|H_1) = 0$. При $m \geq 2$ попавших торпед корабль не затопляется, только если все торпеды попали в один отсек; следовательно,

$$\mathbf{P}(A|H_m) = 1 - k \left(\frac{1}{k} \right)^m = 1 - \frac{1}{k^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

Полная вероятность потопления корабля:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{m=2}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left[1 - \frac{1}{k^{m-1}} \right].$$

4.21. В течение времени t эксплуатируется N приборов. Каждый из приборов имеет надежность p и выходит из строя независимо от других. Найти вероятность $P(A)$ того, что мастер, вызванный по окончании времени t для ремонта неисправных приборов, не справится со своей задачей за время τ , если на ремонт каждого из неисправных приборов ему требуется время τ_0 .

Решение. Событие A равносильно тому, что число вышедших из строя приборов больше чем $l = \left\lfloor \frac{\tau}{\tau_0} \right\rfloor$, где $\left\lfloor \frac{\tau}{\tau_0} \right\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, заключенное в $\frac{\tau}{\tau_0}$.

$$P(A) = \sum_{m=l+1}^N C_N^m (1-p)^m p^{N-m}.$$

4.22. Имеется N неисправных приборов, которые подвергаются испытаниям (тестам) с целью локализации неисправности. Каждый тест независимо от других с вероятностью p приводит к локализации неисправности. Если неисправность локализована, прибор передается на ремонтную станцию, а обследованию подвергаются другие приборы. Если во всех N приборах неисправность локализована, то тесты прекращаются. Всего имеется возможность произвести n тестов ($n > N$). Найти вероятность того, что неисправности во всех N приборах будут локализованы.

Решение. $\bar{A}$ — все неисправности локализованы. Противоположное событие A означает, что при n опытах (тестах) событие, состоящее в том, что неисправность локализована, появилось менее N раз.

$$P(A) = 1 - \sum_{m=0}^{N-1} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

или

$$P(A) = \sum_{m=N}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

4.23. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в результате n тестов среди N неисправных приборов останется не менее k приборов с нелокализованными неисправностями ($k < N$).

Решение. Задача равносильна следующей: найти вероятность того, что при n тестах будут локализованы неисправности не больше чем в $N - k$ приборах.

$$P(A) = \sum_{m=0}^{N-k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

4.24*. Происходит соревнование между k стрелками; каждый из них делает n выстрелов по своей мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для i -го стрелка равна p_i ($i = 1, \dots, n$). Выигрывает соревнование тот из стрелков, который будет иметь больше попаданий, чем остальные. Найти вероятность того, что среди соревнующихся стрелков будет один (только один), выигравший соревнование.

Решение. Таким одним может быть любой из k стрелков. Найдем вероятность того, что i -й стрелок выиграет соревнование (событие A_i). Это событие может произойти следующими способами:

$A_i^{(m)}$ — i -й стрелок получил ровно m попаданий, а каждый из остальных — не более чем по $m - 1$ ($m = 1, \dots, n$).

Вероятность того, что i -й стрелок получил m попаданий, равна $P_{m,n}(i) = C_n^m p_i^m q_i^{n-m}$, где $q_i = 1 - p_i$. Обозначим вероятность того, что j -й стрелок получил не более $m - 1$ попаданий, через $T_m(j)$:

$$T_m(j) = \sum_{s=0}^{m-1} C_n^s p_j^s q_j^{n-s} \quad (m \geq 1).$$

Тогда вероятность того, что все остальные стрелки, кроме i -го, получили не более $m - 1$ попаданий, равна

$$T_m(1)T_m(2)\dots T_m(i-1)T_m(i+1)\dots T_m(k) = \prod_{j \neq i} T_m(j).$$

Суммируя полученные вероятности для всех значений m , получим вероятность того, что i -й стрелок в единственном числе выигрывает соревнование:

$$P(A_i) = \sum_{m=1}^n P_{m,n}(i) \prod_{j \neq i} T_m(j) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Суммируя эти вероятности для всех стрелков, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n P_{m,n}(i) \prod_{j \neq i} T_m(j).$$

4.25. В урне имеется k шаров; каждый из них с вероятностью $1/2$ (независимо от других) может оказаться белым или черным. Из урны вынимается n раз по одному шару, причем вынутый шар

каждый раз возвращается обратно, и шары перемешиваются. Среди вынутых n шаров m оказались белыми ($0 < m < n$). Определить вероятность того, что среди k шаров урны ровно l белых.

Решение. Решаем задачу по формуле Байеса. Гипотезы: H_l — в урне l белых шаров и $k - l$ черных ($l = 1, \dots, k - 1$). До опыта $P(H_l) = C_k^l \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Событие A — среди n вынутых шаров оказалось ровно m белых.

$$P(A|H_l) = C_n^m \left(\frac{l}{k}\right)^m \left(1 - \frac{l}{k}\right)^{n-m}.$$

После опыта вероятность гипотезы H_l :

$$P(H_l|A) = \frac{C_k^l \left(\frac{l}{k}\right)^m \left(1 - \frac{l}{k}\right)^{n-m}}{\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i \left(\frac{i}{k}\right)^m \left(1 - \frac{i}{k}\right)^{n-m}} = \frac{C_k^l l^m (k-l)^{n-m}}{\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i i^m (k-i)^{n-m}}.$$

4.26. Производится стрельба пятью снарядами по группе, состоящей из трех целей. Обстрел ведется в следующем порядке: сначала обстреливается первая цель и огонь по ней ведется до тех пор, пока она не будет поражена или не кончатся все пять снарядов. Если первая цель поражена, огонь переносится на вторую, и т.д. Вероятность поражения цели после одного выстрела равна p . Найти вероятности: P_0, P_1, P_2, P_3 того, что будет поражено 0 целей, 1 цель, 2 цели, 3 цели в составе группы.

Решение. Для того чтобы не было поражено ни одной цели, нужно, чтобы ни один снаряд не поразил цели, по которой он направлен: $P_0 = (1 - p)^5$.

Чтобы была поражена ровно одна цель, нужно, чтобы из пяти выстрелов только один поразил цель, по которой он направлен, а остальные — не поразили: $P_1 = C_5^1 p^1 (1 - p)^4 = 5p (1 - p)^4$.

Аналогично $P_2 = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = 10p^2 (1 - p)^3$.

Так как события, вероятности которых обозначены P_0, P_1, P_2, P_3 , несовместны и образуют полную группу, то

$$P_3 = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - (1 - p)^3 (1 + 3p + 6p^2).$$

4.27. Та же задача, но число целей N , число выстрелов; n ($n > N$) найти вероятности $P_0, P_1, \dots, P_N$ того, что будут поражены 0 целей, 1 цель, ..., N целей.

Ответ. $P_0 = (1 - p)^n$; $P_1 = np(1 - p)^{n-1}$; ...;

$$P_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k < N); \quad P_N = 1 - \sum_{k=0}^{N-1} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

4.28. В условиях предыдущей задачи обстрел целей ведется не в порядке номеров, а в случайном порядке, причем каждый выстрел случайным образом направляется на любую до сих пор не пораженную цель. Найти $P_0, P_1, \dots, P_N$.

Ответ. Тот же, что и в задаче 4.27.

4.29*. Производится стрельба n снарядами по группе из N целей ($N < n$). Каждый выстрел с одинаковой вероятностью направляется на любую из N целей (безотносительно к тому, поражена она предыдущими выстрелами или нет). Каждый выстрел срывает непораженную цель, по которой он направлен, с вероятностью p . Снаряд, выпущенный по уже пораженной цели, не меняет ее состояния. Найти вероятность того, что в составе группы будет поражено k целей ($k = 0, 1, \dots, N$).

Решение. Вероятность P_k поражения k целей из N найдем по формуле полной вероятности. Введем гипотезу $(n_1, n_2, \dots, n_N)$: по первой цели пришлось n_1 выстрелов, по второй n_2 , ..., по N -й — n_N , причем $\sum_{l=1}^N n_l = n$.

При этой гипотезе условная вероятность $P_{k|n_1, n_2, \dots, n_N}$ поражения k целей из N равна коэффициенту при z^k в разложении по степеням z производящей функции

$$\varphi_N(z; n_1, n_2, \dots, n_N) = \prod_{l=1}^N (q_l + p_l z),$$

где $p_l = 1 - (1 - p)^{n_l}$ есть вероятность поражения l -й цели за n_l выстрелов, $q_l = 1 - p_l = (1 - p)^{n_l}$.

Вероятность гипотезы $(n_1, n_2, \dots, n_N)$ находим тем же способом, каким находили вероятность того, что n шариков распределяется определенным образом по N лункам (см. задачу 1.45):

$$P(n_1, n_2, \dots, n_N) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_N!} \frac{1}{N^n}.$$

Вероятность P_k по формуле полной вероятности равна

$$P_k = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_N!} \frac{1}{N^n} P_{k|n_1, n_2, \dots, n_N},$$

где сумма распространяется на все возможные способы разбиения числа n на N слагаемых: $n_1, n_2, \dots, n_N$ ($0 \leq n_l \leq n$; $l = 1, \dots, N$).

4.30. В условиях задачи 4.29 написать формулы для P_k при $n = 5, N = 2$.

$$\text{Ответ. } P_0 = q^5; P_1 = \frac{2}{2^5} [(1 - q)^5 + 5q(1 - 2q^4 + q^3) +$$

$$+ 10q^2(1 - 2q^3 + q)] = \frac{1}{16} [(1 + q)^5 - 32q^5];$$

$$P_2 = \frac{2}{2^5} [5(1 - q)(1 - q^4) + 10(1 - q^2)(1 - q^3)]; q = 1 - p.$$

4.31. Имеется N лунок, по которым случайным образом разбираются M шариков. Найти вероятность p того, что в данную (вполне определенную, например, первую) лунку попадет ровно k шариков.

Решение. Рассмотрим M бросаний шариков как M независимых опытов, каждый из которых с вероятностью $1/N$ заканчивается попаданием в данную лунку; тогда

$$p = C_M^k \left(\frac{1}{N} \right)^k \left(\frac{N-1}{N} \right)^{M-k}.$$

ГЛАВА 5

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной (прерывной) случайной величиной называется случайная величина, принимающая отделенные друг от друга значения, которые можно перенумеровать.

Непрерывной случайной величиной (в широком смысле слова) называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какой-то промежуток.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Закон распределения может иметь разные формы.

Ряд распределения

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные (различные) значения этой случайной величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

, где $p_i = P(X = x_i)$; $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Графическое изображение ряда распределения (рис. 5.0.1) называется *многоугольником распределения*.

Функция распределения

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x :

$$F(x) = P(X < x).$$

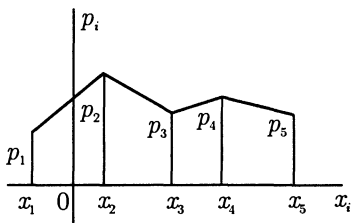


Рис. 5.0.1

Функция $F(x)$ есть неубывающая функция; $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева.

Если функция распределения $F(x)$ везде непрерывна и имеет производную, случайная величина называется *непрерывной в узком смысле слова* или просто *непрерывной*.

Если функция распределения $F(x)$ на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы, случайная величина называется *смешанной*.

Плотность распределения

Плотностью распределения непрерывной (в узком смысле слова) случайной величины называется функция $f(x) = F'(x)$.

Плотность распределения любой случайной величины неотрицательна, $f(x) \geq 0$, и обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

График плотности $f(x)$ называется *кривой распределения*.

Элементом вероятности для случайной величины X называется величина $f(x) dx$, приблизительно выражающая вероятность попадания случайной точки X в элементарный отрезок dx , примыкающий к точке x .

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$F(x) = - \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β (включая α) выражается формулой

$$\mathbf{P}(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Если случайная величина x непрерывна, то $\mathbf{P}(X = \alpha) = 0$ и

$$\mathbf{P}(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Вероятность попадания на участок от α до β для непрерывной случайной величины выражается формулой

$$\mathbf{P}(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad \text{— для дискретной случайной величины;}$$

$$\mathbf{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad \text{— для непрерывной случайной величины.}$$

Для смешанной случайной величины математическое ожидание выражается суммой двух слагаемых:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_i x_i p_i + \int_{(n)} x F'(x) dx,$$

где сумма распространяется на все точки разрыва функции распределения, а интеграл — на все участки ее непрерывности.

В некоторых случаях $\mathbf{M}[X]$ будем обозначать строчной буквой с индексом

$$\mathbf{M}[X] = m_x.$$

Центрированной случайной величиной называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием:

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[\dot{X}^2].$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i \quad \text{— для дискретной случайной величины;}$$

$$\mathbf{D}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \quad \text{— для непрерывной случайной величины;}$$

$$\mathbf{D}[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i + \int_{(n)} (x - m_x)^2 F'(x) dx \quad \text{— для смешанной случайной величины.}$$

Дисперсия $\mathbf{D}[X]$ кратко обозначается D_x .

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Начальным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k[X] = \mathbf{M}[X^k].$$

Для дискретной, непрерывной и смешанной случайной величины $\alpha_k[X]$ вычисляется соответственно по формулам

$$\alpha_k[X] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i, \quad \alpha_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx,$$

$$\alpha_k[X] = \sum_i x_i^k p_i + \int_{(H)} x^k F'(x) dx.$$

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени центрированной случайной величины $\check{X}$:

$$\mu_k[X] = \mathbf{M}[\check{X}^k].$$

Вычислительные формулы для $\mu_k[X]$:

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i,$$

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx,$$

$$\mu_k[X] = \sum_i (x_i - m_x)^k p_i + \int_{(H)} (x - m_x)^k F'(x) dx.$$

Математическое ожидание случайной величины X есть ее первый начальный момент, а дисперсия — второй центральный:

$$\mathbf{M}[X] = \alpha_1[X]; \quad \mathbf{D}[X] = \mu_2[X].$$

Второй и третий центральные моменты выражаются через начальные формулами

$$\mu_2[X] = \alpha_2[X] - m_x^2;$$

$$\mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3m_x \alpha_2[X] + 2m_x^3.$$

Дискретная случайная величина X называется *распределенной по биномиальному закону*, если ее возможные значения $0, 1, \dots, n$, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой

$$\mathbf{P}(X = m) = P_{m, n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где

$$0 < p < 1; \quad q = 1 - p.$$

Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по биномиальному закону, равно $m_x = np$, а дисперсия $D_x = npq$.

Дискретная случайная величина X называется *распределенной по закону Пуассона*, если ее возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятность того, что $X = m$, выражается формулой

$$P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a > 0$ — параметр закона Пуассона.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по закону Пуассона, равны параметру закона a : $m_x = a$; $D_x = a$.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

Плотностью (интенсивностью) потока называется среднее число событий в единицу времени.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность появления на любом участке времени того или иного числа событий не зависит от того, какое число событий попало на другие, не пересекающиеся с данным участки.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность появления на элементарном участке Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события.

Ординарный поток событий без последействия называется *пуассоновским*.

Если события образуют пуассоновский поток, то число событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0 + \tau)$, распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt, \quad \lambda(t) — \text{плотность потока.}$$

Если $\lambda(t) = \text{const}$, пуассоновский поток называется «стационарным пуассоновским» или *простейшим* потоком.

Для простейшего потока число событий, попадающих на любой участок длины τ , распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$.

Расстояние T между двумя соседними событиями в простейшем потоке есть непрерывная случайная величина, распределенная по показательному закону, с плотностью

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Для случайной величины T , распределенной по показательному закону, $m_t = \frac{1}{\lambda}$; $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$.

Случайным полем точек называется совокупность точек, случайным образом распределенных на плоскости (в пространстве).

Плотностью поля называется среднее число точек, попадающих на единицу площади (объема).

Если плотность поля постоянна, оно называется *равномерным*.

Поле точек называется *пуассоновским*, если оно обладает свойствами:

1. Вероятность появления того или другого числа точек в любой области плоскости (пространства) не зависит от того, сколько точек попало в любые области, не пересекающиеся с данной;

2. Вероятность попадания в элементарную область двух или более точек пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной точки.

Число точек пуассоновского поля, попадающих в любую область S плоскости (пространства), распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где a — математическое ожидание числа точек, попадающих в область S .

Если поле равномерно и имеет плотность λ , то $a = s\lambda$, где s — площадь (объем) области S .

Если поле неравномерно, то

$$a = \iint_{(S)} \lambda(x, y) dx dy \text{ (для плоскости),}$$

$$a = \iiint_{(S)} \lambda(x, y, z) dx dy dz \text{ (для пространства).}$$

Для вычислений, связанных с распределением Пуассона, применяют таблицы функций $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ и $R(m, a) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a}$. Таблица функции $Q(m, a) = 1 - R(m, a)$ дана в прил. 1 (табл. 1).

Непрерывная случайная величина X называется *равномерно распределенной* в интервале (α, β) , если ее плотность распределения в этом интервале постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } x \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{при } x \notin (\alpha, \beta), \end{cases}$$

где запись $x \in (\alpha, \beta)$ означает: « x лежит на участке от α до β », а $x \notin (\alpha, \beta)$ означает: « x не лежит на участке от α до β ».

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной равномерно на участке (α, β) , равны $m_x = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $D_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$.

Непрерывная случайная величина X называется *распределенной по нормальному закону*, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по нормальному закону, равно $m_x = m$, а дисперсия $D_x = \sigma^2$.

Вероятность попадания случайной величины X , распределенной по нормальному закону, в интервал (α, β) выражается формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — табулированная функция (см. прил. 1 табл. 2).

5.1. Может ли при каком-либо значении аргумента быть:

- 1) Функция распределения больше единицы?
- 2) Плотность распределения больше единицы?
- 3) Функция распределения отрицательной?
- 4) Плотность распределения отрицательной?

О т в е т: 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет.

5.2. Какова размерность: 1) функции распределения; 2) плотности распределения; 3) математического ожидания; 4) дисперсии; 5) среднего квадратического отклонения; 6) третьего начального момента?

О т в е т. 1) Безразмерна; 2) обратная размерности случайной величины; 3) размерность случайной величины; 4) размерность квадрата случайной величины; 5) размерность случайной величины; 6) размерность куба случайной величины.

5.3. Рассматривая неслучайную величину a как частный вид случайной, построить для нее функцию распределения, найти для нее математическое ожидание, дисперсию и третий начальный момент.

О т в е т. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$ $\mathbf{M}[a] = a$; $\mathbf{D}[a] = 0$; $\alpha_3[a] = a^3$.

5.4. Дан график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X (рис. 5.4). Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак величины на обратный?

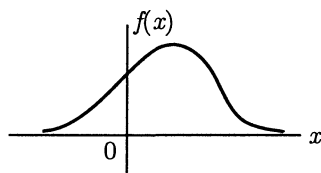


Рис. 5.4

О т в е т. а) Сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс удвоится, а по оси ординат уменьшится вдвое; г) график переменится на свое зеркальное отражение относительно оси ординат.

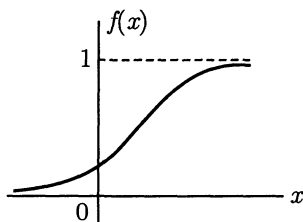


Рис. 5.5

5.5. Дан график функции распределения $F(x)$ случайной величины X (рис. 5.5). Как изменится этот график, если: а) прибавить к случайной величине 1; б) вычесть из случайной величины 2; в) умножить случайную величину на 2; г) изменить знак случайной величины на обратный?

О т в е т. а) Сдвинется влево на 1; б) сдвинется вправо на 2; в) масштаб по оси абсцисс удвоится; г) график нужно зеркально отразить относительно оси

ординат и каждую ординату вычесть из единицы.

5.6. К случайной величине X прибавили постоянную, неслучайную величину a . Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

О т в е т. 1) Прибавится слагаемое a ; 2) не изменится; 3) не изменится; 4) прибавится слагаемое $a^2 + 2am_x$ (так как $\alpha_2[X] = D_x + m_x^2$).

5.7. Случайную величину X умножили на a . Как от этого изменятся ее характеристики: 1) математическое ожидание; 2) дисперсия; 3) среднее квадратическое отклонение; 4) второй начальный момент?

О т в е т. 1) Умножится на a ; 2) умножится на a^2 ; 3) умножится на $|a|$; 4) умножится на a^2 .

5.8. Производится один опыт, в результате которого может появиться или не появиться событие A ; вероятность события A равна p . Рассматривается случайная величина X , равная единице, если событие A произошло, и нулю, если не произошло (число появлений события A в данном опыте). Построить ряд распределения случайной величины X и ее функцию распределения, найти ее м. о., дисперсию, второй начальный момент, третий центральный момент.

О т в е т. Ряд распределения:

x_i	0	1
p_i	q	p

, где $q = 1 - p$.

Функция распределения $F(x)$ представлена на рис. 5.8.

$$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$\alpha_2[X] = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p;$$

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq;$$

$$\mu_3[X] = (0 - p)^3 q + (1 - p)^3 p = pq(q - p).$$

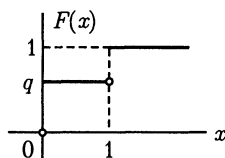


Рис. 5.8

5.9. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X — число появлений события A в трех опытах.

Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X . Найти ее математическое ожидание m_x , дисперсию D_x , среднее квадратическое отклонение σ_x и третий центральный момент $\mu_3[X]$.

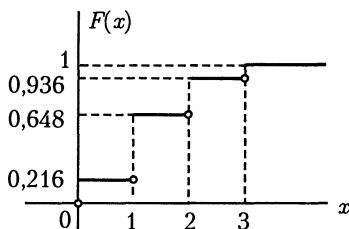


Рис. 5.9

Ответ. Ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Функция распределения показана на рис. 5.9; $m_x = 1,2$; $D_x = 0,72$; $\sigma_x = 0,85$; $\mu_3[X] = 0,144$.

5.10. Монета подбрасывается n раз; рассматривается случайная величина X — число выпавших гербов. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти ее характеристики: m_x , D_x , σ_x , $\mu_3[X]$.

Ответ.

x_m	0	1	...	m	...	n
p_m	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$C_n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$	...	$C_n^m \left(\frac{1}{2}\right)^n$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$m_x = \frac{n}{2}$; $D_x = \frac{n}{4}$; $\sigma_x = \frac{\sqrt{n}}{2}$; $\mu_3[X] = 0$ (так как распределение симметрично относительно $m_x = \frac{n}{2}$).

5.11. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A . Написать ряд распределения случайной величины X — числа появлений противо-

положного A события $\bar{A}$ в n опытах — и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

О т в е т.

x_m	0	1	...	m	...	n
p_m	p^n	$C_n^1 q p^{n-1}$	...	$C_n^m q^m p^{n-m}$	...	q^n

где $q = 1 - p$; $m_x = np$; $D_x = npq$.

5.12. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p появляется событие A . Рассматривается случайная величина R — частота появления события A в n опытах, т.е. отношение числа появления события A в n опытах к общему числу произведенных опытов n . Написать ряд распределения этой случайной величины; найти ее математическое ожидание и дисперсию.

О т в е т.

x_m	0	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{m}{n}$	...	1
p_m	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

где $q = 1 - p$; $m_x = p$; $D_x = \frac{pq}{n}$.

5.13*. Производится n независимых выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Определить наимвероятнейшее число попаданий в мишень m^* .

Р е ш е н и е. Рассмотрим, при каком условии $m^* = 0$. Если $m^* = 0$, то $q^n > C_n^1 p q^{n-1}$ или $q > np$, откуда $p < \frac{1}{n+1}$.

Если $m^* = n$, то $p^n > C_n^1 q p^{n-1}$ или $p > nq$, откуда $-p > \frac{n}{n+1}$.

Рассмотрим случай, когда $0 < m^* < n$; в этом случае должны выполняться совместно два неравенства

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geq C_n^{m^*+1} p^{m^*+1} q^{n-m^*-1},$$

$$C_n^{m^*} p^{m^*} q^{n-m^*} \geq C_n^{m^*-1} p^{m^*-1} q^{n-m^*+1}.$$

Эти два неравенства эквивалентны следующим:

$$(m^* + 1)q \geq (n - m^*)p, \quad (n - m^* + 1)p \geq m^* q,$$

откуда m^* должно быть целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$(n+1)p - 1 \leq m^* \leq (n+1)p.$$

Можно убедиться в том, что это неравенство выполняется и в случае $p < \frac{1}{n+1}$ ($m^* = 0$) и в другом крайнем случае: $p > \frac{n}{n+1}$ ($m^* = n$).

Поскольку правая часть неравенства на единицу больше левой, то между ними лежит только одно целое число m^* ; исключение составляет только случай, когда $(n+1)p$ — целое. В этом случае имеется два наивероятнейших числа попаданий: $(n+1)p$ и $(n+1)p - 1$. Если np — целое число, то $m^* = np$, т.е. наивероятнейшее значение числа попаданий в мишень равно его математическому ожиданию.

5.14. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1 , для второго p_2 . Рассматриваются две случайные величины:

X_1 — число попаданий первого стрелка;

X_2 — число попаданий второго стрелка

и их разность

$$Z = X_1 - X_2.$$

Построить ряд распределения случайной величины Z и найти ее характеристики m_z и D_z .

Решение. Случайная величина Z имеет три возможных значения: $-1, 0$ и $+1$.

$$\mathbf{P}(Z = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 0) \mathbf{P}(X_2 = +1) = q_1 p_2;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = 0) &= \mathbf{P}(X_1 = 0) \mathbf{P}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1) \mathbf{P}(X_2 = 1) = \\ &= q_1 q_2 + p_1 p_2; \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) \mathbf{P}(X_2 = 0) = p_1 q_2,$$

где $q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$.

Ряд распределения величины Z имеет вид

z_i	-1	0	1
p_i	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

$$m_z = (-1)q_1 p_2 + 0(q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1p_1 q_2 = -q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 - p_2.$$

Дисперсию находим через второй начальный момент:

$$\begin{aligned}\alpha_2[Z] &= (-1)^2 \cdot q_1 p_2 + 0^2 \cdot (q_1 q_2 + p_1 p_2) + 1^2 \cdot p_1 q_2 = \\ &= q_1 p_2 + p_1 q_2 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2;\end{aligned}$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2 = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2 - (p_1 - p_2)^2 = p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

5.15. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых может появиться некоторое событие A . Вероятность события A в каждом опыте равна p . Опыты производятся до первого появления события A , после чего они прекращаются. Случайная величина X — число произведенных опытов. Построить ряд распределения этой случайной величины и найти ее характеристики — математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Ряд распределения имеет вид

x_i	1	2	3	...	i	...
p_i	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{i-1} p$	...

где $q = 1 - p$.

$$m_x = 1p + 2qp + 3q^2 p + \dots + iq^{i-1} p + \dots = p \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}.$$

Замечаем, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} iq^{i-1}$ представляет собой результат дифференцирования геометрической прогрессии $\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q}$;

$$\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = \frac{d}{dq} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}, \quad (1)$$

$$m_x = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Дисперсию определяем через второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1}.$$

Для вычисления суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1}$ умножим ряд (1) на q и продифференцируем по q :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} = \frac{d}{dq} \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right] = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Умножая на $p = 1 - q$, получим

$$\alpha_2(X) = \frac{1+q}{(1-q)^2}; \quad D_x = \alpha_2(X) - m_x^2 = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Полученное распределение можно связать с *распределением Паскаля*:

$$P(Y = k) = q^k p \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

с характеристиками: $m_y = \frac{q}{p}; D_y = \frac{q}{p^2}$. Легко видеть, что случайная величина X выражается через Y следующим образом: $X = Y + 1$. Распределение случайной величины X можно назвать «сдвинутым на 1 распределением Паскаля».

5.16. Производится два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Рассматриваются случайные величины:

X — разность между числом попаданий и числом промахов;

Y — сумма числа попаданий и числа промахов.

Построить для каждой из случайных величин X, Y ряд распределения. Найти их характеристики: m_x, D_x, m_y, D_y .

Решение. Ряд распределения величины X имеет вид

x_i	-2	0	2
p_i	q^2	$2pq$	p^2

где $q = 1 - p$.

$$m_x = -2q^2 + 2p^2 = 2(p - q); \quad \alpha_2[X] = 4(q^2 + p^2);$$

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = 8pq.$$

Случайная величина Y фактически не случайна и имеет одно значение 2; ее ряд распределения:

$$\frac{y_i}{p_i} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right. ; m_y = 2; D_y = 0.$$

5.17. В нашем распоряжении имеется n лампочек; каждая из них с вероятностью p имеет дефект. Лампочку ввинчивают в патрон и подают напряжение; после чего дефектная лампочка сразу же перегорает и заменяется другой.

Рассматривается случайная величина X — число лампочек, которое будет испытано. Построить ее ряд распределения и найти математическое ожидание m_x .

Решение. Ряд распределения величины X

x_i	1	2	3	...	i	...	n
p_i	q	pq	p^2q	...	$p^{i-1}q$	...	p^{n-1}

где $q = 1 - p$.

$$m_x = \sum_{i=1}^{n-1} ip^{i-1}q + np^{n-1} = q \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right) + np^{n-1} = \frac{1-p^n}{1-p}.$$

5.18. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Построить многоугольник распределения и функцию распределения случайной величины X . Найти: а) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; б) вероятность того, что величина X примет положительное значение.

Ответ: а) 0,423; б) 0,950.

5.19. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший (стационарный пуассоновский) поток. Математическое ожидание числа вызовов за час равно 30. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее двух вызовов.

Ответ: 0,0902.

5.20. При работе электронной вычислительной машины время от времени возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий:

A — за двое суток не будет ни одного сбоя;

B — в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

C — за неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев.

Ответ. $P(A) = 0,050$; $P(B) = 0,777$; $P(C) = 0,998$.

5.21. При заданном положении точки разрыва снаряда цель оказывается накрыта пуассоновским полем осколков с плотностью $\lambda = 2,5$ [оск./м²]. Площадь проекции цели на плоскость, на которой наблюдается осколочное поле, равна $S = 0,8$ [м²]. Каждый осколок, попавший в цель, поражает ее с полной достоверностью. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

О т в е т. 0,865.

5.22. Та же задача, но каждый осколок, попавший в цель, поражает ее не с полной достоверностью, а с вероятностью 0,6.

Р е ш е н и е. Рассмотрим вместо заданного поля осколков «поле поражающих осколков» с плотностью $\lambda^* = \lambda \cdot 0,6 = 1,5$ [пор. оск./м²]. Математическое ожидание числа поражающих осколков, попавших в цель, будет $a^* = \lambda^* s = 1,2$ [пор. оск.]; отсюда вероятность поражения

$$R_1 = 1 - e^{-a^*} = 1 - 0,301 = 0,699.$$

Другое решение: по формуле полной вероятности с гипотезами H_m — в цель попало m осколков ($m = 1, 2, \dots$). $\mathbf{P}(H_m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, $a = \lambda s = 2$. A — поражение цели, $\mathbf{P}(A|H_m) = 1 - (1 - 0,6)^m$;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m [1 - (1 - 0,6)^m] = 1 - P_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[a(1 - 0,6)]^m}{m!} e^{-a} = \\ &= 1 - e^{-a} e^{a(1-0,6)} = 1 - e^{-1,2} = 0,699. \end{aligned}$$

5.23. Электронная лампа работает исправно в течение случайного времени T , распределенного по показательному закону:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \mu e^{-\mu t} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

По истечении времени T лампа выходит из строя, после чего ее немедленно заменяют новой. Найти вероятность того, что за время τ : а) лампу не придется заменять; б) лампу придется заменять ровно три раза; в) лампу придется заменять не менее трех раз.

Р е ш е н и е. Отказы ламп образуют простейший поток с плотностью μ . Математическое ожидание числа отказов X за время τ равно $a = \mu\tau$.

$$\text{а) } P_0 = e^{-\mu\tau}; \quad \text{б) } P_3 = \frac{(\mu\tau)^3}{3!} e^{-\mu\tau};$$

$$\text{в) } R_3 = 1 - [P_0 + P_1 + P_2] = 1 - e^{-\mu\tau} \left[1 - \mu\tau - \frac{1}{2} (\mu\tau)^2 \right].$$

5.24. Техническое устройство состоит из трех узлов; в первом узле n_1 элементов, во втором n_2 элементов, в третьем n_3 элементов. Первый узел безусловно необходим для работы устройства; второй и третий дублируют друг друга. Время исправной работы каждого элемента распределено по показательному закону; среднее время работы элемента, входящего в первый узел, равно $t_{\text{ср}}^{(1)}$, во второй или третий узлы — $t_{\text{ср}}^{(2)}$. Первый узел выходит из строя, если в нем отказало не менее двух элементов; второй узел (так же, как и дублирующий его третий) выходит из строя при отказе хотя бы одного элемента. Для выхода из строя устройства в целом достаточно, чтобы отказал первый узел или второй и третий вместе. Найти вероятность того, что за время τ устройство выйдет из строя.

Решение. Вероятность выхода из строя одного элемента первого, второго или третьего узлов за время τ равна соответственно

$$p_1 = 1 - \exp\left[-\frac{\tau}{t_{\text{ср}}^{(1)}}\right]; \quad p_2 = p_3 = 1 - \exp\left[-\frac{\tau}{t_{\text{ср}}^{(2)}}\right],$$

где $\exp x = e^x$.

Вероятность выхода из строя первого узла за время τ :

$$P_1 = R_{2, n_1} = 1 - (1 - p_1)^{n_1} - n_1 p_1 (1 - p_1)^{n_1 - 1}.$$

Вероятности выхода из строя второго и третьего узлов:

$$P_2 = 1 - (1 - p_2)^{n_2}; \quad P_3 = 1 - (1 - p_3)^{n_3}.$$

Вероятность выхода из строя всего устройства:

$$P = P_1 + (1 - P_1)P_2P_3.$$

5.25. Искусственный спутник земли, движущийся по своей орбите в течение n суток, может случайным образом сталкиваться с метеоритами. Метеориты, пересекающие орбиту и сталкивающиеся со спутником, образуют пуассоновский поток с плотностью χ (метеоритов в сутки). Метеорит, попавший в спутник, пробивает его оболочку с вероятностью p_0 . Метеорит, пробивший оболочку, с вероятностью p_1 выводит из строя аппаратуру спутника. Найти вероятности следующих событий:

A — за время полета спутника его оболочка будет пробита;

B — за время полета спутника его аппаратура будет выведена из строя;

C — за время полета спутника будет пробита только оболочка спутника, а аппаратура будет действовать.

Решение. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку: $a_0 = \chi n p_0$. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку и поражающих аппаратуру: $a_1 = \chi n p_1 p_0$.

$$P(A) = 1 - e^{-a_0} = 1 - e^{-\chi n p_0};$$

$$P(B) = 1 - e^{-a_1} = 1 - e^{-\chi n p_0 p_1};$$

$$P(C) = P(A) - P(B) = e^{-\chi n p_0 p_1} - e^{-\chi n p_0}.$$

5.26. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить: а) вероятность поражения бомбардировщика; б) ту же вероятность, если число атак истребителей — не случайная величина и в точности равна трем.

Ответ. а) 0,699; б) 0,784.

5.27. При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время T работы прибора от его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром ν :

$$f(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается, и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_0 , после чего прибор снова включается в работу.

Найти плотность распределения $f^*(t)$ и функцию распределения $F^*(t)$ промежутка времени T^* между двумя соседними неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время T^* будет больше $2t_0$.

Решение. $T^* = T + t_0$,

$$f^*(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(t-t_0)} & \text{при } t > t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

$$F^*(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu(t-t_0)} & \text{при } t > t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases}$$

$$M[T^*] = \frac{1}{\nu} + t_0; \quad D[T^*] = \frac{1}{\nu^2};$$

$$P(T^* > 2t_0) = 1 - F^*(2t_0) = e^{-\nu t_0}.$$

5.28. Время T между двумя сбоями вычислительной машины распределено по показательному закону с параметром λ :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Решение определенной задачи требует безотказной работы машины в течение времени τ . Если за время τ произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время τ после начала решения задачи. Рассматривается случайная величина θ — время, за которое задача будет решена. Найти ее закон распределения и математическое ожидание (среднее время решения задачи).

О т в е т. Случайная величина θ дискретна и имеет ряд распределения

θ_i	τ	2τ	$\dots$	$i\tau$	$\dots$
p_i	p	pq	$\dots$	pq^{i-1}	$\dots$

где $p = e^{-\lambda\tau}$; $q = 1 - p = 1 - e^{-\lambda\tau}$;

$$m_\theta = \frac{\tau}{p} = \frac{\tau}{e^{-\lambda\tau}}.$$

5.29. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что за данное время $t = k\tau$ будет решено не менее m задач ($m < k$).

Р е ш е н и е. Обозначим $P_{m,k}$ вероятность того, что за время $t = k\tau$ будет решено ровно m задач. $P_{m,k}$ есть вероятность того, что из k промежутков времени τ ровно m будет таких, в которых не будет сбоев. Вероятность того, что за время τ не будет сбоя: $p = \mathbf{P}(T > \tau) = e^{-\lambda\tau}$. По теореме о повторении опытов

$$P_{m,k} = C_k^m p^m q^{k-m} = C_k^m e^{-m\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-m}.$$

Вероятность того, что будет решено не менее m задач:

$$R_{m,k} = \sum_{i=m}^k P_{i,k} = \sum_{i=m}^k C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i},$$

или, если это удобнее,

$$R_{m,k} = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} C_k^i e^{-i\lambda\tau} (1 - e^{-\lambda\tau})^{k-i}.$$

5.30. Охотники, собравшиеся для охоты на волка, выстраиваются в цепь случайным образом так, что расстояние между двумя соседними охотниками D не зависит от других расстояний и рас-

предельно по показательному закону с параметром λ . Волк бежит перпендикулярно цепи. Любой охотник стреляет по волку только в случае, если волк пробегает от него не дальше чем на расстоянии R_0 , и, выстрелив, убивает его с вероятностью p . Определить вероятность того, что волк будет убит, если он не знает, где расположены охотники, и цепь достаточно длинна для того, чтобы волк с достоверностью не пробежал за пределами цепи.

Решение. Цепь охотников (рис. 5.30) может рассматриваться как пуассоновская последовательность точек на оси Ox . Волк, бегущий по направлению, указанному стрелкой, обстреливается в случае, если в полосу шириной $2R_0$, связанную с его траекторией, попадает хотя бы один охотник. Каждый охотник, если ему придется стрелять по волку, с вероятностью p оказывается «удачливым», т.е. убивает волка. Перейдем от «цепочки охотников» на оси Ox к «цепочке удачливых охотников», имеющей плотность $\lambda^* = \lambda p$.

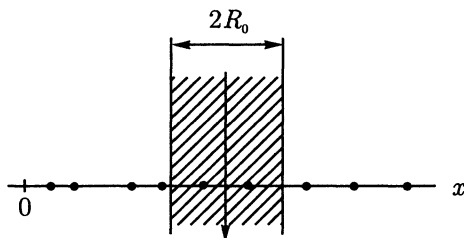


Рис. 5.30

Волк будет убит в случае, если в отрезок длиной $2R_0$, случайно брошенный на ось абсцисс, попадет хотя бы один «удачливый» охотник; вероятность этого:

$$P(A) = 1 - e^{-2R_0\lambda^*} = 1 - e^{-2R_0\lambda p}.$$

5.31. Рассматривается равномерное пуассоновское поле точек на плоскости с плотностью λ . Найти закон распределения и числовые характеристики m_r , D_r расстояния R от любой точки поля до ближайшей к ней соседней точки.

Решение. Найдем функцию распределения $F(r)$ величины R . Для этого проведем вокруг точки поля окружность радиуса r (рис. 5.31). Для того чтобы расстояние R от этой точки до ближайшей к ней соседней было меньше r , надо, чтобы в круг попала хотя бы одна точка (кроме данной). По свойствам пуассоновского поля вероятность этого события не зависит от того, есть ли уже в центре круга точка или ее нет. Поэтому

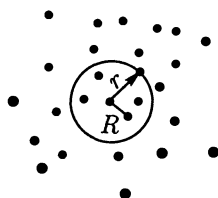


Рис. 5.31

$$F(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad \text{при } r > 0,$$

откуда

$$f(r) = \begin{cases} 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Такой закон распределения называется *законом Рэлея*.

$$m_r = \int_0^\infty r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}};$$

$$\alpha_2[R] = \int_0^\infty r^2 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr = \frac{1}{\pi\lambda};$$

$$D_r = \alpha_2[R] - m_r^2 = \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{4 - \pi}{4\pi\lambda}.$$

5.32. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью λ (среднее число деревьев на единицу площади). Выбирается произвольная точка O в этом лесу. Рассматриваются случайные величины:

R_1 — расстояние от точки O до ближайшего к ней дерева;

R_2 — расстояние от точки O до следующего по порядку (второго по удаленности) дерева;

.....
 R_n — расстояние от точки O до n -го по удаленности дерева.

Найти закон распределения каждой из этих случайных величин.

Решение. Функция распределения случайной величины R_1 найдена в предыдущей задаче:

$$F_1(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

Функция распределения $F_2(r) = \mathbf{P}(R_2 < r)$ равна вероятности того, что в круг радиуса r попадет не менее двух деревьев:

$$F_2(r) = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda} - \pi r^2 \lambda e^{-\pi r^2 \lambda} \quad (r > 0).$$

Аналогичными рассуждениями получим

$$F_n(r) = P(R_n < r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (r > 0, \quad n \geq 1),$$

где $a = \pi r^2 \lambda$.

Плотность распределения получим дифференцированием $F_n(r)$ по r :

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{dF_n(r)}{da} \frac{da}{dr} = \left(-\sum_{k=0}^{n-1} k \frac{a^{k-1}}{k!} e^{-a} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \right) 2\pi\lambda r = \\ &= \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} 2\pi\lambda r \quad (r > 0). \end{aligned}$$

5.33. В пространстве трех измерений случайным образом расположены точки. Число точек в некотором объеме пространства v есть случайная величина, подчиненная закону Пуассона с математическим ожиданием $a = \lambda v$, где λ — среднее число точек, находящихся в единичном объеме. Требуется найти закон распределения расстояния R от любой точки пространства до ближайшей к ней случайной точки.

Решение. Функция распределения $F(r)$ есть вероятность того, что в сфере радиуса r попадет хотя бы одна точка:

$$F(r) = \mathbf{P}(R < r) = 1 - e^{-\lambda v(r)},$$

где $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ — объем сферы радиуса r . Отсюда

$$f(r) = 4\pi r^2 \lambda e^{-\lambda \frac{4}{3}\pi r^3} \quad (r > 0).$$

5.34. В некотором звездном скоплении звезды образуют трехмерное пуассоновское поле точек с плотностью λ (среднее количество звезд в единице объема). Фиксируется одна (произвольная) звезда и рассматриваются: ближайшая от нее звезда, следующая (вторая) по удаленности, третья и т.д. Найти закон распределения расстояния R от данной звезды до n -й в этом ряду.

Ответ. Функция распределения $F_n(r)$ имеет вид

$$F_n(r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \text{ где } a = \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda \quad (r > 0);$$

плотность распределения

$$f_n(r) = \frac{dF_n(r)}{dr} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} 4\pi\lambda r^2 \quad (r > 0).$$

5.35*. Предыдущие задачи можно обобщить на произвольное число измерений N : в N -мерном пространстве случайным образом расположены точки. Число точек, попадающих в некоторую замкнутую область V этого пространства, есть случайная величина X ,

подчиненная закону Пуассона. «Объем» v этой области V определяется так:

$$v = \int_{(\dot{V})} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_N.$$

Математическое ожидание случайной величины X будет равно λv , где λ — среднее число точек, находящихся в единичном объеме.

Требуется найти закон распределения «расстояния» R от любой точки этого пространства до ближайшей случайной точки. Под «расстоянием» R между двумя точками $x(x_1, x_2, \dots, x_N)$ и $y(y_1, y_2, \dots, y_N)$ понимается величина

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}.$$

Решение. Известно, что объем $v_N(r)$ гиперсферы радиуса r в N -мерном пространстве равен

$$v_N(r) = \begin{cases} \frac{2^{\frac{N+1}{2}} \pi^{\frac{N-1}{2}}}{N!!} r^N & \text{при } N - \text{нечетном,} \\ \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{N\left(\frac{N-2}{2}\right)!} r^N & \text{при } N - \text{четном,} \end{cases}$$

при $N!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot N$ (при нечетном N). Заметим, что «площадь» поверхности гиперсферы $S_N(r)$ радиуса r в N -мерном пространстве определяется так:

$$S_N(r) = \frac{d}{dr} v_N(r) = \frac{N}{r} v_N(r).$$

Функция распределения случайной величины R будет равна вероятности того, что в гиперсферу радиуса r попадает хотя бы одна случайная точка:

$$F(r) = \mathbf{P}(R < r) = 1 - e^{-\lambda v_N(r)} \quad (r > 0),$$

откуда

$$f(r) = \lambda S_N(r) e^{-\lambda v_N(r)} \quad (r > 0).$$

5.36*. Рассматривается N -мерное пространство, в котором задано пуассоновское поле точек с плотностью λ (среднее число точек в единице N -мерного объема). Найти закон распределения расстояния от произвольной точки поля до n -й от нее в порядке возрастания расстояния.

О т в е т. Функция распределения

$$F_n(r) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (r > 0),$$

где $a = \lambda v_N(r)$; плотность распределения

$$f_n(r) = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} \lambda S_N(r) \quad (r > 0)$$

(см. задачу 5.35).

5.37. Автомобиль проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время техосмотра, распределяется по закону Пуассона с параметром a . Если неисправностей не обнаружено, техническое обслуживание автомобиля продолжается в среднем 2 ч. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится в среднем еще полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то автомобиль ставится на профилактический ремонт, где он находится в среднем 4 ч.

Определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта автомобиля и его математическое ожидание $\mathbf{M}[T]$.

Р е ш е н и е.

t_i	2	2,5	3	6
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{a^2}{2} e^{-a}$	$1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[T] &= e^{-a} \left(2 + 2,5a + \frac{3}{2}a^2 \right) + 6 \left[1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right) \right] = \\ &= 6 - e^{-a} (4 + 3,5a + 1,5a^2). \end{aligned}$$

5.38. Производится вынужденная посадка самолета на мелкий кустарник. Точки, в которых растут кусты, представляют собой равномерное пуассоновское поле точек с параметром λ . Размах крыльев самолета равен r , а длина пробега L . Благополучная посадка возможна, если самолет не заденет ни одного куста (размерами кроны куста можно пренебречь). Определить вероятность p того, что самолет произведет благополучную посадку.

О т в е т. $p = e^{-L\lambda r}$.

5.39*. Обследуется группа животных; каждое из них с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализа крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой

смеси будет положительным, если среди n животных будет хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число N животных. Предлагается два способа обследования:

1) обследовать всех N животных; в этом случае нужно провести n анализов;

2) вести обследование по группам, смешав сначала кровь группы из n животных; если анализ отрицательный, считать, что все животные группы здоровы, и переходить к следующей группе из n животных; если анализ положительный, обследовать каждое из n животных и после этого переходить к следующей группе ($n > 1$).

Определить, какой способ обследования выгоднее — первый или второй — в смысле минимального среднего числа анализов. Определить, при каком $n = n^*$ для обследования группы животных потребуется в среднем наименьшее число анализов.

Решение. Случайная величина X_n — число анализов на группу из n животных при втором способе — имеет ряд распределения

$$\begin{array}{c|c|c} x_i & 1 & n+1 \\ \hline p_i & q^n & 1-q^n \end{array}, \text{ где } q = 1-p.$$

Среднее число анализов на группу из n животных при втором способе будет

$$\mathbf{M}[X_n] = q^n + (n+1)(1-q^n) = n - (nq^n - 1).$$

При первом способе на группу из n животных приходится n анализов. Очевидно, при $nq^n < 1$ первый способ выгоднее второго, а при $nq^n > 1$ второй способ выгоднее первого.

Установим, при каком q второй способ становится выгоднее и каково при этом будет оптимальное значение $n = n^*$. Из неравенства $nq^n > 1$ вытекает $q > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, а из последнего $q > 0,694$, так как минимум $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ для целых n достигается при $n = 3$.

Предположим, что $q > 0,694$, и найдем то значение $n = n^*$, которое обращает в минимум среднее количество анализов, приходящееся на одно животное:

$$R_n = \frac{\mathbf{M}[X_n]}{n} = 1 - q^n + \frac{1}{n}.$$

Для этого надо найти наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{dR_n}{dn} = -q^n \ln q - \frac{1}{n^2} = 0,$$

взять ближайшие к нему два целых числа и прямой подстановкой их в R_n выбрать оптимальное n^* . Уравнение $-q^n \ln q = \frac{1}{n^2}$ подстановкой $-\ln q = a$; $an = x$ приводится к $x^2 e^{-x} = a \times$
 $\times \left(a = -\ln q < \frac{\ln 3}{3} = 0,366 \right)$. Последнее уравнение при малых a (и, значит, малых $p = 1 - q$) имеет решение $x \approx \sqrt{a}$, откуда $n^* \approx \frac{1}{\sqrt{a}}$.

При немалых a непосредственное сравнение величин R_2, R_3 и R_4 позволяет сделать вывод о том, что $R_3 < R_2$ всегда и что $R_3 < R_4$ при $0,694 < q < 0,876$; следовательно, при $0,694 < q < 0,876$ оптимальное $n^* = 3$. Можно показать, что при $q > 0,889$ ($p < 0,111$) хорошее приближение дает формула $n^* \approx \frac{1}{\sqrt{p}} + 0,5$.

5.40. Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале $(0, a)$ (рис. 5.40).

а) Написать выражение плотности распределения.

б) Найти функцию распределения $F(x)$.

в) Найти вероятность попадания случайной величины X на участок от $a/2$ до a .

г) Найти характеристики величины X : m_x , D_x , σ_x , $\mu_3[X]$.

О т в е т.

$$а) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) & \text{при } x \in (0, a), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, a). \end{cases}$$

$$б) F(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a} \right) & \text{при } 0 < x < a, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$в) F(a) - F\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$г) m_x = \frac{a}{3}; \quad D_x = \frac{a^2}{18}; \quad \sigma_x = \frac{a}{3\sqrt{2}};$$

$$\mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3m_x \alpha_2[X] + 2m_x^3 = \frac{a^3}{135}.$$

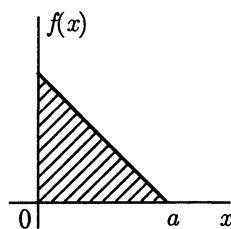


Рис. 5.40

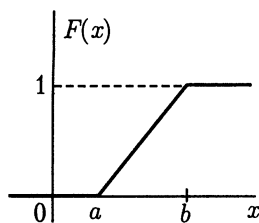


Рис. 5.41

5.41. Функция распределения случайной величины X задана графиком (рис. 5.41). Найти математическое ожидание и дисперсию величины X .

О т в е т. $m_x = \frac{a+b}{2}$; $D_x = \frac{(a-b)^2}{12}$.

5.42. Случайная величина X подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке от $-a$ до $+a$ (рис. 5.42, а).

- Написать выражение плотности распределения.
- Построить график функции распределения.

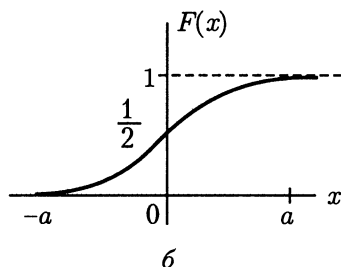
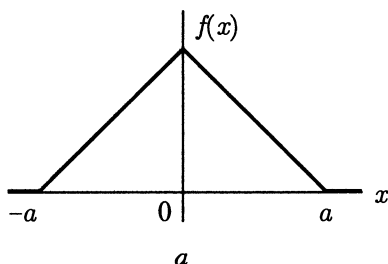


Рис. 5.42

- Найти числовые характеристики случайной величины X :

$$m_x, D_x, \sigma_x, \mu_3[X].$$

- Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(-\frac{a}{2}; a\right)$.

О т в е т.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{при } x \in (-a, a), \\ 0 & \text{при } x \notin (-a, a). \end{cases}$$

- График функции распределения при $x \in (-a, a)$ составлен из двух участков парабол (рис. 5.42, б).

$$\text{в) } m_x = 0; D_x = \frac{a^2}{6}; \sigma_x = \frac{a}{\sqrt{6}}; \mu_3[X] = 0.$$

$$\text{г) } \mathbf{P}\left(X \in \left(-\frac{a}{2}, a\right)\right) = \frac{7}{8}.$$

5.43. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

а) Найти коэффициент a ; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания величины X на участок $(-1, +1)$; г) существуют ли для случайной величины X числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия?

Ответ. а) $a = \frac{1}{\pi}$; б) $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$; в) $P(-1 < X < 1) = \frac{1}{2}$;

г) характеристики m_x и D_x не существуют, так как выражающие их интегралы расходятся.

5.44. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром μ :

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

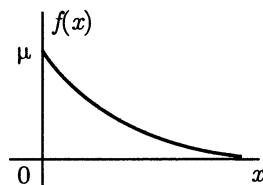


Рис. 5.44

а) Построить кривую распределения; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

Ответ. а) См. рис. 5.44;

$$б) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$в) m_x = \frac{1}{\mu}; \quad P\left(X < \frac{1}{\mu}\right) = F\left(\frac{1}{\mu}\right) = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$$

5.45. Случайная величина X подчинена закону Лапласа:

$$f(x) = a e^{-\lambda|x|} \quad (\lambda > 0).$$

а) Найти коэффициент a ; б) построить графики плотности распределения и функции распределения; в) найти m_x и D_x .

Ответ. а) $a = \frac{\lambda}{2}$;

$$б) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x} & \text{при } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

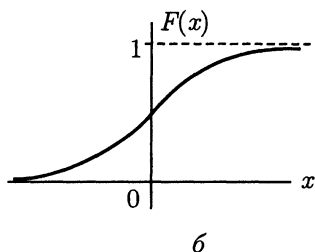
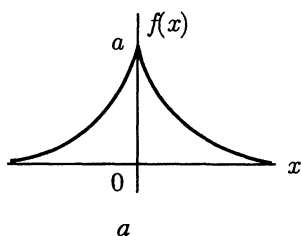


Рис. 5.45

Графики плотности распределения и функции распределения даны на рис. 5.45, а, б.

в) $m_x = 0$; $D_x = \frac{2}{\lambda^2}$.

5.46. Случайная величина R — расстояние от точки попадания до центра мишени — распределена по закону Рэля (рис. 5.46):

$$f(r) = \begin{cases} A r e^{-h^2 r^2} & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A ; б) моду M случайной величины R , т.е. точку максимума ее плотности распределения; в) m_r и D_r ; г) вероятность того, что в результате выстрела расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше, чем мода.

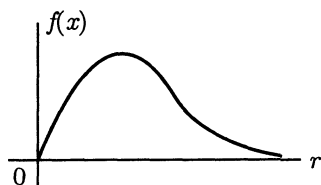


Рис. 5.46

О т в е т. а) $A = 2h^2$; б) $M = \frac{1}{h\sqrt{2}}$; в) $m_r = M\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}$; $D_r = \frac{4-\pi}{4h^2} = M^2 \frac{4-\pi}{2}$;

г) $P(R < M) = 0,393$.

5.47. Случайная величина X с вероятностью p_1 имеет плотность распределения $f_1(x)$, а с вероятностью p_2 — плотность распределения $f_2(x)$ ($p_1 + p_2 = 1$). Написать выражение для плотности распределения и функции распределения величины X . Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Р е ш е н и е. По формуле полной вероятности (с гипотезами H_i — величина X имеет плотность распределения $f_i(x)$, $i = 1, 2$) получаем

$$F(x) = P(X < x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x), \text{ где } F_i(x) = \int_{-\infty}^x f_i(x) dx;$$

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x);$$

$$m_x = p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx = p_1 m_x^{(1)} + p_2 m_x^{(2)},$$

где $m_x^{(1)}, m_x^{(2)}$ — математические ожидания для распределений $f_1(x), f_2(x)$;

$$\begin{aligned} D_x &= p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x) dx - m_x^2 = \\ &= p_1 \alpha_2^{(1)} + p_2 \alpha_2^{(2)} - m_x^2, \end{aligned}$$

где $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$ — вторые начальные моменты для распределений $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

5.48. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1 , но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ и $\sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность p того, что шарик будет забракован.

Решение.

$$\begin{aligned} p &= 1 - \mathbf{P}(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi^* \left(\frac{d_2 - m_d}{\sigma_d} \right) - \Phi^* \left(\frac{d_1 - m_d}{\sigma_d} \right) \right] = \\ &= 1 - \left[\Phi^* \left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - \Phi^* \left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d} \right) \right]; \end{aligned}$$

так как $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$, то

$$p = 1 - \left[2\Phi^* \left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - 1 \right] = 2 - 2\Phi^* \left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right)$$

и по таблицам функции $\Phi^*(x)$ (см. прил. 1 табл. 2) находим

$$p = 2 - 2\Phi^*(2) = 0,0456.$$

5.49. Известно, что размер D шарика для подшипников является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Браковка шарика производится так же, как указано в задаче 5.48. При этом известно, что средний размер шарика равен

$m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$, а брак составляет 10 % всего выпуска. Определить

среднее квадратическое отклонение диаметра шарика σ_d .

Решение. Вероятность брака

$$P = 2 - 2\Phi^*\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0,1,$$

откуда $\Phi^*\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0,95$. По таблицам функции $\Phi^*(x)$ (см. прил. 1

табл. 2) находим $\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} = 1,25; \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{2,5}$.

5.50. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 1 мин горит зеленый свет и 0,5 мин — красный, затем опять 1 мин горит зеленый свет, 0,5 мин — красный и т.д. Некто подъезжает к перекрестку на автомобиле в случайный момент, не связанный с работой светофора. Найти: а) вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь; б) закон распределения и числовые характеристики времени ожидания у перекрестка.

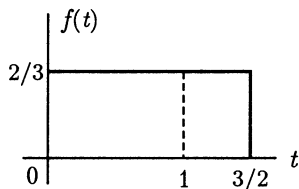


Рис. 5.50

Решение. Момент проезда автомобиля через перекресток распределен равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Этот период равен $1 + 0,5 = 1,5$ [мин] (рис. 5.50).

Для того чтобы автомобиль проехал через перекресток, не останавливаясь, достаточно, чтобы момент проезда перекрестка пришелся на интервал времени $(0; 1)$. Для случайной величины, подчиненной закону постоянной плотности в интервале $(0; 1,5)$, вероятность того, что она попадет на интервал $(0; 1)$ равна $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$. Время ожидания $T_{\text{ож}}$ есть смешанная случайная величина;

с вероятностью $\frac{2}{3}$ она равна нулю, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ принимает с одинаковой плотностью вероятности любое значение между 0 и 0,5 мин.

Среднее время ожидания у перекрестка

$$M[T_{\text{ож}}] = 0 \cdot \frac{2}{3} + 0,25 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,083 \text{ [мин]}.$$

Дисперсия времени ожидания

$$D_{t_{\text{ож}}} = \alpha_2 [T_{\text{ож}}] - (\mathbf{M}[T_{\text{ож}}])^2 =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \int_0^{0,5} t^2 \cdot \frac{1}{0,5} dt - (0,083)^2 \approx 0,0208 \text{ [мин}^2\text{]};$$

$$\sigma_{t_{\text{ож}}} \approx 0,144 \text{ [мин]}.$$

5.51. Кривая распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с полуосями a и b (рис. 5.51, а).

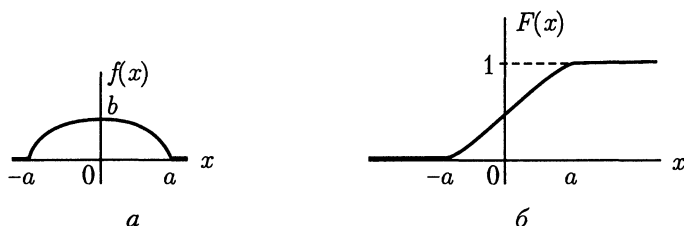


Рис. 5.51

Величина a известна. Требуется определить величину b , найти m_x , D_x , найти и построить функцию распределения $F(x)$.

Решение. Величина b находится из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения:

$$\frac{\pi ab}{2} = 1; \quad b = \frac{2}{\pi a}.$$

Плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{при } x \in (-a; a), \\ 0 & \text{при } x \notin (-a; a). \end{cases}$$

Математическое ожидание $m_x = 0$. Дисперсия

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{a^2}{4};$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -a, \\ \frac{1}{\pi a^2} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2 \pi}{2} \right] & \text{при } -a < x < a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 5.51, б.

5.52*. Показать, что функция вида

$$f_s(x) = \begin{cases} ax^s e^{-\alpha^2 x^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ и $a > 0$ — некоторые постоянные и s — натуральное число ($s = 1, 2, 3, \dots$) обладает свойствами плотности распределения. Определить параметры a и α , исходя из заданного математического ожидания m_x , и найти D_x .

Решение. Параметры a и α находятся из условий

$$\int_0^{\infty} ax^s e^{-(\alpha x)^2} dx = 1, \quad \int_0^{\infty} ax^{s+1} e^{-(\alpha x)^2} dx = m_x.$$

Данные интегралы заменой $(\alpha x)^2 = t$ приводятся к гамма-функции Эйлера:

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{s+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s-1}{2}} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}},$$

где $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{m-1} dt$ ($m > 0$), причем $\Gamma(m+1) = m \Gamma(m)$ и для целых $n = 1, 2, \dots$ получаем $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$.

Из заданных условий находим

$$a \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}} = 1; \quad a \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{2\alpha^{s+2}} = m_x,$$

откуда

$$a = \frac{2\alpha^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}; \quad \alpha = \frac{1}{m_x} \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Второй начальный момент

$$\alpha_2[X] = \int_0^{\infty} ax^{s+2} e^{-(\alpha x)^2} dx = a \frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)}{2\alpha^{s+3}} = a \frac{\frac{s+1}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1} \alpha^2} = \frac{s+1}{2\alpha^2},$$

откуда

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{s+1}{2\alpha^2} - m_x^2 = m_x^2 \left[\frac{(s+1)\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)} - 1 \right].$$

Некоторые из законов вида $f_s(x)$ имеют определенные названия: $f_1(x)$ называется *законом Рэля*, а $f_2(x)$ — *законом Максвелла*.
Для закона Рэля ($s = 1$)

$$f_1(x) = \begin{cases} axe^{-\alpha^2 x^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

имеем соотношения

$$\alpha = \frac{1}{m_x} \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad a = 2\alpha^2 = \frac{\pi}{2m_x^2}; \quad D_x = m_x^2 \left[\frac{4}{\pi} - 1 \right].$$

Для закона Максвелла ($s = 2$)

$$f_2(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-\alpha^2 x^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

имеем соотношения

$$\alpha = \frac{2}{m_x \sqrt{\pi}}; \quad a = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 m_x^3}; \quad D_x = m_x^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right).$$

З а м е ч а н и е. Все законы вида

$$f_s(x) = \begin{cases} ax^s e^{-\alpha^2 x^2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

при заданном s являются однопараметричными, т. е. зависят только от одного параметра, в качестве которого можно задать, например, математическое ожидание (или дисперсию).

5.53*. Имеется случайная величина X , распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ . Найти выражение для величины $\alpha_s[X]$ — начального момента s -го порядка.

Р е ш е н и е. Выразим начальные моменты $\alpha_s[X] = \mathbf{M}[X^s]$ через центральные моменты $\mu_s[X] = \mathbf{M}[(X - m)^s]$:

$$\alpha_s[X] = \mathbf{M}[(X - m + m)^s] = \sum_{k=0}^s C_s^k \mu_k[X] m^{s-k}, \quad \mu_0[X] = 1.$$

Для центральных моментов при нечетном $s = 2n + 1$

$$\begin{aligned}\mu_s[X] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^s e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} dy = 0,\end{aligned}$$

а при четном $s = 2n$ — по формулам предыдущей задачи

$$\begin{aligned}\mu_s[X] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^s e^{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2} dy = \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^s e^{-\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} y\right)^2} dy = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2} (\sigma\sqrt{2})^{2n+1} = \\ &= (2n-1)!! \sigma^{2n}.\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}\mu_2[X] &= \sigma^2; & \alpha_2[X] &= m^2 + \sigma^2; \\ \alpha_3[X] &= m^3 + 3\sigma^2 m; \\ \mu_4[X] &= 3\sigma^4; & \alpha_4[X] &= m^4 + 6\sigma^2 m^2 + 3\sigma^4; \\ \alpha_5[X] &= m^5 + 10\sigma^2 m^3 + 5 \cdot 15\sigma^4 m; \\ \mu_6[X] &= 15\sigma^6; & \alpha_6[X] &= m^6 + 15\sigma^2 m^4 + 15 \cdot 3\sigma^4 m^2 = 15\sigma^6.\end{aligned}$$

5.54. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$. Вероятность попадания этой случайной величины на участок от $-a$ до a равна 0,5. Найти σ_x и написать выражение нормального закона.

Решение.

$$\mathbf{P}(-a < X < a) = 2\Phi^*\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 = 0,5; \quad \Phi^*\left(\frac{a}{\sigma}\right) = 0,75.$$

По таблицам функции $\Phi^*(x)$ имеем $\frac{a}{\sigma} \approx 0,675$, откуда $\sigma = 1,48a$,

$$f(x) = \frac{1}{1,48a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4,4a^2}}.$$

5.55*. Функция распределения $F(x)$ неотрицательной случайной величины X задана графиком (рис. 5.55). Математическое ожидание случайной величины X равно m_x . Показать, что m_x геометрически может быть представлено площадью фигуры, заштрихованной на рисунке (ограниченной кривой $y = F(x)$, прямой $y = 1$ и осью ординат).

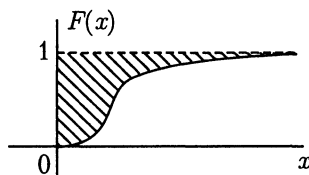


Рис. 5.55

Решение. Имеем

$$m_x = \int_0^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{\infty} xF'(x) dx = - \int_0^{\infty} x[1 - F(x)]' dx.$$

Применяя интегрирование по частям, получим

$$m_x = -x[1 - F(x)] \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

Докажем, что первое слагаемое равно нулю:

$$x[1 - F(x)] \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} x[1 - F(x)] = 0.$$

Действительно, для случайной величины $X \geq 0$, имеющей конечное математическое ожидание, из сходимости интеграла $\int_0^{\infty} xf(x) dx$ следует, что $\int_M^{\infty} xf(x) dx \rightarrow 0 (M \rightarrow \infty)$, и так как

$$M \int_M^{\infty} f(x) dx \leq \int_M^{\infty} xf(x) dx,$$

получаем

$$M[1 - F(M)] \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[1 - F(x)] = 0.$$

Отсюда

$$m_x = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx,$$

а это есть площадь, заштрихованная на рисунке.

5.56. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ . Определить абсциссы x_1 , x_2 и ординату y точек перегиба кривой распределения $y = f(x)$ (рис. 5.56).

О т в е т. $x_1 = m - \sigma$; $x_2 = m + \sigma$; $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{0,24}{\sigma}$.

5.57. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $m_x = 0$ (рис. 5.57).

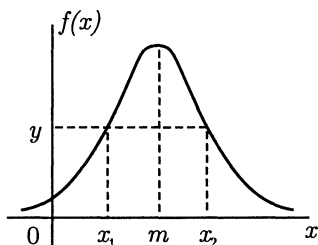


Рис. 5.56

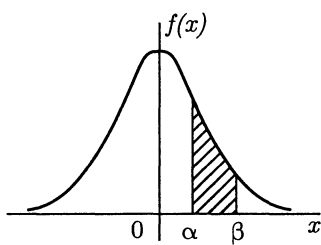


Рис. 5.57

Задан интервал (α, β) , не включающий начало координат. При каком значении среднего квадратического отклонения σ вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) достигает максимума?

Р е ш е н и е. Значение σ найдем, дифференцируя по σ вероятность попадания в интервал (α, β) и приравнявая производную нулю. Имеем

$$\mathbf{P}(\alpha < X < \beta) = \Phi^* \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) - \Phi^* \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{\beta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\};$$

$$\frac{d}{d\sigma} [\mathbf{P}(\alpha < X < \beta)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\beta}{\sigma^2} \right) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{\alpha}{\sigma^2} \right) \right] = 0;$$

отсюда

$$\beta e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} = \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}},$$

и следовательно,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}} = \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{2} \frac{\beta - \alpha}{\ln \beta - \ln \alpha}}.$$

Для малого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

$$\sigma \approx a \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^2 \right] \approx a.$$

Например, при $\frac{\varepsilon}{a} < 0,24$ формула $\sigma \approx a$ имеет погрешность менее 1 %.

5.58. Имеется случайная величина X , подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием m_x и средним квадратичным отклонением σ_x . Требуется приближенно заменить нормальный закон законом постоянной плотности в интервале (α, β) ; границы α, β подобрать так, чтобы сохранить неизменными основные характеристики случайной величины X : математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Для закона постоянной плотности на участке (α, β)

$$m_x = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad \sigma_x = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}.$$

Решая эти уравнения относительно α и β , имеем

$$\alpha = m_x - \sigma_x \sqrt{3}; \quad \beta = m_x + \sigma_x \sqrt{3}.$$

5.59. Производится стрельба по наземной цели снарядами, снабженными радиовзрывателями. Номинальная высота подрыва снаряда, на которую рассчитан взрыватель, равна a , но фактически имеют место ошибки в высоте, распределенные по нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = \frac{a}{2}$ (систематической ошибки нет). Если взрыватель не сработает над землей, взрыва снаряда вообще не происходит. Найти вероятности следующих событий:

A — при стрельбе одним снарядом точка разрыва окажется на высоте, превышающей $1,2a$;

B — при стрельбе тремя снарядами ни один снаряд не разорвется на высоте более чем $1,2a$;

C — хотя бы один из трех снарядов не разорвется;
 D — один из трех снарядов не разорвется, а два другие разорвутся.

Решение.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X > 1,2a) = 1 - \Phi^* \left(\frac{1,2a}{\frac{a}{2}} \right) = 1 - \Phi^*(2,4) = 0,0082;$$

$$\mathbf{P}(B) = 0,976.$$

Вероятность того, что один отдельный снаряд не разорвется:

$$p_0 = \mathbf{P}(X < 0) = \Phi^* \left(\frac{-a}{\frac{a}{2}} \right) = 0,023;$$

$$\mathbf{P}(C) = 1 - (1 - p_0)^3 = 0,068;$$

$$\mathbf{P}(D) = C_3^1 \cdot 0,023 \cdot 0,977^2 = 0,066.$$

5.60. Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы (мост, автомобильная дорога, взлетно-посадочная полоса). Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы; систематическая ошибка отсутствует; среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, 16 м. Найти вероятность p попадания в полосу при одном выстреле, а также вероятности следующих событий при трех выстрелах:

A — хотя бы одно попадание в полосу;

B — не менее двух попаданий в полосу;

C — один снаряд попадет в полосу, один ляжет с недолетом и один с перелетом.

Решение. $p = 2\Phi^* \left(\frac{10}{16} \right) - 1 = 0,468;$

$$\mathbf{P}(A) = 1 - (1 - p)^3 = 0,849;$$

$$\mathbf{P}(B) = 1 - (1 - p)^3 - 3p(1 - p)^2 = 0,452;$$

$$\mathbf{P}(C) = 3! p \left[\frac{1}{2} (1 - p) \right]^2 = 0,199.$$

5.61. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $d_0 = 5$ мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр — случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением $\sigma_d = 0,05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

Решение. Вероятность того, что шарик не будет забракован:
$$p = 2\Phi^*\left(\frac{0,1}{0,05}\right) - 1 = 0,954.$$
 Вероятность того, что он будет забракован: $q = 1 - p = 0,046$. Следовательно, около 4,6 % шариков будет браковаться.

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ)

Совокупность двух случайных величин (X, Y) , рассматриваемых совместно, называется *системой двух случайных величин*. Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как *случайная точка* с координатами (X, Y) на плоскости xOy (рис. 6.0.1, *a*) или как *случайный вектор*, направленный из начала координат в точку (X, Y) , составляющие которого представляют собой случайные величины X и Y (рис. 6.0.1, *б*).

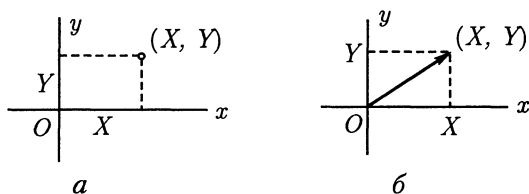


Рис. 6.0.1

Система трех случайных величин (X, Y, Z) изображается *случайной точкой* или *случайным вектором* в *трехмерном пространстве*; система n случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — *случайной точкой* или *случайным вектором* в *пространстве n измерений*.

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = \mathbf{P}((X < x)(Y < y)).$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант с вершиной (x, y) , заштрихованный на рис. 6.0.2, *a*. Функция распределения $F(x, y)$ обладает свойствами:

- 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;
- 2) $F(+\infty, +\infty) = 1$;

3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y ;

4) $F(x, y)$ — неубывающая функция x и y .

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R со сторонами, параллельными осям координат, включающий свою нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую (рис. 6.0.2, б), выражается через функцию распределения формулой

$$\mathbf{P}((X, Y) \in R) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

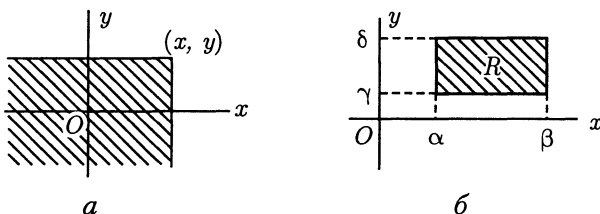


Рис. 6.0.2

Плотностью распределения $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется предел отношения вероятности попадания случайной точки в элементарный участок плоскости, примыкающий к точке (x, y) , к площади этого участка, когда его размеры стремятся к нулю. Плотность распределения выражается через функцию распределения формулой

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Поверхность, изображающая функцию $f(x, y)$, называется *поверхностью распределения*.

Элементом вероятности для системы двух случайных величин называется величина $f(x, y) dx dy$, приближенно выражающая вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами dx, dy , примыкающий к точке (x, y) .

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольную область D выражается формулой

$$\mathbf{P}((X, Y) \in D) = \iint\limits_{(D)} f(x, y) dx dy.$$

Свойства плотности распределения

$$1) f(x, y) \geq 0;$$

$$2) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Функция распределения системы выражается через плотность распределения формулой

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

(интегрирование производится сначала по y , а потом по x).

Плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, выражаются через плотность распределения системы формулами

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные функции распределения случайных величин X и Y , входящих в систему, обозначаются $F_1(x|y)$ и $F_2(y|x)$, а условные плотности распределения — $f_1(x|y)$ и $f_2(y|x)$.

Теорема умножения плотностей распределения

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y|x) \text{ или } f(x, y) = f_2(y) f_1(x|y).$$

Выражения для условных плотностей распределения через безусловные

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \text{ при } f_1(x) \neq 0;$$

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \text{ при } f_2(y) \neq 0.$$

Случайные величины (X , Y) называются *независимыми*, если условный закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение примет другая:

$$f_1(x|y) = f_1(x) \text{ или } f_2(y|x) = f_2(y).$$

Начальным моментом порядка $k + s$ системы (X , Y) называется величина

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \mathbf{M} [X^k Y^s].$$

Центральным моментом порядка $k + s$ системы (X , Y) называется величина

$$\mu_{k,s}[X, Y] = \mathbf{M} [\overset{\circ}{X}^k \overset{\circ}{Y}^s].$$

Расчетные формулы для определения моментов

а) Для дискретных случайных величин

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij};$$

$$\mu_{k,s}[X, Y] = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^k (y_j - m_y)^s p_{ij},$$

где $p_{ij} = \mathbf{P}((X = x_i)(Y = y_j))$;

б) для непрерывных случайных величин

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \int \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy;$$

$$\mu_{k,s}[X, Y] = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k (y - m_y)^s f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения системы.

Корреляционным моментом K_{xy} двух случайных величин (X, Y) называется центральный момент порядка $1+1$, т.е. $\mu_{11}(X, Y)$ (второй смешанный центральный момент):

$$K_{xy} = \mu_{11}[X, Y] = M[\dot{X}\dot{Y}].$$

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Коэффициентом корреляции r_{xy} двух случайных величин (X, Y) называется безразмерная величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\mu_{2,0}[X, Y]}$; $\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{\mu_{0,2}[X, Y]}$.

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами.

Случайные величины (X, Y) называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент (или, что равносильно, коэффициент корреляции) равен нулю.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность; напротив, из некоррелированности случайных величин еще не следует их независимость.

Если случайные величины (X, Y) связаны линейной функциональной зависимостью вида $Y = aX + b$, то их коэффициент корреляции $r_{xy} = \pm 1$, где знак $+$ или $-$ берется в соответствии со знаком коэффициента a .

Для любых двух случайных величин $|r_{xy}| \leq 1$.

Функцией распределения системы n случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется вероятность совместного выполнения n неравенств вида $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{P}((X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)).$$

Плотностью распределения системы n случайных величин называется смешанная частная производная n -го порядка функции распределения:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функция распределения $F_i(x_i)$ одной из величин X_i , входящих в систему, получается из $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если положить в ней все аргументы, кроме x_i , равными $+\infty$:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, +\infty, \dots, x_i, \dots, +\infty).$$

Плотность распределения отдельной величины X_i , входящей в систему $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, выражается формулой

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

Плотность распределения отдельной подсистемы $(X_i, X_2, \dots, X_k)$, входящей в систему $(X_1, X_2, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$, выражается формулой

$$f_{i, \dots, k}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

Условная плотность распределения подсистемы $X_1, \dots, X_k$ при фиксированных значениях всех остальных случайных величин выражается формулой

$$f_{i, \dots, k}(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{k+1, \dots, n}(x_{k+1}, \dots, x_n)}.$$

Если случайные величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ независимы, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n).$$

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, \dots, X_n)$ в пределы n -мерной области D выражается n -кратным интегралом

$$\mathbf{P}((X_1, \dots, X_n) \in D) = \int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Корреляционной матрицей системы n случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется таблица, составленная из корреляционных моментов всех этих величин, взятых попарно

$$||K_{ij}|| = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix},$$

где $K_{ij} = K_{x_i x_j} = M[\dot{X}_i \dot{X}_j]$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j .

Корреляционная матрица симметрична: $K_{ij} = K_{ji}$, поэтому обычно заполняется лишь половина таблицы,

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & K_{nn} \end{vmatrix}.$$

По главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$$K_{ii} = D[X_i].$$

Нормированной корреляционной матрицей системы n случайных величин называется таблица, составленная из коэффициентов корреляции всех этих величин, взятых попарно,

$$||r_{ij}|| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 1 \end{vmatrix},$$

где $r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ — коэффициент корреляции величин X_i, X_j .

Нормальный закон распределения для двух случайных величин (X, Y) (нормальный закон на плоскости) имеет плотность вида

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]},$$

где m_x, m_y — математические ожидания случайных величин X, Y ; σ_x, σ_y — их средние квадратические отклонения; r — их коэффициент корреляции.

Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости. Если случайные величины (X, Y) некоррелированы (независимы), то $r = 0$ и

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

В этом случае оси Ox, Oy называются *главными осями рассеивания*, а σ_x, σ_y — *главными средними квадратическими отклонениями*.

Если при этом $m_x = m_y = 0$, то нормальный закон принимает *канонический вид*:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в прямоугольник R (см. рис. 6.0.2, б) с осями, параллельными главным осям рассеивания, выражается формулой

$$\mathbf{P}((X, Y) \in R) = \left[\Phi * \left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi * \left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x} \right) \right] \left[\Phi * \left(\frac{\delta - m_y}{\sigma_y} \right) - \Phi * \left(\frac{\gamma - m_y}{\sigma_y} \right) \right].$$

Эллипсом равной плотности (эллипсом рассеивания) называется эллипс, во всех точках которого плотность распределения $f(x, y)$ нормального закона постоянна: $f(x, y) = \text{const}$.

Полуоси эллипса рассеивания пропорциональны главным средним квадратическим отклонениям:

$$a = k \sigma_x; b = k \sigma_y.$$

Вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону, в область E_k , ограниченную эллипсом рассеивания, равна

$$\mathbf{P}((X, Y) \in E_k) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}},$$

где k — размеры полуосей эллипса в средних квадратических отклонениях.

Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, рассеивание по нормальному закону называется *круговым*.

При круговом нормальном рассеивании с $m_x = m_y = 0$ расстояние R от точки (X, Y) до начала координат (центра рассеивания) распределяется по закону Рэлея:

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Нормальный закон в пространстве трех измерений для независимых случайных величин (X, Y, Z) выражается формулой

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-m_z)^2}{\sigma_z^2} \right]}.$$

Вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) в область E_k , ограниченную эллипсоидом равной плотности с полуосями

$$a = k \sigma_x, b = k \sigma_y, c = k \sigma_z,$$

равна

$$\mathbf{P}((X, Y, Z) \in E_k) = 2\Phi^*(k) - 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

6.1. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X — число попаданий первого стрелка; Y — второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1 , для второго p_2 . Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) .

Решение. Составим таблицу значений функции $F(x, y)$ для различных значений аргументов. Так как случайные величины (X, Y) независимы, то

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X < x) \mathbf{P}(Y < y) = F_1(x) F_2(y).$$

Построим функцию распределения $F_1(x)$:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ q_1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

где $q_1 = 1 - p_1$. Аналогично

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ q_2 = 1 - p_2 & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

Значения функции $F(x, y)$ даны в таблице

y	x		
	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$x > 1$
$y \leq 0$	0	0	0
$0 < y \leq 1$	0	$q_1 q_2$	q_2
$x > 1$	0	q_1	1

6.2. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p . Рассматриваются две случайные величины: X — число попаданий; Y — число промахов. Построить функцию распределения $F(x, y)$ системы (X, Y) .

Решение. Случайные величины (X, Y) зависимы, причем жестко (функционально):

$$X + Y = 1.$$

Таблица возможных значений X, Y с соответствующими вероятностями будет

x_i	y_j	
	0	1
0	0	q
1	p	0

Значения функции $F(x, y)$ даны в таблице

y	x		
	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$x > 1$
$y \leq 0$	0	0	0
$0 < y \leq 1$	0	0	p
$x > 1$	0	q	1

6.3. Функция распределения системы двух случайных величин (X, Y) равна $F(x, y)$. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D (рис. 6.3), ограниченную справа абсциссой α , снизу и сверху ординатами γ, δ .

О т в е т. $P((X, Y) \in D) = F(\alpha, \delta) - F(\alpha, \gamma)$.

6.4. Дана поверхность $z = f(x, y)$, изображающая плотность распределения системы (X, Y) (рис. 6.4). Задано некоторое значение x . Дать геометрическую интерпретацию:

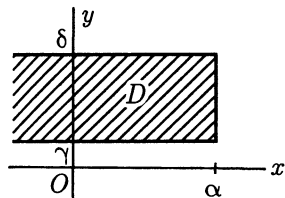


Рис. 6.3

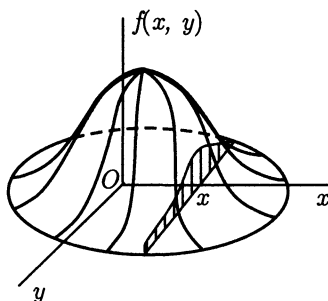


Рис. 6.4

- значению $f_1(x)$ в точке x ;
- условной плотности распределения $f_2(y|x)$.

Р е ш е н и е. Для данного x :

а) $f_1(x)$ изображается площадью сечения, заштрихованного на рисунке;

б) основная плотность распределения изображается кривой, каждая ордината которой равна ординате сечения, деленной на $f_1(x)$.

6.5. Имеются две независимые случайные величины (X, Y) , подчиненные каждая показательному закону:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ \mu e^{-\mu y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

- Написать выражения: а) плотности распределения системы;
- функции распределения системы (X, Y) .

О т в е т.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0, \end{cases}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

6.6. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R со стороной 1 (рис. 6.6 а).

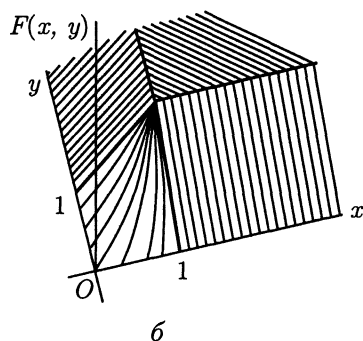
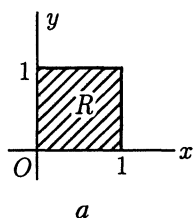


Рис. 6.6

Написать выражение плотности распределения $f(x, y)$. Построить функцию распределения системы.

Написать выражения $f_1(x)$, $f_2(y)$. Определить, являются ли случайные величины (X, Y) независимыми или зависимыми.

О т в е т. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in R, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin R. \end{cases}$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \quad \text{или} \quad y \leq 0, \\ xy & \text{при } 0 < x \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 < y \leq 1, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1 \quad \text{и} \quad y > 1, \\ y & \text{при } x > 1 \quad \text{и} \quad 0 < y \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1 \quad \text{и} \quad y > 1. \end{cases}$$

Поверхность $F(x, y)$ представлена на рис. 6.6, б.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, 1), \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } y \notin (0, 1). \end{cases}$$

Случайные величины (X, Y) независимы, так как

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

6.7. Поверхность распределения системы случайных величин (X, Y) представляет собой прямой круговой конус (рис. 6.7, а); основанием конуса служит круг K с центром в начале координат и с радиусом r_0 . Вне этого круга плотность распределения равна нулю.

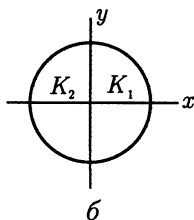
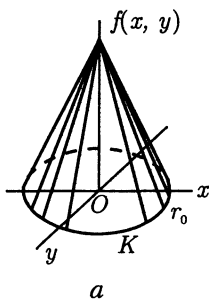


Рис. 6.7

а) Написать выражение $f(x, y)$. б) Найти $f_1(x)$; $f_2(y)$; $f_2(y|x)$; $f_1(x|y)$. в) Определить, являются ли случайные величины X , Y зависимыми. г) Определить, являются ли случайные величины X , Y коррелированными.

Решение.

$$а) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{r_0^3 \pi} (r_0 - \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{при } x^2 + y^2 < r_0^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r_0^2; \end{cases}$$

$$б) f_1(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{r_0^3 \pi} \left[r_0 \sqrt{r_0^2 - x^2} - x^2 \ln \left(\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - x^2}}{|x|} \right) \right] & \text{при } |x| < r_0, \\ 0 & \text{при } |x| > r_0, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{3}{r_0^3 \pi} \left[r_0 \sqrt{r_0^2 - y^2} - y^2 \ln \left(\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - y^2}}{|y|} \right) \right] & \text{при } |y| < r_0, \\ 0 & \text{при } |y| > r_0. \end{cases}$$

Далее, при $|x| < r_0$

$$f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{r_0 - \sqrt{x^2 + y^2}}{r_0 \sqrt{r_0^2 - x^2} - x^2 \ln \left(\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - x^2}}{|x|} \right)} & \text{при } |y| < \sqrt{r_0^2 - x^2}, \\ 0 & \text{при } |y| > \sqrt{r_0^2 - x^2} \end{cases}$$

и при $|y| < r_0$

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \frac{r_0 - \sqrt{x^2 + y^2}}{r_0 \sqrt{r_0^2 - y^2} - y^2 \ln \left(\frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 - y^2}}{|y|} \right)} & \text{при } |x| < \sqrt{r_0^2 - y^2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \sqrt{r_0^2 - y^2}. \end{cases}$$

в) Так как $f_1(x|y) \neq f_1(x)$, то случайные величины X, Y зависимы.

г) Находим корреляционный момент K_{xy} ; так как $m_x = m_y = 0$, то

$$K_{xy} = \iint_{(K)} xyf(x, y) dx dy = \iint_{(K_1)} xyf(x, y) dx dy + \iint_{(K_2)} xyf(x, y) dx dy,$$

где K_1 — правая половина круга K ; K_2 — левая половина (рис. 6.7, б). Функция $xyf(x, y)$ нечетна относительно аргумента x , поэтому интегралы по K_1 и K_2 отличаются только знаком; в сумме интегралы взаимно уничтожаются, значит, $K_{xy} = 0$, и случайные величины X, Y не коррелированы.

6.8. Система случайных величин (X, Y) распределена по закону:

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

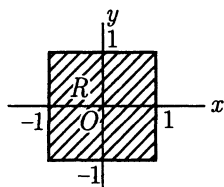


Рис. 6.8

а) Найти коэффициент a . б) Установить, являются ли величины X, Y зависимыми; найти $f_1(x); f_2(y)$. в) Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в пределы квадрата R , центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину $b = 2$ (рис. 6.8).

Решение. а) Из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

находим $a = \frac{1}{\pi^2}$.

б) Случайные величины X, Y независимы:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}; f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

$$в) P((X, Y) \in R) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{4}.$$

6.9. Имеются независимые случайные величины X, Y . Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами: $m_x = 0$; $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале $(0, 1)$. Написать выражения для плотности распределения $f(x, y)$ и функции распределения $F(x, y)$ системы (X, Y) .

$$\text{О т в е т. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} & \text{при } y \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } y \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ y \Phi^*(x\sqrt{2}) & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ \Phi^*(x\sqrt{2}) & \text{при } y > 1. \end{cases}$$

6.10. Поверхность распределения $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) представляет прямой круговой цилиндр, центр основания которого совпадает с началом координат (рис. 6.10, а), а высота равна h . Определить радиус цилиндра r , найти $f_1(x)$; $f_2(y)$; $f_1(x|y)$; $f_2(y|x)$; m_x ; D_x ; K_{xy} .

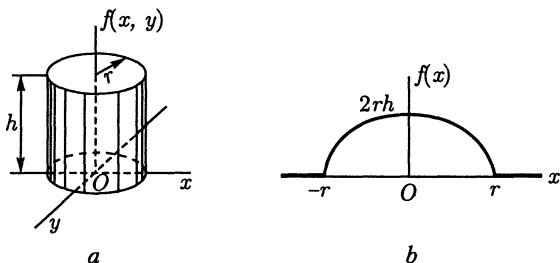


Рис. 6.10

Решение. Радиус цилиндра r определяется из условия: объем цилиндра равен единице, откуда $r = \sqrt{\frac{1}{\pi h}}$. Плотность распределения $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} h, & \text{если } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - x^2}h & \text{при } |x| < r, \\ 0 & \text{при } |x| > r. \end{cases}$$

Аналогично,

$$f_2(y) = \begin{cases} 2\sqrt{r^2 - y^2}h & \text{при } |y| < r, \\ 0 & \text{при } |y| > r. \end{cases}$$

График функции $f_1(x)$ показан на рис. 6.10, б. При $|y| < r$

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}} & \text{при } |x| < \sqrt{r^2 - y^2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \sqrt{r^2 - y^2}. \end{cases}$$

Аналогично, при $|x| < r$

$$f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} & \text{при } |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0 & \text{при } |y| > \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

Математические ожидания равны нулю:

$$m_x = m_y = 0,$$

так как функция $f(x, y)$ четна как по x , так и по y ;

$$D_x = 2h \int_{-r}^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx = hr^4 \frac{\pi}{4} = \frac{r^2}{4}; \sigma_x = \frac{r}{2}; K_{xy} = 0.$$

6.11. Система случайных величин (X, Y) распределена по круговому нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}.$$

а) Заменить приближенно этот закон распределения законом постоянной плотности в круге; радиус круга r_0 подобрать так, чтобы сохранились неизменными дисперсии величин X и Y .

б) Заменить приближенно этот закон распределения законом с поверхностью, изображаемой прямым круговым конусом с центром основания в начале координат; радиус r_1 основания также подобрать из условия равенства дисперсий.

Решение.

а) Сравнивая с задачей 6.10, из соотношения $D_x = \frac{r_0^2}{4} = \sigma^2$ находим $r_0 = 2\sigma$.

б) Сравнивая с задачей 6.7, из соотношения

$$D_x = \frac{3}{r_1^3 \pi} \iint_{(K)} x^2 (x^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \frac{3}{20} r_1^2 = \sigma^2$$

находим $r_1 = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{3}} \sigma = 2,58 \sigma$.

6.12. Случайная точка (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата R , заштрихованного на рис. 6.12, а. Написать выражение плотности распределения $f(x, y)$. Найти выражения плотностей распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ отдельных величин X , Y , входящих в систему. Написать выражения условных плотностей $f_1(x|y)$ и $f_2(y|x)$. Зависимы или независимы случайные величины X , Y ? Коррелированы они или нет?

Решение. Площадь квадрата равна 2, поэтому

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } (x, y) \in R, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin R. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-(1-x)}^{1-x} dy = 1 - x & \text{при } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} \int_{-(1+x)}^{1+x} dy = 1 + x & \text{при } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{при } x < -1 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

или, короче,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

График закона $f_1(x)$ показан на рис. 6.12, б (закон Симпсона). Аналогично,

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{при } |y| < 1, \\ 0 & \text{при } |y| > 1. \end{cases}$$

Далее, при $|y| < 1$

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|y|)} & \text{при } |x| < 1 - |y|, \\ 0 & \text{при } |x| > 1 - |y|. \end{cases}$$

График плотности $f_1(x|y)$ показан на рис. 6.12, в. Аналогично, при $|x| < 1$

$$f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|x|)} & \text{при } |y| < 1 - |x|, \\ 0 & \text{при } |y| > 1 - |x|. \end{cases}$$

Случайные величины X, Y зависимы, но не коррелированы.

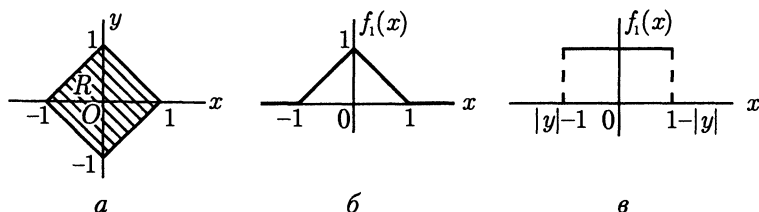


Рис. 6.12

6.13. Плотность распределения системы случайных величин (X, Y) задана формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{1,6 \pi} e^{-\frac{1}{1,28} [(x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2]}.$$

Найти коэффициент корреляции величин X, Y .

О т в е т. $r_{xy} = 0,6$.

6.14. Независимые случайные величины X, Y распределены по нормальным законам с параметрами

$$m_x = 2; m_y = -3; \sigma_x = 1; \sigma_y = 2.$$

Вычислить вероятности следующих событий:

- а) $(X < m_x)(Y < m_y)$; б) $X < 3$; в) $Y < X - 5$; г) $|X| < 1$;
д) $(|X| < 1)(|Y| < 2)$.

Р е ш е н и е.

$$\text{а) } \mathbf{P}((X < m_x)(Y < m_y)) = \mathbf{P}(X < m_x) \mathbf{P}(Y < m_y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{б) } \mathbf{P}(X < 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) = \Phi(1) = 0,8413.$$

в) Искомая вероятность равна интегралу

$$\mathbf{P}(Y < X - 5) = \iint_{(D)} \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8}} dx dy,$$

взятому по области D , где $y < x - 5$. Область D заштрихована на рис. 6.14; она лежит правее и ниже прямой $y = x - 5$. Эта прямая проходит через точку с координатами $m_x = 2$; $m_y = -3$ (центр рассеивания). В силу симметричности нормального закона вероятность попадания случайной точки по одну сторону от прямой, проходящей через центр рассеивания, равна вероятности попадания по другую сторону от этой прямой, поэтому $\mathbf{P}(Y < X - 5) = \frac{1}{2}$.

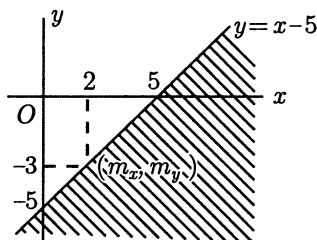


Рис. 6.14

$$\text{г) } \mathbf{P}(|X| < 1) = \mathbf{P}(-1 < X < 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1-2}{1}\right) = 0,1573.$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \mathbf{P}((|X| < 1)(|Y| < 2)) &= \mathbf{P}(|X| < 1)\mathbf{P}(|Y| < 2) = \\ &= 0,1573 \left[\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right) \right] = 0,0476. \end{aligned}$$

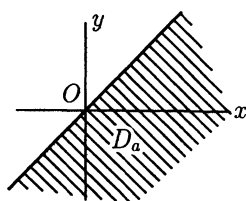
6.15. Система случайных величин (X, Y) имеет распределение с плотностью $f(x, y)$. Выразить через плотность распределения вероятности событий: а) $X > Y$; б) $X > |Y|$; в) $|X| > Y$; г) $Y - X > 1$.

Решение. На рис. 6.15, а, б, в, г заштрихованы области D_a, D_b, D_v, D_z , попадания в которые соответствуют событиям а), б), в), г). Вероятности попадания в них:

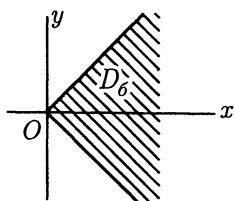
$$\text{а) } \mathbf{P}(X > Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy; \quad \text{б) } \mathbf{P}(X > |Y|) = \int_0^{\infty} \int_{-x}^x f(x, y) dx dy;$$

$$\text{в) } \mathbf{P}(|X| > Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-|x|}^{|x|} f(x, y) dx dy; \quad \text{г) } \mathbf{P}(Y - X > 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x+1}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

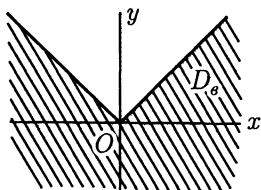
6.16. Система двух случайных величин X, Y распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = m_y = 0$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$; $r_{xy} = 0$. Определить вероятности следующих событий: а) $|Y| < X$; б) $Y < X$; в) $Y < |X|$.



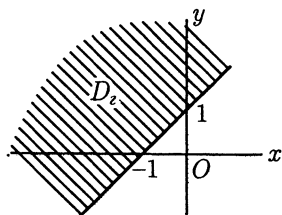
a



б



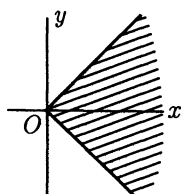
в



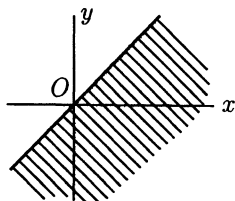
г

Рис. 6.15

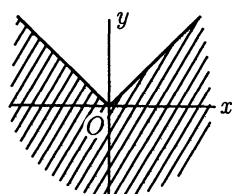
Решение. На рис. 6.16, а, б, в показаны области, соответствующие событиям а), б) и в). При круговом рассеивании вероятности событий будут: а) 0,25; б) 0,5; в) 0,75.



a



б



в

Рис. 6.16

6.17. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$; случайная величина Y связана с ней функциональной зависимостью

$$Y = X^2.$$

Найти функцию распределения $F(x, y)$ системы (X, Y) .

Решение. Исходим из того, что значение случайной величины Y полностью определяется значением случайной величины X . Случайная точка (X, Y) может находиться только на кривой $y = x^2$. Вероятность попадания ее в квадрант с вершиной в точке (x, y) равна вероятности попадания случайной точки X на проек-

цию на ось Ox участка кривой $y = x^2$, попадающей в квадрант (рис. 6.17). Пользуясь этой интерпретацией, имеем

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0 \text{ или } y > 0 \text{ и } x \leq -\sqrt{y}, \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx & \text{при } y > 0 \text{ и } x > \sqrt{y}, \\ \int_{-\sqrt{y}}^x f(x) dx & \text{при } y > 0 \text{ и } -\sqrt{y} < x \leq \sqrt{y}. \end{cases}$$

6.18. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}.$$

Найти вероятность p попадания точки (X, Y) в квадрат R (заштрихованный на рис. 6.18), сторона которого равна двум.

Решение. Так как рассеивание круговое ($\sigma_x = \sigma_y = 1$), то координаты точки (X, Y) остаются независимыми при любом повороте координатных осей, и поэтому при повороте на 45° получаем

$$p = \left[2\Phi\left(\frac{1}{1}\right) - 1 \right]^2 = 0,467.$$

6.19. Случайная точка (X, Y) распределена по нормальному закону на плоскости с параметрами

$$m_x = 1; m_y = -1; \sigma_x = 1; \sigma_y = 2; r_{xy} = 0.$$

Найти вероятность того, что случайная точка попадет внутрь области D , ограниченной эллипсом

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1.$$

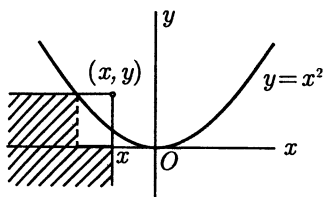


Рис. 6.17

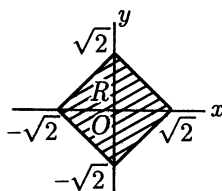


Рис. 6.18

Решение. Область D ограничена эллипсом рассеивания E_1 , с полуосями $a = \sigma_x = 1, b = \sigma_y = 2$; вероятность попадания в эту область $p = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393$.

6.20. Производится стрельба по точечной (малоразмерной) цели снарядом, зона разрушительного действия которого представляет собой круг радиуса r . Рассеивание точки попадания снаряда круговое, с параметрами $m_x = m_y = 0; \sigma_x = \sigma_y = 2r$ (центр рассеивания совпадает с целью). Сколько выстрелов нужно произвести для того, чтобы разрушить цель с вероятностью $P = 0,9$?

Решение. Вероятность разрушения цели при одном выстреле $p = 1 - e^{-\frac{(0,5)^2}{2}} \approx 0,118$. Потребное число выстрелов

$$n \geq \frac{\lg(1 - P)}{\lg(1 - p)} = \frac{\lg 0,1}{\lg 0,882} \approx 18,4, \text{ т.е. } n = 19.$$

6.21. Система трех случайных величин (X, Y, Z) имеет плотность распределения $f(x, y, z)$. Написать выражения:

- 1) плотности распределения $f_1(x)$ случайной величины X ;
- 2) плотности распределения $f_{2,3}(y, z)$ системы случайных величин (Y, Z) ;
- 3) условной плотности распределения $f_{2,3}(y, z|x)$;
- 4) условной плотности распределения $f_2(y|x, z)$;
- 5) функции распределения $F(x, y, z)$;
- 6) функции распределения $F_1(x)$ случайной величины X ;
- 7) функции распределения $F_{1,2}(x, y)$ системы (X, Y) .

О т в е т. 1) $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy dz$;

2) $f_{2,3}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx$;

3) $f_{2,3}(y, z|x) = \frac{f(x, y, z)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy dz}$;

4) $f_2(y|x, z) = \frac{f(x, y, z)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy}$;

5) $F(x, y, z) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^z f(x, y, z) dx dy dz$;

$$6) F_1(x) = F(x, \infty, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz;$$

$$7) F_{1,2}(x, y) = F(x, y, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dx dy dz.$$

6.22. Производится стрельба одним снарядом по точечной (малоразмерной) воздушной цели. Рассеивание точки разрыва снаряда происходит по нормальному закону; центр рассеивания совпадает с целью; средние квадратические отклонения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$. Цель поражается, если расстояние между ней и точкой разрыва снаряда не превышает $r_0 = 2\sigma$. Найти вероятность p того, что при одном выстреле цель будет поражена.

Решение. По формуле для вероятности попадания в эллипсоид равной плотности имеем

$$p = \mathbf{P}((X, Y, Z) \in E_2) = 2\Phi^*(2) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot 2e^{-2} \approx 0,739.$$

6.23. Система трех случайных величин (X, Y, Z) распределена равномерно внутри шара S радиуса r . Написать выражение плотности распределения системы $f(x, y, z)$, плотностей распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$ и $f_3(z)$ отдельных величин, входящих в систему, а также условной плотности распределения $f_1(x|y, z)$.

Решение.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 < r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 > r^2. \end{cases}$$

Постоянную c находим из условия, что объем шара S , умноженный на c , равен единице: $\frac{4}{3}\pi r^3 c = 1$, откуда $c = \frac{3}{4\pi r^3}$.

Плотность $f_1(x)$ определяется выражением

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) dy dz.$$

При $|x| > r$, очевидно, $f_1(x) = 0$. При $|x| < r$ имеем

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c & \text{при } (y, z) \in D_x, \\ 0 & \text{при } (y, z) \notin D_x, \end{cases}$$

где D_x — круг радиуса $\sqrt{r^2 - x^2}$ (рис. 6.23, а, б). Следовательно,

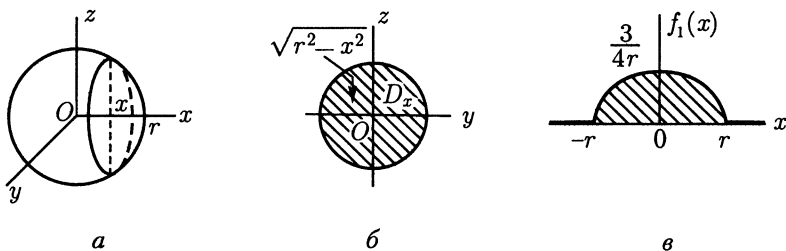


Рис. 6.23

$$f_1(x) = \iint_{(D_x)} c \, dy \, dz = c\pi (r^2 - x^2) \quad (|x| < r)$$

Таким образом,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{r^2 - x^2}{r^3} & \text{при } |x| < r, \\ 0 & \text{при } |x| > r. \end{cases}$$

Кривая распределения представлена на рис. 6.23 в. Числовые характеристики этого закона следующие: $m_x = 0$; $D_x = \frac{r^2}{5}$. Плотности распределения $f_2(y)$ и $f_3(z)$ имеют вид

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{r^2 - y^2}{r^3} & \text{при } |y| < r, \\ 0 & \text{при } |y| > r, \end{cases}$$

$$f_3(z) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{r^2 - z^2}{r^3} & \text{при } |z| < r, \\ 0 & \text{при } |z| > r. \end{cases}$$

Плотность распределения подсистемы (Y, Z)

$$f_{2,3}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \, dx =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} c \, dx = 2c \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} & \text{при } z^2 + y^2 < r^2, \\ 0 & \text{при } z^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Отсюда при $z^2 + y^2 < r^2$ находим условную плотность распределения

$$f_1(x|y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}} & \text{при } |x| < \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$$

6.24. Система трех случайных величин (X, Y, Z) распределена с постоянной плотностью внутри шара радиуса r . Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y, Z) внутрь шара, concentричного данному, с радиусом $r/2$.

О т в е т. $p = \frac{1}{8}$.

6.25. Из урны, в которой a белых, b черных и c красных шаров, вынимается один шар. Случайные величины X, Y, Z определяются следующими условиями:

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 1, & \text{если появится белый шар,} \\ 0, & \text{если появится черный или красный шар.} \end{cases} \\ Y &= \begin{cases} 1, & \text{если появится черный шар,} \\ 0, & \text{если появится белый или красный шар.} \end{cases} \\ Z &= \begin{cases} 1, & \text{если появится красный шар,} \\ 0, & \text{если появится белый или черный шар.} \end{cases} \end{aligned}$$

Построить корреляционную матрицу и нормированную корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y, Z) .

Р е ш е н и е. Корреляционные моменты определим из таблицы вероятностей отдельных значений X, Y и Z .

Обозначим

$$P_{x_i, y_j, z_k} = \mathbf{P}((X = x_i)(Y = y_j)(Z = z_k)).$$

Имеем

$$P_{0,0,0} = \mathbf{P}((X=0)(Y=0)(Z=0)) = 0;$$

$$P_{1,0,0} = \mathbf{P}((X=1)(Y=0)(Z=0)) = \frac{a}{a+b+c};$$

$$P_{0,1,0} = \mathbf{P}((X=0)(Y=1)(Z=0)) = \frac{b}{a+b+c};$$

$$P_{0,0,1} = \mathbf{P}((X=0)(Y=0)(Z=1)) = \frac{c}{a+b+c};$$

$$P_{1,1,0} = P_{1,0,1} = P_{0,1,1} = P_{1,1,1} = 0.$$

$$m_x = \frac{a}{a+b+c}; m_y = \frac{b}{a+b+c}; m_z = \frac{c}{a+b+c};$$

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \sum_{i,j,k} (x_i - m_x)(y_j - m_y) P_{x_i, y_j, z_k} = \\ &= \left(1 - \frac{a}{a+b+c}\right) \left(0 - \frac{b}{a+b+c}\right) \frac{a}{a+b+c} + \\ &+ \left(0 - \frac{a}{a+b+c}\right) \left(1 - \frac{b}{a+b+c}\right) \frac{b}{a+b+c} + \\ &+ \left(0 - \frac{a}{a+b+c}\right) \left(0 - \frac{b}{a+b+c}\right) \frac{c}{a+b+c} = \frac{-ab}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$K_{xz} = \frac{-ac}{(a+b+c)^2}; K_{yz} = \frac{-bc}{(a+b+c)^2}.$$

Далее находим дисперсии

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{a}{a+b+c} - \frac{a^2}{(a+b+c)^2} = \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2};$$

аналогично

$$D_y = \frac{b(a+c)}{(a+b+c)^2}; D_z = \frac{c(a+b)}{(a+b+c)^2}.$$

Отсюда находим коэффициенты корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{-ab}{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}} = -\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}.$$

Аналогично

$$r_{xz} = -\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(c+b)}}, r_{yz} = -\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}.$$

6.26. Имеется система случайных величин X и Y . Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ :

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Случайная величина Y при заданном значении $X = x > 0$ распределена также по показательному закону, но с параметром x :

$$f_2(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Написать плотность распределения $f(x, y)$ системы (X, Y) и найти плотность распределения $f_2(y)$ случайной величины Y ; найти условную плотность $f_1(x|y)$.

Решение.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ \lambda x e^{-(\lambda+y)x} & \text{при } x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{(\lambda + y)^2} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Далее, при $y > 0$

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} x(\lambda + y)^2 e^{-(\lambda+y)x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

6.27. Даны две независимые случайные величины: непрерывная X с плотностью $f_1(x)$ и дискретная Y со значениями $y_1, y_2, \dots, y_n$, имеющими вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$. Найти функцию распределения системы (X, Y) .

Ответ. $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$, где $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx$;

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq y_1, \\ p_1 & \text{при } y_1 < y \leq y_2, \\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i & \text{при } y_{k-1} < y \leq y_k, \quad (k = 2, 3, \dots, n), \\ 1 & \text{при } y > y_n. \end{cases}$$

6.28. Случайная величина X — дискретная величина с двумя значениями x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$), имеющими вероятности p_1 и p_2 .

Случайная величина Y — непрерывная величина; ее условным распределением при $X = x_i$ служит нормальный закон с математическим ожиданием, равным x_i , и средним квадратическим отклонением, равным σ .

Найти функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) . Найти плотность распределения $f_2(y)$ случайной величины y .

Решение. $F(x, y) = \mathbf{P}(X < x) \mathbf{P}(Y < y | X < x)$.

Пусть $x \leq x_1$; тогда $\mathbf{P}(X < x) = 0$ и $F(x, y) = 0$; пусть $x_1 < x \leq x_2$; тогда $\mathbf{P}(X < x) = p_1$ и $F(x, y) = p_1 \mathbf{P}(Y < y | X = x_1) = p_1 \Phi^* \left(\frac{y - x_1}{\sigma} \right)$.

При $x > x_2$ по формуле полной вероятности имеем

$$F(x, y) = p_1 \Phi^* \left(\frac{y - x_1}{\sigma} \right) + p_2 \Phi^* \left(\frac{y - x_2}{\sigma} \right).$$

Следовательно,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1, \\ p_1 \Phi^* \left(\frac{y - x_1}{\sigma} \right) & \text{при } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 \Phi^* \left(\frac{y - x_1}{\sigma} \right) + p_2 \Phi^* \left(\frac{y - x_2}{\sigma} \right) & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

Далее, полагая $x = \infty$ и дифференцируя по y , получаем

$$f_2(y) = \frac{d}{dy} F(\infty, y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \left[p_1 e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2\sigma^2}} + p_2 e^{-\frac{(y-x_2)^2}{2\sigma^2}} \right].$$

6.29*. Звезды на небесной сфере рассматриваются как пуассоновское поле точек. Число звезд, попадающих в объектив телескопа, является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром λS , где S — площадь участка, вырезаемого на поверхно-

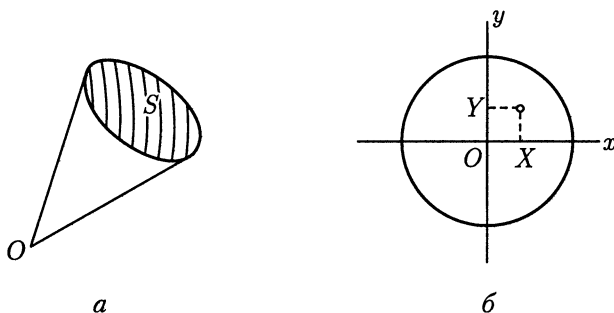


Рис. 6.29

сти сферы полем зрения телескопа (в радианах) (рис. 6.29, *а*). Поле зрения телескопа имеет координатную сетку (рис. 6.29, *б*) (отсчет ведется в радианах). Показать, что при любом положении телескопа координаты (X, Y) ближайшей к перекрестию звезды распределены по нормальному закону с параметрами

$$m_x = m_y = 0; \sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}.$$

Решение. В задаче 5.31 было показано, что расстояние R от центра перекрестия до ближайшей к нему точки пуассоновского поля подчиняется закону Рэлея. Но $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, следовательно, вероятность попадания точки (X, Y) в круг D ($x^2 + y^2 < r^2$) может быть записана в двух формах:

$$\mathbf{P}(R < r) = \int_0^r 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2} dr \quad (r > 0),$$

$$\mathbf{P}((X, Y) \in D) = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения системы (X, Y) . В силу симметрии надо считать, что $f(x, y)$ зависит только от расстояния: $f(x, y) = g(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Переходя к полярным координатам (r, φ) , получаем

$$\mathbf{P}((X, Y) \in D) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r g(r) r dr = 2\pi \int_0^r g(r) r dr. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), находим: $g(r) = \lambda e^{-\pi\lambda r^2}$ и, значит, $f(x, y) = \lambda e^{-\pi\lambda(x^2 + y^2)}$, что и требовалось доказать.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если X — дискретная случайная величина с рядом распределения

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

а величина Y связана с X функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = \mathbf{M}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i,$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$D_y = \mathbf{D}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - m_y]^2 p_i = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i)]^2 p_i - m_y^2.$$

Если (X, Y) — система дискретных случайных величин, распределение которой характеризуется вероятностями

$$p_{ij} = \mathbf{P}((X = x_i)(Y = y_j)),$$

а $Z = \varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z = \mathbf{M}[\varphi(X, Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$\begin{aligned} D_z &= \mathbf{D}[\varphi(X, Y)] = \\ &= \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j) - m_z]^2 p_{ij} = \sum_i \sum_j [\varphi(x_i, y_j)]^2 p_{ij} - m_z^2. \end{aligned}$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а $Y = \varphi(X)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = \mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$D_y = \mathbf{D}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_y]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 f(x) dx - m_y^2.$$

Если (X, Y) — система непрерывных случайных величин с плотностью $f(x, y)$, а $Z = \varphi(X, Y)$, то математическое ожидание величины Z равно

$$m_z = \mathbf{M}[\varphi(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy,$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$\begin{aligned} D_z = \mathbf{D}[\varphi(X, Y)] &= \iint_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y) - m_z]^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x, y)]^2 f(x, y) dx dy - m_z^2. \end{aligned}$$

Если $(X_1, \dots, X_n)$ — система n непрерывных случайных величин с плотностью $f(x_1, \dots, x_n)$, а $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$, то математическое ожидание величины Y равно

$$m_y = \mathbf{M}[\varphi(X_1, \dots, X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

а дисперсия выражается любой из двух формул

$$\begin{aligned} D_y &= \mathbf{D}[\varphi(X_1, \dots, X_n)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, \dots, x_n) - m_y]^2 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, \dots, x_n)]^2 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n - m_y^2. \end{aligned}$$

Если c — не случайная величина, то

$$\mathbf{M}[c] = c; \quad \mathbf{D}[c] = 0.$$

Если c — не случайная величина, а X — случайная, то

$$\mathbf{M}[cX] = c\mathbf{M}[X]; \quad \mathbf{D}[cX] = c^2 D[X].$$

Теорема сложения математических ожиданий

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\mathbf{M}[X + Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y];$$

и вообще

$$\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}[X_i].$$

Математическое ожидание линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b,$$

где a_i и b — не случайные коэффициенты, равно той же линейной функции от их математических ожиданий:

$$m_y = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b,$$

где $m_{x_i} = \mathbf{M}[X_i]$ ($i = 1, \dots, n$).

Короче это правило можно записать так:

$$\mathbf{M}[L(X_1, X_2, \dots, X_n)] = L(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}),$$

где L — линейная функция.

Математическое ожидание произведения двух случайных величин X , Y выражается формулой

$$\mathbf{M}[XY] = \mathbf{M}[X] \mathbf{M}[Y] + K_{xy},$$

где K_{xy} — корреляционный момент величин X , Y . Эту формулу в другом виде можно записать так:

$$K_{xy} = \mathbf{M}[XY] - m_x m_y$$

или, имея в виду, что $\mathbf{M}[XY] = \alpha_{1,1}[X, Y]$,

$$K_{xy} = \alpha_{1,1}[X, Y] - m_x m_y.$$

Теорема умножения математических ожиданий

Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин X , Y равно произведению их математических ожиданий

$$\mathbf{M}[XY] = \mathbf{M}[X] \mathbf{M}[Y].$$

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий

$$\mathbf{M}\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbf{M}[X_i].$$

Дисперсия суммы двух случайных величин выражается формулой

$$\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2K_{xy}.$$

Дисперсия суммы нескольких случайных величин выражается формулой

$$\mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D_{x_i} + 2\sum_{i<j} K_{x_i x_j},$$

где $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j .

Теорема сложения дисперсий

Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных величин X, Y равна сумме их дисперсий

$$\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y],$$

и вообще, для некоррелированных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}[X_i].$$

Дисперсия линейной функции нескольких случайных величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b,$$

где a_i, b — не случайные величины, выражается формулой

$$D_y = \mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{D}[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}.$$

В случае, когда величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ не коррелированы,

$$D_y = \mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbf{D}[X_i].$$

При сложении некоррелированных случайных векторов их корреляционные моменты складываются, т. е. если

$$X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2, \quad K_{x_1 x_2} = K_{x_1 y_2} = K_{y_1 y_2} = K_{y_1 x_2} = 0,$$

то

$$K_{xy} = K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2}.$$

Функция $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ нескольких случайных аргументов $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется «почти линейной», если во всем диапазоне практически возможных значений аргументов она может быть с достаточной для практики точностью линеаризована (приближенно заменена линейной). Это означает, что

$$\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m (X_i - m_{x_i}),$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m = \frac{\partial \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})}{\partial x_i}$ — частная производная функции

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументу x_i в которую вместо каждого аргумента подставлено его математическое ожидание.

Математическое ожидание почти линейной функции $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ приближенно вычисляется по формуле

$$m_y = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}).$$

Дисперсия почти линейной функции приближенно вычисляется по формуле

$$D_y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_m K_{x_i x_j},$$

где D_{x_i} — дисперсия случайной величины X_i ; $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент величин X_i, X_j .

В случае, когда случайные аргументы $X_1, X_2, \dots, X_n$ не коррелированы,

$$D_y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 D_{x_i}.$$

7.1. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2^X$.

Решение. $m_y = 2^{-1} \cdot 0,2 + 2^0 \cdot 0,1 + 2^1 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,4$.

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = (2^{-1})^2 \cdot 0,2 + (2^0)^2 \cdot 0,1 + (2^1)^2 \cdot 0,3 + (2^2)^2 \cdot 0,4 - 2,4^2 = 1,99.$$

7.2. Непрерывная случайная величина X распределена в интервале $(0, 1)$ по закону с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

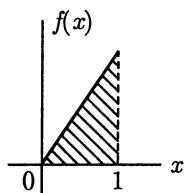


Рис. 7.2

(рис. 7.2). Найти математическое ожидание и дисперсию квадрата случайной величины $Y = X^2$.

Решение. $m_y = \alpha_2[X] = \int_0^1 x^2 2x dx = \frac{1}{2};$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^1 (x^2)^2 2x dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

7.3. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{-X}$.

Решение. $m_y = \int_0^{\infty} e^{-x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + 1}.$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_0^{\infty} e^{-2x} \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2}.$$

7.4. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

Установить, при каких условиях существуют и чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Y = e^X$.

Решение. $m_y = \int_0^{\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-1)x} dx;$

при $\lambda - 1 > 0$, т.е. при $\lambda > 1$, этот интеграл существует и равен $m_y = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$; при $\lambda \leq 1$ он расходится.

$$\alpha_2[Y] = \int_0^{\infty} e^{2x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-2)x} dx.$$

При $\lambda > 2$ этот интеграл существует и равен $\alpha_2[Y] = \frac{\lambda}{\lambda - 2}$, а дисперсия равна $D_y = \frac{\lambda}{\lambda - 2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)^2 = \frac{\lambda}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2}$; при $\lambda \leq 2$ интеграл расходится, и дисперсии D_y не существует.

7.5. Непрерывная случайная величина X распределена по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. $m_y = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = 0;$

$$D_y = \alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}.$$

7.6. Случайная величина X распределена по тому же закону, что и в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |\sin X|$.

Решение.

$$m_y = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha_2[Y] = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|^2 \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 \cos x \, dx = \frac{1}{3}.$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

7.7. Случайная величина X распределена с постоянной плотностью в интервале $(1; 2)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{при } x \notin (1, 2). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

Решение. $m_y = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2;$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - (\ln 2)^2 = \frac{1}{2} - (\ln 2)^2.$$

7.8. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно внутри круга K радиуса $r = 1$ (рис. 7.8). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$.

Решение.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } (x, y) \in K, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin K. \end{cases}$$

$$m_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(K)} xy \, dx \, dy = 0 \text{ (см. задачу 6.7).}$$

$$D_z = \frac{1}{\pi} \iint_{(K)} x^2 y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^5 \cos^2 \varphi \, dr = \frac{1}{24}.$$

7.9. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно внутри квадрата R (рис. 7.9). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$.

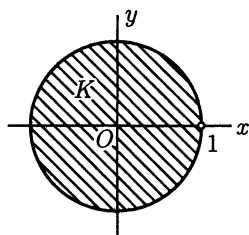


Рис. 7.8

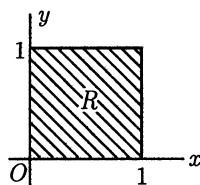


Рис. 7.9

Решение. Так как случайные величины X, Y независимы, то $m_z = m_x m_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$$D_z = \alpha_2[z] - m_z^2 = \mathbf{M}[(XY)^2] - m_z^2 = \mathbf{M}[X^2] \mathbf{M}[Y^2] - m_z^2,$$

$$\mathbf{M}[X^2] = \alpha_2[X] = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{M}[Y^2] = \frac{1}{3}; \quad D_z = \frac{7}{144}.$$

7.10. Имеются две случайные величины X и Y , связанные соотношением $Y = 2 - 3X$. Числовые характеристики величины X заданы: $m_x = -1$; $D_x = 4$.

Определить: а) математическое ожидание и дисперсию величины Y ; б) корреляционный момент и коэффициент корреляции величин X , Y .

Решение. а) $m_y = 2 - 3m_x = 5$; $D_y = (-3)^2 \cdot 4 = 36$.

б) $K_{xy} = \mathbf{M}[XY] - m_x m_y = \mathbf{M}[X(2 - 3X)] + 1 \cdot 5 = 2\mathbf{M}[X] - 3\mathbf{M}[X^2] + 5$, но $\mathbf{M}[X^2] = \alpha_2[X] = D_x + m_x^2 = 4 + 1 = 5$; отсюда

$$K_{xy} = -2 - 3 \cdot 5 + 5 = -12; \quad r_{xy} = \frac{-12}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-12}{\sqrt{4 \cdot 36}} = -1,$$

что и естественно, так как X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

7.11. Имеется случайная величина X с математическим ожиданием m_x и дисперсией D_x . Найти математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин:

$$Y = -X; \quad Z = X + 2Y - 1; \quad U = 3X - Y + 2Z - 3.$$

Ответ. $m_y = -m_x$; $D_y = D_x$; $m_z = -m_x - 1$; $D_z = D_x$;

$m_u = 2m_x - 5$; $D_u = 4D_x$.

7.12. Имеется система случайных величин (X, Y, Z) с заданными характеристиками: математическими ожиданиями m_x, m_y, m_z и корреляционной матрицей

$$\begin{vmatrix} D_x & K_{xy} & K_{xz} \\ & D_y & K_{yz} \\ & & D_z \end{vmatrix}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $U = aX - bY + cZ - d$.

Ответ. $m_u = am_x - bm_y + cm_z - d$;

$$D_u = a^2 D_x + b^2 D_y + c^2 D_z - 2abK_{xy} + 2acK_{xz} - 2bcK_{yz}.$$

7.13. Имеется n -мерный случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, составляющими которого являются n случайных величин X_i с математическими ожиданиями m_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), дисперсиями D_{x_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) и нормированной корреляционной матрицей $\|r_{x_i x_j}\|$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $i < j$).

Случайный вектор $\mathbf{X}$ преобразуется в m -мерный случайный вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, причем составляющие вектора $\mathbf{Y}$ получены из составляющих вектора $\mathbf{X}$ линейными преобразованиями

$$Y_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} X_i + b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Найти характеристики случайного вектора $\mathbf{Y}$: математические ожидания $m_{y_k} (k = 1, 2, \dots, m)$, дисперсии $D_{y_k} (k = 1, 2, \dots, m)$ и элементы нормированной корреляционной матрицы

$$\|r_{y_k y_l}\| \quad (l = 1, 2, \dots, m; \quad k < l).$$

О т в е т. $m_{y_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik} m_{x_i} + b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m);$

$$D_{y_k} = \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}}; \quad r_{y_k y_l} = \frac{K_{y_k y_l}}{\sqrt{D_{y_k} D_{y_l}}},$$

где

$$K_{y_k y_l} = \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{il} D_{x_i} + \sum_{i < j} (a_{ik} a_{jl} + a_{jk} a_{il}) r_{x_i x_j} \sqrt{D_{x_i} D_{x_j}}.$$

7.14. Имеются две независимые случайные величины X и Y . Величина X распределена по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

Величина Y распределена равномерно в интервале $(0; 2)$. Определить: а) $\mathbf{M}[X + Y]$; б) $\mathbf{M}[XY]$; в) $\mathbf{M}[X^2]$; г) $\mathbf{M}[X - Y^2]$; д) $\mathbf{D}[X + Y]$; е) $\mathbf{D}[X - Y]$.

Р е ш е н и е.

а) $\mathbf{M}[X + Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y] = 1 + 1 = 2;$

б) $\mathbf{M}[XY] = \mathbf{M}[X] \mathbf{M}[Y] = 1 \cdot 1 = 1;$

в) $\mathbf{M}[X^2] = \alpha_2[X] = \mathbf{D}[X] + m_x^2 = 4 + 1 = 5;$

г) $\mathbf{M}[X - Y^2] = \mathbf{M}[X] - \mathbf{M}[Y^2] = 1 - \alpha_2[Y] = 1 - \left(\frac{4}{12} + 1\right) = -\frac{1}{3};$

д) $\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3};$

е) $\mathbf{D}[X - Y] = \mathbf{D}[X] + (-1)^2 \mathbf{D}[Y] = 4\frac{1}{3}.$

7.15. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, a)$. Определить: а) $\mathbf{M}[2X + 3]$; б) $\mathbf{M}[3X^2 - 2X + 1]$; в) $\mathbf{D}[2X + 3]$; г) $\mathbf{D}[X^2 + 1]$.

Решение. $m_x = \frac{a}{2}$; $D_x = \frac{a^2}{12}$; $\alpha_2[X] = \frac{a^2}{3}$.

а) $\mathbf{M}[2X + 3] = 2\mathbf{M}[X] + 3 = a + 3$;

б) $\mathbf{M}[3X^2 - 2X + 1] = 3\alpha_2[X] - 2\mathbf{M}[X] + 1 = a^2 - a + 1$;

в) $\mathbf{D}[2X + 3] = 4D_x = \frac{a^2}{3}$;

г) $\mathbf{D}[X^2 + 1] = \mathbf{D}[X^2] = \alpha_2[X^2] - (\mathbf{M}[X^2])^2 = \alpha_2[X^2] - (\alpha_2[X])^2$;
 $\alpha_2[X^2] = \frac{1}{a} \int_0^a x^4 dx = \frac{a^4}{5}$;

отсюда

$$\mathbf{D}[X^2 + 1] = \frac{a^4}{5} - \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}a^4.$$

7.16. Случайная величина X подчинена нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Найти математическое ожидание случайной величины

$$Y = 1 - 3X^2 + 4X^3.$$

Решение.

$$m_y = \mathbf{M}[1 - 3X^2 + 4X^3] = 1 - 3\mathbf{M}[X^2] + 4\mathbf{M}[X^3].$$

Так как $m_x = 0$, то $\mathbf{M}[X^2] = D_x = a^2$; $\mathbf{M}[X^3] = 0$; $m_y = 1 - 3a^2$.

7.17. Независимые случайные величины X и Y распределены по законам $f_1(x)$, $f_2(y)$, графики плотностей которых представлены на рис.7.17, а, б.

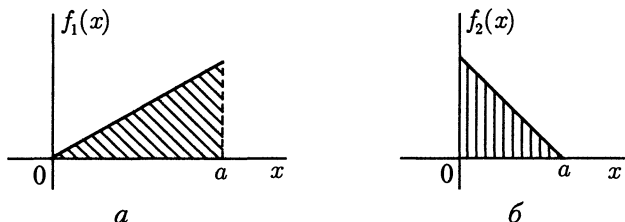


Рис. 7.17

Определить: а) $M[X + Y]$; б) $D[3X - 6Y + 1]$; в) $M[XY]$;
 г) $M[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1]$.

Решение.

$$M[X] = \frac{2}{3}a; \quad M[Y] = \frac{1}{3}b; \quad D[X] = \frac{a^2}{18}; \quad D[Y] = \frac{b^2}{18}.$$

$$\text{а) } M[X + Y] = \frac{1}{3}(2a + b);$$

$$\text{б) } D[3X - 6Y + 1] = 9D_x + 36D_y = \frac{a^2}{2} + 2b^2;$$

$$\text{в) } M[XY] = \frac{2}{3}ab;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } M[2XY - 3X^2 + Y^2 - 1] &= 2M[XY] - 3\alpha_2[X] + \alpha_2[Y] - \\ &= \frac{4}{9}ab - \frac{3}{2}a^2 + \frac{b^2}{6} - 1. \end{aligned}$$

7.18. Ответить на вопросы а), б), в) предыдущей задачи, если величины X , Y зависимы и их коэффициент корреляции равен $r_{xy} = -0,9$.

Решение.

$$\text{а) } M[X + Y] = \frac{1}{3}(2a + b);$$

$$\begin{aligned} \text{б) } D[3X - 6Y + 1] &= \frac{a^2}{2} + 2b^2 + 36 \frac{ab}{\sqrt{18 \cdot 18}} \cdot 0,9 = \\ &= \frac{a^2}{2} + 2b^2 + 1,8ab; \end{aligned}$$

$$\text{в) } M[XY] = \frac{2}{9}ab - 0,9 \frac{ab}{18} = \frac{31}{180}ab.$$

7.19. По сторонам прямого угла xOy концами скользит линейка AB длины l , занимая случайное положение (рис. 7.19), причем все значения абсциссы X ее конца A на оси Ox в пределах от 0 до l одинаково вероятны.

Найти математическое ожидание расстояния R от начала координат до линейки.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, l)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{при } x \in (0, l), \\ 0 & \text{при } x \notin (0, l). \end{cases}$$

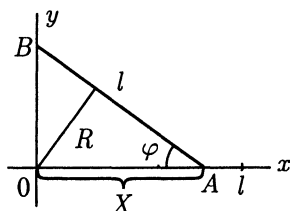


Рис. 7.19

Случайная величина R выражается через X формулой (см. рис. 7.19)

$$R = X \sqrt{1 - \frac{(X)^2}{l^2}}.$$

Ее математическое ожидание равно

$$m_r = \frac{1}{l} \int_0^l x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} dx = \frac{l}{3}.$$

7.20. Случайные величины V , U связаны линейно со случайными величинами X , Y :

$$V = aX + bY + c; \quad U = dX + fY + g.$$

Известны числовые характеристики системы случайных величин (X, Y) : $m_x, m_y, D_x, D_y, K_{xy}$. Требуется найти числовые характеристики системы случайных величин (V, U) : $m_v, m_u, D_v, D_u, K_{vu}, r_{vu}$.

Решение.

$$m_v = am_x + bm_y + c; \quad D_v = a^2 D_x + b^2 D_y + 2abK_{xy};$$

$$m_u = dm_x + fm_y + g; \quad D_u = d^2 D_x + f^2 D_y + 2dfK_{xy}.$$

Далее

$$\dot{V} = a \dot{X} + b \dot{Y}; \quad \dot{U} = d \dot{X} + f \dot{Y};$$

$$K_{vu} = \mathbf{M}[\dot{V}\dot{U}] = adD_x + bfD_y + (af + bd)K_{xy}; \quad r_{vu} = \frac{K_{vu}}{\sqrt{D_v D_u}}.$$

7.21. Производится стрельба независимыми выстрелами по некоторой цели; вероятность попадания в цель для каждого выстрела равна p . Запас снарядов неограничен; стрельба ведется до k -го попадания, после чего прекращается. Найти математическое ожидание числа израсходованных снарядов.

Решение. Обозначим X — число израсходованных снарядов. Имеем

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_k,$$

где X_1 — число выстрелов до первого попадания (включая первое);

X_2 — число выстрелов от первого до второго попадания (включая второе);

.....

X_k — число выстрелов от $(k-1)$ -го до k -го попадания (включая k -е).

По теореме сложения математических ожиданий

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^k \mathbf{M}[X_i].$$

Так как выстрелы независимы и вероятность p одинакова для всех выстрелов, можно вычислять $\mathbf{M}[X_i]$ как математическое ожидание числа выстрелов до первого попадания (см. задачу 5.15): $\mathbf{M}[X_i] = \frac{1}{p}$, откуда

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^k \mathbf{M}[X_i] = \frac{k}{p}.$$

7.22. Тело взвешивается на аналитических весах. Истинное (неизвестное нам) значение массы тела равно a . Вследствие наличия ошибок результат каждого взвешивания случаен и распределяется по нормальному закону с параметрами a и σ .

Для уменьшения ошибок взвешивания пользуются следующим приемом: взвешивают тело n раз и в качестве приближенного значения массы берут среднее арифметическое результатов n взвешиваний

$$Y^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

а) Найти характеристики случайной величины $Y^{(n)}$ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

б) Сколько нужно сделать взвешиваний для того, чтобы уменьшить в десять раз среднюю квадратическую ошибку массы?

Решение.

$$\text{а) } \mathbf{M}[Y^{(n)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}[X_i].$$

Так как все взвешивания производятся в одинаковых условиях, то $\mathbf{M}[X_i] = a$ при любом i ;

$$\mathbf{M}[Y^{(n)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a = \frac{na}{n} = a.$$

Считая ошибки отдельных взвешиваний независимыми, находим дисперсию $Y^{(n)}$:

$$\mathbf{D}[Y^{(n)}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{D}[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

б) Число взвешиваний n находим из условия

$$\sigma[Y^{(n)}] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{10}; \quad n = 100.$$

7.23*. По некоторой цели производится n независимых выстрелов; вероятности попадания в цель для этих выстрелов равны $p_1, p_2, \dots, p_n$. Для упрощения вычислений эти вероятности осредняют, заменяя одной постоянной

$$\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

По этой средней вероятности приблизительно определяются математическое ожидание $\tilde{m}_x$ и среднее квадратическое отклонение $\tilde{\sigma}_x$ числа попаданий X . Будут ли эти характеристики вычислены верно? Если нет, то в какую сторону будет ошибка?

Р е ш е н и е. Математическое ожидание будет вычислено верно:

$$\tilde{m}_x = n \bar{p} = \frac{n}{n} \sum_{i=1}^n p_i = m_x.$$

Что касается среднего квадратического отклонения σ_x , то оно будет завышено: $\tilde{\sigma}_x \geq \sigma_x$. Для доказательства сравним приближенное выражение дисперсии

$$\tilde{D}_x = n \bar{p} \bar{q}, \text{ где } \bar{q} = 1 - \bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - p_i)$$

с ее точным значением

$$D_x = \sum_{i=1}^n p_i q_i.$$

Преобразуем двумя способами сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) &= \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{i=1}^n p_i \bar{q} - \sum_{i=1}^n \bar{p} q_i + n \bar{p} \bar{q} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i q_i - n \bar{p} \bar{q}, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(q_i - \bar{q}) = \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})(1 - p_i - 1 + \bar{p}) = - \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})^2 \leq 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i - n \bar{p} \bar{q} = D_x - \tilde{D}_x \leq 0, \quad \tilde{D}_x \geq D_x,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что знак равенства в $\tilde{D}_x \geq D_x$ достигается *только* при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \bar{p}$.

7.24. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, может случайным образом занимать любое положение на экране (плотность вероятности постоянна). Диаметр экрана равен D . Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

Решение. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, где (X, Y) — система случайных величин, распределенная равномерно в круге K_D диаметра D :

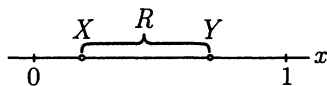
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi D^2} & \text{при } (x, y) \in K_D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin K_D. \end{cases}$$

$$m_r = \mathbf{M}[R] = \iint_{(K_D)} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{4}{\pi D^2} dx dy$$

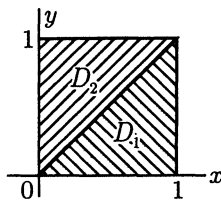
или, переходя к полярной системе координат (r, φ) ,

$$m_r = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{D/2} r^2 dr = \frac{D}{3}.$$

7.25. Две точки X и Y , независимо друг от друга, занимают случайное положение на отрезке $(0; 1)$ оси абсцисс (рис. 7.25, *a*), причем плотность вероятности на этом отрезке постоянна для обеих случайных величин. Найти математическое ожидание расстояния R между этими точками и квадрата расстояния между этими точками.



a



б

Рис. 7.25

Решение. Имеем

$$R = |Y - X|; \quad m_r = \mathbf{M}[|Y - X|].$$

Изобразим систему (X, Y) как случайную точку на плоскости xOy (рис. 7.25, б), распределенную с постоянной плотностью $f(x, y) = 1$ в квадрате со стороной 1. В области D_1 : $X > Y$; $|Y - X| = X - Y$. В области D_2 : $Y > X$; $|Y - X| = Y - X$.

$$\begin{aligned} m_r &= \iint_{(D_1)} (x - y) dx dy + \iint_{(D_2)} (y - x) dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x (x - y) dy + \int_0^1 dy \int_0^y (y - x) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[R^2] &= \mathbf{M}[|Y - X|^2] = \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2m_x m_y = \\ &= 2(D_x + m_x^2) - 2m_x^2 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

7.26. На оси абсцисс имеются два соседних отрезка (рис. 7.26) длиной по единице; в пределы одного из них случайным образом попадает точка X ; в пределы другого — точка Y , причем координаты точек X и Y независимы. Плотность распределения каждой из случайных величин X , Y в пределах соответствующего отрезка постоянна. Найти математическое ожидание, дисперсию и второй начальный момент расстояния R между ними.

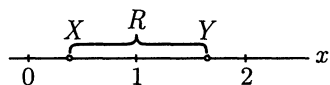


Рис. 7.26

Решение.

$$R = Y - X; \quad m_r = \mathbf{M}[Y] - \mathbf{M}[X] = 1; \quad D_r = D_y + D_x = \frac{1}{6}.$$

$$\alpha_2[R] = \mathbf{M}[R^2] = D_r + m_r^2 = \frac{7}{6}.$$

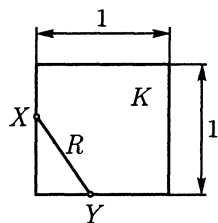


Рис. 7.27

7.27. Имеется квадрат K со стороной, равной 1 (рис. 7.27). На смежные стороны квадрата случайным образом и независимо друг от друга падают точки X и Y ; каждая из них имеет в пределах соответствующей стороны равномерное распределение. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между ними.

Решение.

$$R^2 = X^2 + Y^2; \quad m_{r^2} = \mathbf{M}[R^2] = \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] = \frac{2}{3}.$$

7.28. Условия предыдущей задачи изменены так, что точки X, Y падают не на смежные, а на противоположные стороны квадрата (рис. 7.28). Найти математическое ожидание квадрата расстояния между точками X и Y .

Решение.

$$R^2 = 1 + (Y - X)^2;$$

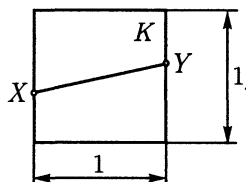


Рис. 7.28

$$\mathbf{M}[R^2] = 1 + \alpha_2[Y] + \alpha_2[X] - 2\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

7.29. Условия предыдущих задач (7.27 и 7.28) изменены так, что точки X и Y случайным образом и независимо друг от друга занимают с постоянной плотностью любое положение на периметре квадрата K . Найти математическое ожидание квадрата расстояния между ними.

Решение. Выберем три гипотезы:

H_1 — точки X, Y легли на одну и ту же сторону квадрата;

H_2 — точки X, Y легли на смежные стороны квадрата;

H_3 — точки X, Y легли на противоположные стороны квадрата.

Математическое ожидание величины R^2 найдем по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{M}[R^2] = \mathbf{P}(H_1) \mathbf{M}[R^2|H_1] + \mathbf{P}(H_2) \mathbf{M}[R^2|H_2] + \mathbf{P}(H_3) \mathbf{M}[R^2|H_3],$$

где $\mathbf{M}[R^2|H_1], \mathbf{M}[R^2|H_2], \mathbf{M}[R^2|H_3]$ — условные математические ожидания величины R^2 при соответствующих гипотезах.

Из ранее решенных задач 7.25, 7.27, 7.28 имеем

$$\mathbf{M}[R^2|H_1] = \frac{1}{6}; \quad \mathbf{M}[R^2|H_2] = \frac{2}{3}; \quad \mathbf{M}[R^2|H_3] = \frac{7}{6}.$$

Находим вероятности гипотез:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{4}; \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}[R^2] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{3}.$$

7.30*. Задача Бюффона. Игла длиной l бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, разделенными расстояниями L ($L > l$) (рис. 7.30, а). Все положения центра иглы и все ее направления одинаково вероятны.

Найти вероятность p того, что игла пересечет какую-нибудь из линий.

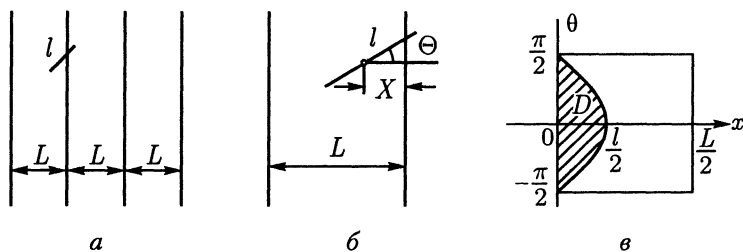


Рис. 7.30

Решение. Положение и ориентация иглы определяются двумя случайными величинами: X и Θ , где X — расстояние от центра иглы до ближайшей к нему линии и Θ — угол, образованный иглой с направлением перпендикуляра к параллельным линиям (рис. 7.30, б). Эти случайные величины распределены равномерно:

X — на участке от 0 до $\frac{L}{2}$;

Θ — на участке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Поэтому $f(x, \theta) = \frac{2}{L\pi}$ при $x \in \left(0; \frac{L}{2}\right)$ и $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $f(x, \theta) = 0$ при $x \notin \left(0; \frac{L}{2}\right)$ или $\theta \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим на плоскости xOy прямоугольник возможных значений величин X и Θ (рис. 7.30, в). Пересечение иглы с линией происходит, если выполняется условие

$$X < \frac{l}{2} \cos \Theta,$$

т.е. если случайная точка X, Θ попадает в область D , заштрихованную на см. рис. в; отсюда

$$p = \iint_{(D)} \frac{2}{L\pi} dx d\theta = \frac{2}{L\pi} S_D,$$

где S_D — площадь области D :

$$S_D = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = l \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = l,$$

откуда $p = \frac{2l}{L\pi}$.

7.31. В условия предыдущей задачи внесено изменение, состоящее в том, что ограничение $l < L$ снимается. Найти математическое ожидание числа пересечений иглы с параллельными линиями, которыми разграфлена плоскость.

Решение. Разделим иглу на n элементарных участков $\Delta l = \frac{l}{n} < L$.

Рассмотрим случайную величину Y — число пересечений иглы с линиями; она равна сумме n случайных величин:

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

где Y_i — число пересечений с линиями для i -го участка иглы. Так как $\Delta l < L$, то случайная величина Y_i может иметь только два значения: 1 и 0 с вероятностями $\frac{2\Delta l}{L\pi}$ и $1 - \frac{2\Delta l}{L\pi}$. Математическое ожидание этой величины равно

$$\mathbf{M}[Y_i] = \frac{2\Delta l}{L\pi} \cdot 1 + \left(1 - \frac{2\Delta l}{L\pi}\right) \cdot 0 = \frac{2\Delta l}{L\pi}.$$

По теореме сложения математических ожиданий

$$\mathbf{M}[Y] = \sum_{i=1}^n \frac{2\Delta l}{L\pi} = \frac{2n\Delta l}{L\pi} = \frac{2l}{L\pi}.$$

7.32. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, фигурирующую в предшествующих задачах, бросается случайным образом любой контур (выпуклый или невыпуклый, замкнутый или незамкнутый) длиной l . Определить математическое ожидание числа пересечений этого контура с прямыми.

Решение. Как и в предыдущей задаче,

$$\mathbf{M}[Y] = \frac{2l}{L\pi}.$$

Чтобы доказать это, нужно разделить контур на n элементарных, практически прямолинейных участков длины Δl ; для каждого из них математическое ожидание числа пересечений будет $\frac{2\Delta l}{L\pi}$, а для всего контура $\frac{2l}{L\pi}$.

7.33. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми на расстоянии L , бросается случайным образом выпуклый замк-

нутый контур длиной l , наибольший размер которого a не превосходит L (рис. 7.33).

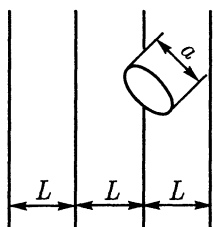


Рис. 7.33

Найти вероятность того, что он пересечется с какой-либо из прямых.

Решение. Обозначим p — искомую вероятность, Y — число точек пересечения контура с прямыми. Так как контур выпуклый и замкнутый, а его наибольший размер меньше L , то контур может иметь либо две точки пересечения с прямыми, либо ни одной. Ряд распределения случайной величины Y имеет вид

y_i	0	2
p_i	$1-p$	p

На основании задачи 7.32

$$M[Y] = 0(1-p) + 2p = 2p = \frac{2l}{L\pi},$$

откуда

$$p = \frac{l}{L\pi}.$$

7.34. Плоскость разграфлена на прямоугольники со сторонами L и M (рис. 7.34). На плоскость случайным образом бросается игла длиной l ($l < L$, $l < M$). Найти вероятность того, что игла пересечется хотя бы с одной из линий.

Решение. Рассмотрим прямые, ограничивающие прямоугольники, как две системы линий — горизонтальных и вертикальных.

Рассмотрим события:

A — игла пересечется с одной из вертикальных прямых;

B — игла пересечется с одной из горизонтальных прямых.

Так как положение иглы относительно вертикальных прямых никак не влияет на ее положение относительно горизонтальных, события A и B независимы; поэтому искомая вероятность

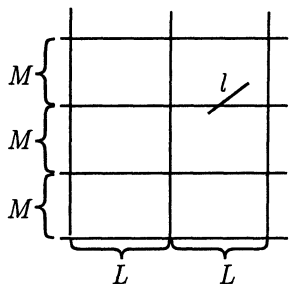


Рис. 7.34

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

На основании задачи 7.30

$$\mathbf{P}(A) = \frac{2l}{\pi L}; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2l}{\pi M},$$

откуда

$$\mathbf{P}(A + B) = \frac{2l}{\pi L} + \frac{2l}{\pi M} - \frac{4l^2}{\pi^2 LM}.$$

7.35. Игла длиной l случайным образом бросается на плоскость, так что все значения угла Θ (рис. 7.35), составленного иглой с фиксированной осью $I-I$, одинаково вероятны.

Найти математическое ожидание длины X проекции иглы на ось $I-I$.

Решение. Имеем $X = l \cos \Theta$. Угол Θ распределен равномерно; поскольку речь идет о длине проекции, можно задать этот угол в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{при } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{при } \theta \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

$$\mathbf{M}[X] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos \theta d\theta = \frac{2l}{\pi}.$$

7.36. Прямоугольник размерами $l_1 \times l_2$ случайным образом бросается на плоскость (рис. 7.36); все значения угла Θ равновероятны. Найти математическое ожидание длины X его проекции на ось $I-I$.

Решение. Представим X как сумму

$$X = X_1 + X_2,$$

где X_1 — проекция отрезка l_1 , X_2 — проекция отрезка l_2 .

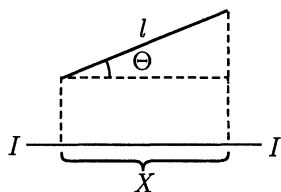


Рис. 7.35

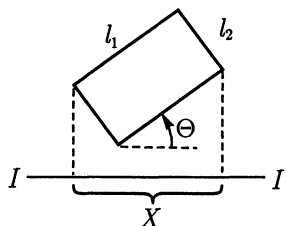


Рис. 7.36

Искомое математическое ожидание равно

$$\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[X_1] + \mathbf{M}[X_2] = \frac{2l_1}{\pi} + \frac{2l_2}{\pi} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\pi},$$

т.е. равно периметру прямоугольника, деленному на π .

7.37. Выпуклый замкнутый контур длиной l бросается случайным образом на плоскость, причем все его ориентации одинаково вероятны (рис. 7.37). Найти математическое ожидание длины X его проекции на ось.

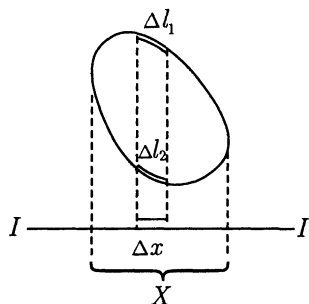


Рис. 7.37

Решение. Так как контур выпуклый, то каждый элемент проекции Δx получается проектированием двух и только двух противоположащих элементов контура: Δl_1 и Δl_2 (см. рис. 7.37); значит, средняя длина проекции контура вдвое меньше, чем сумма средних длин проекций элементарных отрезков Δl , на которые можно разбить контур:

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{2} \sum \frac{2\Delta l}{\pi} = \frac{l}{\pi}.$$

7.38. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

Решение. Запись $Y = |X|$ означает, что

$$Y = \begin{cases} -X & \text{при } X < 0, \\ X & \text{при } X \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m_y = \mathbf{M}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = - \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \\ &+ \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x [f(x) - f(-x)] dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f(x) dx - m_y^2 = \alpha_2[X] - m_y^2 = \\ &= D_x + m_x^2 - m_y^2. \end{aligned}$$

7.39. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля случайной величины X , распределенной по нормальному закону с параметрами m_x, σ_x .

Р е ш е н и е. Из предыдущей задачи

$$m_y = -\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx + \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Делая замену переменных $\frac{x-m_x}{\sigma_x} = t$, получим

$$m_y = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{m_x}{\sigma_x}} (t\sigma_x + m_x) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{m_x}{\sigma_x}}^{\infty} (t\sigma_x + m_x) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{2\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2} + m_x \left[1 - 2\Phi^*\left(-\frac{m_x}{\sigma_x}\right) \right].$$

$$D_y = \sigma_x^2 + m_x^2 - m_y^2.$$

В частности, при $m_x = 0$

$$m_y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_x \approx 0,80 \sigma_x; \quad D_y = \sigma_x^2 - \frac{2}{\pi} \sigma_x^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \sigma_x^2 \approx 0,36 \sigma_x^2.$$

7.40*. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Найти математическое ожидание и дисперсию модуля их разности $Z = |X - Y|$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$m_z = \iint_{-\infty}^{\infty} |x - y| f_1(x) f_2(y) dx dy.$$

Прямая $y = x$ делит плоскость xOy на две области (I) и (II) (рис. 7.40). В области (I) $x > y$, $|x - y| = x - y$. В области (II) $y > x$, $|x - y| = y - x$. Отсюда

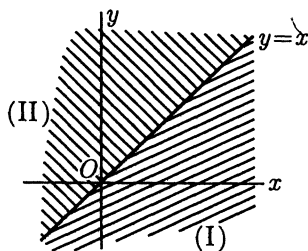


Рис. 7.40

$$m_z = \iint_{(I)} (x - y) f_1(x) f_2(y) dx dy +$$

$$+ \iint_{(II)} (y - x) f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^x f_2(y) dy \right\} dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) \left\{ \int_y^{\infty} f_1(x) dx \right\} dy + \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) \left\{ \int_{-\infty}^y f_1(x) dx \right\} dy - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \left\{ \int_x^{\infty} f_2(y) dy \right\} dx.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функции распределения

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
m_z &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) F_2(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) [1 - F_1(y)] dy + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) F_1(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) [1 - F_2(x)] dx.
\end{aligned}$$

Объединяя первый интеграл с четвертым, а второй с третьим, получим

$$\begin{aligned}
m_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \{2x f_1(x) F_2(x) - x f_1(x)\} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \{2y f_2(y) F_1(y) - y f_2(y)\} dy = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) F_2(x) dx - m_x + 2 \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) F_1(y) dy - m_y.
\end{aligned}$$

Так как X, Y независимы, то

$$\begin{aligned}
\alpha_2[Z] &= \mathbf{M}[|X - Y|^2] = \mathbf{M}[(X - Y)^2] = \\
&= \mathbf{M}[X^2] + \mathbf{M}[Y^2] - 2\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = \\
&= \alpha_2[X] + \alpha_2[Y] - 2m_x m_y = D_x + D_y + (m_x - m_y)^2.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2.$$

7.41. Независимые случайные величины X и Y имеют плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Найти математическое ожидание и дисперсию минимальной из этих двух величин

$$Z = \min \{X, Y\},$$

т.е. случайной величины Z , определяемой следующим образом:

$$Z = \begin{cases} X, & \text{при } X \leq Y, \\ Y, & \text{при } X > Y. \end{cases}$$

Решение. Прямая $y = x$ делит плоскость xOy на две области (см. рис. 7.40): (I), где $Z = Y$, и (II), где $Z = X$ (случай не рассматриваем, как имеющий нулевую вероятность).

$$\begin{aligned} m_z = M[Z] &= \iint_{(II)} x f_1(x) f_2(y) dx dy + \iint_{(I)} y f_1(x) f_2(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) \left\{ \int_x^{\infty} f_2(y) dy \right\} dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) \left\{ \int_y^{\infty} f_1(x) dx \right\} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) [1 - F_2(x)] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y) [1 - F_1(y)] dy, \end{aligned}$$

где F_1, F_2 — функции распределения случайных величин X и Y .

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) [1 - F_2(x)] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y) [1 - F_1(y)] dy;$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2.$$

7.42. Случайное напряжение U распределено по нормальному закону с параметрами m_u и σ_u . Напряжение U поступает на ограничитель, который оставляет его равным U , если $U \leq u_0$ и делает равным u_0 , если $U > u_0$:

$$Z = \min \{U, u_0\} = \begin{cases} U & \text{при } U \leq u_0, \\ u_0 & \text{при } U > u_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z .

Решение.

$$\begin{aligned} m_z = M[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} \min \{u, u_0\} f(u) du = \int_{-\infty}^{u_0} u f(u) du + \\ &+ \int_{u_0}^{\infty} u_0 f(u) du = \int_{-\infty}^{u_0} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} e^{-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma_u^2}} du + \end{aligned}$$

$$+u_0 \int_{u_0}^{\infty} f(u) du = m_u \Phi^* \left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u} \right) - \frac{\sigma_u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u} \right)^2} +$$

$$+u_0 \left[1 - \Phi^* \left(\frac{u_0 - m_u}{\sigma_u} \right) \right] = u_0 - \sigma_u \left[t_0 \Phi^*(t_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_0^2} \right],$$

$$\text{где } t_0 = \frac{u_0 - m_u}{\sigma_u}.$$

$$\alpha_2[Z] = \int_{-\infty}^{u_0} u^2 f(u) du + \int_{u_0}^{\infty} u_0^2 f(u) du =$$

$$= (m_u^2 + \sigma_u^2) \Phi^*(t_0) - \frac{2\sigma_u m_u + \sigma_u^2 t_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_0^2} + u_0^2 [1 - \Phi^*(t_0)];$$

$$D_z = \alpha_2[Z] - m_z^2 = \sigma_u^2 \left\{ (1 + t_0^2) \Phi^*(t_0) + t_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_0^2} - \right.$$

$$\left. - \left[t_0 \Phi^*(t_0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_0^2} \right]^2 \right\}.$$

Заметим, что при $u_0 = m_u$, $t_0 = 0$ будет

$$m_z = m_u - \frac{\sigma_u}{\sqrt{2\pi}}; \quad D_z = \sigma_u^2 \frac{\pi - 1}{2\pi}.$$

7.43. Случайная величина X распределена по нормальному закону:

$$f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}.$$

Независимая от нее случайная величина Y распределена равномерно в интервале $(0, 2)$. Найти: а) $\mathbf{M}[X + Y]$; б) $\mathbf{D}[X + Y]$; в) $\mathbf{M}[XY]$; г) $\mathbf{D}[XY]$; д) $\mathbf{M}[X - Y^2]$; е) $\mathbf{M}[X - Y + X^2 Y^2]$; ж) $\mathbf{D}[X - Y]$.

Решение. $m_x = -1$; $m_y = 1$; $D_x = 4$; $D_y = \frac{1}{3}$.

а) $\mathbf{M}[X + Y] = m_x + m_y = 0$;

б) $\mathbf{D}[X + Y] = D_x + D_y = 4\frac{1}{3}$;

в) $\mathbf{M}[XY] = m_x m_y = -1$;

$$\text{г) } \mathbf{D}[XY] = \alpha_2[XY] - m_x^2 m_y^2 = (D_x + m_x^2)(D_y + m_y^2) - m_x^2 m_y^2 = \\ = D_x D_y + m_x^2 D_y + m_y^2 D_x = 5 \frac{2}{3};$$

$$\text{д) } \mathbf{M}[X - Y^2] = m_x - \alpha_2[Y] = m_x - D_y - m_y^2 = -2 \frac{1}{3};$$

$$\text{е) } \mathbf{M}[X - Y + X^2 Y^2] = m_x - m_y + \mathbf{M}[X^2] \mathbf{M}[Y^2] = m_x - m_y + \\ + (D_x + m_x^2)(D_y + m_y^2) = 4 \frac{2}{3};$$

$$\text{ж) } \mathbf{D}[X - Y] = D_x + D_y = 4 \frac{1}{3}.$$

7.44. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m_x = -1$; $\sigma_x = 3$; случайная величина Y — равномерно в интервале $(0, 3)$; случайная величина Z — равномерно в интервале $(-3, 0)$. Нормированная корреляционная матрица случайных величин X, Y, Z имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,5 & -0,2 \\ & 1 & 0,4 \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $U = 1 - 2X + 3Y - Z$.

Решение. $m_u = 1 - 2m_x + 3m_y - m_z = 9$.

$$D_u = 4D_x + 9D_y + D_z + 2[(-2)3\sigma_x\sigma_y r_{xy} + \\ + (-2)(-1)\sigma_x\sigma_z r_{xz} + 3(-1)\sigma_y\sigma_z r_{yz}] = 41,7 - 10,2\sqrt{3} \approx 24,0.$$

7.45. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно в прямоугольнике R (рис. 7.45). Определить: а) $\mathbf{M}[X + Y]$; б) $\mathbf{M}[X - Y]$; в) $\mathbf{M}[XY]$; г) $\mathbf{D}[X + Y]$; д) $\mathbf{D}[X - Y]$; е) $\mathbf{M}[(X - Y)^2]$; ж) $\mathbf{M}[2X^3 + 3Y^2 + 1]$.

Решение. $m_x = 1, m_y = \frac{1}{2}; D_x = \frac{4}{12}; D_y = \frac{1}{12}; K_{xy} = 0$.

$$\text{а) } \mathbf{M}[X + Y] = m_x + m_y = 1 \frac{1}{2};$$

$$\text{б) } \mathbf{M}[X - Y] = m_x - m_y = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \mathbf{M}[XY] = m_x m_y = \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } \mathbf{D}[X + Y] = D_x + D_y = \frac{5}{12};$$

$$\text{д) } \mathbf{D}[X - Y] = D_x + D_y = \frac{5}{12};$$

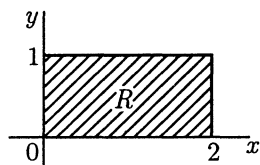


Рис. 7.45

$$\begin{aligned} \text{е) } \mathbf{M}[(X - Y)^2] &= \mathbf{M}[X^2] + \mathbf{M}[Y^2] - 2\mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = D_x + m_x^2 + \\ &+ D_y + m_y^2 - 2m_x m_y = \frac{2}{3}; \\ \text{ж) } \mathbf{M}[2X^3 + 3Y^2 + 1] &= 2\mathbf{M}[X^3] + 3\mathbf{M}[Y^2] + 1 = 6, \text{ так как } \mathbf{M}[X^3] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = 2. \end{aligned}$$

7.46. При работе прибора возникают случайные неисправности; среднее число неисправностей, возникающих за единицу времени работы прибора, равно λ ; число неисправностей за время τ работы прибора — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$. Для ликвидации неисправности (ремонта) требуется случайное время $T_{\text{рем}}$; это время распределено по показательному закону:

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Времена ликвидации неисправностей независимы.

Найти: а) среднюю долю времени, которую прибор будет исправно работать и среднюю долю времени, которую он будет находиться в ремонте; б) средний интервал времени между двумя последовательными неисправностями.

Решение. а) Среднее время исправной работы прибора (математическое ожидание времени, которое проработает прибор после пуска до остановки для ремонта)

$$\bar{t}_{\text{испр}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Среднее время ремонта

$$\bar{t}_{\text{рем}} = \frac{1}{\mu}.$$

Средняя доля времени α , которую прибор будет исправно работать:

$$\alpha = \frac{\bar{t}_{\text{испр}}}{\bar{t}_{\text{испр}} + \bar{t}_{\text{рем}}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Аналогично средняя доля времени β , которую прибор будет находиться в ремонте:

$$\beta = 1 - \alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

б) Средний интервал времени $\bar{I}_t$ между двумя последовательными неисправностями

$$\bar{I}_t = \bar{t}_{\text{испр}} + \bar{t}_{\text{рем}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}.$$

7.47. В пределы прямоугольника R со сторонами a и b (рис.7.47) случайным образом бросается точка (X, Y) , все положения которой в прямоугольнике R равновероятны. Строится прямоугольник R' с вершиной в точке (X, Y) . Найти математическое ожидание и дисперсию площади $S_{R'}$ этого прямоугольника.

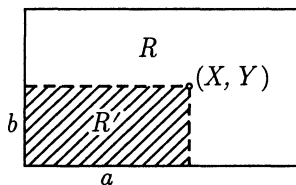


Рис. 7.47

Решение. Выберем за начало координат левый нижний угол прямоугольника, а за оси координат — его нижнюю и левую стороны; тогда случайные величины X, Y независимы, и $S_{R'} = XY$. Поэтому

$$\mathbf{M}[S_{R'}] = \mathbf{M}[XY] = m_x m_y = \frac{ab}{4}.$$

$$\begin{aligned} D[S_{R'}] &= \mathbf{D}[XY] = D_x D_y + m_x^2 D_y + m_y^2 D_x = \\ &= \frac{a^2 b^2}{12 \cdot 12} + \frac{a^2}{4} \frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4} \frac{a^2}{12} = \frac{7a^2 b^2}{144}. \end{aligned}$$

7.48. Случайная точка (X, Y) распределена на плоскости по нормальному закону с круговым рассеиванием:

$$m_x = m_y = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma.$$

Случайная величина R — расстояние от точки (X, Y) до центра рассеивания. Найти математическое ожидание и дисперсию величины R .

$$\text{Решение. } R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

$$m_r = \mathbf{M}[R] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

Переходим к полярной системе координат (r, φ) :

$$m_r = \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,25\sigma.$$

$$D_r = \mathbf{D}[R] = \alpha_2[R] - m_r^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy - m_r^2 = \\ &= \int_0^{\infty} r^3 \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \\ &= 2\sigma^2 \int_0^{\infty} t e^{-t} dt - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = 2\sigma^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = \sigma^2 \frac{4-\pi}{2}. \end{aligned}$$

7.49. Событие A состоит в выпадении ровно двух гербов при бросании трех монет. Опыт, заключающийся в бросании трех монет, повторяется n раз. Найти математическое ожидание и дисперсию следующих случайных величин:

X — число появлений события A при n опытах;

Y — частота события A при n опытах.

Решение. Вероятность события A в одном опыте:

$$p = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbf{M}[X] = np = \frac{3n}{8}; \quad \mathbf{D}[X] = np(1-p) = \frac{15n}{64};$$

$$Y = \frac{X}{n}; \quad \mathbf{M}[Y] = \frac{\mathbf{M}[X]}{n} = \frac{3}{8}; \quad \mathbf{D}[Y] = \frac{1}{n^2} \mathbf{D}[X] = \frac{15}{64n}.$$

7.50. Из урны, в которой находятся два белых шара и три черных, вынимается сразу два шара. Найти м.о. и дисперсию числа появившихся при этом белых шаров а) непосредственно; б) пользуясь теоремами о математических ожиданиях и дисперсиях.

Решение. а) Обозначим X — число появившихся белых шаров. Ряд распределения величины X будет

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,6	0,1

Математическое ожидание величины X :

$$m_x = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8 = \frac{4}{5}.$$

Дисперсия величины X :

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,1 - 0,8^2 = 0,36 = \frac{9}{25}.$$

б) Разделим мысленно опыт на два вынимания шара: первое и второе. Обозначим

X — число белых шаров при двух выниманиях;

X_1 — число белых шаров при первом вынимании;

X_2 — число белых шаров при втором вынимании;

$$X = X_1 + X_2; \quad m_{x_1} = m_{x_2} = \frac{2}{5}; \quad m_x = m_{x_1} + m_{x_2} = \frac{4}{5};$$

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2} + 2K_{x_1x_2}; \quad D_{x_1} = D_{x_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

Находим $K_{x_1x_2}$ через начальный момент $\alpha_{1,1}[X_1, X_2] = \mathbf{M}[X_1 X_2]$.

Построим таблицу распределения вероятностей для системы величин (X_1, X_2)

X_2	X_1	
	0	1
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}[X_1, X_2] &= \mathbf{M}[X_1 X_2] = \\ &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$K_{x_1x_2} = \alpha_{1,1}[X_1, X_2] - m_{x_1} m_{x_2} = -\frac{3}{50};$$

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2} + 2K_{x_1x_2} = \frac{9}{25}.$$

7.51. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают сразу k шаров ($k \leq a + b$). Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.

Решение. Обозначим X число вынутых белых шаров;

$$X = \sum_{i=1}^k X_i,$$

где X_i — число белых шаров, появившихся при i -м вынимании;

$$\mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{b}{a+b}, \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{a}{a+b}.$$

$$m_x = \sum_{i=1}^k m_{x_i} = \sum_{i=1}^k \frac{a}{a+b} = \frac{ka}{a+b}.$$

Для нахождения дисперсии D_x подсчитаем D_{x_i} и $K_{x_i x_j}$.

$$D_{x_i} = \frac{a}{a+b} \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Находим $K_{x_i x_j}$. Для этого, как и в предыдущей задаче, строим таблицу распределения вероятностей для пары случайных величин

X_j	X_i	
	0	1
0	$\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$
1	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

Имеем

$$K_{x_i x_j} = \mathbf{M}[X_i X_j] - m_{x_i} m_{x_j};$$

$$\mathbf{M}[X_i X_j] = 1 \cdot \mathbf{P}((X_i = 1)(X_j = 1)) = \frac{a}{a+b} \frac{a-1}{a+b-1}$$

и

$$K_{x_i x_j} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = -\frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Далее находим дисперсию случайной величины X

$$D_x = \sum_{i=1}^k D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} K_{x_i x_j}.$$

Так как дисперсии D_{x_i} и корреляционные моменты $K_{x_i x_j}$ все одинаковы, то

$$D_x = k D_{x_i} + 2 C_k^2 K_{x_i x_j} = \frac{kab}{(a+b)^2} \frac{a+b-k}{a+b-1}.$$

В частном случае, когда вынимаются все шары ($k = a + b$), получаем естественный результат:

$$m_x = k \frac{a}{a+b} = a, \quad D_x = 0.$$

7.52. Через произвольную точку A на окружности радиуса r случайным образом проводится хорда AB (рис. 7.52), так что все ее направления одинаково вероятны. Найти среднее значение длины хорды.

Решение. Выразим длину хорды Y в зависимости от угла Φ , который составляет хорда с направлением радиуса в точке A . Из рис. 7.52 имеем

$$Y = 2r \cos \Phi,$$

где Φ — случайная величина, которую будем считать распределенной равномерно в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$m_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \cos \varphi \frac{2}{\pi} d\varphi = \frac{4r}{\pi} \approx 1,27r.$$

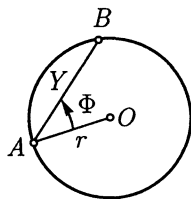


Рис. 7.52

7.53*. Через произвольную точку A внутри круга радиуса r проводится хорда BC (рис. 7.53). Все положения точки A в пределах круга одинаково вероятны. Все направления хорды BC , характеризуемые углом Φ между нею и радиусом, направленным в точку A , также одинаково вероятны. Найти среднюю длину хорды BC .

Решение. Длину хорды D выразим через координаты точки A (X, Y) и угол Φ :

$$D = 2\sqrt{r^2 - H^2} = 2\sqrt{r^2 - (X^2 + Y^2) \sin^2 \Phi},$$

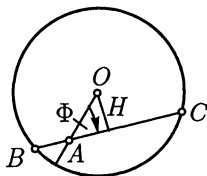


Рис. 7.53

где $H = \sqrt{X^2 + Y^2} \sin \Phi$ — перпендикуляр, опущенный из центра круга на хорду BC . Так как точка (X, Y) равномерно распределена в круге K радиуса r , а угол Φ можно считать равномерно распределенным в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, причем точка (X, Y) и угол Φ независимы, то

плотность распределения системы (X, Y, Φ) есть

$$f(x, y, \varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi r^2} & \text{при } x^2 + y^2 < r^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2 \quad \text{или} \quad \varphi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Поэтому

$$m_d = \frac{2}{\pi^2 r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \iint_K 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \sin^2 \varphi \, dx \, dy.$$

Переходим к полярным координатам (ρ, ψ) :

$$\begin{aligned} m_d &= \frac{4}{\pi^2 r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \sin^2 \varphi \, \rho \, d\rho = \\ &= \frac{8}{\pi r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{r^3 (1 - \cos^3 \varphi)}{3 \sin^2 \varphi} = \frac{16r}{3\pi} \approx 1,70r. \end{aligned}$$

7.54*. Найти среднее значение длины хорды BC (рис. 7.54), проведенной через точку A внутри круга, находящуюся на расстоянии L от центра круга радиуса r , причем все направления этой хорды одинаково вероятны.

Решение. Хорда BC выражается следующим образом через величины L, φ, r :

$$BC = 2r \sqrt{1 - \frac{L^2}{r^2} \sin^2 \varphi}.$$

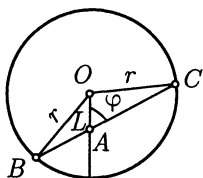


Рис. 7.54

Если длину хорды BC считать случайной величиной X , то

$$m_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} 2r \sqrt{1 - \left(\frac{L}{r}\right)^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{4r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

где $k = \frac{L}{r}$.

Полученный интеграл представляет собой полный эллиптический интеграл $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ с модулем k ; его значения можно найти в справочниках. Например, при $k = \frac{1}{2}$ интеграл $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1,4675$ и $m_x \approx 1,87r$.

Так как полный эллиптический интеграл $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ (при $k = 0$) до 1 (при $k = 1$), то средняя длина хорды m_x будет принимать значения от $2r$ (при $k = 0$, т.е. для точки A в центре круга) до $\frac{4}{\pi}r$ (при $L = r$, т.е. для точек A на окружности).

7.55*. Техническое устройство состоит из n узлов. Каждый узел может выходить из строя независимо от других. Время исправной работы i -го узла распределено по показательному закону с параметром λ_i :

$$f_i(t) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Каждый узел, оказавшийся неисправным, немедленно заменяется новым и поступает в ремонт. Ремонт i -го узла продолжается случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ_i :

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \mu_i e^{-\mu_i t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Устройство работает в течение времени τ . Определить: а) математическое ожидание и дисперсию числа узлов, которые придется заменить; б) математическое ожидание суммарного времени T , которое будет затрачено на ремонт вышедших из строя узлов.

Решение. а) Обозначим X_i число узлов i -го типа, вышедших из строя за время τ . Эта случайная величина распределена по закону Пуассона и имеет математическое ожидание $m_{x_i} = \lambda_i \tau$ и дисперсию $D_{x_i} = \lambda_i \tau$.

Обозначим X общее число узлов, вышедших из строя за время τ . Имеем

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad m_x = \sum_{i=1}^n m_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Так как величины X_i независимы, то

$$D_x = \sum_{i=1}^n D_{x_i} = \tau \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

б) Обозначим T_i общее время, затраченное на ремонт всех вышедших из строя за время τ узлов i -го типа. Оно представляет собой сумму времен, затраченных на ремонт каждого из узлов. Так как число этих узлов равно X_i , то

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \dots + T_i^{(X_i)} = \sum_{k=1}^{X_i} T_i^{(k)},$$

где $T_i^{(k)}$ — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром μ_i ; величины $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \dots$ независимы.

Найдем математическое ожидание случайной величины T_i ; для этого сначала предположим, что случайная величина X_i приняла определенное значение m . При этом условии математическое ожидание величины T_i будет

$$m_{t_i}(m) = \sum_{k=1}^m \mathbf{M}[T_i^{(k)}] = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\mu_i} = \frac{m}{\mu_i}.$$

Умножив это условное математическое ожидание на вероятность P_m того, что случайная величина X_i приняла значение m , и просуммировав все эти произведения, найдем полное (безусловное) математическое ожидание величины T_i :

$$m_{t_i} = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \frac{m}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i} \sum_{m=1}^{\infty} m P_m = \frac{1}{\mu_i} \mathbf{M}[X_i] = \frac{\lambda_i \tau}{\mu_i}.$$

Применяя далее теорему сложения математических ожиданий, получим

$$\mathbf{M}[T] = \tau \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Заметим, что тот же результат можно получить путем следующих (не вполне строгих) рассуждений. Среднее число выходов из строя узла i -го типа за время τ равно $\lambda_i \tau$; среднее время ремонта одного такого узла равно $1 / \mu_i$; среднее время, которое будет затрачено на ремонт всех вышедших из строя за время τ узлов i -го типа равно $\lambda_i \tau / \mu_i$; среднее время, которое будет затрачено на ремонт узлов всех типов, равно $\tau \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

7.56*. Условия задачи 7.55 изменены таким образом, что каждый вышедший из строя узел отправляется в ремонт, а техническое устройство на это время прекращает работу; при неработающем (выключенном) устройстве узлы выходить из строя не могут. Найти: а) математическое ожидание числа остановок устройства за время τ ; б) математическое ожидание той части времени τ , в течение которой устройство будет простаивать (оно же среднее время, затраченное на ремонт).

Решение. а) Обозначим X — число остановок за время τ и найдем его математическое ожидание m_x . Задачу будем решать с помощью следующих не совсем строгих (но тем не менее верных) рассуждений. Рассмотрим неограниченный во времени процесс работы устройства в виде последовательности «циклов» (рис. 7.56),

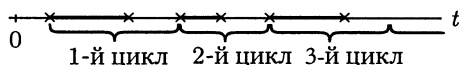


Рис. 7.56

каждый из которых состоит из периода работы системы (отмечен жирной линией) и периода ремонта. Длительность каждого цикла представляет собой сумму двух случайных величин: $T_{\text{раб}}$ (времени работы устройства) и $T_{\text{рем}}$ (времени ремонта). Средняя длительность времени работы устройства $m_{t_{\text{раб}}}$ вычисляется как среднее

время между двумя последовательными отказами в потоке отказов плотности $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$; это среднее время равно $m_{t_{\text{раб}}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

Находим среднее время ремонта $m_{t_{\text{рем}}}$. Будем его искать по формуле полного математического ожидания при гипотезах H_i — ремонтируется узел i -го типа ($i = 1, 2, \dots, n$).

Вероятность каждой гипотезы пропорциональна параметру λ_i

$$P(H_i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

Условное математическое ожидание времени ремонта при этой гипотезе равно $1/\mu_i$; отсюда

$$m_{t_{\text{рем}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda \mu_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Среднее время цикла

$$m_{t_{\text{ц}}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right).$$

Теперь представим себе последовательность остановок устройства как последовательность случайных точек на оси $0t$, разделенных интервалами, в среднем равными $m_{t_{\text{ц}}}$. Среднее число остановок за время τ будет равно среднему числу таких точек на отрезке длиной τ :

$$m_x = \frac{\tau}{m_{t_{\text{ц}}}} = \frac{\lambda \tau}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

б) За каждый цикл устройство будет простаивать (ремонтиться) в среднем время $m_{t_{\text{рем}}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}$; за m_x циклов среднее время простоя будет равно

$$m_x m_{t_{\text{ц}}} = \frac{\lambda \tau}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \cdot \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{\tau \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}.$$

7.57. Случайная величина X распределена по нормальному закону с характеристиками m_x и σ_x . Случайные величины Y и Z связаны с X зависимостями $Y = Y^2$; $Z = X^3$. Найти корреляционные моменты K_{xy} , K_{xz} и K_{yz} .

Решение. Для упрощения вычислений перейдем к центрированным величинам и воспользуемся тем, что для центрированной нормальной величины $\dot{X} = X - m_x$ все моменты нечетных порядков равны нулю, а $\mathbf{M}[\dot{X}^2] = \sigma_x^2$, $\mathbf{M}[\dot{X}^4] = 3\sigma_x^4$ (см. задачу 5.53). Так как

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= (\dot{X} + m_x)^2 - \mathbf{M}[X^2] = \dot{X}^2 + 2\dot{X}m_x + m_x^2 - D_x - m_x^2 = \\ &= \dot{X}^2 + 2\dot{X}m_x - \sigma_x^2; \end{aligned}$$

то

$$K_{xy} = \mathbf{M}[\dot{X}\dot{Y}] = \mathbf{M}[\dot{X}(\dot{X}^2 + 2\dot{X}m_x - \sigma_x^2)] = 2\sigma_x^2 m_x.$$

Далее

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= (\dot{X} + m_x)^3 - \mathbf{M}[X^3] = \dot{X}^3 + 3\dot{X}^2 m_x + 3\dot{X} m_x^2 + m_x^3 - \\ &- (3m_x \sigma_x^2 + m_x^3) = \dot{X}^3 + 3\dot{X}^2 m_x + 3\dot{X} m_x^2 - 3m_x \sigma_x^2,\end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}K_{xz} &= \mathbf{M}[\dot{X} \dot{Y}] = \mathbf{M}[\dot{X}^4] + 3m_x \mathbf{M}[\dot{X}^3] + 3m_x^2 \mathbf{M}[\dot{X}^2] - \\ &- 3m_x \sigma_x^2 \mathbf{M}[\dot{X}] = 3\sigma_x^4 + 3m_x^2 \sigma_x^2.\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}K_{yz} &= \mathbf{M}[(\dot{X}^2 + 2\dot{X} m_x - \sigma_x^2)(\dot{X}^3 + 3\dot{X}^2 m_x + 3\dot{X} m_x^2 - 3m_x \sigma_x^2)] = \\ &= 5m_x \mathbf{M}[\dot{X}^4] + 6m_x (m_x^2 - \sigma_x^2) \mathbf{M}[\dot{X}^2] + 3m_x \sigma_x^4 = 12m_x \sigma_x^4 + 6m_x^3 \sigma_x^2.\end{aligned}$$

7.58. Воздушная цель перемещается над обороняемой территорией со скоростью v . В течение времени τ цель находится в зоне действия средств противовоздушной обороны. Число обстрелов, которому может подвергнуться цель, находясь над территорией, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $a = \lambda \tau$. В результате каждого обстрела цель поражается с вероятностью p . Пораженная цель немедленно прекращает полет. а) Найти вероятность P_{t_0} того, что к моменту $t_0 < \tau$ цель будет поражена. б) Найти среднюю глубину проникания цели на обороняемую территорию.

Решение. а) Выделим из пуассоновского «потока обстрелов» цели с плотностью λ поток «поражающих обстрелов» с плотностью λp . Вероятность того, что за время t_0 цель будет поражена, равна вероятности того, что за время t_0 произойдет хотя бы один поражающий обстрел: $P_{t_0} = 1 - e^{-\lambda p t_0}$.

б) Введем гипотезу: цель поражена в интервале времени $(t, t + dt)$. Вероятность этой гипотезы будет $\lambda p e^{-\lambda p t} dt$ ($0 < t < \tau$). В предположении, что указанная гипотеза имела место, дальность D , на которой самолет будет поражен, равна vt . Следовательно, средняя глубина проникания цели на обороняемую территорию будет:

$$m_D = \int_0^{\tau} v t e^{-t \lambda p} \lambda p dt = \frac{v}{\lambda p} [1 - e^{-\lambda p \tau} (\lambda p \tau + 1)].$$

Заметим, что $m_D \rightarrow \frac{\nu}{\lambda p}$ при $\tau \rightarrow \infty$.

7.59. Тело, масса которого равна a [г], взвешивается на аналитических весах четыре раза; получаются результаты X_1, X_2, X_3, X_4 . В качестве измеренного значения массы принимается их среднее арифметическое: $Y = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$. Результаты взвешиваний независимы. Весы дают систематическую ошибку $m_x = 0,001$ [г]. Среднее квадратическое отклонение каждого взвешивания $\sigma_x = 0,002$ [г]. Найти параметры: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y .

Решение. $m_y = \frac{1}{4} \cdot 4(m_x + a) = a + 0,001$ [г].

$$D_y = \frac{1}{4^2} \cdot 4D_x = \frac{1}{4} D_x; \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x}{2} = 0,001 \text{ [г]}.$$

7.60. Производятся четыре независимых измерения одной и той же величины X . Каждое измерение характеризуется одним и тем же математическим ожиданием m_x и средним квадратическим отклонением σ_x . Результаты измерений: X_1, X_2, X_3, X_4 . Рассматриваются разности между соседними измерениями: $Y_1 = X_2 - X_1$; $Y_2 = X_3 - X_2$; $Y_3 = X_4 - X_3$.

Найти характеристики системы этих случайных величин: математические ожидания $m_{y_1}, m_{y_2}, m_{y_3}$; средние квадратические отклонения $\sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \sigma_{y_3}$; нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

Решение. $m_{y_1} = m_{y_2} = m_{y_3} = 0$.

$$\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_2}^2 = \sigma_{y_3}^2 = 2\sigma_x^2; \quad \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \sigma_x \sqrt{2}.$$

В силу независимости величин $\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \dot{X}_4$

$$K_{y_1 y_2} = \mathbf{M}[(\dot{X}_2 - \dot{X}_1)(\dot{X}_3 - \dot{X}_2)] = -\mathbf{M}[\dot{X}_2^2] = -\sigma_x^2;$$

$$K_{y_2 y_3} = \mathbf{M}[(\dot{X}_3 - \dot{X}_2)(\dot{X}_4 - \dot{X}_3)] = -\mathbf{M}[\dot{X}_3^2] = -\sigma_x^2;$$

$$K_{y_1 y_3} = \mathbf{M}[(\dot{X}_2 - \dot{X}_1)(\dot{X}_4 - \dot{X}_3)] = 0.$$

$$r_{y_1 y_2} = r_{y_2 y_3} = \frac{-\sigma_x^2}{2\sigma_x^2} = -\frac{1}{2}; \quad r_{y_1 y_3} = 0.$$

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

7.61. Стрельба по некоторой цели C начинается в момент ее обнаружения и продолжается вплоть до некоторого момента t^* , в который цель покидает зону обстрела и становится уже недоступной. Момент T , в который обнаруживается цель, представляет собой случайную величину, распределенную с постоянной плотностью в промежутке от 0 до t^* . Число выстрелов, которое может быть осуществлено по цели за время ее обстрела $t^* - T$, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = \lambda(t^* - T)$. При каждом выстреле цель поражается с вероятностью p . Найти полную вероятность поражения цели с учетом случайности момента обнаружения.

Решение. Вероятность поражения цели есть функция момента обнаружения $p(T)$. Рассматривая пуассоновский поток «поражающих» выстрелов с плотностью λp , имеем $p(T) = 1 - e^{-p\lambda(t^* - T)}$. Полная вероятность поражения

$$\bar{p} = M[p(T)] = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} [1 - e^{-p\lambda(t^* - t)}] dt = 1 - \frac{1}{p\lambda t^*} [1 - e^{-p\lambda t^*}].$$

Отметим, что при малых $p\lambda t^*$ будет $\bar{p} \approx \frac{1}{2} p\lambda t^*$.

7.62. Имеется кубический бак с горючим, на одной из шести стенок которого случайным образом появляется пробоина от осколка; пробоина оказывается с равной вероятностью на любой из шести стенок бака и в любой точке каждой из шести стенок. Вследствие наличия пробоины из бака вытекает все горючее, находящееся выше пробоины. В неповрежденном состоянии бак заполнен на $3/4$ своего объема. Определить среднее количество горючего, которое сохранится в баке после пробития его осколком.

Решение. Для простоты будем считать ребро бака равным единице. Высоту пробоины обозначим через X , количество оставшегося горючего через Y . Так как площадь основания равна единице, то

$$Y = \begin{cases} X & \text{при } X < 0,75, \\ 0,75 & \text{при } 0,75 < X < 1. \end{cases}$$

Если пробоина окажется выше чем на 0,75 от дна бака ($X > 0,75$), то горючее вытекать не будет, и в баке останется, как и было, количество горючего $Y = 0,75$; вероятность этого равна доле площади поверхности бака, находящейся выше уровня 0,75:

$$\mathbf{P}(Y = 0,75) = \mathbf{P}(X \geq 0,75) = \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,25 = \frac{1}{3}.$$

Если пробоина окажется в дне бака ($X = 0$), то вытечет все горючее; вероятность этого равна доле площади, приходящейся на дно бака:

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{6}.$$

Если пробоина окажется в одной из боковых стенок бака на расстоянии $X < 0,75$ от дна, то в баке останется количество горючего $Y = X$. Плотность вероятности в интервале $0 < x < 0,75$ постоянна и равна $\frac{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}}{0,75} = \frac{2}{3}$. Среднее количество оставшегося в ба-

ке горючего будет равно

$$m_y = 0,75 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + \int_0^{0,75} x \cdot \frac{2}{3} dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} = 0,44.$$

7.63. В интервале $(0, 1)$ зафиксирована точка a (рис. 7.63). Случайная точка X распределена равномерно в том же интервале. Найти коэффициент корреляции между случайной величиной X и расстоянием R от точки a до X (расстояние R всегда считается положительным). Определить, при каком значении a величины X и R будут не коррелированы.

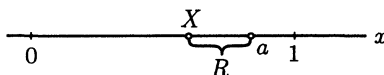


Рис. 7.63

Решение. Определим K_{xr} по формуле

$$K_{xr} = \mathbf{M}[XR] - m_x m_r.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[XR] &= \mathbf{M}[X|a - X|] = \int_0^1 x|a - x| f(x) dx = \\ &= \int_0^1 x|a - x| dx = \int_0^a x(a - x) dx - \int_a^1 x(a - x) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$m_x = \frac{1}{2}; \quad m_r = \int_0^1 |a - x| dx = \int_0^a (a - x) dx - \\ - \int_a^1 (a - x) dx = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$K_{xr} = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(a^2 - a + \frac{1}{2} \right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}.$$

Находим

$$D_x = \frac{1}{12}; \quad \sigma_x = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad D_r = \alpha_2[R] - m_r^2;$$

$$\alpha_2[R] = \int_0^1 (a - x)^2 dx = a^2 - a + \frac{1}{3};$$

$$D_r = 2a^3 - a^4 - a^2 + \frac{1}{12}; \quad \sigma_r = \sqrt{D_r}.$$

Отсюда

$$r_{xr} = - \frac{\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}}{\sqrt{2a^3 - a^4 - a^2 + \frac{1}{12} \frac{1}{2\sqrt{3}}}}.$$

Уравнение $\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12} = 0$ имеет только один корень в интервале $(0, 1)$: $a = \frac{1}{2}$. Поэтому случайные величины X, R становятся некоррелированными только при $a = \frac{1}{2}$.

7.64. Автомобиль может двигаться по шоссе с произвольной скоростью v ($0 < v \leq v_{\max}$). Чем быстрее движется автомобиль, тем больше вероятность того, что он будет задержан автоинспектором. Каждая задержка длится в среднем время t_3 . Инспекторы на пути следования стоят случайным образом; при этом на единицу длины пути приходится случайное число инспекторов, распределенное

по закону Пуассона с параметром λ . Зависимость вероятности задержки от скорости автомобиля линейная:

$$p(v) = kv \quad (0 < v \leq v_{\max}),$$

где $k = \frac{1}{v_{\max}}$.

Определить рациональную скорость движения v_p автомобиля, при которой он пройдет путь s в среднем за минимальное время.

Решение. Среднее время прохождения пути s будет

$$t = \frac{s}{v} + \lambda sp(v)t_3 = \frac{s}{v} + \lambda skvt_3.$$

Если минимум этой функции лежит внутри интервала $(0, v_{\max})$, то его можно найти из уравнения

$$\frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{s}{v^2} + \lambda skt_3 = 0,$$

откуда

$$v = v_p = \sqrt{\frac{1}{\lambda kt_3}} = \sqrt{\frac{v_{\max}}{\lambda t_3}}.$$

Эта формула справедлива при $v_p < v_{\max}$, т.е. при $v_{\max} > \frac{1}{\lambda t_3}$.

Так, например, при $v_{\max} = 100$ [км/ч], $\lambda = \frac{1}{20} \left[\frac{1}{\text{км}} \right]$ и $t_3 = 20$ мин

имеем

$$v_p = \sqrt{\frac{100}{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3}}} \approx 77,5 \text{ [км/ч]}.$$

Если $v_{\max} < \frac{1}{\lambda t_3}$, то минимум функции $t = \frac{s}{v} + \lambda sp(v)t_3$ лежит вне интервала $(0, v_{\max})$, и наивыгоднейшей является скорость $v_p = v_{\max}$. Например, если при указанных выше данных время задержки уменьшить до 10 мин, то $v_p = v_{\max} = 100$ [км/ч].

7.65. Описывается окружность с помощью циркуля, расстояние между ножками которого номинально равно 5 см, но фактически устанавливается с ошибкой, математическое ожидание которой равно нулю, а среднее квадратическое отклонение 0,1 см. Ошибка распределена по нормальному закону. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение площади описанной окружности S двумя способами: а) точным и б) приближенным, пользуясь методом линеаризации.

Решение.

$$а) S = \pi (5 + X)^2,$$

где X — ошибка в установке радиуса, $m_x = 0, \sigma_x = 0,1$.

$$m_s = \mathbf{M}[S] = \pi \mathbf{M}[(5 + X)^2] = \pi (25 + 10\mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[X^2]) = \\ = \pi (25 + \sigma_x^2) = \pi \cdot 25,01;$$

$$\mathbf{D}[S] = \alpha_2[S] - m_s^2;$$

$$\alpha_2[S] = \mathbf{M}[\pi^2 (5 + X)^4] = \pi^2 \{625 + 500m_x + 150\alpha_2[X] + \\ + 20\alpha_3[X] + \alpha_4[X]\} = \pi^2 (625 + 150\sigma_x^2 + 3\sigma_x^4),$$

так как при $m_x = 0$ начальные моменты совпадают с центральными (см. задачу 5.53);

$$\mathbf{D}[S] = \pi^2 [625 + 150\sigma_x^2 + 3\sigma_x^4] - \pi^2 [625 + 50\sigma_x^2 + \sigma_x^4] = \pi^2 \cdot 1,0002;$$

$$\sigma_s = 1,0001\pi;$$

$$б) m_s = 25\pi; D_s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_m^2 D_x = (2 \cdot \pi \cdot 5)^2 \cdot 0,01 = \pi^2;$$

$$\sigma_s = \pi.$$

Таким образом, разница при вычислении точным и приближенным методами мала (0,04 % по m_s и 0,01 % по σ_s).

7.66. Для построения равностороннего треугольника со стороной $a = 3$ см пользуются следующим способом: из произвольной точки O откладывают отрезок длиной a ; при нем строят угол α , равный 60° ; затем на стороне этого угла снова откладывают отрезок длиной a и полученную точку соединяют с точкой O (рис. 7.66). Отрезки длиной a откладываются с помощью линейки с делениями по 1 мм; максимально возможная при этом ошибка равна 0,5 мм. Угол откладывается с помощью транспортира с максимальной возможной ошибкой 1° . Пользуясь методом линеаризации, найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение третьей стороны X .

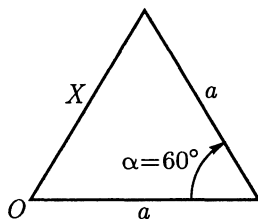


Рис. 7.66

Решение. Обозначим фактическую длину первой стороны X_1 , второй X_2 , фактическое значение угла Θ . Эти случайные величины можно считать независимыми. Имеем

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 \cos \Theta}.$$

Пользуясь методом линеаризации, найдем

$$m_x = \sqrt{m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 - 2m_{x_1}m_{x_2} \cos m_\theta},$$

где $m_{x_1} = m_{x_2} = 30$ [мм], $\cos m_\theta = \frac{1}{2}$, откуда

$$m_x = \sqrt{900 + 900 - 900} = 30 \text{ [мм]}.$$

Далее

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)_m = \left(\frac{1}{2} \frac{2x_1 - 2x_2 \cos \theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta}} \right)_m = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \right)_m = \left(\frac{1}{2} \frac{2x_2 - 2x_1 \cos \theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta}} \right)_m = \frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_m = \left(\frac{1}{2} \frac{2x_1x_2 \sin \theta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \theta}} \right)_m = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ [мм]}.$$

Вычисляем

$$D_x \approx \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)_m^2 D_{x_1} + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \right)_m^2 D_{x_2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_m^2 D_\theta.$$

Дисперсии аргументов не заданы, заданы лишь максимальные практически возможные отклонения их от математических ожиданий:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5 \text{ [мм]}; \quad \Delta \theta = 1^\circ = 0,01745 \text{ [рад]}.$$

Полагая приближенно

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \frac{1}{3} \Delta x_1 = 0,167 \text{ [мм]}; \quad D_{x_1} = D_{x_2} = 0,0278 \text{ [мм}^2\text{]},$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{3} \Delta \theta = 0,00582 \text{ [рад]}; \quad D_\theta = 3,39 \cdot 10^{-5} \text{ [рад]},$$

получим

$$D_x = \frac{1}{4} \cdot 0,0278 \cdot 2 + 675 \cdot 3,39 \cdot 10^{-5} \approx 0,0139 + 0,0229 = 0,0368 \text{ [мм}^2\text{]};$$

$$\sigma_x = 0,192 \text{ [мм]}.$$

7.67. Расстояние D от некоторой точки O до объекта K определяется следующим образом: измеряется угол α , под которым виден объект из точки O (рис. 7.67); далее, зная линейный размер объекта X , определяют расстояние по приближенной формуле:

$$D = \frac{X}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{X}{\alpha}.$$

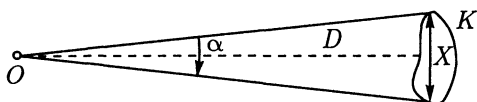


Рис. 7.67

Линейный размер объекта X в зависимости от случайного положения объекта может изменяться в пределах от 8 до 12 м; угол α определяется с точностью до 0,1 тысячной радиана. Расстояние D велико по сравнению с размером объекта X . Найти приближенно среднее квадратическое отклонение σ_D ошибки в определении расстояния D , если измеренное значение угла α равно одной тысячной радиана.

Решение. Применяя метод линеаризации, имеем

$$\sigma_D^2 = \left(\frac{\partial D}{\partial x} \right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_m^2 \sigma_\alpha^2.$$

Линейный размер X считаем равномерно распределенным в интервале (8, 12):

$$\sigma_x = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}} = \frac{12 - 8}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ [м]}; \quad \sigma_x^2 = \frac{4}{3} \text{ [м}^2\text{]}; \quad m_x = 10 \text{ [м]}.$$

Далее

$$\sigma_\alpha \approx \frac{0,0001}{3}; \quad \sigma_\alpha^2 = \frac{10^{-8}}{9}; \quad m_\alpha = 0,001,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma_D^2 &= \left(\frac{1}{\alpha} \right)_m^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{\alpha^2} \right)_m^2 \sigma_\alpha^2 = \left(\frac{1}{10^{-3}} \right)^2 \cdot \frac{4}{3} + \\ &+ \left(\frac{10}{10^{-6}} \right)^2 \cdot \frac{10^{-8}}{9} = \frac{4}{3} \cdot 10^6 + \frac{1}{9} \cdot 10^6 = \frac{13}{9} \cdot 10^6 \text{ [м}^2\text{]}; \\ \sigma_D &= \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot 10^3 = 1,20 \cdot 10^3 \text{ [м]}. \end{aligned}$$

7.68. Имеются две почти линейные функции n случайных аргументов:

$$Y = \varphi_y(X_1, X_2, \dots, X_n); \quad Z = \varphi_z(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Даны характеристики системы $m_{x_i}, D_{x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ и корреляционная матрица $\|K_{ij}^{(x)}\|$.

Найти приближенно корреляционный момент K_{yz} .

Решение. Линеаризуя функции φ_y и φ_z , получим

$$Y \approx \varphi_y(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \dot{X}_i;$$

$$Z \approx \varphi_z(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i} \right)_m \dot{X}_i;$$

отсюда

$$\dot{Y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \dot{X}_i; \quad \dot{Z} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i} \right)_m \dot{X}_i;$$

$$\begin{aligned} K_{yz} &= \mathbf{M}[\dot{Y}\dot{Z}] = \mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \dot{X}_i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j} \right)_m \dot{X}_j \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i} \right)_m D_{x_i} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j} \right)_m K_{ij}^{(x)}. \end{aligned}$$

Последняя сумма содержит $n(n-1)$ членов; каждому $K_{ij}^{(x)}$ соответствуют два члена суммы:

$$\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_j} \right)_m K_{ij}^{(x)} \text{ и } \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x_j} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x_i} \right)_m K_{ij}^{(x)}.$$

7.69*. Летательный аппарат, находящийся над плоскостью xOy в точке A (рис. 7.69), определяет свои координаты (X, Y) с помощью

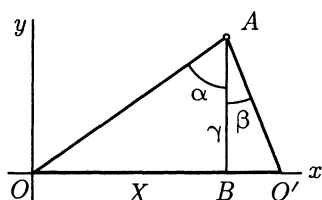


Рис. 7.69

двух наземных радиолокационных станций O и O' , измеряя углы α и β , составленные направлениями на эти станции с фиксированным направлением $AB \perp Ox$. Размеры базы B (расстояние между станциями) известны со средней квадратической ошибкой σ_B ; углы α и β определяются с одной и той же средней квадратической ошибкой $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$. Известны:

номинальное значение базы m_B и измеренные значения углов α и β , равные m_α и m_β . Ошибки в определении всех параметров независимы. Пользуясь методом линеаризации, определить приближенно математические ожидания случайных величин X и Y , их средние квадратические отклонения и коэффициент корреляции.

Р е ш е н и е. В соответствии с рис. 7.69 находим

$$X = \frac{B \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}; \quad Y = \frac{B}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = B \frac{\sec^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}; \quad \frac{\partial X}{\partial \beta} = \frac{-B \operatorname{tg} \alpha \sec^2 \beta}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2};$$

$$\frac{\partial X}{\partial B} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = B \frac{-\sec^2 \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{-B \sec^2 \beta}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}; \quad \frac{\partial Y}{\partial B} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta};$$

$$m_x = \frac{m_B \operatorname{tg} m_\alpha}{\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta}; \quad m_y = \frac{m_B}{\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta};$$

$$\begin{aligned} D_x = & \left[m_B \frac{\sec^2 m_\alpha \operatorname{tg} m_\beta}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^2} \right]^2 + \left[m_B \frac{\operatorname{tg} m_\alpha \sec^2 m_\beta}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^2} \right]^2 \sigma_\alpha^2 + \\ & + \left[\frac{\operatorname{tg} m_\alpha}{\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta} \right]^2 \sigma_B^2 = m_B^2 \frac{\sin^2 2m_\alpha + \sin^2 2m_\beta}{4 \sin^4 (m_\alpha + m_\beta)} \sigma_\alpha^2 + \\ & + \left[\frac{\sin m_\alpha \cos m_\beta}{\sin (m_\alpha + m_\beta)} \right]^2 \sigma_B^2; \quad \sigma_x = \sqrt{D_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y = & \left[m_B \frac{\sec^2 m_\alpha}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^2} \right]^2 + \left[m_B \frac{\sec^2 m_\beta}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^2} \right]^2 \sigma_\alpha^2 + \\ & + \left[\frac{1}{\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta} \right]^2 \sigma_B^2 = m_B^2 \frac{\cos^4 m_\alpha + \cos^4 m_\beta}{\sin^4 (m_\alpha + m_\beta)} \sigma_\alpha^2 + \\ & + \left[\frac{\cos m_\alpha \cos m_\beta}{\sin (m_\alpha + m_\beta)} \right]^2 \sigma_B^2; \quad \sigma_y = \sqrt{D_y}. \end{aligned}$$

Корреляционный момент K_{xy} подсчитаем по формуле, полученной в предыдущей задаче. В силу независимости величин α, β , Б эта формула принимает вид

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_m \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)_m \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_m \left(\frac{\partial Y}{\partial \beta} \right)_m \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \beta} \right)_m \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)_m \sigma_\beta \sigma_\alpha = \\ &= m_B^2 \frac{\operatorname{tg} m_\alpha \sec^4 m_\beta - \operatorname{tg} m_\beta \sec^4 m_\alpha}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^4} \sigma_\alpha^2 + \frac{\operatorname{tg} m_\alpha}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)} \sigma_B^2 = \\ &= m_B^2 \frac{\sin m_\alpha \cos^3 m_\alpha - \sin m_\beta \cos^3 m_\beta}{\sin^4(m_\alpha + m_\beta)} \sigma_\alpha^2 + \frac{\operatorname{tg} m_\alpha}{(\operatorname{tg} m_\alpha + \operatorname{tg} m_\beta)^2} \sigma_B^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

При $m_\alpha = m_\beta$ это выражение можно упростить:

$$r_{xy} = \frac{2\sigma_B^2 \sin^2 m_\alpha \cos^2 m_\alpha}{(2\sigma_B^2 \sin^2 m_\alpha \cos^2 m_\alpha + \sigma_\alpha^2 m_B^2)}.$$

7.70. Для определения расстояния R от точки K до начала координат можно применить два способа:

1) определить расстояния X и Y до осей координат и затем найти R по формуле $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$;

2) измерить только расстояние Y до оси абсцисс и угол α (рис. 7.70), затем найти R по формуле $R = \frac{Y}{\cos \alpha}$.

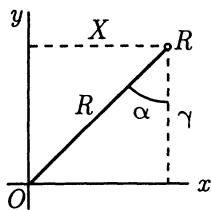


Рис. 7.70

Какой способ приведет к меньшей погрешности, если расстояния X и Y и угол α определяются с независимыми друг от друга ошибками, причем средние квадратические отклонения ошибок X, Y равны $\sigma_x = \sigma_y$, а ошибки в угле — σ_α ?

Привести численный расчет для значений средних квадратических ошибок $\sigma_x = \sigma_y = 1$ [м], $\sigma_\alpha = 1^\circ = 0,0174$ [рад] при средних значениях параметров, равных $m_x = 100$ [м]; $m_y = 60$ [м]; $m_\alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_x}{m_y} \approx 1,03$ [рад].

Решение.

$$1) \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\mathbf{D}_1[R] = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)_m \sigma_x^2 + \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)_m \sigma_y^2 = \sigma_y^2; \quad \sigma_1 = \sigma_y.$$

$$2) \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} = \frac{y \sin \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$\mathbf{D}_2[R] = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right)_m \sigma_y^2 + \left(\frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)_m \sigma_\alpha^2 > \sigma_y^2; \quad \sigma_2 > \sigma_1.$$

Первый способ дает бóльшую точность.

Для числовых данных задачи:

$$\sigma_1 = \sigma_y = 1 \text{ [м]};$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{100}{60} \right)^2 \right] \left[1^2 + 60^2 \left(\frac{100}{60} \right)^2 \cdot 0,0174^2 \right]} = 3,90 \text{ [м]}.$$

7.71. Система трех случайных величин X, Y, Z имеет математические ожидания $m_x = 10$; $m_y = 5$; $m_z = 3$, средние квадратические отклонения $\sigma_x = 0,1$; $\sigma_y = 0,06$; $\sigma_z = 0,08$ и нормированную корреляционную матрицу

$$\|r\| = \begin{vmatrix} 1 & 0,7 & -0,3 \\ & 1 & 0,6 \\ & & 1 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь методом линеаризации, найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$U = \frac{3X^2 + 1}{Y^2 + 2Z^2}.$$

$$\text{Решение. } m_y = \frac{3 \cdot 100 + 1}{25 + 2 \cdot 9} = \frac{301}{43} = 7.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6x}{y^2 + 2z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(3x^2 + 1) 2y}{(y^2 + 2z^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{(3x^2 + 1) 4z}{(y^2 + 2z^2)^2};$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_m = \frac{6 \cdot 10}{43} = 1,40; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_m = -\frac{301 \cdot 10}{(43)^2} = -1,63;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_m = -\frac{301 \cdot 12}{(43)^2} = -1,95;$$

$$\begin{aligned} D[U] = & 1,40^2 \cdot 0,1^2 + 1,63^2 \cdot 0,06^2 + 1,95^2 \cdot 0,08^2 + \\ & + 2[-1,40 \cdot 1,63 \cdot 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,06 + 1,40 \cdot 1,95 \cdot 0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,08 + \\ & + 1,63 \cdot 1,95 \cdot 0,6 \cdot 0,06 \cdot 0,08] \approx 0,066; \end{aligned}$$

$$\sigma_u \approx 0,26.$$

7.72. Производится параллельное соединение двух выбранных наугад сопротивлений R_1 и R_2 . Номинальное значение каждого сопротивления одинаково и равно $m_{r_1} = m_{r_2} = 900$ [Ом]. Максимальная ошибка в R при изготовлении сопротивлений равна 1 % номинального значения. Определить методом линеаризации номинальное значение сопротивления такого соединения и его среднее квадратическое отклонение.

Решение. $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \varphi(R_1, R_2);$

$$m_r = \varphi(m_{r_1}, m_{r_2}) = \frac{900 \cdot 900}{900 + 900} = 450 \text{ [Ом]}.$$

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{900}{100} = 3 \text{ [Ом]}.$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \right)_m = \left[\frac{r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \right]_m = \frac{1}{4}; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_2} \right)_m = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \right)_m = \frac{1}{4};$$

$$D[R] = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \right)_m^2 \sigma_{r_i}^2 = \frac{9}{8} \text{ [Ом}^2\text{]}; \quad \sigma_r \approx 1,06 \text{ [Ом]}.$$

При этом максимальная ошибка будет 3,2 Ом, что составляет 0,7 % (а не 1 %, как было первоначально) от номинала.

7.73. Резонансная частота колебательного контура f_p определяется из выражения

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

где L — индуктивность контура; C — емкость контура.

Определить приближенно среднее значение резонансной частоты контура и ее среднее квадратическое отклонение, если $m_l = 50$ [мкГн]; $m_c = 200$ [пФ]; $\sigma_l = 0,5$ [мкГн] и $\sigma_c = 1,5$ [пФ].

Решение. $m_{f_p} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_l m_c}} = 1,59 \text{ [МГц]}.$

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial l}\right)_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_c}\sqrt{m_l^3} \cdot 2} = m_{f_p} \frac{1}{2m_l};$$

$$\left(\frac{\partial f_p}{\partial c}\right)_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_l}\sqrt{m_c^3} \cdot 2} = m_{f_p} \frac{1}{2m_c};$$

$$\begin{aligned} D_{f_p} &= \left(\frac{\partial f_p}{\partial l}\right)_\mu^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial f_p}{\partial c}\right)_m^2 \sigma_c^2 = m_{f_p}^2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_l^2}{m_l^2} + \frac{\sigma_c^2}{m_c^2} \right) = \\ &= m_{f_p}^2 \cdot \frac{1}{4} (0,01^2 + 0,0075)^2 = m_{f_p}^2 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 10^{-4}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{f_p} = m_{f_p} \cdot \frac{5}{8} \cdot 10^{-2} \approx 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ [МГц]},$$

что составляет 0,62 % от номинальной частоты.

7.74*. Доказать, что если $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \frac{k}{n}.$$

Решение. Так как все величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ положительны, то в знаменателе никогда не стоит нуль. По теореме сложения математических ожиданий имеем

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{i=1}^k \mathbf{M} \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right].$$

Так как все величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ распределены одинаково, то

$$\mathbf{M} \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \mathbf{M} \left[X_m / \sum_{j=1}^n X_j \right]$$

при любых i и m . Обозначим α их общее значение:

$$\mathbf{M} \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вместе с тем ясно, что сумма всех величин вида $X_i / \sum_{j=1}^n X_j$ равна единице, следовательно, и математическое ожидание ее тоже равно единице:

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^n X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{M} \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = 1.$$

Заменяя выражение, стоящее под знаком математического ожидания, через α , имеем $\sum_{i=1}^n \alpha = n\alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{i=1}^k \mathbf{M} \left[X_i / \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n},$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА 8

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, а случайная величина Y связана с нею функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X),$$

где φ — дифференцируемая функция, монотонная на всем участке возможных значений аргумента X , то плотность распределения случайной величины Y выражается формулой

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|,$$

где ψ — функция, обратная по отношению к φ .

Если φ — функция немонотонная, то обратная функция неоднозначна, и плотность распределения случайной величины определяется в виде суммы столькох слагаемых, сколько значений (при данном y) имеет обратная функция:

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y))|\psi'_i(y)|,$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_k(y)$ — значения обратной функции для данного y .

Для функции нескольких случайных величин удобнее искать не плотность распределения, а функцию распределения. В частности, для функции двух аргументов

$$Z = \varphi(X, Y)$$

функция распределения вычисляется по формуле

$$G(z) = \int \int_{D(z)} f(x, y) dx dy,$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения системы (X, Y) ; $D(z)$ — область на плоскости xOy , для которой $\varphi(x, y) < z$.

Плотность распределения $g(z)$ определяется дифференцированием $G(z)$:

$$g(z) = G'(z).$$

Плотность распределения суммы двух случайных величин

$$Z = X + Y$$

выражается любой из формул

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx, \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy,$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения системы (X, Y) .

В частности, когда случайные величины X, Y независимы, $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x) dx$$

или

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y) dy,$$

В этом случае закон распределения суммы $g(x)$ называется *композицией* законов распределения слагаемых $f_1(x), f_2(y)$.

Если случайные величины, подчиненные нормальному закону, подвергать любому линейному преобразованию, то будут получаться снова случайные величины, распределенные нормально.

В частности, если случайная величина X распределена нормально с параметрами m_x, σ_x , то случайная величина

$$Y = aX + b$$

(где a, b — неслучайны) распределена нормально с параметрами $m_y = am_x + b; \sigma_y = |a|\sigma_x$.

При композиции двух нормальных законов: $f_1(x)$ с параметрами m_x, σ_x и $f_2(y)$ с параметрами m_y, σ_y получается снова нормальный закон с параметрами

$$m_z = m_x + m_y; \quad \sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

При сложении двух нормально распределенных случайных величин X, Y с параметрами $m_x, \sigma_x, m_y, \sigma_y$ и коэффициентом корреляции r_{xy} полу-

чается случайная величина Z , также распределенная нормально, с параметрами

$$m_z = m_x + m_y; \quad \sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}.$$

Линейная функция от нескольких независимых нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b,$$

где a_i, b — неслучайные коэффициенты, также имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$m_z = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b; \quad \sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{x_i}^2},$$

где m_{x_i}, σ_{x_i} — параметры случайной величины X_i ($i = 1, \dots, n$).

В случае, когда аргументы $X_1, X_2, \dots, X_n$ коррелированы, закон распределения линейной функции остается нормальным, но с параметрами

$$m_z = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b;$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j r_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}},$$

где $r_{x_i x_j}$ — коэффициент корреляции величин X_i, X_j ($i = 1, \dots, n; j \neq i$).

Композицией двух нормальных законов на плоскости называют закон распределения случайного вектора с составляющими

$$X = X_1 + X_2; \quad Y = Y_1 + Y_2,$$

где $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ — случайные векторы, не коррелированные между собой ($r_{x_1 x_2} = r_{x_1 y_2} = r_{y_1 x_2} = r_{y_1 y_2} = 0$).

При композиции двух нормальных законов на плоскости получают снова нормальный закон с параметрами

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2}; \quad m_y = m_{y_1} + m_{y_2};$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2};$$

$$K_{xy} = K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2},$$

откуда

$$r_{xy} = \frac{r_{x_1 y_1} \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + r_{x_2 y_2} \sigma_{x_2} \sigma_{y_2}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

При проектировании случайной точки (X, Y) , распределенной на плоскости по нормальному закону, на ось Oz , проходящую через центр

рассеивания и составляющую угол α с осью Ox , получается случайная точка Z , распределенная по нормальному закону с параметрами

$$m_z = m_x \cos \alpha + m_y \sin \alpha;$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2 \alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha + r_{xy} \sigma_x \sigma_y \sin 2\alpha}.$$

Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$g(t) = M[e^{itX}],$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Для дискретной случайной величины X

$$g(t) = \sum_{k=1}^n e^{itx_k} p_k,$$

где $p_k = P(X=x_k)$ ($k = 1, \dots, n$).

Для непрерывной случайной величины

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X .

Отметим, что $g(0) = 1$ и $|g(t)| \leq 1$ для любого t .

Плотность распределения $f(x)$ выражается через $g(t)$ формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} g(t) dt.$$

Если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = aX$, где a — неслучайный множитель, то их характеристические функции связаны соотношением

$$g_y(t) = g_x(at).$$

Если случайная величина Y представляет собой сумму независимых случайных величин

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k,$$

то

$$g_y(t) = \prod_{k=1}^n g_{x_k}(t),$$

т. е. характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

8.1. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

Решение. Функция $y = \sin x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ монотонна, поэтому плотность распределения величины Y может быть найдена по формуле

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

Решение задачи располагаем в виде двух столбцов; слева будем писать обозначения функций, принятые в общем случае; справа — конкретные функции, соответствующие данному примеру:

$f(x)$	$\begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$
$y = \varphi(x)$	$y = \sin x$
$x = \psi(y)$	$x = \arcsin y$
$ \psi'(y) $	$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$g(y) = f(\psi(y)) \psi'(y) $	$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{при } y \in (-1, 1), \\ 0 & \text{при } y \notin (-1, 1). \end{cases}$

Интервал $(-1, 1)$, в котором лежат значения случайной величины Y , определяется областью значений функции $y = \sin x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ¹⁾.

8.2. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

¹⁾ В дальнейшем при решении аналогичных задач для сокращения будем записывать выражение плотности распределения только на участке, где она отлична от нуля, подразумевая при этом, что вне этого участка она равна нулю.

Решение. Функция $y = \cos x$ немонотонна в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Решение будем составлять аналогично предыдущему с той разницей, что в данном случае для любого y обратная функция будет иметь два значения. Решение снова оформляем в виде двух столбцов

$f(x)$ $y = \varphi(x)$ $x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$ $ \psi'_1(y) = \psi'_2(y) $ $g(y) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y)) \psi'_i(y) $	$\frac{1}{\pi} \quad \text{при} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \cos x$ $x_1 = -\arccos y$ $x_2 = \arccos y$ $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} =$ $= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad \text{при} \quad y \in (0, 1).$
--	--

8.3. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |\sin X|$.

О т в е т. $g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad \text{при} \quad y \in (0, 1).$

8.4. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = |1 - X|$.

Решение. Функция $y = |1 - x|$ немонотонна. Решение будем составлять так же, как в задаче 8.2.

$f(x)$ $y = \varphi(x)$ $x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$	$f(x)$ $y = 1 - x $ $x_1 = 1 - y$ $x_2 = 1 + y$
--	--

$$|\psi'_1(y)| = |\psi'_2(y)| \quad \left| \quad g(y) = f(1-y) + f(1+y) \quad \text{при} \quad y > 0. \right.$$

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y)) |\psi'_i(y)|$$

8.5. Круглое колесо, закрепленное в центре O (рис. 8.5), приводится во вращение, которое затухает вследствие трения. В результате фиксированная точка A на ободе колеса останавливается на некоторой высоте H (положительной или отрицательной) относительно горизонтальной линии $I-I$, проходящей через центр колеса; высота H зависит от случайного угла Θ , при котором остановилось вращение.

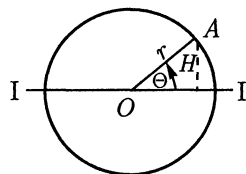


Рис. 8.5

Найти: а) закон распределения высоты H ; б) закон распределения расстояния D от точки A до прямой $I-I$ (считая это расстояние всегда положительным).

Решение. $H = r \sin \Theta$, где угол Θ — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Очевидно, решение задачи не изменится, если считать случайную величину Θ распределенной равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; тогда H является монотонной функцией Θ .

Плотность распределения величины H :

$$g(h) = \frac{1}{\pi r \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2}} \quad \text{при} \quad -r < h < r.$$

Плотность распределения величины $D = |H|$:

$$g_1(d) = \frac{2}{\pi r \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2}} \quad \text{при} \quad 0 < d < r.$$

8.6. Случайная величина X распределена по закону Рэля с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти закон распределения величины $Y = e^{-X^2}$.

Решение. На участке возможных значений аргумента X функция $y = e^{-x^2}$ монотонна. Применяя общее правило, получим

$$\begin{aligned} f(x) \\ y = \varphi(x) \\ x = \psi(y) \\ |\psi'(y)| \\ g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0) \\ y = e^{-x^2} \\ x = \sqrt{-\ln y} \\ \frac{1}{2y\sqrt{-\ln y}} \\ g(y) = \frac{1}{2\sigma^2 y} e^{\frac{\ln y}{2\sigma^2}} = \\ = \frac{1}{2\sigma^2} y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Графики $g(y)$ при разных σ приведены на рис. 8.6.

8.7. Случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти плотность распределения обратной величины $Y = \frac{1}{X}$.

Решение. Учитывая, что, несмотря на разрывный характер функции $y = \frac{1}{x}$, обратная функция $x = \frac{1}{y}$ одно-

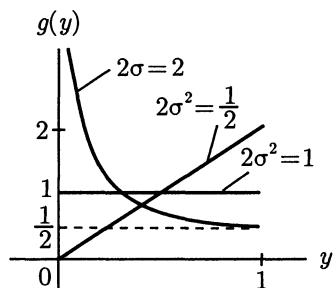


Рис. 8.6

значна, и решая задачу по правилам для монотонной функции, получим

$$g(y) = \frac{1}{\pi \left[1 + \left(\frac{1}{y} \right)^2 \right]} \frac{1}{y^2}$$

или

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad (-\infty < y < +\infty),$$

т.е. величина, обратная величине, распределенной по закону Коши, также имеет распределение Коши.

8.8. Через точку A , лежащую на оси Oy на расстоянии 1 от начала координат, проводится прямая AB под углом α к оси Oy (рис. 8.8). Все значения угла α от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ равновероятны.

Найти плотность распределения абсциссы X точки B пересечения прямой с осью абсцисс.

Решение. $X = \operatorname{tg} \alpha$; функция монотонна на участке $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

т.е. случайная величина X распределена по закону Коши.

8.9. Дискретная случайная величина X характеризуется рядом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти законы распределения случайных величин

$$Y = X^2 + 1; \quad Z = |X|.$$

Решение. Определяя для каждого x_i соответствующие значения величин Y и Z и располагая их в возрастающем порядке, получим ряды распределения

y_i	1	2	5
p'_i	0,3	0,5	0,2

z_i	1	2	2
p''_i	0,3	0,5	0,2

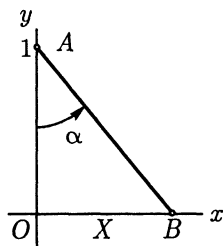


Рис. 8.8

8.10. Через точку A с координатами $(0, 1)$ проводится прямая AB под случайным углом Θ к оси ординат (рис. 8.10). Закон распределения угла Θ имеет вид

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cos \theta$$

при

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

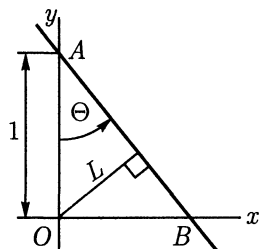


Рис. 8.10

Найти закон распределения расстояния L от прямой AB до начала координат.

Решение. Имеем $L = |\sin \theta|$. Функция $l = |\sin \theta|$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ не монотонна. Применяя обычную схему записи, имеем

$f(x)$ $y = \varphi(x)$ $x = \begin{cases} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{cases}$ $ \psi'_1(y) = \psi'_2(y) $ $g(x) = \sum_{i=1}^k f(\psi_i(y)) \psi'_i(y) $	$\frac{1}{2} \cos \theta \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ $l = \sin \theta $ $\begin{aligned} & -\arcsin l \\ & \arcsin l \end{aligned}$ $\frac{1}{\sqrt{1-l^2}}$ $g(L) = \frac{1}{\sqrt{1-l^2}} \cos(\arcsin l) = 1$ $\text{при} \quad 0 < l < 1,$
--	---

т.е. расстояние L распределено равномерно в интервале $(0, 1)$, как это можно видеть и из геометрических соображений.

8.11. Радиус круга R — случайная величина, распределенная по закону Рэлея:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при} \quad r > 0.$$

Найти закон распределения площади круга S .

Решение. Функция $S = \pi R^2$ на участке возможных значений $R(0, \infty)$ монотонна, следовательно,

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{s}{2\pi\sigma^2}} \quad \text{при } s > 0,$$

т.е. закон распределения площади круга есть показательный закон с параметром $\frac{1}{2\pi\sigma^2}$.

8.12. Маятник совершает свободные незатухающие колебания, причем угол φ (рис. 8.12) изменяется в зависимости от времени t по гармоническому закону:

$$\varphi = a \sin(\omega t + \Theta),$$

где a — амплитуда; ω — частота; Θ — фаза колебания. В некоторый момент $t = 0$, совершенно не связанный с положением маятника, производится его фотографирование. Так как положение маятника в момент фотографирования неопределенно, то фаза Θ есть случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Найти закон распределения угла Φ , который будет составлять маятник с вертикалью в момент фотографирования, найти его математическое ожидание и дисперсию.

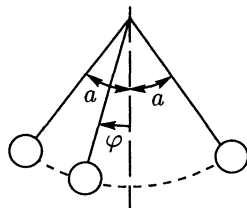


Рис. 8.12

Решение. $\Phi = a \sin \Theta$, где фаза Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, на котором функция $\varphi = a \sin \theta$ не монотонна. Очевидно, решение задачи не изменится, если считать фазу Θ распределенной равномерно в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, где функция $\varphi = a \sin \theta$ монотонна. Плотность распределения величины Φ будет

$$g(\varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - \varphi^2}} \quad \text{при } |\varphi| < a.$$

Так как закон $g(\varphi)$ симметричен, то его математическое ожидание $m_\varphi = 0$. Дисперсия угла Φ равна

$$D_\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi^2}{\sqrt{a^2 - \varphi^2}} d\varphi = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\varphi}{2} \sqrt{a^2 - \varphi^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{\varphi}{a} \right) \Bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

8.13. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный диаметр которых d_0 , а фактический диаметр L — случайная величина, распределенная по нормальному закону, с математиче-

ским ожиданием d_0 и средним квадратическим отклонением σ_l . После изготовления каждый шарик проходит контроль, причем бракуются все шарики, проходящие сквозь отверстие диаметром $d_0 - 2\sigma_l$, и все шарики, не проходящие сквозь отверстие диаметром $d_0 + 2\sigma_l$.

Найти закон распределения диаметра шариков, прошедших контроль (незабракованных).

Решение. В этой задаче нужно найти плотность распределения некоторой случайной величины L^* , которая равна L только в случае, когда L приняло значение между $d_0 - 2\sigma_l$ и $d_0 + 2\sigma_l$; вне интервала $(d_0 - 2\sigma_l, d_0 + 2\sigma_l)$ плотность распределения должна быть равна нулю (рис. 8.13), а внутри интервала — пропорциональна $f(l)$, причем

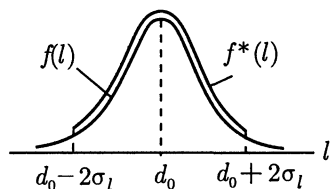


Рис. 8.13

$$\int_{d_0 - 2\sigma_l}^{d_0 + 2\sigma_l} f^*(l) dl = 1.$$

Из этого соотношения можно найти коэффициент пропорциональности a :

$$\int_{d_0 - 2\sigma_l}^{d_0 + 2\sigma_l} f^*(l) dl = a \int_{d_0 - 2\sigma_l}^{d_0 + 2\sigma_l} f(l) dl = a [2\Phi^*(2) - 1] = 1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{2\Phi^*(2) - 1} = \frac{1}{0,9544} \approx 1,05.$$

Таким образом,

$$f^*(l) = \begin{cases} \frac{1,05}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-d_0)^2}{2\sigma_l^2}} & \text{при } |l - d_0| < 2\sigma_l, \\ 0 & \text{при } |l - d_0| > 2\sigma_l. \end{cases}$$

8.14. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Случайная величина Y определяется через X соотношением

$$Y = \min\{X, 1\},$$

т.е. $Y = X$ при $X < 1$, $Y = 1$ при $X \geq 1$.

Найти закон распределения случайной величины Y и определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Случайная величина Y будет величиной смешанного типа. При $y = 1$ ее функция распределения имеет скачок p_1 , равный вероятности того, что величина X примет значение, большее единицы:

$$p_1 = \int_1^{\infty} f(x) dx = 1 - F(1).$$

При $y < 1$ функция распределения $F_1(y)$ случайной величины Y будет совпадать с функцией распределения $F(x)$ случайной величины X при $x = y$:

$$F_1(y) = F(y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx.$$

При $y > 1$ $F_1(y) = 1$ (рис. 8.14).

Математическое ожидание смешанной случайной величины Y равно

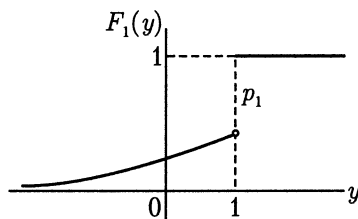


Рис. 8.14

$$m_y = 1 \cdot p_1 + \int_{-\infty}^1 y F'(y) dy = \int_1^{\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^1 y f(y) dy.$$

Дисперсия случайной величины Y равна

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = \int_1^{\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^1 y^2 f(y) dy - m_y^2.$$

8.15. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины

$$Y = \operatorname{sgn} X = \begin{cases} +1 & \text{при } X > 0, \\ 0 & \text{при } X = 0, \\ -1 & \text{при } X < 0 \end{cases}$$

и ее числовые характеристики.

Решение. Дискретная случайная величина Y имеет всего два значения: минус единица и плюс единица (вероятность того, что $Y = 0$, равна нулю).

$$\mathbf{P}(Y = -1) = \mathbf{P}(X < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = F(0);$$

$$\mathbf{P}(Y = +1) = \mathbf{P}(X > 0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = 1 - F(0);$$

$$m_y = -1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1 - 2F(0);$$

$$\alpha_2[Y] = 1 \cdot F(0) + 1 \cdot [1 - F(0)] = 1;$$

$$D_y = \alpha_2[Y] - m_y^2 = 1 - 1 + 4F(0) - 4[F(0)]^2 = 4F(0)[1 - F(0)].$$

8.16. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины

$$Y = \min\{X, X^2\},$$

т.е. величины, которая равна X , если $X < X^2$, и X^2 , если $X^2 < X$.

Решение. Функция $y = \varphi(x)$ монотонна (рис. 8.16)

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in (0, 1), \\ x & \text{при } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Так как интервал $(0, 1)$ оси Ox отображается на интервал $(0, 1)$ оси Oy , то по общему правилу

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{при } y \in (0, 1), \\ f(y) & \text{при } y \notin (0, 1). \end{cases}$$

8.17. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$, заданную графиком (рис. 8.17). Случайная величина Y связана с X зависимостью $Y = 1 - X^2$. Найти плотность распределения случайной величины Y .

Решение. Плотность $f(x)$ дается функцией

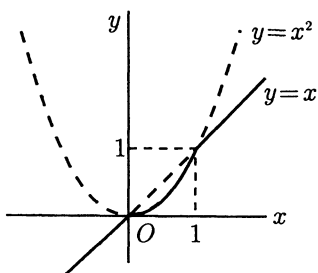


Рис. 8.16

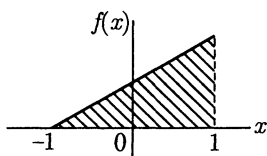


Рис. 8.17

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$$

при

$$x \in (-1, +1).$$

Функция $y = 1 - x^2$ на этом участке не монотонна; обратная функция имеет два значения:

$$x_1 = -\sqrt{1-y}, \quad x_2 = +\sqrt{1-y}.$$

Отсюда

$$g(y) = \frac{1}{4\sqrt{1-y}} [(1 - \sqrt{1-y}) + (1 + \sqrt{1-y})]$$

или

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \quad \text{при} \quad 0 < y < 1.$$

8.18. Случайная величина X распределена по закону с плотностью $f(x)$. Найти плотность распределения обратной ей случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{x}$ хотя и не монотонна в обычном смысле слова (при $x = 0$ она скачком возрастает от $-\infty$ до ∞), но обратная функция однозначна, значит, задача может быть решена так, как она решается для монотонных функций:

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}$$

при тех значениях y , которые могут быть обратными заданной совокупности возможных значений x .

8.19. Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с центром рассеивания m и средним квадратическим отклонением σ . Найти плотность распределения величины X .

Решение. Обозначим нормально распределенную величину через U . Имеем

$$U = \ln X; \quad X = e^U; \quad f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция e^u монотонна;

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{при } x > 0.$$

Такое распределение величины X называется *логнормальным*.

8.20. Пятно Π , изображающее объект на круглом экране радиолокатора, может занимать на нем произвольное положение (рис. 8.20), причем плотность распределения координат (X, Y) пятна в пределах экрана постоянна. Радиус экрана равен r_0 . Найти плотность распределения расстояния R от пятна до центра экрана.

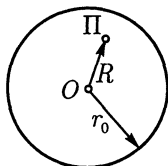


Рис. 8.20

Решение. Найдем функцию распределения

$$G(r) = \mathbf{P}(R < r) = \mathbf{P}((X, Y) \in K_r),$$

где K_r — круг радиуса r с центром в точке O . Так как в пределах экрана плотность распределения постоянна, то вероятность попадания в круг равна его относительной площади

$$G(r) = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2,$$

откуда

$$g(r) = G'(r) = \frac{2r}{r_0^2} \quad \text{при } 0 < r < r_0.$$

8.21. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0, 1)$. Случайная величина Y связана с X монотонно возрастающей функциональной зависимостью $Y = \varphi(X)$.

Найти функцию распределения $G(y)$ и плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y .

Решение. Имеем $f(x) = 1$ при $x \in (0, 1)$.

Обозначим $\psi(y)$ функцию, обратную по отношению к функции $y = \varphi(x)$. Так как $\varphi(x)$ монотонно возрастает, то

$$g(y) = f(\psi(y)) \psi'(y) = \psi'(y),$$

откуда $G(y) = \psi(y)$, т. е. искомая функция распределения есть обратная по отношению к функции φ (в области возможных значений величины Y).

8.22. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X , распределенную равномерно в интервале $(0, 1)$, чтобы получить случайную величину Y , распределенную по показательному закону

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (\text{при } y > 0)?$$

Решение. На основании решения предыдущей задачи мы должны положить $Y = \varphi(X)$, где φ — функция, обратная требуемой функции распределения $G(y)$ случайной величины Y . Имеем

$$G(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda y}.$$

Полагая в этом уравнении $1 - e^{-\lambda y} = x$ и разрешая его относительно y , получим

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x),$$

откуда искомая зависимость будет

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X), \quad 0 < X \leq 1.$$

8.23*. Имеются две случайные величины; X с плотностью $f_1(x)$ и Y с плотностью $f_2(y)$. Известно, что величина Y представляет собой монотонно возрастающую функцию величины X : $Y = \varphi(X)$. Найти вид функции φ .

Решение. Введем в рассмотрение, кроме плотностей $f_1(x)$, $f_2(y)$, функции распределения

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx; \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy.$$

Представим случайную величину X как функцию от Y : $X = \varphi^{-1}(Y)$, где φ^{-1} — функция, обратная по отношению к искомой φ .

Применяя обычный способ нахождения функции распределения монотонной функции, находим

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f_2(y) dy = F_2(\varphi(x)).$$

Разрешая это уравнение относительно $\varphi(x)$ и вводя функцию F_2^{-1} , обратную функции F_2 , получим

$$\varphi(x) = F_2^{-1}(F_1(x))$$

или, возвращаясь к случайным величинам,

$$Y = F_2^{-1}(F_1(X)).$$

Полученная формула определяет функцию $\varphi(x)$ только в тех интервалах, где плотность $f_1(x)$ отлична от нуля.

8.24. Случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

Каким функциональным преобразованием можно превратить ее в случайную величину Y , распределенную по закону Коши:

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}?$$

Решение. $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0);$

$$F_2(y) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right].$$

Полагая во втором уравнении $\frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2} \right] = u$ и разрешая его относительно y , найдем обратную функцию $F_2^{-1}(u)$:

$$y = F_2^{-1}(u) = \operatorname{tg} \left(\pi u - \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \pi u.$$

По решению предыдущей задачи получим

$$Y = F_2^{-1}(F_1(X)) = -\operatorname{ctg} \pi(1 - e^{-\lambda X}) = \operatorname{ctg} \pi e^{-\lambda X} \quad (X > 0).$$

8.25*. Решить ту же задачу, что и 8.23, но при условии, что связывающая две случайные величины функция φ должна быть не монотонно возрастающей, а монотонно убывающей.

Решение. В тех же обозначениях, что в задаче 8.23, имеем

$$X = \varphi^{-1}(Y), \quad F_1(x) = \int_{\varphi(x)}^{\infty} f_2(y) dy = 1 - F_2[\varphi(x)],$$

откуда

$$\varphi(x) = F_2^{-1}[1 - F(x)] \quad \text{и} \quad Y = F_2^{-1}[1 - F_1(X)].$$

8.26. Двое условились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 12.00 до 13.00. Каждый из них приходит на место встречи независимо от другого и с постоянной плотностью вероятности в любой момент назначенного промежутка. Пришедший раньше ожидает другого. Найти распределение вероятностей времени ожидания и вероятность того, что ожидание продлится не менее полчаса.

Решение. Обозначим моменты прихода двух лиц T_1 и T_2 ; за начало отсчета времени примем 12 ч. Тогда каждая из независи-

мых случайных величин T_1, T_2 распределена с постоянной плотностью в промежутке $(0, 1)$. Случайная величина T — время ожидания $T = |T_1 - T_2|$.

Найдем функцию распределения $G(t)$ этой величины. Выделим на плоскости t_1, t_2 область $D(t)$, в которой $|t_1 - t_2| < t$ (заштрихованная область на рис. 8.26).

Функция распределения $G(t)$ в данном случае равна площади этой области:

$$G(t) = 1 - (1 - t)^2 = t(2 - t),$$

откуда $g(t) = 1 - (2 - t)$ при $0 < t < 1$.

$$P\left(T > \frac{1}{2}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{2}\right) = 0,25.$$

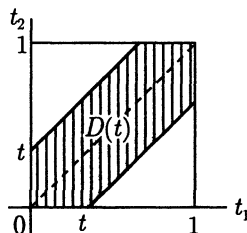


Рис. 8.26

8.27. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно в квадрате K со стороной 1 (рис. 8.27, а). Найти закон распределения площади S прямоугольника R со сторонами X, Y .

Решение. Выделим на плоскости xOy область $D(s)$, в пределах которой $xy < s$ (рис. 8.27, б).

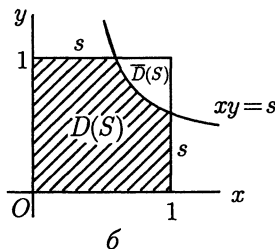
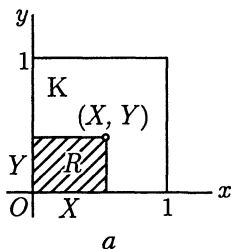


Рис. 8.27

Функция распределения в данном случае равна площади области $D(s)$

$$G(s) = 1 - \int_{D(s)} \int dx dy = 1 - \int_s^1 dx \int_{\frac{s}{x}}^1 dy = s(1 - \ln s).$$

Отсюда $g(s) = G'(s) = -\ln s$ при $0 < s < 1$.

8.28. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y)$. Найти плотность распределения $g(z)$ их отношения $Z = \frac{Y}{X}$.

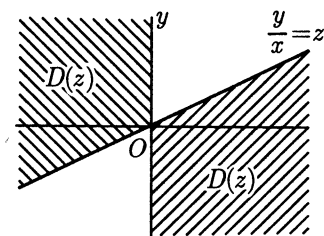


Рис. 8.28

Решение. Зададимся некоторым значением z и построим на плоскости xOy область $D(x)$, где $\frac{y}{x} < x$ (рис.8.28, заштрихованная область). Функция распределения $G(z)$ имеет вид

$$G(z) = \int \int_{D(z)} f(x, y) dx dy = \\ = \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{\infty} f(x, y) dy + \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{zx} f(x, y) dy.$$

Дифференцируя по z , имеем

$$g(z) = - \int_{-\infty}^0 xf(x, zx) dx + \int_0^{\infty} xf(x, zx) dx.$$

Если случайные величины X, Y независимы, то

$$g(z) = - \int_{-\infty}^0 xf_1(x)f_2(zx) dx + \int_0^{\infty} xf_1(x)f_2(zx) dx.$$

8.29. Найти закон распределения отношения $Z = \frac{Y}{X}$ двух независимых нормально распределенных случайных величин X, Y с характеристиками $m_x = m_y = 0, \sigma_x$ и σ_y .

Решение. Рассмотрим сначала частный случай $\sigma_x = \sigma_y = 1$. На основании предыдущей задачи

$$g(z) = - \int_{-\infty}^0 x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)} dx + \int_0^{\infty} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + z^2 x^2)} dx = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1+z^2)} x dx = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \text{ (закон Коши).}$$

В общем случае отношение $Z = \frac{Y}{X}$ можно представить в виде $Z = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{Y_1}{X_1}$, где величины $X_1 = \frac{X}{\sigma_x}$ и $Y_1 = \frac{Y}{\sigma_y}$ имеют уже нормальные распределения с дисперсией, равной 1; поэтому в общем случае

$$g(z) = \frac{1}{\pi \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y} z \right)^2 \right]} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

В частном случае, если $\sigma_x = \sigma_y$, получим

$$g(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)}.$$

8.30. Случайная точка (X, Y) распределена равномерно в круге K радиуса 1. Найти закон распределения случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$.

Решение. В данном случае $G(z)$ есть относительная площадь области $D(z)$ (рис. 8.30):

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \left(\arctg z + \frac{\pi}{2} \right),$$

откуда

$$g(z) = G'(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)} \quad (\text{закон Коши}).$$

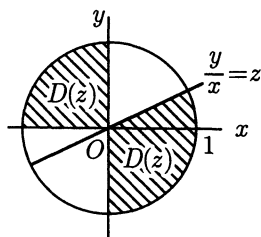


Рис. 8.30

8.31. Составить композицию двух показательных законов

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} & \text{при } x_1 > 0, \\ 0 & \text{при } x_1 < 0, \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} & \text{при } x_2 > 0, \\ 0 & \text{при } x_2 < 0. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $X = X_1 + X_2$, где X_1, X_2 распределены по законам $f_1(x_1), f_2(x_2)$.

Согласно общей формуле для композиции законов распределения

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(x - x_1) dx_1.$$

Но в нашем случае оба закона отличны от нуля только при положительном значении аргумента; значит, $f_1(x_1) = 0$ при $x_1 < 0$ и при $f_2(x - x_1) = 0$ при $x_1 > x$.

При $x > 0$ получим

$$g(x) = \int_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (x-x_1)} dx_1 =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} - 1] = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x})}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

(обобщенный закон Эрланга 1-го порядка).

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, раскрыв неопределенность, получим закон Эрланга 1-го порядка:

$$g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad \text{при } x > 0.$$

Примечание. Методом математической индукции можно доказать, что закон распределения суммы n независимых случайных величин, $X_1, \dots, X_n$, подчиненных показательным законам распределения с различными параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, т.е. обобщенный закон распределения Эрланга $(n-1)$ -го порядка, имеет плотность

$$g_{n-1}(x) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

(Запись $\prod_{k \neq j}^n$ означает, что берется произведение всех биномов вида

$\lambda_j - \lambda_k$ при $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, т.е. кроме $\lambda_j - \lambda_j$.)

В частном случае, когда $\lambda_i = i \lambda$:

$$g_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_n^j \lambda_j e^{-\lambda_j x}.$$

Функция распределения обобщенного закона Эрланга $(n-1)$ -го порядка имеет вид

$$G_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{1 - e^{-\lambda_j x}}{\lambda_j \sum_{k=1}^n (\lambda_j - \lambda_k)} \quad \text{при } x > 0.$$

Если $\lambda_i = i \lambda$, то

$$G_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_n^j [1 - e^{-j \lambda x}] \quad \text{при } x > 0.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$, то получаем закон Эрланга $(n-1)$ -го порядка:

$$g_{n-1}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} = \lambda P(n-1, \lambda x) \quad (x > 0),$$

$$\begin{aligned} G_{n-1}(x) &= \int_0^x \lambda P(n-1, \lambda x) dx = \\ &= 1 - \int_x^\infty \lambda P(n-1, \lambda x) dx = 1 - R(n-1, \lambda x) \quad (x > 0), \end{aligned}$$

где

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \quad R(m, a) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

8.32. Имеется система двух случайных величин (X, Y) с плотностью распределения $f(x, y)$. Найти функцию распределения $G(z)$ и плотность распределения $g(z)$ максимальной из этих двух величин: $Z = \max\{X, Y\}$.

Решение. Будем искать функцию распределения случайной величины Z : $G(x) = \mathbf{P}(Z < z)$.

Для того чтобы максимальная из величин X, Y была меньше z , нужно, чтобы каждая из этих величин была меньше z :

$$G(z) = \mathbf{P}((X < z)(Y < z)) = F(z, z),$$

где

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Таким образом,

$$G(x) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z f(x, y) dx dy.$$

Чтобы найти плотность распределения $g(z)$, продифференцируем $G(z)$ по величине z , входящей в пределы двойного интеграла. Дифференцировать будем как сложную функцию двух переменных z_1 и z_2 , из которых каждая зависит от z ($z_1 = z, z_2 = z$):

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^{z_1} \left[\int_{-\infty}^{z_2} f(x, y) dy \right] dx \right\} =$$

$$= \frac{\partial G(z)}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dz} + \frac{\partial G(z)}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dz} = \int_{-\infty}^z f(z, y) dy + \int_{-\infty}^x f(x, z) dx.$$

В частном случае, если величины X , Y независимы, $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то

$$g(z) = f_1(z) \int_{-\infty}^z f_2(y) dy + f_2(z) \int_{-\infty}^x f_1(x) dx,$$

или, более компактно,

$$g(z) = f_1(z)F_2(z) + f_2(z)F_1(z).$$

Если случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены [$f_1(x) = f_2(x) = f(x)$], то $g(z) = 2f(z)F(z)$.

8.33. Система двух случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения $f(x, y)$. Найти функцию распределения $G(u)$ и плотность распределения $g(u)$ минимальной из этих двух величин: $U = \min\{X, Y\}$.

Решение. Будем искать дополнение до единицы функции распределения:

$$1 - G(u) = \mathbf{P}(U > u) = \mathbf{P}((X > u)(Y > u)).$$

Это есть вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область $D(u)$, заштрихованную на рис. 8.33. Очевидно,

$$1 - G(u) = 1 - F(u, \infty) - F(\infty, u) + F(u, u),$$

откуда

$$G(u) = F(u, \infty) + F(\infty, u) - F(u, u) = F_1(u) + F_2(u) - F(u, u).$$

Дифференцируя по u , имеем (см. задачу 8.32)

$$g(u) = f_1(u) + f_2(u) - \int_{-\infty}^u f(u, y) dy - \int_{-\infty}^u f(x, u) dx.$$

В случае, когда величины X и Y независимы,

$$\begin{aligned} g(u) &= f_1(u) + f_2(u) - f_1(u) - \int_{-\infty}^u f_2(y) dy - f_2(u) \int_{-\infty}^u f_1(x) dx = \\ &= f_1(u)[1 - F_2(u)] + f_2(u)[1 - F_1(u)]. \end{aligned}$$

Если случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены [$f_1(x) = f_2(x) = f(x)$], то

$$g(u) = 2f(u)[1 - F(u)].$$

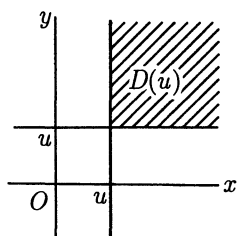


Рис. 8.33

8.34. Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, распределенных по законам с плотностями $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$.

Найти плотность распределения максимальной из них:

$$Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

и минимальной:

$$U = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

т.е. той из случайных величин, которая в результате опыта примет максимальное (минимальное) значение.

Решение. Обозначим $G_z(z)$ функцию распределения величины Z . Имеем

$$G_z(z) = P(Z < z) = \prod_{i=1}^n F_i(z),$$

где

$$F_i(z) = \int_{-\infty}^z f_i(x_i) dx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Дифференцируя, получим сумму произведений производных отдельных функций распределения $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ на произведения всех остальных функций, кроме той, которая продифференцирована. Результат можно записать в виде

$$g_z(z) = \sum_{j=1}^n \frac{f_j(z)}{F_j(z)} \prod_{i=1}^n F_i(z).$$

Аналогично, обозначая $G_u(u)$ функцию распределения величины U , получим

$$G_u(u) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(u)].$$

Дифференцируя, получим

$$g_u(u) = \sum_{j=1}^n \frac{f_j(u)}{1 - F_j(u)} \prod_{i=1}^n [1 - F_i(u)].$$

8.35. Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, распределенных одинаково с плотностью $f(x)$. Найти закон распределения максимальной из них:

$$Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

и минимальной:

$$U = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Решение. На основании решения предыдущей задачи

$$G_z(z) = F^n(z); \quad g_z(z) = nF^{n-1}(z)f(z);$$

$$G_u(u) = 1 - [1 - F(u)]^n; \quad g_u(u) = n[1 - F(u)]^{n-1}f(u).$$

8.36. Производится три независимых выстрела по плоскости xOy ; центр рассеивания совпадает с началом координат, рассеивание нормальное, круговое, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Из трех точек попадания выбирается та, которая оказалась ближе всех к центру рассеивания. Найти закон распределения расстояния $R_{\min}$ от точки попадания до центра.

Решение. Имеем $R_{\min} = \min\{R_1, R_2, R_3\}$.

Из решения предыдущей задачи имеем

$$g_{R_{\min}}(r) = 3[1 - F(r)]^2 f(r),$$

где $F(r)$, $f(r)$ — функция распределения и плотность распределения расстояния R от точки попадания любого выстрела до центра рассеивания,

$$F(r) = \mathbf{P}(R < r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (r > 0).$$

Отсюда

$$g_{R_{\min}}(r) = \frac{3r}{\sigma^2} e^{-\frac{3r^2}{2\sigma^2}},$$

т.е. плотность распределения расстояния от ближайшей из трех точек до центра рассеивания имеет тот же вид, что и для каждой из них, но при условии, что параметр σ уменьшен в $\sqrt{3}$ раз, т.е. заменен значением $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$.

8.37. Найти закон распределения минимальной из двух независимых случайных величин T_1, T_2 , распределенных по показательным законам:

$$f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \quad \text{при } t_1 > 0;$$

$$f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} \quad \text{при } t_2 > 0.$$

Решение. На основании решения задачи 8.33

$$g_u(u) = f_1(u)[1 - F_2(u)] + f_2(u)[1 - F_1(u)] = \\ = \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} e^{-\lambda_2 u} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 u} e^{-\lambda_1 u} = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)u} \quad (u > 0),$$

т.е. закон распределения минимальной из двух независимых случайных величин, распределенных по показательным законам, есть тоже показательный закон, параметр которого равен сумме параметров исходных законов.

Вывод нетрудно обобщить на любое число показательных законов.

8.38. В условиях предыдущей задачи найти закон распределения $g_z(z)$ максимальной из величин T_1, T_2 .

Решение.

$$g_z(z) = f_1(z) F_2(z) + f_2(z) F_1(z) = \\ = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} [1 - e^{-\lambda_2 z}] + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} [1 - e^{-\lambda_1 z}] = \\ = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z} \quad (z > 0).$$

Этот закон показательным не является. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$g_z(z) = 2\lambda e^{-\lambda z} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (z > 0).$$

8.39*. Над случайной величиной X , имеющей плотность распределения $f(x)$, производится n независимых опытов; наблюдаемые значения располагаются в порядке возрастания; получается ряд случайных величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$.

Рассматривается k -я из них Z_k . Найти ее функцию распределения $G_k(z)$ и плотность распределения $g_k(z)$.

Решение. $G_k(z) = \mathbf{P}(Z_k < z)$. Для того чтобы k -я (в порядке возрастания) из случайных величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, Z_n$ была меньше z , нужно, чтобы не менее k из них были меньше z :

$$G_k(z) = \sum_{m=k}^n P_m,$$

где P_m — вероятность того, что ровно m из наблюдаемых в n опытах значений случайной величины X будут меньше z . По теореме о повторении опытов

$$P_m = C_n^m [F(z)]^m [1 - F(z)]^{n-m},$$

откуда

$$G_k(z) = \sum_{m=k}^n C_n^m [F(z)]^m [1 - F(z)]^{n-m},$$

где

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f(x) dx.$$

Плотность распределения $g_k(z)$ можно найти, дифференцируя это выражение и учитывая, что

$$C_n^m m = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = n C_{n-1}^{m-1};$$

$$C_n^m (n-m) = n C_{n-1}^m \quad (m < n).$$

После простых преобразований получим

$$g_k(z) = n C_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}.$$

Однако гораздо проще получить $g_k(z)$ непосредственно, с помощью следующего простого рассуждения.

Элемент вероятности $g_k(z) dz$ приближенно представляет собой вероятность попадания случайной величины Z_k (k -го в порядке возрастания значения случайной величины X) на участок $(z, z + dz)$. Для того чтобы это произошло, нужно, чтобы совместились следующие события:

- 1) какое-то из значений случайной величины X попало на интервал $(z, z + dz)$;
- 2) $(k-1)$ других каких-то значений оказались меньше z ;
- 3) $(n-k)$ остальных значений оказались больше z (вероятностью попадания более чем одного значения на элементарный участок $(z, z + dz)$ пренебрегаем).

Вероятность каждой такой комбинации событий равна $f(z) dz [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}$. Число комбинаций равно произведению числа n способов, какими можно выбрать одно значение из n , чтобы поместить его на интервал $(z, z + dz)$, на число C_{n-1}^{k-1} способов, какими из оставшихся $n-1$ значений можно выбрать $k-1$, чтобы поместить их левее z . Следовательно,

$$g_k(z) dz = n C_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k} dz,$$

откуда

$$g_k(z) = n C_{n-1}^{k-1} f(z) [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{n-k}.$$

8.40. В электропечи установлено четыре регулятора (термопары), каждый из которых показывает температуру с некоторой ошибкой, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением σ_i . Происходит нагревание печи. В момент, когда две из четы-

рех термопар покажут температуру не ниже критической τ_0 , печь автоматически отключается. Найти плотность распределения температуры Z , при которой будет происходить отключение печи.

Р е ш е н и е. Температура Z , при которой происходит отключение печи, представляет собой второе в порядке убывания (т.е. третье в порядке возрастания) из четырех значений случайной величины T , распределенной по нормальному закону с центром рассеивания τ_0 и средним квадратическим отклонением σ_t :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}}.$$

Соответствующая функция распределения

$$F(t) = \Phi^* \left(\frac{t - \tau_0}{\sigma_t} \right).$$

Пользуясь результатами предыдущей задачи при $n = 4$, $k = 3$, получим

$$g_3(t) = \frac{12}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma_t^2}} \left[\Phi^* \left(\frac{t - \tau_0}{\sigma_t} \right) \right]^2 \left[1 - \Phi^* \left(\frac{t - \tau_0}{\sigma_t} \right) \right].$$

8.41. Имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, функции распределения которых имеют вид степенной зависимости:

$$F_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i \leq 0, \\ x_i^{k_i} & \text{при } 0 < x_i \leq 1, \\ 1 & \text{при } x_i > 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Наблюдается значение каждой из случайных величин и из них выбирается максимальное Z . Найти функцию распределения $G(z)$ этой случайной величины.

Р е ш е н и е. На основании решения задачи 8.34

$$G(z) = \prod_{i=1}^n F_i(z) = \prod_{i=1}^n z^{k_i} \quad \text{при } 0 < z \leq 1$$

или, если обозначить $k = \sum_{i=1}^n k_i$,

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq 0, \\ z^k & \text{при } 0 < z \leq 1, \\ 1 & \text{при } z > 1, \end{cases}$$

т.е. максимум нескольких случайных величин, распределенных по степенному закону в интервале $(0, 1)$, также распределен по степенному закону с показателем степени, равным сумме показателей степеней отдельных законов.

8.42. Дискретные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и распределены по законам Пуассона с параметрами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Показать, что их сумма $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ также подчинена

закону Пуассона с параметром $a = \sum_{i=1}^n a_i$.

Решение. Докажем сначала, что сумма двух случайных величин X_1 и X_2 подчинена закону Пуассона, для чего найдем вероятность того, что $X_1 + X_2 = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = m) &= \sum_{k=0}^m \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(X_2 = m - k) = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{a_1^k}{k!} e^{-a_1} \frac{a_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-a_2}; \end{aligned}$$

учитывая, что $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$, представим это выражение в виде

$$\frac{e^{-(a_1+a_2)}}{m!} \sum_{k=0}^m C_m^k a_1^k a_2^{m-k} = \frac{(a_1 + a_2)^m}{m!} e^{-(a_1+a_2)},$$

а это есть распределение Пуассона с параметром $a_1 + a_2$.

Таким образом доказано, что сумма двух независимых случайных величин, подчиненных законам Пуассона, тоже подчиняется закону Пуассона. Распространение этого результата на любое число слагаемых производится по индукции.

8.43. Система случайных величин (X, Y) распределена по нормальному закону с характеристиками $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y$ и r_{xy} . Случайные величины (U, V) связаны с (X, Y) зависимостью

$$U = aX + bY + c; \quad V = kX + lY + m.$$

Найти закон распределения системы случайных величин (U, V) .

О т в е т. Система (U, V) распределена нормально с характеристиками

$$\begin{aligned} m_u &= am_x + bm_y + c; \\ m_v &= km_x + lm_y + m; \\ \sigma_u &= \sqrt{a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + 2ab \sigma_x \sigma_y r_{xy}}; \\ \sigma_v &= \sqrt{k^2 \sigma_x^2 + l^2 \sigma_y^2 + 2kl \sigma_x \sigma_y r_{xy}}; \\ r_{uv} &= \frac{ak \sigma_x^2 + bl \sigma_y^2 + (bk + al) \sigma_x \sigma_y r_{xy}}{\sigma_u \sigma_v}. \end{aligned}$$

8.44. Самолет-бомбардировщик производит бомбометание по полосовой цели ширины $b = 40$ м, заходя на нее под углом 30° по отношению к направлению полосы (рис. 8.44). Координаты точки попадания распределены по нормальному закону; главные оси рассеивания — направление полета и перпендикулярное к нему; начало координат на средней линии полосы. В этой системе координат xOy параметры нормального закона $m_x = 10$ [м]; $m_y = 0$; $\sigma_x = 50$ [м]; $\sigma_y = 25$ [м].

Найти вероятность p попадания в полосу при сбрасывании одной бомбы.

Р е ш е н и е. Проецируем рассеивание на ось Oz , перпендикулярную к полосе:

$$m_z = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5 \text{ [м];}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 \sin^2 60^\circ + \sigma_y^2 \sin^2 60^\circ} = \sqrt{50^2 \cdot 0,25 + 25^2 \cdot 0,75} \approx 33,1 \text{ [м];}$$

$$p = \Phi^* \left(\frac{20 - 5}{33,1} \right) - \Phi^* \left(\frac{-20 - 5}{33,1} \right) \approx 0,450.$$

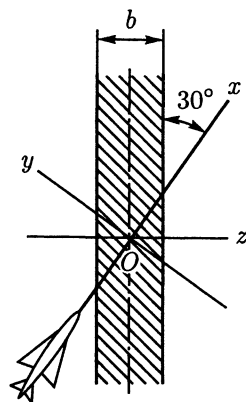


Рис. 8.44

8.45. Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится $n = 10\,000$ шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,05. Причины дефектов для отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, причем дефектные шарики бракуются и сыплются в бункер, а небракованные отправляются в цех сборки. Определить, на какое количество шариков должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью 0,99 после смены он не оказался переполненным.

Решение. Число забракованных шариков X имеет биномиальное распределение; так как n велико, то на основании центральной предельной теоремы можно считать распределение приблизительно нормальным с характеристиками:

$$m_x = np = 10\,000 \cdot 0,05 = 500;$$

$$D_x = npq = 500 \cdot 0,95 = 475; \quad \sigma_x \approx 21,8.$$

Находим такое значение l , для которого $\mathbf{P}(X < l) = 0,99$, или

$$\Phi^* \left(\frac{l - m_x}{\sigma_x} \right) = \Phi^* \left(\frac{l - 500}{21,8} \right) = 0,99.$$

По таблицам функции $\Phi^*(x)$ находим

$$\frac{l - 500}{21,8} \approx 2,33, \quad \text{откуда} \quad l \approx 551,$$

т.е. бункер, рассчитанный примерно на 550 шариков, с вероятностью 0,99 за смену переполняться не будет.

8.46. Условия задачи 8.45 изменены в том отношении, что причины брака являются в значительной степени общими для различных шариков, так что вероятность одному шарiku, изготовленному в течение данной смены, быть дефектным, при условии, что другой (любой) шарик уже был дефектным, равна 0,08.

Примечание. Число опытов ($n = 10\,000$) считать достаточно большим для того, чтобы, несмотря на зависимость опытов, закон распределения суммарного числа дефектных шариков был приближенно нормальным.

Решение. Рассмотрим случайную величину X — общее число забракованных (дефектных) шариков — как сумму $n = 10\,000$ слагаемых:

$$X = \sum_{i=1}^{10\,000} X_i,$$

где величина X_i принимает значение 1, если шарик дефектный, и 0 — если не дефектный. Имеем

$$m_x = np = 10\,000 \cdot 0,05 = 500;$$

$$\begin{aligned} D_x &= \sum_{i=1}^{10\,000} D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} K_{x_i x_j} = \\ &= 475 + 2C_{10\,000}^2 K_{x_i x_j} = 475 + 10\,000 \cdot 9999 K_{x_i x_j}, \end{aligned}$$

где $K_{x_i x_j}$ — корреляционный момент случайных величин X_i, X_j .

Найдем

$$K_{x_i x_j} = \mathbf{M}[X_i X_j] - m_{x_i x_j}.$$

Так как произведение $X_i X_j$ принимает только два значения: 1 (при $X_i = 1, X_j = 1$) и 0 (в остальных случаях), то

$$\mathbf{M}[X_i X_j] = 1 \cdot \mathbf{P}((X_i = 1)(X_j = 1)) = 0,05 \cdot 0,08 = 0,004$$

и

$$K_{x_i x_j} = 0,004 - 0,05 \cdot 0,05 = 0,0015,$$

откуда

$$D_x \approx 475 + 15 \cdot 10^4 \approx 15,05 \cdot 10^4, \quad \sigma_x \approx 388.$$

Далее находим l из условия

$$\Phi^* \left(\frac{l - 500}{388} \right) = 0,99; \quad \frac{l - 500}{388} = 2,33; \quad l = 1404,$$

т.е. бункера, рассчитанного примерно на 1400 шариков, будет достаточно (с вероятностью 0,99) для бракованной продукции за смену.

8.47*. Лотерея организована следующим образом. Участникам продаются билеты, на каждом из которых имеется таблица с номерами: 1, 2, ..., 90. Участник должен выбрать произвольным образом пять различных номеров, отметить эти номера и послать билет организаторам лотереи, которые хранят все присланные билеты в запечатанном виде до дня розыгрыша. Розыгрыш лотереи состоит в том, что случайным образом выбираются (разыгрываются) пять различных номеров из девяноста; выпавшие номера сообщаются участникам. Если у игрока совпали с объявленными менее двух номеров (0 или 1), он никакого выигрыша не получает. Если совпали с объявленными два номера, он выигрывает 1 руб.; если три номера — 100 руб.; если четыре номера — 10 000 руб.; если все пять номеров — 1 000 000 руб.

1) Определить нижнюю границу цены билета, при котором лотерея в среднем еще не приносит убытка ее организаторам;

2) определить средний доход M , который приносит лотерея организаторам, если в ней участвуют 1 000 000 человек, назначающих свои номера независимо один от другого, каждый покупает один билет, а цена билета 30 коп.;

3) пользуясь «правилом трех сигма», найти границы практически возможных выплат по лотерее; можно ли считать суммарную выплату по лотерее распределенной по нормальному закону?

Решение. 1) Обозначим p_i вероятность того, что из пяти названных игроком номеров ровно i совпадут с выпавшими. Находим

$$p_2 = \frac{C_5^2 C_{85}^3}{C_{90}^5} \approx 2,25 \cdot 10^{-2}; \quad p_3 = \frac{C_5^3 C_{85}^2}{C_{90}^5} \approx 8,12 \cdot 10^{-4};$$

$$p_4 = \frac{C_5^4 C_{85}^1}{C_{90}^5} \approx 9,67 \cdot 10^{-6}; \quad p_5 = \frac{1}{C_{90}^5} \approx 2,28 \cdot 10^{-8}.$$

Минимальная цена билета должна быть равна математическому ожиданию выигрыша игрока, купившего этот билет:

$$m = 2,25 \cdot 10^{-2} \cdot 1 + 8,12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 + 9,67 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 + 2,28 \cdot 10^{-8} \cdot 10^6 = 22,3 \cdot 10^{-2} \text{ [руб.]},$$

т.е. минимальная цена билета — около 23 коп.

$$2) M = (0,30 - 0,223) \cdot 10^6 = 77 \cdot 10^3 \text{ [руб.]}. \quad 3)$$

Общая сумма выигрышей X , которая подлежит выплате по лотерее, представляет собой сумму выигрышей отдельных игроков:

$$X = \sum_{i=1}^{1\,000\,000} X_i,$$

где X_i — выигрыш i -го игрока.

Считается, что игроки называют свои номера независимо друг от друга, так что величины X_i ($i = 1, 2, \dots, 1\,000\,000$) независимы. Из центральной предельной теоремы известно, что сумма достаточно большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин приближенно распределена по нормальному закону. Требуется выяснить, достаточно ли в данном случае числа слагаемых $n = 1\,000\,000$ для того, чтобы величину X можно было считать распределенной нормально?

Находим математическое ожидание m_x и среднее квадратическое отклонение σ_x случайной величины X . Для любого $i = 1, \dots, 1\,000\,000$

$$m_{x_i} = 22,3 \cdot 10^{-2} = 0,223;$$

$$\alpha_2[X_i] = 2,25 \cdot 10^{-2} + 8,12 + 9,67 \cdot 10^2 + 2,28 \cdot 10^4 = 2,38 \cdot 10^4;$$

$$D_{x_i} = 2,38 \cdot 10^4 - 0,22^2 = 2,38 \cdot 10^4.$$

Отсюда

$$m_x = 10^6 \cdot m_{x_i} = 2,23 \cdot 10^5;$$

$$D_x = 10^6 \cdot D_{x_i} = 2,38 \cdot 10^{10}; \quad \sigma_x = 10^5 \sqrt{2,38} \approx 1,54 \cdot 10^5.$$

Известно, что для случайной величины X , распределенной по нормальному закону, границы практически возможных значений заключены между $m_x \pm 3\sigma_x$ («правило трех сигма»).

В нашем случае нижняя граница возможных значений случайной величины X , если бы она была распределена по нормальному закону, была бы $m_x - 3\sigma_x = (2,23 - 3 \cdot 1,54) \cdot 10^5 = -2,39 \cdot 10^5$.

Отрицательное значение этой границы указывает на то, что случайная величина X не может считаться распределенной нормально.

8.48*. Найти предел $\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^a \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, где a — целое положительное число.

Решение. Выражение $\sum_{m=0}^a \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ есть вероятность того, что случайная величина X , распределенная по закону Пуассона, не превзойдет своего математического ожидания a . Но при неограниченном увеличении параметра a закон Пуассона приближается к нормальному. Для нормального закона вероятность того, что случайная величина не превзойдет своего математического ожидания, равна $1/2$, значит, $\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^a \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \frac{1}{2}$.

8.49. Доказать, что показательный закон распределения является устойчивым по отношению к операции нахождения минимума, т.е. если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы и подчинены показательным законам распределения с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно, то случайная величина $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ также подчинена показательному закону, причем параметр этого закона $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Решение. На основании решения задачи 8.34 функция распределения случайной величины Z :

$$G(z) = 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i z} = 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z},$$

а это есть функция распределения показательного закона с параметром $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

8.50. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots$ распределены одинаково по показательному закону с параметром λ :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Рассматривается сумма случайного числа таких величин:

$$Z = \sum_{i=1}^Y X_i,$$

где случайная величина Y распределена по сдвинутому на единицу закону Паскаля (см. задачу 5.15):

$$P_n = \mathbf{P}(Y = n) = pq^{n-1} \quad (0 < p < 1; n = 1, 2, \dots).$$

Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины Z .

Решение. Сумма фиксированного числа n случайных величин $\sum_{i=1}^n X_i$ подчинена закону Эрланга $(n-1)$ -го порядка (см. задачу 8.31) с плотностью

$$f^{(n)}(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

Плотность распределения случайной величины Z находим по формуле полной вероятности с гипотезами $H_n (Y = n)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} pq^{n-1} = \\ &= p\lambda e^{-\lambda z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda qz)^k}{k!} = p\lambda e^{-\lambda z} e^{\lambda qz} = p\lambda e^{-\lambda pz} \quad (z > 0), \end{aligned}$$

т.е. случайная величина Z будет также подчинена показательному закону, но с параметром λp . Следовательно,

$$m_z = \frac{1}{\lambda p}, \quad D_z = \frac{1}{\lambda^2 p^2}.$$

8.51*. Рассматривается сумма случайного числа случайных слагаемых

$$Z = \sum_{i=1}^Y X_i,$$

где $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $f(x)$, Y — положитель-

ная, не зависящая от них целочисленная случайная величина с законом распределения $\mathbf{P}(Y = n) = P_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

Требуется найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины Z .

Решение. Допустим, что случайная величина Y приняла значение n ($n = 1, 2, \dots, N$). Вероятность этого равна P_n . При этой гипотезе

$$Z = Z_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Обозначим плотность распределения суммы n независимых одинаково распределенных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ через $f^{(n)}(x)$. Эти плотности можно найти последовательно: сначала $f^{(2)}(x)$ — композицию двух одинаковых знаков $f(x)$ и $f(x)$, затем $f^{(3)}(x)$ — композицию $f^{(2)}(x)$ и $f(x)$ и т.д.

По формуле полной вероятности плотность распределения случайной величины Z будет

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^N f^{(n)}(z) P_n.$$

Для нахождения числовых характеристик воспользуемся тем же приемом. Допустим, что $Y = n$. В этом случае условное математическое ожидание будет

$$\mathbf{M}[Z_n] = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = nm_x,$$

где

$$m_x = \mathbf{M}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx.$$

Тогда полное математическое ожидание найдем из выражения

$$m_z = \mathbf{M}[Z] = \sum_{n=1}^N nm_x P_n = m_x m_y,$$

где

$$m_y = \sum_{n=1}^N n P_n.$$

Таким же образом найдем и условный второй начальный момент при условии, что $Y = n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[Z_n^2] &= \mathbf{M}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] = \mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{2x} + 2\sum_{i<j} m_x m_x = n\alpha_{2x} + n(n-1)m_x^2 = nD_x + n^2 m_x^2, \end{aligned}$$

где

$$D_x = \mathbf{D}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Второй начальный момент случайной величины Z

$$\begin{aligned} \alpha_{2z} = \mathbf{M}[Z^2] &= \sum_{n=1}^N \mathbf{M}[Z_n^2] P_n = \sum_{n=1}^N (nD_x + n^2 m_x^2) P_n = \\ &= D_x m_y + m_x^2 \alpha_{2y}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{2y} = \sum_{n=1}^N n^2 P_n = D_y + m_y^2.$

Дисперсия случайной величины Z

$$D_z = \alpha_{2z} - m_z^2 = D_x m_y + m_x^2 \alpha_{2y} - m_x^2 m_y^2 = D_x m_y + m_x^2 D_y.$$

8.52. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ распределены одинаково по показательному закону с параметром λ . Случайная величина $Y = Y_1 + 1$, где случайная величина Y_1 распределена по закону Пуассона с параметром a . Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины

$$Z = \sum_{i=1}^Y X_i.$$

Решение. Закон распределения суммы $\sum_{i=1}^n X_i$ представляет собой закон Эрланга $(n-1)$ -го порядка (см. задачу 8.31) с параметром λ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

По формуле полной вероятности плотность распределения случайной величины Z будет

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(z) P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} = \\ &= \lambda e^{-\lambda z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z a)^k}{(k!)^2} \quad \text{при } z > 0.\end{aligned}$$

Эту плотность можно выразить через модифицированную цилиндрическую функцию $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$:

$$\varphi(z) = \lambda e^{-\lambda z - a} I_0(2\sqrt{\lambda z a}) \quad \text{при } z > 0.$$

Далее на основании решения предыдущей задачи

$$\mathbf{M}[Z] = m_x m_y = \frac{a+1}{\lambda},$$

$$\mathbf{D}[Z] = D_x m_y + m_x^2 D_y = \frac{a+1}{\lambda^2} + \frac{a}{\lambda^2} = \frac{2a+1}{\lambda^2}.$$

8.53. Рассматривается система случайных величин X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которая связана с дискретной случайной величиной Y следующим образом:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq Y, \\ 0, & \text{если } i > Y. \end{cases}$$

Известна функция распределения $F(y)$ случайной величины Y . Требуется найти закон распределения каждой случайной величины X_i и числовые характеристики системы случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Решение. Ряд распределения случайной величины X_i имеет вид

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \mathbf{P}(Y < i) & \mathbf{P}(Y \geq i) \end{array}.$$

Так как $\mathbf{P}(Y < i) = F(i)$, то ряд распределения имеет вид

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline F(i) & 1 - F(i) \end{array},$$

откуда $m_{x_i} = 1 - F(i)$, $D_{x_i} = F(i)[1 - F(i)]$.

Найдем корреляционные моменты случайных величин X_i и X_j , для чего определим $\mathbf{M}[X_i X_j]$. Произведение $X_i X_j$ при $i < j$ может принимать только два значения: 1, если $X_i = 1$, и 0, если $X_j = 0$.

Следовательно, $\mathbf{M}[X_i X_j] = m_{x_j} = 1 - F(j)$ ($i < j$), откуда

$$K_{ij} = \mathbf{M}[X_i X_j] - m_{x_i} m_{x_j} = 1 - F(j) - [1 - F(i)][1 - F(j)] = \\ = F(i)[1 - F(j)] \quad (i < j),$$

а коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{F(i)[1 - F(j)]}{\sqrt{F(i) F(j)[1 - F(i)][1 - F(j)]}} = \sqrt{\frac{F(i)[1 - F(j)]}{F(j)[1 - F(i)]}} \\ (1 \leq i < j \leq n).$$

8.54. Найти характеристическую функцию случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a, b) .

Решение. $g(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$. Если $a = -b$

($b > 0$), то

$$g(t) = \frac{1}{2b} \frac{e^{itb} - e^{-itb}}{it} = \frac{1}{tb} \frac{e^{itb} - e^{-itb}}{2i} = \frac{\sin tb}{tb}.$$

8.55. Найти характеристическую функцию случайной величины X , распределенной по показательному закону:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Решение. $g(t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda^2 + \lambda it}{\lambda^2 + t^2}$.

8.56. Найти характеристическую функцию для случайной величины X , распределенной по закону Лапласа:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-m|}.$$

Решение. Заменой $x - m = y$ получим

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-m|} dx = \\ = \frac{\alpha}{2} e^{itm} \left(\int_{-\infty}^0 e^{ity} e^{\alpha y} dy + \int_0^{\infty} e^{ity} e^{-\alpha y} dy \right) = \\ = \frac{\alpha}{2} e^{itm} \left(\frac{1}{\alpha + it} + \frac{1}{\alpha - it} \right) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + t^2} e^{itm}.$$

При $m = 0$ получим $g(t) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + t^2}$.

8.57. Найти характеристическую функцию случайной величины X , распределенной по биномиальному закону с параметрами p и n :

$$\mathbf{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$; $0 < p < 1$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Решение. Представим величину X как сумму n независимых случайных величин:

$$X = \sum_{k=1}^n X_k,$$

где X_i — случайная величина с рядом распределения

0	1
q	p

Характеристическая функция величины X_k равна

$$g_k(t) = \mathbf{M}[e^{itX_k}] = qe^0 + pe^{it} = q + pe^{it}.$$

Так как характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций, то

$$g(t) = \prod_{k=1}^n g_k(t) = (q + pe^{it})^n.$$

8.58. Найти характеристическую функцию случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром a :

$$\mathbf{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (a > 0; m = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } g(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} e^{itm} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^m}{m!} = \\ &= e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{-a(1-e^{it})}. \end{aligned}$$

8.59. Характеристическая функция случайной величины X равна $g_x(t)$. Случайная величина Y получается из X прибавлением постоянной величины a : $Y = X + a$. Найти характеристическую функцию $g_y(t)$ случайной величины Y .

Решение. Рассматривая неслучайную величину a как частный случай случайной, находим ее характеристическую функцию $g_a(t) = e^{ita}$. Так как случайная величина X не может зависеть (в вероятностном смысле) от неслучайной a , получаем

$$g_y(t) = g_x(t) g_a(t) = g_x(t) e^{ita}.$$

8.60. Найти характеристическую функцию $g_y(t)$ случайной величины Y , распределенной по закону Паскаля:

$$\mathbf{P}(Y = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

а также характеристическую функцию случайной величины X , распределенной по «сдвинутому на единицу» закону Паскаля:

$$X = Y + 1; \quad \mathbf{P}(X = k) = pq^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Решение.

$$g_y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k e^{itk} = p \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{it})^k = \frac{p}{1 - qe^{it}}.$$

Применяя правило, выведенное в предыдущей задаче, получим

$$g_x(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

8.61. Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p . Опыты прекращаются, как только событие A появилось n раз ($n > 1$). Найти закон распределения, числовые характеристики и характеристическую функцию числа X «неудачных» опытов, в которых событие A не произошло.

Решение. Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение k . Для этого нужно, чтобы общее число произведенных опытов было равно $n + k$ (k опытов кончились «неудачно», а n — «удачно»). Последний опыт по условию должен быть «удачным», а в предыдущих $n + k - 1$ опытах должны произвольным образом распределиться $n - 1$ «удачных» и k «неудачных» опытов. Вероятность этого равна

$$\mathbf{P}(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n q^k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Полученный закон распределения является естественным обобщением закона Паскаля. Мы будем его называть «*обобщен-*

ным законом Паскаля n -го порядка». Случайную величину X можно представить в виде суммы n независимых случайных величин:

$$X = \sum_{s=1}^n X_s,$$

где каждая случайная величина X_s распределена по закону Паскаля:

$$\mathbf{P}(X_s = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Действительно, общее число «неудачных» опытов складывается из: 1) числа «неудачных» опытов до первого появления события A ; 2) числа «неудачных» опытов от первого до второго появления события A и т.д.

Отсюда получаем числовые характеристики величины X

$$m_x = \frac{nq}{p}; \quad D_x = \frac{nq}{p^2}$$

и характеристическую функцию

$$g_x(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^{it}} \right)^n.$$

8.62. Условия задачи те же, что и в задаче 8.61, но случайная величина Y представляет собой общее число опытов, произведенных до n -кратного появления события A . Найти закон распределения, числовые характеристики и характеристическую функцию случайной величины Y .

Решение. $Y = X + n$, где X — случайная величина, фигурирующая в предыдущей задаче. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k) &= \mathbf{P}(X = k - n) = \\ &= C_{k-1}^{k-n} p^n q^{k-n} = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} \quad (k = n, n+1, \dots). \end{aligned}$$

Числовые характеристики величины Y

$$m_y = m_x + n = \frac{nq}{p} + n = \frac{n}{p}; \quad D_y = D_x = \frac{nq}{p^2}.$$

Характеристическая функция

$$g_y(t) = g_x(t) e^{itn} = \left(\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \right)^n.$$

8.63. Найти характеристическую функцию случайной величины X , распределенной по обобщенному закону Эрланга $(n-1)$ -го порядка (см. задачу 8.31):

$$f_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \quad \text{при } x > 0.$$

Решение. Обобщенный закон Эрланга $(n-1)$ -го порядка получается как результат сложения n независимых случайных величин, распределенных по показательным законам с различными параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Следовательно, характеристическая функция будет равна произведению n характеристических функций показательных законов (см. задачу 8.55):

$$g_{n-1}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k - it} = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k it}{\lambda_k^2 + t^2}.$$

Если все n случайных величин распределены одинаково, то получаем закон Эрланга $(n-1)$ -го порядка:

$$f_{n-1}(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad (x > 0),$$

с характеристической функцией

$$g_{n-1}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n = \left(\frac{\lambda^2 + \lambda it}{\lambda^2 + t^2} \right)^n.$$

8.64. Имеется случайная величина Y , распределенная по показательному закону с параметром λ :

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y > 0).$$

Случайная величина X при заданном значении случайной величины $Y = y$ распределена по закону Пуассона с параметром y :

$$\mathbf{P}(X = k | Y = y) = \frac{y^k}{k!} e^{-y} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Найти безусловный закон распределения случайной величины X .

Р е ш е н и е. Полная вероятность события $X = k$ будет

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = k) &= \int_0^{\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda}{k!} \int_0^{\infty} y^k e^{-(1+\lambda)y} dy = \\ &= \frac{\lambda}{k!} (1 + \lambda)^{-(k+1)} = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda} = p; \quad \frac{1}{1 + \lambda} = q = 1 - p,$$

получим

$$\mathbf{P}(X = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

т.е. случайная величина X подчинена закону Паскаля с параметром

$$p = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

8.65. На космическом корабле установлен счетчик Гейгера для определения числа космических частиц, попадающих в него за некоторый случайный интервал времени T . Поток космических частиц — пуассоновский с плотностью λ ; каждая частица регистрируется счетчиком с вероятностью p . Счетчик включается на время T , распределенное по показательному закону с параметром μ . Случайная величина X — число зарегистрированных частиц. Найти закон распределения и характеристики m_x , D_x случайной величины X .

Р е ш е н и е. Предположим, что $T = t$, и найдем условную вероятность того, что $X = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$\mathbf{P}(X = m | t) = \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t}.$$

Тогда полная вероятность события $X = m$ будет

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = m) &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t} \mu e^{-\mu t} dt = \\ &= \frac{\mu}{m!} (\lambda p)^m \int_0^{\infty} t^m e^{-(\lambda p + \mu)t} dt = \mu \frac{(\lambda p)^m}{(\lambda p + \mu)^{m+1}} = \\ &= \frac{\mu}{\lambda p + \mu} \left(\frac{\lambda p}{\lambda p + \mu} \right)^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

А это и есть распределение Паскаля с параметром $\frac{\mu}{\lambda p + \mu}$ (см. предыдущую задачу), поэтому (см. задачу 5.15)

$$m_x = \frac{\lambda p}{\lambda p + \mu} : \frac{\mu}{\lambda p + \mu} = \frac{\lambda p}{\mu};$$

$$D_x = \frac{\lambda p}{\lambda p + \mu} : \left(\frac{\mu}{\lambda p + \mu} \right)^2 = \frac{\lambda p (\lambda p + \mu)}{\mu^2} = \left(\frac{\lambda p}{\mu} \right)^2 + \frac{\lambda p}{\mu} = m_x(m_x + 1).$$

8.66. Решить задачу 8.65 при условии, что счетчик включается на случайное время T с плотностью распределения $f(t)$ ($t > 0$).

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, условный закон распределения величины X при $T = t$:

$$\mathbf{P}(X = m|t) = \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Безусловный закон распределения будет

$$\mathbf{P}(X = m) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t} f(t) dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Находим числовые характеристики случайной величины X . Условное математическое ожидание $m_{x|t} = \lambda p t$; безусловное математическое ожидание

$$m_x = \int_0^{\infty} \lambda p t f(t) dt = \lambda p \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda p m_t,$$

где $m_t = \mathbf{M}[T]$. Аналогично находим второй начальный момент случайной величины X (заметим, что так можно находить только начальные безусловные моменты, а не центральные):

$$\alpha_2[X|t] = \lambda p t + (\lambda p t)^2;$$

$$\begin{aligned} \alpha_2[X] &= \lambda p \int_0^{\infty} t f(t) dt + (\lambda p)^2 \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \lambda p m_t + (\lambda p)^2 \alpha_2[T] = \\ &= \lambda p m_t + (\lambda p)^2 (D_t + m_t^2), \end{aligned}$$

где D_t — дисперсия случайной величины T . Отсюда имеем

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \lambda p m_t + (\lambda p)^2 D_t.$$

8.67. Решить предыдущую задачу для конкретного случая, когда $f(t)$ есть закон Эрланга k -го порядка с параметром μ :

$$f(t) = f_k(t) = \frac{\mu (\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \quad (t > 0).$$

Решение.

$$\begin{aligned} P(X = m) &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t} \frac{\mu (\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dt = \\ &= \frac{\mu (\lambda p)^m}{m!} \frac{\mu^k}{k!} \int_0^{\infty} t^{m+k} e^{-(\lambda p + \mu)t} dt = \\ &= \frac{\mu (\lambda p)^m}{m!} \frac{\mu^k}{k!} \frac{(m+k)!}{(\lambda p + \mu)^{m+k+1}} = C_{m+k}^m \left(\frac{\mu}{\lambda p + \mu} \right)^{k+1} \left(\frac{\lambda p}{\lambda p + \mu} \right)^m. \end{aligned}$$

Итак, величина X распределена по «обобщенному закону Паскаля $(k+1)$ -го порядка» (см. задачу 8.61) с параметром $p_1 = \frac{\mu}{\lambda p + \mu} \left(\frac{\lambda p}{\lambda p + \mu} = q_1 = 1 - p_1 \right)$.

Математическое ожидание случайной величины T , распределенной по закону Эрланга k -го порядка, будет $m_t = \frac{k+1}{\mu}$, а дисперсия $D_t = \frac{k+1}{\mu^2}$. Следовательно, по формулам, полученным в предыдущей задаче,

$$m_x = \frac{\lambda p}{\mu} (k+1); \quad D_x = \frac{\lambda p}{\mu} (k+1) \left(1 + \frac{\lambda p}{\mu} \right),$$

что, как и в задаче 8.61, можно представить в виде

$$m_x = \frac{(k+1) q_1}{p_1}, \quad D_x = \frac{(k+1) q_1}{p_1^2}.$$

8.68. Найти характеристическую функцию гамма-распределения

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} \quad (x > 0; \beta > 0; \alpha \geq 1).$$

Решение. $g(t) = \int_0^{\infty} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} e^{itx} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - it)^\alpha}.$

Примечание. При целом α гамма-распределение превращается в распределение Эрланга $(\alpha - 1)$ -го порядка, так как

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)! \text{ и } f(x) = \frac{\beta (\beta x)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} e^{-\beta x} \quad (x > 0),$$

и характеристическая функция распределения Эрланга имеет такой же вид, как и для гамма-распределения (см. задачу 8.63).

8.69*. Случайная величина Z представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых

$$Z = \sum_{k=1}^Y X_k,$$

где X_k — одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$ и характеристической функцией $g_x(t)$, а случайная величина Y распределена по сдвинутому на единицу закону Паскаля:

$$\mathbf{P}(Y = m) = pq^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Случайные величины X_k ($k = 1, 2, \dots$) и Y независимы между собой. Требуется найти характеристическую функцию случайной величины Z и ее числовые характеристики.

Решение. Допустим, что случайная величина Y приняла значение m . При этой гипотезе

$$Z = Z_m = \sum_{k=1}^m X_k.$$

Характеристическая функция случайной величины Z_m будет равна

$$g_m(t) = [g_x(t)]^m,$$

следовательно, характеристическая функция случайной величины Z будет

$$g_z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} [g_x(t)]^m = \frac{p}{q} \sum_{m=1}^{\infty} [qg_x(t)]^m.$$

Так как $0 < q < 1$ и $0 \leq |g_x(t)| \leq 1$, то

$$g_z(t) = \frac{p}{q} \frac{qg_x(t)}{1 - qg_x(t)} = \frac{pg_x(t)}{1 - qg_x(t)}.$$

Отсюда

$$M[Z] = \alpha_{1z} = \frac{\partial g_y(t)}{\partial(it)} \bigg|_{t=0} = \frac{p \frac{\partial g_x(t)}{\partial(it)}}{[1 - qg_x(t)]^2} \bigg|_{t=0} = \frac{pm_x}{p^2} = m_x m_y,$$

так как $m_y = \frac{1}{p}$. Далее имеем

$$\alpha_{2z} = \frac{\partial^2 g_y(t)}{\partial(it)^2} \bigg|_{t=0} = p \frac{\alpha_{2x}(1-q) + 2qm_x^2}{p^3} = \frac{\alpha_{2x}p + 2qm_x^2}{p^2},$$

откуда

$$D_z = \alpha_{2z} - m_z^2 = \frac{\alpha_{2x}p + 2qm_x^2}{p^2} - \frac{m_x^2}{p^2} = D_x m_y + m_x^2 D_y,$$

где $D_y = \frac{q}{p^2}$.

Получили тот же результат, что и в задаче 8.51, но другим методом.

8.70. Найти характеристическую функцию случайной величины X , подчиненной закону Симпсона (закону равнобедренного треугольника) в интервале (a, b) (рис. 8.70).

Решение.

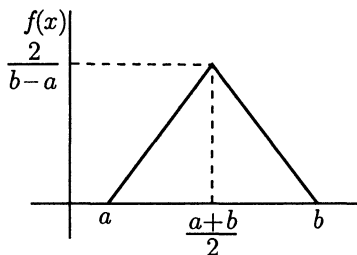


Рис. 8.70

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & \text{при } a < x < \frac{a+b}{2}, \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \text{при } \frac{a+b}{2} < x < b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{itx} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} dx + \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b e^{itx} \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} dx = \frac{4}{(b-a)^2} \frac{e^{it\frac{a+b}{2}} \left(it \frac{a-b}{2} + 1 \right) - e^{ita}}{t^2} + \\
&+ \frac{4}{(b-a)^2} \frac{e^{it\frac{a+b}{2}} \left(1 - it \frac{a-b}{2} \right) - e^{itb}}{t^2}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{4}{t^2 (b-a)^2} \left(-e^{ita} - e^{itb} + 2e^{it\frac{a+b}{2}} \right) = \\
&= - \left[\frac{2}{t(b-a)} \left(e^{it\frac{b}{2}} - e^{it\frac{a}{2}} \right) \right]^2.
\end{aligned}$$

При $a = -b$ ($b > 0$) имеем

$$g(t) = \left(\frac{2}{tb} \sin \frac{tb}{2} \right)^2.$$

Сравнивая полученные результаты с решением задачи 8.54, заключаем, что распределение Симпсона можно рассматривать как композицию двух равномерных распределений на интервале $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$.

8.71. При измерении физических величин результат измерения неизбежно округляется в соответствии с минимальной ценой деления прибора. При этом непрерывная случайная величина превращается в дискретную, возможные значения которой отделены друг от друга интервалами, равными цене деления. В связи с этим возникает следующая задача. Непрерывная случайная величина X , распределенная по закону с плотностью $f(x)$, округляется до ближайшего целого числа; получается дискретная случайная величина $Y = \Pi(X)$, где под $\Pi(X)$ подразумевается целое число, ближайшее к X .

Найти ряд распределения случайной величины Y и ее числовые характеристики: m_Y, D_Y .

Решение. График функции $\Pi(x)$ представлен на рис. 8.71. Правило округления в случае, когда расстояния от значения x до

двух соседних целых значений равны, несущественно, так как для непрерывной случайной величины вероятность попадания в любую точку равна нулю.

Вероятность того, что случайная величина Y примет целое значение k , равна

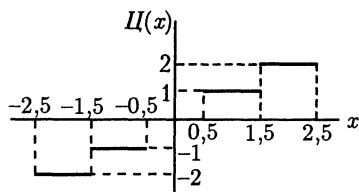


Рис. 8.71

$$\mathbf{P}(Y = k) = \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x) dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

откуда

$$m_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x) dx; \quad D_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \int_{k-0,5}^{k+0,5} f(x) dx - m_y^2.^{1)}$$

8.72. Случайные величины X и Y независимы и распределены по законам Пуассона с параметрами a и b . Найти закон распределения их разности $Z = X - Y$ и модуля их разности $U = |X - Y|$.

Решение. Случайная величина Z может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Вероятность того, что Z примет значение $k \geq 0$, равна сумме вероятностей того, что X и Y примут два значения, различающиеся на k (причем X — больше или равно Y):

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \frac{a^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k \geq 0).$$

Вероятность того, что Z примет отрицательное значение $-k$, будет

$$\mathbf{P}(Z = -k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{b^{m+k}}{(m+k)!} e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

Для случайной величины U получим

$$\mathbf{P}(U = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{(m!)^2} e^{-(a+b)};$$

$$\mathbf{P}(U = k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab)^m}{m!(m+k)!} e^{-(a+b)} (a^k + b^k) \quad (k > 0).$$

¹⁾ Если единица измерения (цена деления прибора) мала по сравнению с диапазоном возможных значений случайной величины X , то $m_y \approx m_x$; $D_y \approx D_x$.

Эти вероятности могут быть записаны с помощью модифицированных цилиндрических функций 1-го рода:

$$I_k(x) = I_{-k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)^{1)}$$

При этом

$$\mathbf{P}(Z = k) = I_k(2\sqrt{ab}) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{2}} e^{-(a+b)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$\mathbf{P}(U = 0) = I_0(2\sqrt{ab}) e^{-(a+b)};$$

$$\mathbf{P}(U = k) = I_k(2\sqrt{ab}) \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{2}} \right] e^{-(a+b)} \quad (k > 0).$$

8.73. Грибник вышел собирать грибы в лесу. Радиус обзора его равен R . Перемещаясь по лесу, он обнаруживает каждый гриб, находящийся в пределах круга обзора, с вероятностью $p(v)$, которая зависит от скорости v передвижения грибника по лесу. Считается, что грибы в лесу образуют пуассоновское поле точек с плотностью λ (λ — среднее число грибов на единицу площади).

Определить оптимальную скорость движения грибника по лесу, при которой он за время t обнаружит в среднем наибольшее количество грибов, если вероятность $p(v)$ задана формулой

$$p(v) = e^{-\alpha v} \quad (\alpha > 0, v > 0),$$

и грибник не возвращается на уже пройденные им места.

Решение. За время t грибник просмотрит полосу, площадь которой $S = 2vtR$, и обнаружит в среднем количество грибов, равное $m = S \lambda p(v) = 2vtR\lambda e^{-\alpha v}$.

Для нахождения оптимальной скорости движения продифференцируем величину m по v и приравняем производную нулю:

$$\frac{dm}{dv} = 2tR\lambda e^{-\alpha v} (1 - v\alpha) = 0,$$

откуда оптимальное значение скорости будет $v^* = \frac{1}{\alpha}$.

8.74. В условиях задачи 8.73 грибник идет со скоростью v и собирает все обнаруженные им грибы. Массы отдельных грибов представляют собой независимые случайные величины Y_i , распределенные по одному и тому же закону с математическим ожи-

¹⁾ Таблицы цилиндрических функций можно найти в справочниках.

данием m_y и дисперсией D_y . Найти математическое ожидание общей массы Z всех собранных грибов за время t и (приблизительно, считая число грибов большим) вероятность того, что эта величина превзойдет заданную вместимость корзинки z_0 .

Решение. Число собранных грибов X будет случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $m_x = 2vtR \lambda e^{-\alpha v}$. Общая масса всех собранных грибов будет

$$Z = \sum_{i=1}^Y Y_i.$$

В соответствии с решением, изложенным в задаче 8.51 или 8.69, имеем $m_z = m_x m_y$. Далее

$$D_z = m_x D_y + m_y^2 D_x = m_x (D_y + m_y^2) = m_x \cdot \alpha_{2y},$$

так как для распределения Пуассона $D_x = m_x$. Считая приблизительно случайную величину Z распределенной нормально, получим

$$\mathbf{P}(Z > z_0) = 1 - F(z_0) \approx 1 - \Phi^* \left(\frac{z_0 - m_z}{\sigma_z} \right),$$

где $\sigma_z = \sqrt{D_z}$.

8.75. Известна плотность распределения $f(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) . Найти закон распределения их разности: $Z = X - Y$.

Решение. Для системы $(X, -Y)$ плотность распределения есть $f(x, -y)$, поэтому из $X - Y = X + (-Y)$ находим

$$g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - z) dx.$$

Если случайные величины (X, Y) независимы, то

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x - z) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - z) f_2(y) dy.$$

8.76. Найти плотность распределения разности двух независимых показательных распределенных случайных величин с параметрами λ и μ ; $Z = X - Y$, $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $f_2(y) = \mu e^{-\mu y}$ ($x > 0, y > 0$).

Решение. $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x - z) dx$; $f_1(x)$ отлично от нуля при $x > 0$; $f_2(x - z)$ отлично от нуля при $x - z > 0$.

$$a) \ z > 0; \ g(z) = \int_z^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)} dx = \frac{\lambda \mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu};$$

$$б) \ z < 0; \ g(z) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu(x-z)} dx = \frac{\lambda \mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu}.$$

Следовательно,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\lambda \mu e^{-\lambda z}}{\lambda + \mu} & \text{при } z > 0, \\ \frac{\lambda \mu e^{\mu z}}{\lambda + \mu} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Параметры этого закона:

$$m_z = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - \lambda}{\lambda \mu}; \quad D_z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\lambda \mu)^2}.$$

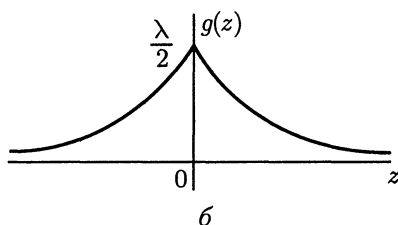
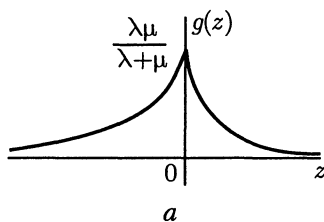


Рис. 8.76

Кривая распределения будет иметь вид, изображенный на рис. 8.76, а.

При $\lambda = \mu$ получаем $g(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}$ (рис. 8.76, б). Такой закон распределения называется *законом Лапласа*.

ГЛАВА 9

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Случайной функцией $X(t)$ называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее, какой именно.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией* случайной функции.

При фиксированном t случайная функция $X(t)$ обращается в случайную величину $X(t)$, называемую *сечением* случайной функции.

Одномерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется закон распределения $f(x, t)$ сечения $X(t)$ случайной функции.

Двумерным законом распределения случайной функции $X(t)$ называется закон распределения системы двух ее сечений: $X(t_1)$, $X(t_2)$, представляющий собой функцию четырех аргументов: $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

Случайная функция $X(t)$ называется *нормальной*, если закон распределения системы любого числа n ее сечений представляет собой n -мерный нормальный закон.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом t представляет собой математическое ожидание соответствующего сечения случайной функции: $m_x(t) = \mathbf{M} [X(t)]$.

Корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$, которая при каждой паре значений аргументов t, t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t, t') = \mathbf{M} [\dot{X}(t) \dot{X}(t')],$$

где $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ — центрированная случайная функция.

При $t' = t$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции:

$$K_x(t, t) = D_x(t) = \mathbf{D} [X(t)] = [\sigma_x(t)]^2.$$

Основные свойства корреляционной функции:

1) $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, т.е. функция $K_x(t, t')$ не меняется при замене t на t' (симметричность).

$$2) |K_x(t, t')| \leq \sigma_x(t) \sigma_x(t').$$

3) Функция $K_x(t, t')$ — положительно определенная, т. е.

$$\int_{(B)} \int_{(B)} K_x(t, t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' \geq 0,$$

где $\varphi(t)$ — любая функция; (B) — любая область интегрирования, одинаковая для обоих аргументов.

Для нормальной случайной функции характеристики $m_x(t)$, $K_x(t, t')$ являются исчерпывающими и определяют собой закон распределения любого числа сечений.

Нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется функция

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}},$$

т. е. коэффициент корреляции сечений $X(t)$ и $X(t')$; при $t = t'$ функция $r_x(t, t')$ равна единице: $r_x(t, t) = 1$.

При прибавлении к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое, а корреляционная функция не меняется.

При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее математическое ожидание умножается на тот же множитель $\varphi(t)$, а корреляционная функция — на $\varphi(t) \varphi(t')$.

Если случайную функцию $X(t)$ подвергают некоторому преобразованию A , то получается другая случайная функция

$$Y(t) = A\{X(t)\}.$$

Преобразование $L_t^{(0)}$ называется *линейным однородным*, если

$$1) L_t^{(0)}\left\{\sum_{k=1}^n X_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^n L_t^{(0)}\{X_k(t)\}$$

(т. е. преобразование к сумме может применяться почленно);

$$2) L_t^{(0)}\{cX(t)\} = cL_t^{(0)}\{X(t)\}$$

(т. е. множитель c , не зависящий от аргумента t , по которому производится преобразование, можно выносить за знак преобразования).

Преобразование L_t называется *линейным неоднородным*, если

$$L_t\{X(t)\} = L_t^{(0)}\{X(t)\} + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — любая функция, никак не связанная с $X(t)$.

Если случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ линейным преобразованием

$$Y(t) = L_t\{X(t)\},$$

то ее математическое ожидание $m_y(t)$ получается из $m_x(t)$ тем же линейным преобразованием

$$m_v(t) = L_t \{m_x(t)\},$$

а для нахождения корреляционной функции $K_y(t, t')$ нужно дважды подвергнуть функцию $K_x(t, t')$ соответствующему линейному однородному преобразованию, один раз по t , другой раз по t' :

$$K_y(t, t') = L_t^{(0)} \{L_{t'}^{(0)} \{K_x(t, t')\}\}.$$

Взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(t, t')$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется функция

$$R_{xy}(t, t') = \mathbf{M} [\dot{X}(t) \dot{Y}(t')].$$

Из определения взаимной корреляционной функции вытекает, что

$$R_{xy}(t, t') = R_{yx}(t', t).$$

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$, $Y(t)$ называется функция

$$r_{xy}(t, t') = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_y(t')} = \frac{R_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_y(t')}}.$$

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если $R_{xy}(t, t') \equiv 0$.

Если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t),$$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + R_{xy}(t, t') + R_{xy}(t', t).$$

Для некоррелированных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t').$$

Если

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n X_k(t),$$

где $X_1(t), \dots, X_n(t)$ — некоррелированные случайные функции, то

$$m_z(t) = \sum_{k=1}^n m_{x_k}(t), \quad K_z(t, t') = \sum_{k=1}^n K_{x_k}(t, t').$$

При выполнении различных преобразований со случайными функциями часто бывает удобно записывать их в комплексном виде.

Комплексной случайной функцией называется случайная функция вида

$$Z(t) = X(t) + iY(t),$$

где $X(t)$, $Y(t)$ — действительные случайные функции.

Математическое ожидание, корреляционная функция и дисперсия комплексной случайной функции определяются следующим образом:

$$m_z(t) = m_x(t) + im_y(t); \quad K_z(t, t') = \mathbf{M} [\dot{X}(t) \overline{\dot{X}(t')}],$$

где чертой сверху обозначена комплексная сопряженная величина;

$$D_z(t) = K_z(t, t) = \mathbf{M} [|\dot{X}(t)|^2].$$

При переходе к комплексным случайным величинам и функциям необходимо определять дисперсию как *математическое ожидание квадрата модуля*, а корреляционный момент — как *математическое ожидание произведения центрированной одной случайной величины на комплексную сопряженную центрированной другой*.

Каноническим разложением случайной функции $X(t)$ называется ее представление в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^m V_k \varphi_k(t), \quad (9.0.1)$$

где V_k ($k = 1, \dots, m$) — центрированные, некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k ($k = 1, \dots, m$); $\varphi_k(t)$ ($k = 1, \dots, m$) — неслучайные функции¹⁾.

Случайные величины V_k ($k = 1, \dots, m$) называются *коэффициентами*, а функции $\varphi_k(t)$ ($k = 1, \dots, m$) — *координатными функциями* канонического разложения.

Если случайная функция $X(t)$ допускает каноническое разложение (9.0.1) в действительной форме, то корреляционная функция $K_x(t, t')$ выражается суммой вида

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^m D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t'), \quad (9.0.2)$$

которая называется *каноническим разложением корреляционной функции*.

Если случайная функция $X(t)$ допускает каноническое разложение (9.0.1) в комплексной форме, то каноническое разложение корреляционной функции имеет вид

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^m D_k \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(t')}, \quad (9.0.3)$$

где чертой сверху обозначена комплексная сопряженная величина.

Из возможности канонического разложения вида (9.0.2) или (9.0.3) корреляционной функции вытекает представимость случайной функции $X(t)$ в виде канонического разложения (9.0.1), где случайные величины V_k ($k = 1, \dots, m$) имеют дисперсии D_k ($k = 1, \dots, m$).

¹⁾ В частности, может быть $m = \infty$.

При линейном преобразовании случайной функции $X(t)$, заданной каноническим разложением (9.0.1), получается случайная функция $Y(t) = L_t \{X(t)\}$ в виде канонического разложения

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{k=1}^m V_k \psi_k(t),$$

где

$$m_y(t) = L_t \{m_x(t)\}; \quad \psi_k(t) = L_t^{(0)} \{\varphi_k(t)\},$$

т.е. при линейном преобразовании случайной функции, заданной каноническим разложением, ее математическое ожидание подвергается тому же линейному преобразованию, а координатные функции — соответствующему линейному однородному преобразованию.

Стационарной случайной функцией $X(t)$ ¹⁾ называется случайная функция, математическое ожидание которой постоянно, $m_x(t) = m_x = \text{const}$, а корреляционная функция зависит только от разности между своими аргументами $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, где $\tau = t' - t$.

Из симметричности корреляционной функции $K_x(t, t')$ следует, что $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$, т.е. корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция аргумента τ .

Дисперсия стационарной случайной функции постоянна:

$$D_x = K_x(t, t) = k_x(0) = \text{const}.$$

Корреляционная функция стационарной случайной функции обладает свойством:

$$|k_x(\tau)| \leq D_x.$$

Нормированная корреляционная функция $\rho_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ равна

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x} = \frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}.$$

Каноническое разложение стационарной случайной функции имеет вид

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (9.0.4)$$

где U_k, V_k ($k = 0, 1, \dots$) — центрированные, некоррелированные случайные величины с попарно равными дисперсиями

$$D[U_k] = D[V_k] = D_k.$$

Разложение (9.0.4) называется *спектральным*. Спектральному разложению стационарной случайной функции соответствует разложение в ряд ее корреляционной функции

¹⁾ Точнее, стационарной в широком смысле.

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau,$$

откуда

$$D_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k.$$

Спектральное разложение (9.0.4) стационарной случайной функции при $\omega_0 = 0$ можно переписать в комплексной форме:

$$X(t) = m_x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i \omega_k t},$$

где

$$\omega_{-k} = -\omega_k, \quad W_0 = U_0, \quad W_k = \frac{U_k - i V_k}{2},$$

$$W_{-k} = \frac{U_k + i V_k}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящейся на данный интервал частот, к длине этого интервала, когда последняя стремится к нулю. Спектральная плотность $S_x(\omega)$ и корреляционная функция $k_x(\tau)$ связаны преобразованиями Фурье. В действительной форме они имеют вид

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

из последнего соотношения вытекает, что

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

В комплексной форме преобразования Фурье, связывающие спектральную плотность $S_x^*(\omega)$ и корреляционную функцию, имеют вид

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i \omega \tau} d\tau, \quad k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i \omega \tau} d\omega,$$

где $S_x^*(\omega) = \frac{1}{2} S_x(\omega)$.

Как $S_x(\omega)$, так и $S_x^*(\omega)$, — действительные, неотрицательные четные функции, но $S_x(\omega)$ рассматривается только в интервале $(0, \infty)$.

Нормированной спектральной плотностью $s_x(\omega)$, $s_x^*(\omega)$ называется спектральная плотность, деленная на дисперсию случайной функции

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}; \quad s_x^*(\omega) = \frac{S_x^*(\omega)}{D_x}.$$

Белым шумом называется случайная функция $X(t)$, любые два различные (сколь угодно близкие) сечения которой некоррелированы и корреляционная функция которой пропорциональна дельта-функции:

$$K_x(t, t') = G(t) \delta(t - t').$$

Величина $G(t)$ называется *интенсивностью* белого шума.

Стационарным белым шумом называется белый шум с постоянной интенсивностью $G(t) = G = \text{const}$.

Корреляционная функция стационарного белого шума имеет вид

$$k_x(\tau) = G \delta(\tau),$$

откуда его спектральная плотность постоянна и равна

$$S_x^*(\omega) = \frac{G}{2\pi}.$$

Дисперсия стационарного белого шума равна $D_x = G \delta(0)$, т.е. бесконечна.

Если на вход стационарной линейной системы L поступает стационарная случайная функция $X(t)$, то спустя некоторое время, достаточное для затухания переходного процесса, случайная функция $Y(t)$ на выходе линейной системы также будет стационарной. Спектральные плотности входного и выходного сигналов связаны соотношением

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega) |\Phi(i\omega)|,$$

где $\Phi(i\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика линейной системы.

Говорят, что стационарная функция $X(t)$ обладает *эргодическим свойством*, если ее характеристики (m_x , $k_x(\tau)$) могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности. Достаточным условием эргодичности стационарной случайной функции (по математическому ожиданию) является стремление к нулю ее корреляционной функции при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) = 0.$$

Для того чтобы случайная функция $X(t)$ была эргодична по дисперсии D_x , достаточно, чтобы случайная функция $Y(t) = \{\dot{X}(t)\}^2$ обладала аналогичным свойством, т.е. при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_y(\tau) = 0^1$$

¹⁾ Для того чтобы случайная функция была эргодична по корреляционной функции, нужно, чтобы аналогичным свойством обладала функция $Z(t, \tau) = X(t) X(t + \tau)$.

При решении задач, связанных со случайными функциями, часто бывает удобно выполнять преобразования с помощью различных скачкообразных функций, а также обобщенных функций типа дельта-функции.

Приведем определения и основные свойства таких функций от действительного аргумента τ .

1. $|\tau|$ — модуль (абсолютная величина):

$$|\tau| = \begin{cases} \tau & \text{при } \tau \geq 0, \\ -\tau & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

2. $1(\tau)$ — единичная функция (единичный скачок):

$$1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

3. $\text{sgn } \tau$ — знак величины τ (сигнум):

$$\text{sgn } \tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0, \\ 0 & \text{при } \tau = 0, \\ -1 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

4. $\delta(\tau)$ — дельта-функция:

$$\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau} 1(\tau).$$

Дельта-функция — четная функция τ .

Основные свойства дельта-функции:

а) $\tau \delta(\tau) \equiv 0$ и вообще $\varphi(\tau) \delta(\tau) \equiv 0$, если $\varphi(\tau)$ — нечетная функция, непрерывная при $\tau = 0$.

б) $\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \psi(0)$, если функция $\psi(t)$ непрерывна в точке

$\tau = 0$ ($\varepsilon > 0$), $\int_{0-\varepsilon}^0 \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_0^{0+\varepsilon} \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \psi(0)$, если функция

$\psi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$.

Из этих определений вытекают следующие свойства, имеющие место для любых действительных τ и нечетной функции $\varphi(t)$:

1. $|\tau| = \tau \text{sgn } \tau$; 2. $\tau = |\tau| \text{sgn } \tau$; 3. $\varphi(\tau) = \varphi(|\tau|) \text{sgn } \tau$;

4. $\varphi(|\tau|) = \varphi(\tau) \text{sgn } \tau$; 5. $\varphi^2(|\tau|) = \varphi^2(\tau)$; 6. $\text{sgn } \tau = 2 \cdot 1(\tau) - 1$;

7. $1(\tau) = \frac{\text{sgn } (\tau) + 1}{2}$; 8. $|\tau| = \tau [2 \cdot 1(\tau) - 1]$; 9. $\frac{d|\tau|}{d\tau} = \text{sgn } \tau$;

10. $\frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} = \frac{d \text{sgn } \tau}{d\tau} = 2\delta(\tau)$;

$$11.1 \quad (\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} d(\operatorname{sgn} \tau);$$

12. Для нечетных положительных $k(\operatorname{sgn} \tau)^k = \operatorname{sgn} \tau$. Для четных положительных k

$$(\operatorname{sgn} \tau)^k = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \neq 0, \\ 0 & \text{при } \tau = 0; \end{cases}$$

$$13. |\tau|^s \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^k =$$

$$= \tau^s \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^{k+s} = \begin{cases} |\tau|^s & \text{при } s \text{ нечетном и } k \text{ четном,} \\ \tau^s & \text{при } s \text{ нечетном и } k \text{ нечетном,} \\ \tau^s & \text{при } s \text{ четном и } k \text{ четном,} \\ |\tau| \tau^{s-1} & \text{при } s \text{ четном и } k \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$14. \tau^s \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^k = \begin{cases} |\tau| \tau^{s-1} & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ \tau^s & \text{при } k \text{ четном;} \end{cases}$$

$$15. \varphi^s(|\tau|) \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^k =$$

$$= \varphi^s(\tau) \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^{k+s} = \begin{cases} |\varphi^s(\tau)| & \text{при } s \text{ нечетном и } k \text{ четном,} \\ \varphi^s(\tau) & \text{при } s \text{ нечетном и } k \text{ нечетном,} \\ \varphi^s(\tau) & \text{при } s \text{ четном и } k \text{ четном,} \\ \varphi(|\tau|) \varphi^{s-1}(\tau) & \text{при } s \text{ четном и } k \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$16. \varphi^s(\tau) \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^k = \begin{cases} \varphi^s(\tau) & \text{при } k \text{ четном,} \\ \varphi(|\tau|) \varphi^{s-1}(\tau) & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases}$$

9.1. Случайная функция $X(t)$ в каждом сечении представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью распределения $f(x, t)$. Написать выражения для математического ожидания $m_x(t)$ и дисперсии $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$.

О т в е т.

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx;$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x, t) dx.$$

9.2. Случайная функция $X(t)$ представляет собой случайную величину $X(t) = V$, где V — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\varphi(v)$. а) Написать выражение одномер-

ного закона (плотности) распределения $f(x, t)$ случайной функции $X(t)$. б) Найти математическое ожидание $m_x(t)$ и дисперсию $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$. в) Написать выражение двумерной функции распределения $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ двух сечений $X(t_1), X(t_2)$ случайной функции $X(t)$.

О т в е т. а) $f(x, t) = \varphi(x)$; б) $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = m_v$,

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 \varphi(x) dx = D_v; \text{ в) } F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \\ = \mathbf{P}((X(t_1) < x_1)(X(t_2) < x_2)) = \mathbf{P}((V < x_1)(V < x_2)).$$

Если $x_1 < x_2$, то из $V < x_1$ следует $V < x_2$, и $\mathbf{P}((V < x_1)(V < x_2)) = \\ = \mathbf{P}(V < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x) dx$. Следовательно,

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x) dx = F(x_1) & \text{при } x_1 < x_2, \\ \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x) dx = F(x_2) & \text{при } x_2 < x_1, \end{cases}$$

где $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(v) dv$ — функция распределения величины V .

9.3. Случайная функция $X(t)$ задана в виде $X(t) = Vt + b$, где V — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m_v, σ_v , b — неслучайная величина. Найти плотность распределения $f(x, t)$ сечения случайной функции $X(t)$ и ее характеристики $m_x(t), D_x(t), K_x(t, t')$.

О т в е т. $f(x, t)$ — нормальный закон с параметрами $m_v t + b; |t| \sigma_v$:

$$f(x, t) = \frac{1}{|t| \sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - (m_v t + b)]^2}{2t^2 \sigma_v^2}}.$$

$$m_x(t) = m_v t + b; \quad D_x(t) = t^2 \sigma_v^2; \quad K_x(t, t') = \sigma_v^2 t t'.$$

9.4. Показать, что любая функция двух аргументов вида

$$\sum_{i=1}^n D_i \varphi_i(t) \varphi_i(t'), \quad (9.4)$$

где D_i — неотрицательные числа; $\varphi_i(t)$ — любые действительные функции ($i = 1, \dots, n$), обладает всеми свойствами корреляционной функции.

Решение. Достаточно показать, что существует случайная функция $X(t)$, имеющая корреляционную функцию (9.4). Рассмотрим действительную случайную функцию $X(t)$, заданную в виде канонического разложения

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^n V_i \varphi_i(t),$$

где $\mathbf{D}[V_i] = D_i$.

Корреляционная функция этой случайной функции имеет вид

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n D_i \varphi_i(t) \varphi_i(t'),$$

что и требовалось доказать.

9.5. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 1$ и $K_x(t, t') = e^{\alpha(t+t')}$. Определить характеристики случайной функции $Y(t) = t \frac{dX(t)}{dt} + 1$. Определить, являются ли стационарными случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$.

Решение. В силу линейности преобразования $t \frac{dX}{dt} + 1$

$$m_y(t) = t \frac{d}{dt} m_x(t) + 1 = 1.$$

$$K_y(t, t') = tt' \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')}.$$

Ни одна из случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ не является стационарной, так как их корреляционные функции зависят не только от $\tau = t' - t$, но от каждого из аргументов t, t' .

9.6. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики:

$$m_x(t) = 0, \quad K_x(t, t') = \frac{1}{1 + (t' - t)^2}.$$

Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = \int_0^t X(t) dt.$$

Определить, стационарны ли случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$.

Решение. В силу линейности преобразования $\int_0^t X(t) dt$

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(t) dt = 0,$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= \int_0^t dt \int_0^{t'} K_x(t, t') dt' = \int_0^t \left(\int_0^{t'} \frac{dt'}{1 + (t' - t)^2} \right) dt = \\ &= \int_0^t [\operatorname{arctg}(t' - t) - \operatorname{arctg}(-t)] dt = \\ &= t \operatorname{arctg} t + t' \operatorname{arctg} t' - (t - t') \operatorname{arctg}(t - t') - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + t^2)(1 + t'^2)}{1 + (t - t')^2}. \end{aligned}$$

Случайная функция $X(t)$ стационарна $[K_x(t, t') = k_x(t' - t)]$; случайная функция $Y(t) = \int_0^t X(t) dt$ нестационарна. Действительно, дисперсия случайной функции $D_y(t)$ равна

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 2t \operatorname{arctg} t - \ln(1 + t^2),$$

т.е. зависит от t .

9.7. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию суммы двух некоррелированных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками

$$\begin{aligned} m_x(t) &= t; \quad K_x(t, t') = tt'; \\ m_y(t) &= -t; \quad K_y(t, t') = tt' e^{\alpha(t+t')}. \end{aligned}$$

Ответ. $Z(t) = X(t) + Y(t)$; $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = t - t = 0$; $K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') = tt'[1 + e^{\alpha(t+t')}]$.

9.8. Имеется комплексная случайная функция $Z(t) = X(t) + iY(t)$, где $X(t)$, $Y(t)$ — некоррелированные случайные функции с характеристиками

$$\begin{aligned} m_x(t) &= t^2; \quad K_x(t, t') = e^{-\alpha_1(t-t')^2}; \\ m_y(t) &= 1; \quad K_y(t, t') = e^{2\alpha_2(t+t')}. \end{aligned}$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t)$: $m_z(t)$, $K_z(t, t')$ и $D_z(t)$.

О т в е т. $m_z(t)=t^2+i$; $K_z(t,t')=e^{-\alpha_1(t-t')^2}+e^{2\alpha_2(t+t')}$; $D_z(t)=K_z(t,t)=1+e^{4\alpha_2 t}$.

9.9. Траектория космического летательного аппарата в вертикальной плоскости изображается двумя уравнениями:

$$X(t)=At^2+Bt+C, \quad Y(t)=Et^2+Ft+H.$$

Коэффициенты A, B, C, E, F, H являются случайными, так как определяются из опыта с ошибками; номинальные значения величин $A, B, \dots, H$ равны $a, b, \dots, h$ соответственно; ошибки $\Delta A, \Delta B, \dots, \Delta H$ представляют собой случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями $D_A, D_B, \dots, D_H$. Нормированная корреляционная матрица этих ошибок имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,4 & -0,2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0,7 & -0,2 \\ & & & & 1 & 0,5 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Определить математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайных функций $V(t)$ и $U(t)$, представляющих собой горизонтальную и вертикальную составляющие скорости снаряда.

Р е ш е н и е. Из условий задачи следует, что

$$V(t)=\frac{dX(t)}{dt}=2At+B; \quad U(t)=\frac{dY(t)}{dt}=2Et+F.$$

Таким образом, случайные функции $V(t)$ и $U(t)$ представлены в виде разложений (не канонических, так как их коэффициенты зависимы). Имеем

$$\begin{aligned} m_v(t) &= 2at + b; \quad m_u(t) = 2et + f; \\ K_v(t, t') &= 4D_A tt' + D_B + 0,4\sqrt{D_A D_B}(2t + 2t'); \\ K_u(t, t') &= 4D_E tt' + D_F + 0,7\sqrt{D_E D_F}(2t + 2t'); \\ D_v(t) &= 4D_A t^2 + D_B + 1,6\sqrt{D_A D_B}t; \\ D_u(t) &= 4D_E t^2 + D_F + 2,8\sqrt{D_E D_F}t. \end{aligned}$$

9.10. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики

$$m_x(t) = t^2 - 1; \quad K_x(t, t') = 2e^{-\alpha(t'-t)^2}.$$

Определить характеристики случайных функций

$$Y(t) = tX(t) + t^2 + 1; \quad Z(t) = 2t \frac{dX(t)}{dt} + (1-t)^2;$$

$$U(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + 1.$$

Решение.

$$m_y(t) = tm_x(t) + t^2 + 1 = t(t^2 - 1) + t^2 + 1 = t^3 + t^2 - t + 1;$$

$$K_y(t, t') = tt' 2e^{-\alpha(t'-t)^2};$$

$$m_z(t) = 2t \frac{dm_x(t)}{dt} + (1-t)^2 = 1 - 2t + 5t^2;$$

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= 4tt' \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'} = \\ &= -\alpha \cdot 16tt' [(t' - t) e^{-\alpha(t'-t)^2} 2\alpha(t' - t) - e^{-\alpha(t'-t)^2}] = \\ &= 16\alpha tt' e^{-\alpha(t'-t)^2} [-2\alpha(t' - t)^2 + 1]; \end{aligned}$$

$$m_u(t) = \frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} + 1 = 3; \quad K_u(t, t') = \frac{\partial^4 K_x(t, t')}{\partial t^2 (\partial t')^2}.$$

При вычислении $K_z(t, t')$ мы уже нашли $\frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}$, следовательно,

$$\begin{aligned} K_u(t, t') &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} 4\alpha e^{-\alpha(t'-t)^2} [1 - 2\alpha(t' - t)^2] = \\ &= 8\alpha^2 e^{-\alpha(t'-t)^2} [3 + 4\alpha^2(t' - t)^4 - 12\alpha(t' - t)^2]. \end{aligned}$$

9.11. Случайная функция $X(t)$ задана выражением

$$X(t) = V \cos \omega t,$$

где V — случайная величина с характеристиками $m_v = 2; \sigma_v = 3$. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: $m_x(t)$; $K_x(t, t')$; $D_x(t)$. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной. Найти характеристики случайной функции

$$Y(t) = X(t) + \alpha \frac{dX(t)}{dt},$$

где α — неслучайная величина.

Является ли стационарной случайная функция $Y(t)$?

Р е ш е н и е.

$$m_x(t) = m_v \cos \omega t = 2 \cos \omega t;$$

$$K_x(t, t') = D_v \cos \omega t \cos \omega t' = 9 \cos \omega t \cos \omega t';$$

$$D_x(t) = 9 \cos^2 \omega t.$$

Случайную функцию $Y(t)$ можно представить в виде

$$Y(t) = V \cos \omega t + \alpha \frac{dV \cos \omega t}{dt} = V (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t);$$

отсюда

$$m_y(t) = m_v (\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t) = 2(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t);$$

$$K_y(t, t') = 9(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)(\cos \omega t' - \alpha \omega \sin \omega t');$$

$$D_y(t) = 9(\cos \omega t - \alpha \omega \sin \omega t)^2.$$

Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ нестационарны.

9.12. Задана случайная функция

$$X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где V_1 и V_2 — некоррелированные случайные величины с характеристиками $m_{v_1} = m_{v_2} = 0$; D_{v_1}, D_{v_2} . Найти характеристики случайной функции $X(t)$.

Р е ш е н и е. Случайная функция $X(t)$ представлена каноническим разложением, следовательно,

$$m_x(t) = 0; \quad K_x(t, t') = D_{v_1} e^{-\alpha_1(t+t')} + D_{v_2} e^{-\alpha_2(t+t')};$$

$$D_x(t) = D_{v_1} e^{-2\alpha_1 t} + D_{v_2} e^{-2\alpha_2 t}.$$

9.13. Случайная функция $X(t)$ задана своим каноническим разложением

$$X(t) = \sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a,$$

где V_i — центрированные случайные величины с дисперсиями D_{v_i} ($i = 1, 2, \dots, n$); $\mathbf{M}[V_i V_j] = 0$ при $i \neq j$; a — неслучайная величина.

Найти характеристики случайной функции $X(t)$.

О т в е т. $m_x(t) = a$; $K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n D_{v_i} e^{-\alpha_i(t+t')}$;

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^n D_{v_i} e^{-2\alpha_i t}.$$

9.14. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением

$$X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t,$$

где V_1 и V_2 — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и с дисперсиями $D_1 = D_2 = 2$. Определить, является ли стационарной случайная функция $X(t)$.

Р е ш е н и е. $m_x(t) = t$; $K_x(t, t') = 2 (\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') = 2 \cos \omega (t' - t)$.

Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ удовлетворяет условию стационарности, однако математическое ожидание $m_x(t)$ зависит от времени. Случайная функция $X(t)$ нестационарна, но центрированная случайная функция $\dot{X}(t)$ стационарна.

9.15. Заданы две случайные функции:

$$X(t) = V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t, \quad Y(t) = U_1 \cos \omega_2 t + U_2 \sin \omega_2 t.$$

Математические ожидания всех случайных величин V_1, V_2, U_1 и U_2 равны нулю, дисперсии равны $D_{v_1} = D_{v_2} = 1$; $D_{u_1} = D_{u_2} = 4$; нормированная корреляционная матрица системы (V_1, V_2, U_1, U_2) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ & 1 & 0 & -0,5 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Определить взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$ и найти значение этой функции при $t = 0, t' = 1$. Определить $R_{yx}(t, t')$ и найти значение этой функции при $t = 0; t' = 1$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{Y}(t')] = \\ &= \mathbf{M}[(V_1 \cos \omega_1 t + V_2 \sin \omega_1 t)(U_1 \cos \omega_2 t' + U_2 \sin \omega_2 t')] = \\ &= \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' \mathbf{M}[V_1 U_1] + \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t' \mathbf{M}[V_1 U_2] + \\ &+ \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t' \mathbf{M}[V_2 U_1] + \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t' \mathbf{M}[V_2 U_2] = \\ &= \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t' - \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t' = \cos(\omega_1 t + \omega_2 t'). \end{aligned}$$

$$R_{xy}(0, 1) = \cos \omega_2;$$

$$R_{yx}(t, t') = R_{xy}(t', t) = \cos(\omega_1 t' + \omega_2 t); \quad R_{yx}(0, 1) = \cos \omega_1.$$

9.16. Имеются две некоррелированные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ с характеристиками

$$m_x(t) = t^2; \quad K_x(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')};$$

$$m_y(t) = 1; \quad K_y(t, t') = e^{\alpha_2(t'-t)^2}.$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$. Решить ту же задачу, если случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ коррелированы и их взаимная корреляционная функция равна $R_{xy}(t, t') = ae^{-\alpha|t'-t|}$.

Решение. В случае, если $R_{xy}(t, t') \equiv 0$,

$$m_z(t) = m_x(t) + tm_y(t) + t^2 = 2t^2 + t.$$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t'-t)^2}.$$

В случае, когда $R_{xy}(t, t') = ae^{-\alpha|t'-t|}$, $m_z(t)$ не меняется;

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') + t'R_{xy}(t, t') + tR_{xy}(t', t) = \\ &= e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t'-t)^2} + a(t+t')e^{-\alpha|t'-t|}. \end{aligned}$$

9.17. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 0$; $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Найти ее спектральную плотность $S_x^*(\omega)$.

Решение.

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} D_x e^{-(\alpha\tau + i\omega\tau)} d\tau = \frac{D_x}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

где Re — действительная часть.

9.18. Найти спектральную плотность случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Решение.

$$\begin{aligned} S_x^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} \frac{e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}}{2} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{D_x}{2\pi} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right] =$$

$$= \frac{D_x \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2][\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]},$$

где Re — действительная часть.

9.19. Комплексная случайная функция $Z(t)$ задана в виде

$$Z(t) = X(t) + iY(t),$$

где

$$X(t) = \sum_{k=1}^3 (a_k + V_k) e^{-\alpha_k t}, \quad Y(t) = \sum_{k=1}^3 (b_k + U_k) e^{-\beta_k t}.$$

Математические ожидания всех случайных величин V_k и U_k ($k = 1, 2, 3$) равны нулю, а корреляционная матрица системы случайных величин $(V_1, V_2, V_3, U_1, U_2, U_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 3 \end{vmatrix}.$$

Найти характеристики случайной функции $Z(t)$.

О т в е т. $m_z(t) = \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\alpha_k t} + i \sum_{k=1}^3 b_k e^{-\beta_k t};$

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + i[R_{xy}(t', t) - R_{xy}(t, t')],$$

где

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^3 k e^{-\alpha_k(t+t')}; \quad K_y(t, t') = \sum_{k=1}^3 k e^{-\beta_k(t+t')};$$

$$R_{xy}(t', t) = e^{-\alpha_1 t' - \beta_1 t} - e^{-\alpha_2 t' - \beta_2 t} + 3e^{-\alpha_3 t' - \beta_3 t};$$

$$R_{xy}(t, t') = e^{-\alpha_1 t - \beta_1 t'} - e^{-\alpha_2 t - \beta_2 t'} + 3e^{-\alpha_3 t - \beta_3 t'}.$$

9.20. Рассматривается случайная функция $X(t)$, представляющая собой число заявок, поступивших на телефонную станцию за время t . Одна из реализаций случайной функции $X(t)$ показана на рис. 9.20, а. Поток заявок простейший с плотностью λ .

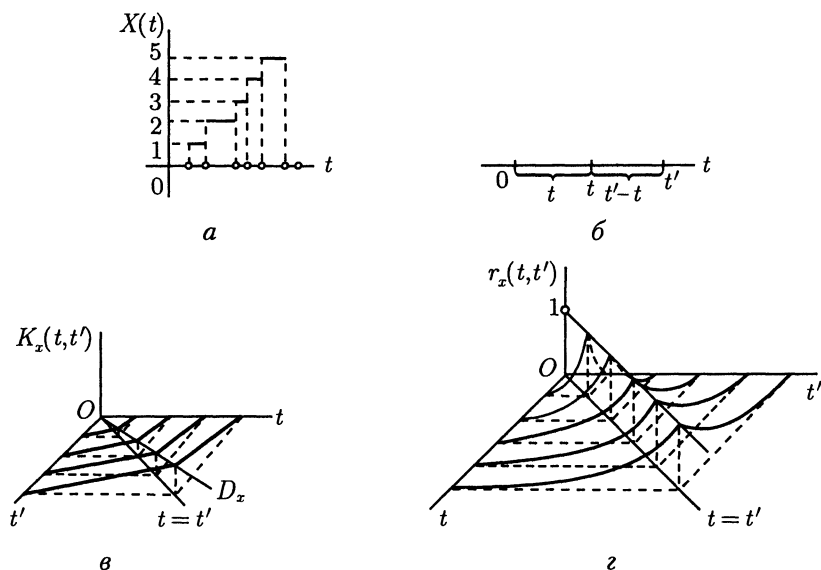


Рис. 9.20

Найти закон распределения сечения случайной функции $X(t)$ и ее характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$, $K_x(t, t')$, $r_x(t, t')$.

Решение. Закон распределения сечения $X(t)$ есть закон Пуассона с параметром $a = \lambda t$, значит, вероятность того, что случайная величина $X(t)$ примет значение m , выражается формулой

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной функции $X(t)$ будут

$$m_x(t) = \lambda t; \quad D_x(t) = \lambda t.$$

Найдем корреляционную функцию $K_x(t, t')$. Пусть $t' > t$. Рассмотрим интервал времени $(0, t')$ (рис. 9.20, б). Разобьем этот интервал на два участка: от 0 до t и от t до t' . Число вызовов на всем интервале $(0, t')$ равно сумме чисел вызовов на интервалах $(0, t)$ и (t, t') ¹⁾:

$$X(t') = X(t) + Y(t' - t),$$

где $Y(t' - t)$ — число вызовов, пришедших на интервале (t, t') ; вследствие стационарности процесса случайная функция $Y(t)$ имеет то же

¹⁾ Возможностью появления вызова в точности в момент t пренебрегаем.

распределение, что и $X(t)$; кроме того, согласно свойствам пуассоновского потока событий, случайные величины $X(t)$ и $Y(t' - t)$ некоррелированы.

Имеем

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = \\ &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) (\dot{X}(t) + \dot{Y}(t' - t))] = \mathbf{M}[(\dot{X}(t))^2] = D_x(t) = \lambda t. \end{aligned}$$

Аналогично при $t > t'$ получаем

$$K_x(t, t') = \lambda t'.$$

Таким образом,

$$K_x(t, t') = \lambda \min\{t, t'\},$$

где $\min\{t, t'\}$ — минимальная из величин t, t' (при $t = t'$ в качестве минимальной можно взять любую из величин t, t').

Пользуясь символом единичной функции $\mathbf{1}(x)$, можно записать корреляционную функцию в виде

$$K_x(t, t') = \lambda t \mathbf{1}(t' - t) + \lambda t' \mathbf{1}(t - t').$$

На рис. 9.20, в показана поверхность $K_x(t, t')$. В квадранте $t > 0$ и $t' > 0$ поверхность $K_x(t, t')$ состоит из двух плоскостей, проходящих соответственно через оси Ot и Ot' и пересекающихся по линии OD_x , аппликаты точек которой равны дисперсии λt .

Нормированная корреляционная функция равна

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}} = \sqrt{\frac{t}{t'}} \mathbf{1}(t' - t) + \sqrt{\frac{t'}{t}} \mathbf{1}(t - t').$$

Поверхность $r_x(t, t')$ показана на рис. 9.20, з.

9.21. Случайный процесс $X(t)$ возникает следующим образом. На оси времени $0t$ имеется стационарный пуассоновский (простейший) поток событий с плотностью λ . Случайная функция $X(t)$ попеременно принимает значения $+1$ и -1 ; при наступлении каждого события она скачком меняет свое значение с $+1$ на -1 или наоборот (рис. 9.21, а).

Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ и $K_x(t, t')$ случайной функции $X(t)$.

Р е ш е н и е. Сечение случайной функции $X(t)$ имеет закон распределения, представленный рядом

$x_i(t)$	-1	+1
$p_i(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Действительно, так как моменты перемен знака никак не связаны со значением случайной функции, нет никаких оснований считать какое-либо из значений $+1$, -1 вероятнее другого. Отсюда

$$m_x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0;$$

$$D_x(t) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Чтобы найти корреляционную функцию $K_x(t, t')$, рассмотрим какие-то два сечения случайной функции: $X(t)$ и $X(t')$ ($t' > t$) и найдем математическое ожидание их произведения:

$$K_x(t, t') = \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = \mathbf{M}[X(t) X(t')].$$

Произведение $X(t) X(t')$ равно -1 , если между точками t и t' произошло нечетное число событий (перемен знака), и равно $+1$, если произошло четное число перемен знака (включая нуль).

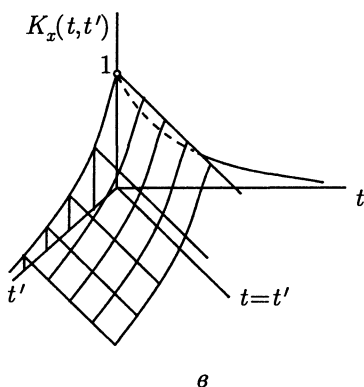
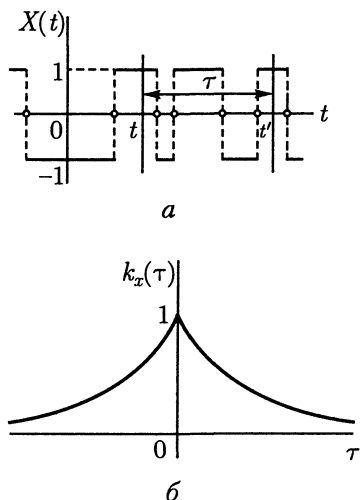


Рис. 9.21

Вероятность того, что за время $\tau = t' - t$ произойдет четное число перемен знака, равна

$$p_{\text{чет}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2};$$

аналогично вероятность того, что за время τ произойдет нечетное число перемен знака, будет

$$p_{\text{неч}} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}}{2}.$$

Отсюда

$$K_x(t, t') = (+1)p_{\text{чет}} + (-1)p_{\text{неч}} = e^{-2\lambda\tau},$$

где $\tau = t' - t$.

Аналогично при $t' < t$ найдем

$$K_x(t, t') = e^{-2\lambda(-\tau)},$$

где $\tau = t' - t$.

Объединяя эти две формулы, получим

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

График этой функции показан на рис. 9.21, б. Поверхность $K_x(t, t') = e^{-2\lambda|t-t'|}$ показана на рис. 9.21, в.

Случайная функция $X(t)$ стационарна. Ее спектральная плотность равна

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2\lambda}{\pi(4\lambda^2 + \omega^2)}.$$

9.22. Случайный процесс $X(t)$ возникает следующим образом. На оси $0t$ имеется стационарный пуассоновский поток событий с плотностью λ (рис. 9.22). При наступлении каждого события слу-

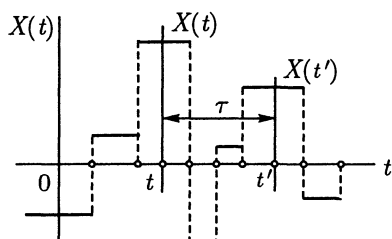


Рис. 9.22

чайная функция $X(t)$ скачком меняет свое значение, принимая, независимо от предыстории процесса, случайное значение V и сохраняя его до момента появления следующего события. Случайная величина V непрерывна и имеет плотность распределения $\varphi(v)$. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ и $K_x(t, t')$ случайной функции $X(t)$.

Решение. Любое сечение случайной функции $X(t)$ распределено по закону $\varphi(x)$; откуда

$$m_x(t) = m_v = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx; \quad D_x(t) = D_v = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_v)^2 \varphi(x) dx.$$

Корреляционную функцию $K_x(t, t')$ находим с помощью того же приема, что и в задаче 9.21. Рассмотрим два сечения $X(t)$ и $X(t')$ ($t' > t$), разделенные интервалом $\tau = t' - t$. Имеем

$$K_x(t, t') = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')].$$

Если между точками t, t' не появилось ни одного события, то $\dot{X}(t') = \dot{X}(t)$ и $K_x(t, t') = M[(\dot{X}(t))^2] = D_x(t) = D_v$. Если между точками t, t' появилось хотя бы одно событие, то $M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = 0$. Отсюда

$$K_x(t, t') = e^{-\lambda \tau} D_v + [1 - e^{-\lambda \tau}] \cdot 0 = D_v e^{-\lambda \tau}.$$

Аналогично при $t' < t$ $K_x(t, t') = D_v e^{-\lambda(-\tau)}$, откуда корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$K_x(\tau) = D_v e^{-\lambda|\tau|}.$$

Эта корреляционная функция не зависит от вида закона распределения $\varphi(v)$, а зависит только от его дисперсии D_v .

9.23. Случайный входной сигнал $X(t)$ преобразуется с помощью реле в случайный выходной сигнал $Y(t)$, связанный с $X(t)$ нелинейной зависимостью $Y(t) = \text{sgn } X(t)$, т.е.

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } X(t) > 0, \\ 0 & \text{при } X(t) = 0, \\ -1 & \text{при } X(t) < 0. \end{cases}$$

Входной сигнал представляет собой случайную функцию $X(t)$, рассмотренную в предыдущей задаче 9.22. Найти закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики $m_y(t), K_y(t, t')$.

Решение. Случайная функция $Y(t)$ может принимать только два значения: $+1$ и -1 (значением 0 можно пренебречь, так как $\mathbf{P}(X(t) = 0) = 0$). Вероятность того, что $X(t) > 0$, равна $p = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$. Ряд распределения случайной величины $Y(t)$ имеет вид

$y_i(t)$	-1	1
$p_i(t)$	$1-p$	p

Отсюда $m_y = 2p - 1$; $D_y = 1 - (2p - 1)^2 = 4p(1 - p)$. Пусть $t' > t$ и $t' - t = \tau$. Если за время τ в пуассоновском потоке не появилось ни одного события (а вероятность этого равна $e^{-\lambda\tau}$), то значения случайной функции $Y(t)$ и $Y(t')$ равны друг другу и условная корреляционная функция $K_y(t, t') = D_y(t) = 4p(1 - p)$. Если же за время τ появилось хотя бы одно событие, то $Y(t)$ и $Y(t')$ между собой не коррелированы и условная корреляционная функция $K_y(t, t')$ равна нулю. Отсюда при $t' > t$

$$K_y(t, t') = e^{-\lambda\tau} 4p(1 - p),$$

а в общем случае (при любых t, t')

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} 4p(1 - p).$$

9.24. Случайный входной сигнал $X(t)$, рассмотренный в задаче 9.22, преобразуется в случайный выходной сигнал $Y(t)$ с помощью реле с зоной нечувствительности:

$$Y(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} X(t) & \text{при } |X(t)| > \epsilon, \\ 0 & \text{при } |X(t)| < \epsilon, \end{cases}$$

где ϵ — зона нечувствительности реле.

Требуется найти закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики: математическое ожидание и корреляционную функцию.

Решение. Случайная величина $Y(t)$ при любом t может принимать одно из трех значений: $-1, 0, 1$ и имеет ряд распределения

$y_i(t)$	-1	0	1
$p_i(t)$	p_1	p_2	p_3

где

$$p_1 = \mathbf{P}(X(t) < -\epsilon) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi(x) dx;$$

$$p_2 = \mathbf{P}(-\epsilon < X(t) < \epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(x) dx;$$

$$p_3 = \mathbf{P}(X(t) > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Отсюда

$$m_y = p_3 - p_1; \quad D_y = p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2.$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче, определяем корреляционную функцию

$$k_y(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} [p_1 + p_3 - (p_3 - p_1)^2].$$

9.25. Случайная функция $X(t)$ преобразуется в случайную функцию $Y(t)$ с помощью нелинейного элемента, работа которого описывается формулами

$$Y(t) = \begin{cases} -b\varepsilon & \text{при } X(t) < -\varepsilon, \\ bX(t) & \text{при } |X(t)| < \varepsilon, \\ b\varepsilon & \text{при } X(t) > \varepsilon. \end{cases}$$

График зависимости $y(x)$ показан на рис. 9.25, а.

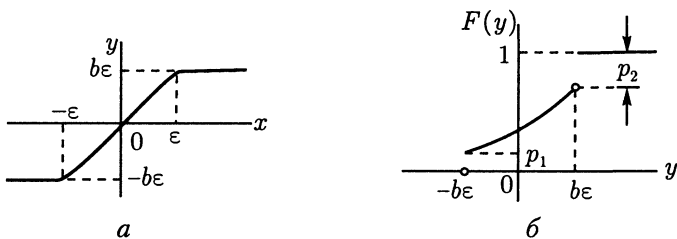


Рис. 9.25

На вход такого элемента поступает случайная функция $X(t)$, рассмотренная в задаче 9.22. Найти одномерный закон распределения случайной функции $Y(t)$ и ее характеристики: математическое ожидание и корреляционную функцию.

Решение. Случайная величина $Y(t)$ — сечение случайной функции $Y(t)$ — имеет непрерывное распределение в открытом интервале $(-b\varepsilon, b\varepsilon)$ и, кроме того, дискретные возможные значения $-b\varepsilon$ и $b\varepsilon$ с отличной от нуля вероятностью; таким образом, сечение $Y(t)$ представляет собой смешанную случайную величину, функция распределения которой $F(y)$ непрерывна на участке $(-b\varepsilon, b\varepsilon)$, а на концах участка — в точках $(-b\varepsilon)$ и $(b\varepsilon)$ — терпит разрыв. Скачки $F(y)$ в точках разрыва равны

$$\mathbf{P}(Y(t) = -b\epsilon) = \mathbf{P}(X(t) < -\epsilon) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \varphi(x) dx = p_1,$$

$$\mathbf{P}(Y(t) = b\epsilon) = \mathbf{P}(X(t) > \epsilon) = \int_{\epsilon}^{\infty} \varphi(x) dx = p_2.$$

Найдем функцию распределения случайной величины $Y(t)$ в промежутке $(-b\epsilon, b\epsilon)$:

$$\begin{aligned} F(y) = \mathbf{P}(Y(t) < y) &= \mathbf{P}\left(X(t) < \frac{y}{b}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y}{b}} \varphi(x) dx = \\ &= p_1 + \int_{-\epsilon}^{\frac{y}{b}} \varphi(x) dx \quad (-b\epsilon < y < b\epsilon). \end{aligned}$$

График функции распределения $F(y)$ показан на рис. 9.25, б. Плотность распределения смешанной случайной величины $Y(t)$ в интервале $(-b\epsilon, b\epsilon)$ равна производной от $F(y)$ на этом интервале:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{b} \varphi\left(\frac{y}{b}\right)$$

при $-b\epsilon < y < b\epsilon$.

Характеристики случайной функции $Y(t)$ равны

$$\begin{aligned} m_y(t) = m_y &= -b\epsilon p_1 + b\epsilon p_2 + \frac{1}{b} \int_{-b\epsilon}^{b\epsilon} y \varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy = \\ &= b\epsilon(p_2 - p_1) + b \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x \varphi(x) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y(t) = D_y &= \alpha_2[Y(t)] - [m_y(t)]^2 = \\ &= (b\epsilon)^2(p_1 + p_2) + \frac{1}{b} \int_{-b\epsilon}^{b\epsilon} y^2 \varphi\left(\frac{y}{b}\right) dy - m_y^2 = \\ &= b^2 \epsilon^2(p_1 + p_2) + b^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} x^2 \varphi(x) dx - m_y^2. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим задачам находим корреляционную функцию

$$k_y(\tau) = D_y e^{-\lambda|\tau|}.$$

9.26*. Рассматривается случайная функция $Y(t) = W \cos (\omega_1 t - \Theta)$, где W — центрированная случайная величина с дисперсией D_w , Θ — случайная величина, распределенная с постоянной плотностью в интервале $(0, 2\pi)$, а ω_1 — неслучайный параметр ($\omega_1 > 0$). Случайные величины W и Θ независимы. Определить характеристики случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, корреляционную функцию. Определить, является ли случайная функция $Y(t)$ стационарной и эргодической. Если она стационарна, найти ее спектральную плотность $S_y(\omega)$.

Решение. Представим случайную функцию $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = W \cos (\omega_1 t - \Theta) = W \cos \Theta \cos \omega_1 t + W \sin \Theta \sin \omega_1 t.$$

Обозначим

$$W \cos \Theta = U, \quad W \sin \Theta = V.$$

Найдем сначала основные характеристики системы случайных величин U и V :

$$\mathbf{M}[U] = \mathbf{M}[W \cos \Theta] = \mathbf{M}[W] \mathbf{M}[\cos \Theta] = 0;$$

$$\mathbf{M}[V] = \mathbf{M}[W \sin \Theta] = \mathbf{M}[W] \mathbf{M}[\sin \Theta] = 0;$$

$$\mathbf{D}[U] = \mathbf{M}[(W \cos \Theta)^2] = \mathbf{M}[W^2] \mathbf{M}[\cos^2 \Theta] = D_w \mathbf{M}[\cos^2 \Theta];$$

$$\mathbf{D}[V] = \mathbf{M}[(W \sin \Theta)^2] = D_w \mathbf{M}[\sin^2 \Theta];$$

$$K_{uv} = \mathbf{M}[W \cos \Theta W \sin \Theta] = D_w \mathbf{M}[\sin \Theta \cos \Theta].$$

Так как величина Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, то

$$\mathbf{M}[\sin^2 \Theta] = \mathbf{M}[\cos^2 \Theta] = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2};$$

$$\mathbf{M}[\sin \Theta \cos \Theta] = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \frac{1}{2\pi} d\theta = 0.$$

Итак, имеем

$$\mathbf{M}[U] = \mathbf{M}[V] = 0, \quad \mathbf{D}[U] = \mathbf{D}[V] = \frac{D_w}{2}, \quad K_{uv} = 0.$$

Следовательно, выражение

$$Y(t) = W \cos (\omega_1 t - \Theta) = U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t$$

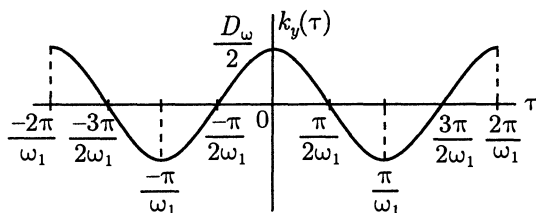


Рис. 9.26

представляет собой спектральное разложение стационарной случайной функции, корреляционная функция которой имеет вид

$$k_y(\tau) = \frac{D_w}{2} \cos \omega_1 \tau, \quad \text{а} \quad m_y = 0.$$

График этой функции показан на рис. 9.26.

Функция $Y(t)$ эргодичной не является, так как характеристики, найденные по одной реализации, не совпадают с характеристиками, определенными по множеству реализаций. Действительно, каждая реализация случайной функции $Y(t)$ есть гармоническое колебание, амплитуда которого представляет собой значение, случайно принятое величиной W . Среднее по времени для каждой такой реализации будет равно нулю и совпадает с математическим ожиданием случайной функции $Y(t)$, но дисперсия и корреляционная функция, найденные как средние по времени для одной реализации, уже не будут совпадать с соответствующими характеристиками случайной функции $Y(t)$. Например,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y^2(t) dt &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T W^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega_1 t - \theta)] dt = \frac{1}{2} W^2. \end{aligned}$$

Найдем спектральную плотность случайной функции $Y(t)$. Покажем, что она пропорциональна дельта-функции:

$$S_y(\omega) = \frac{D_w}{2} \delta(\omega - \omega_1) \quad (0 < \omega < \infty).$$

Действительно, при такой спектральной плотности корреляционная функция будет равна

$$\int_0^\infty S_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^\infty \frac{D_w}{2} \delta(\omega - \omega_1) \cos \omega \tau d\omega = \frac{D_w}{2} \cos \omega_1 \tau,$$

что совпадает с корреляционной функцией для $Y(t)$. А так как прямое и обратное преобразования Фурье определяют спектральную плотность и корреляционную функцию взаимно однозначно, то написанное выше выражение для $S_y(\omega)$ дает спектральную плотность случайной функции $Y(t)$.

Если воспользоваться не действительной, а комплексной формой преобразований Фурье, получим спектральную плотность $S_y^*(\omega)$ в виде

$$S_y^*(\omega) = \frac{D_w}{4} [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] \quad (-\infty < \omega < \infty).$$

Заметим, что в аналогичном виде можно было бы записать и

$$S_y(\omega) = \frac{D_w}{2} [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)],$$

но для положительных ω (так как $\omega_1 > 0$) $\delta(\omega + \omega_1) \equiv 0$.

9.27. Случайная функция $X(t)$ представляет собой случайную величину U : $X(t) = U$ с заданными числовыми характеристиками m_u, D_u .

Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ а) стационарной, б) эргодичной. Если она стационарна, найти ее спектральную плотность.

Решение.

$$m_x(t) = \mathbf{M}[X(t)] = \mathbf{M}[U] = m_u;$$

$$K_x(t, t') = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = M[\dot{U} \dot{U}] = D_u;$$

$$D_x(t) = K_x(t, t) = D_u.$$

Так как $m_x(t) = \text{const}$ и $K_x(t, t') = \text{const}$, то случайная функция $X(t)$ стационарна. Так как среднее по времени для каждой реализации равно значению, принятому случайной величиной U в этой реализации, и различно для разных реализаций, то случайная функция $X(t)$ неэргодична.

Рассматривая случайную функцию $X(t)$ как частный вид при $\omega_1 = 0$ случайной функции $Y(t) = U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t$, приведенной в предыдущей задаче, получим для нее спектральную плотность вида

$$S_x^*(\omega) = D_u \delta(\omega); \quad S_x(\omega) = 2S_x^*(\omega) = 2D_u \delta(\omega).$$

9.28. Случайная функция $X(t)$ строится следующим образом. В точке $t=0$ она случайным образом и с одинаковой вероятностью принимает одно из значений: $+1$ или -1 и остается постоянной до $t=1$. В точке $t=1$ она снова, с одинаковой вероятностью $1/2$ и независимо от того, какое значение она имела на предыдущем участке, принимает одно из значений $+1$ или -1 и сохраняет его до следующей целочисленной точки $t=2$, и т.д. Вообще функция $X(t)$ постоянна на любом участке от n до $n+1$, где n — натуральное число, а на границе каждого нового участка независимо от предыдущих принимает одно из значений $+1$ или -1 с вероятностью $1/2$. Одна из возможных реализаций случайной функции

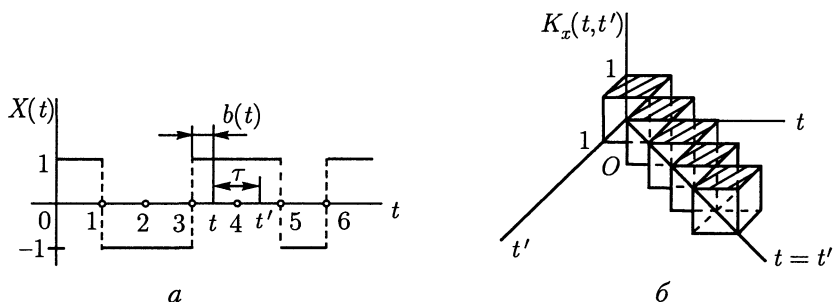


Рис. 9.28

$X(t)$ показана на рис. 9.28, а. Требуется определить характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию. Определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной.

Решение. Имеем

$$m_x(t) = m_x = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$D_x(t) = D_x = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Найдем корреляционную функцию $K_x(t, t')$.

Если точки t и t' относятся к одному и тому же интервалу $(n, n+1)$, где n — целое, то $K_x(t, t') = D_x = 1$, в противном случае $K_x(t, t') = 0$. Этот результат можно записать в более компактной форме, если обозначить через $b(t)$ целую часть числа t (см. рис. 9.28, а). Тогда получаем

$$K_x(t, t') = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| < 1 - b(\min\{t, t'\}), \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1 - b(\min\{t, t'\}). \end{cases}$$

Эта функция зависит не только от $\tau = t' - t$, но также и от того, где на оси $0t$ находится участок (t, t') ; следовательно, случайная функция $X(t)$ стационарной не является.

Поверхность $K_x(t, t')$ выглядит как ряд кубов с ребром, равным 1, поставленных на плоскости tOt' вдоль биссектрисы первого координатного угла, на которой $t = t'$, так что диагонали оснований совпадают с биссектрисой (рис. 9.28, б).

9.29. Случайная функция $X(t)$ формируется так же, как и в предыдущей задаче, с той разницей, что точки, в которых происходит «розыгрыш» нового значения случайной функции, не закреплены на оси $0t$, а занимают на ней случайное положение, сохраняя между собой постоянное расстояние, равное единице (рис. 9.29, а). Все положения начала отсчета относительно последовательности моментов «розыгрыша» одинаково вероятны.

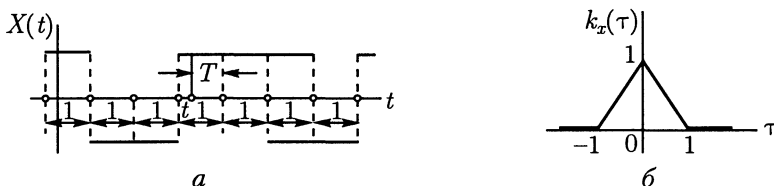


Рис. 9.29

Найти характеристики случайной функции $X(t)$ — математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию; определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной.

Решение. Как и в предыдущем случае,

$$m_x(t) = m_x = 0;$$

$$D_x(t) = D_x = 1.$$

Найдем корреляционную функцию. Зафиксируем момент t (рис. 9.29, а). Этот момент случаен относительно точек, в которых случайная функция $X(t)$ принимает новые значения. Обозначим T промежуток времени, отделяющий точку t от ближайшей точки, в которой будет «разыгрываться» новое значение $X(t)$. Случайная величина T будет распределена равномерно на участке от 0 до 1. Пусть $t' > t$; $\tau = t' - t > 0$. Если $\tau < T$, то $K_x(t, t') = 1$; если $\tau > T$, то $K_x(t, t') = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \mathbf{P}(T > \tau) \cdot 1 + \mathbf{P}(T < \tau) \cdot 0 = \\ &= \mathbf{P}(T > \tau) = 1 - \tau \quad \text{при } 0 < \tau < 1. \end{aligned}$$

Аналогично при $\tau < 0$ получим

$$K_x(t, t') = 1 + \tau \quad \text{при } -1 < \tau < 0;$$

отсюда

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{при } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1 \end{cases}. \quad (9.29)$$

График этой функции представлен на рис. 9.29, б. Так как $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, то случайная функция $X(t)$ стационарна.

Корреляционную функцию (9.29) можно записать в более компактном виде с помощью единичной функции $\mathbf{1}(x)$:

$$k_x(\tau) = (1 - |\tau|) \mathbf{1}(1 - |\tau|).$$

9.30. Условия предыдущей задачи изменены в том отношении, что в каждый из случайных моментов t_i , разделенных единичными интервалами, случайная функция $X(t)$ принимает (независимо от других) значение U_i , являющееся случайной величиной с математическим ожиданием m_u и дисперсией D_u , и сохраняет его до следующей точки. Одна из реализации такой случайной функции показана на рис. 9.30. Найти характеристики этой случайной функции: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию и определить, является ли случайная функция стационарной, а если стационарна, то какова ее спектральная плотность.

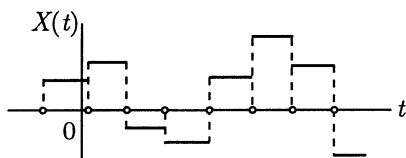


Рис. 9.30

математическим ожиданием m_u и дисперсией D_u , и сохраняет его до следующей точки. Одна из реализации такой случайной функции показана на рис. 9.30. Найти характеристики этой случайной функции: математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию и определить, является ли случайная функция стационарной, а если стационарна, то какова ее спектральная плотность.

Решение. Рассуждая точно так же, как и в предыдущей задаче, найдем

$$m_x(t) = \mathbf{M}[X(t)] = m_u; \quad D_x(t) = \mathbf{D}[X(t)] = D_u;$$

$$k_x(t) = \begin{cases} D_u (1 - |\tau|) & \text{при } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1, \end{cases}$$

или, в другой записи,

$$k_x(\tau) = D_u (1 - |\tau|) \mathbf{1}(1 - |\tau|),$$

где $\mathbf{1}(x)$ — единичная функция.

Случайная функция $X(t)$ стационарна. Ее спектральная плотность

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_u}{\pi \omega^2} (1 - \cos \omega).$$

9.31. Случайная функция $X(t)$ представляет собой ступенчатую знакопеременную функцию (рис. 9.31, а), которая через еди-

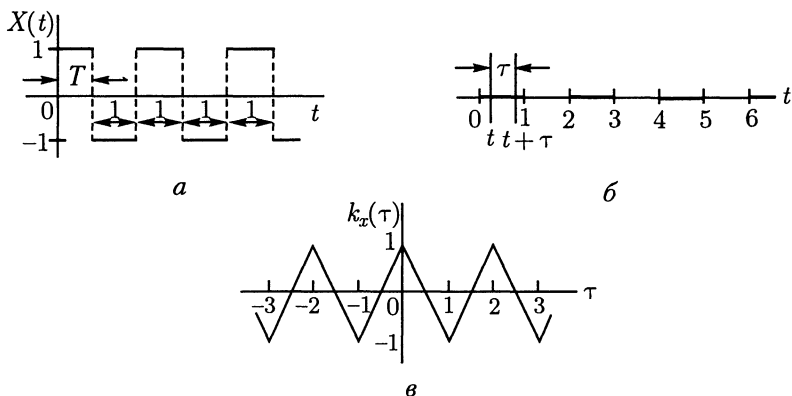


Рис. 9.31

нические интервалы принимает попеременно значения: $+1$ и -1 . Положение ступенчатой функции относительно начала отсчета случайно; случайная величина T , характеризующая сдвиг первой точки перемены знака относительно начала координат, есть случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 1)$.

Найти характеристики случайной функции X : математическое ожидание m_x , дисперсию D_x и корреляционную функцию.

Решение. Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$; оно с равной вероятностью может попасть как на участок, где случайная функция равна единице, так и на участок, где она равна минус единице.

Следовательно, ряд распределения любого сечения имеет вид

x_i	-1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

откуда

$$m_x = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \quad D_x = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Найдем корреляционную функцию

$$K_x(t, t + \tau) = \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t + \tau)] = \mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)].$$

Так как произведение может принимать только два значения $+1$ или -1 , то

$$\mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] = 1 \cdot p_1 + (-1) \cdot (1 - p_1) = 2p_1 - 1,$$

где p_1 — вероятность того, что точки t и $t + \tau$ попадут на участки, в которых $X(t)$ и $X(t + \tau)$ имеют один и тот же знак. В силу равномерности распределения сдвига T на рис. 9.31, *а* можно перенести начало отсчета в левый конец того участка, на котором находится точка t , и считать, что точка t равномерно распределена в интервале $(0, 1)$ (рис. 9.31, *б*). При таком толковании p_1 есть вероятность того, что точка $(t + \tau)$ попадает в какой-либо из интервалов вида $(2n, 2n + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (эти интервалы отмечены жирными линиями на рис. 9.31, *б*). Подсчитаем эту вероятность для разных значений τ . При $0 < \tau < 1$ точка $(t + \tau)$ может попасть либо в интервал $(0, 1)$, либо в интервал $(1, 2)$, поэтому

$$p_1 = \mathbf{P}(t + \tau < 1) = \mathbf{P}(t < 1 - \tau) = 1 - \tau.$$

При $1 < \tau < 2$ точка $t + \tau$ может попасть либо в интервал $(1, 2)$, либо в интервал $(2, 3)$, поэтому

$$p_1 = \mathbf{P}(t + \tau > 2) = P(t > 2 - \tau) = 1 - (2 - \tau) = \tau - 1.$$

Продолжая эти рассуждения, получим

$$p_1 = \begin{cases} 1 - (\tau - 2n) & \text{при } 2n < \tau < 2n + 1, \\ (\tau - 2n) - 1 & \text{при } 2n + 1 < \tau < 2n + 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что p_1 , а значит и $K_x(t, t + \tau) = 2p_1 - 1$, зависит только от τ и является четной функцией τ . Следовательно,

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau) = \begin{cases} 4n + 1 - 2\tau & \text{при } 2n < \tau < 2n + 1, \\ 2\tau - (4n + 3) & \text{при } 2n + 1 < \tau < 2n + 2. \end{cases}$$

График корреляционной функции представлен на рис. 9.31, *в*.

9.32. Случайная функция $X(t)$ представляет собой последовательность равноотстоящих положительных импульсов, имеющих одинаковую ширину $\gamma < \frac{1}{2}$. Начало каждого импульса отделено от

начала каждого следующего единичным интервалом (рис. 9.32, *а*). Последовательность импульсов занимает относительно оси $0t$ случайное положение (см. условия предыдущей задачи). Величина i -го импульса U_i случайна, распределена по одному и тому же закону с математическим ожиданием m_u и дисперсией D_u и не зависит от величин остальных импульсов. Найти характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D_x(t)$ и корреляционную функцию.

Решение. Математическое ожидание случайной функции $X(t)$ по формуле полного математического ожидания равно

$$m_x = m_u \gamma + 0 \cdot (1 - \gamma) = \gamma m_u.$$

Дисперсию найдем через второй начальный момент:

$$\alpha_2[X(t)] = \alpha_2[U] \gamma + 0 \cdot (1 - \gamma) = \gamma (D_u + m_u^2),$$

откуда

$$D_x = \alpha_2[X(t)] - m_x^2 = \gamma (D_u + m_u^2) - \gamma^2 m_u^2 = \gamma D_u + \gamma (1 - \gamma) m_u^2.$$

В данном случае случайная функция $X(t)$ нецентрирована. Ее корреляционную функцию будем искать через второй смешанный начальный момент:

$$K_x(t, t + \tau) = \mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] - m_x^2.$$

Найдем $\mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)]$ по формуле полного математического ожидания. Как и в предыдущей задаче, представим ось $0t$ покрытой перемежающимися участками: зачерненные соответствуют импульсам, а светлые — промежуткам между ними. Обозначим T — случайное значение левой границы участка $(T, T + \tau)$. Возможны три гипотезы:

H_1 — обе точки T и $T + \tau$ попали на участок одного и того же импульса;

H_2 — одна из точек $T, T + \tau$ попала на участок одного из импульсов, а другая — другого;

H_3 — хотя бы одна из точек $T, T + \tau$ попала вне участков каких-либо импульсов.

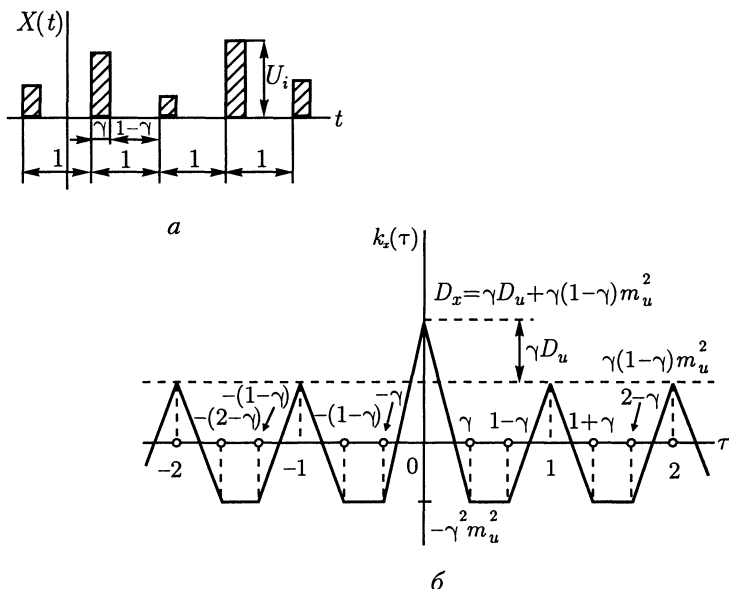


Рис. 9.32

При первой гипотезе величины $X(T)$ и $X(T + \tau)$ совпадают и

$$\mathbf{M}[X(T) X(T + \tau)] = \mathbf{M}[U^2] = D_u + m_u^2.$$

При второй гипотезе величины $X(T)$ и $X(T + \tau)$ представляют собой независимые случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями m_u ; по теореме умножения математических ожиданий $\mathbf{M}[X(T) X(T + \tau)] = m_u^2$.

При третьей гипотезе

$$\mathbf{M}[X(T) X(T + \tau)] = 0.$$

Полное математическое ожидание будет

$$\mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] = \mathbf{P}(H_1)(D_u + m_u^2) + \mathbf{P}(H_2) m_u^2.$$

Вероятности $\mathbf{P}(H_1)$ и $\mathbf{P}(H_2)$, а значит, и корреляционная функция зависят только от τ .

1) при $0 < \tau < \gamma$

$$\mathbf{P}(H_1) = \gamma - \tau, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0;$$

$$\mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] = (\gamma - \tau)(D_u + m_u^2).$$

Корреляционная функция на этом интервале

$$k_x(\tau) = (\gamma - \tau)(D_u + m_u^2) - \gamma^2 m_u^2;$$

2) при $\gamma < \tau < 1 - \gamma$

$$\mathbf{P}(H_1) = 0; \quad \mathbf{P}(H_2) = 0; \quad \mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] = 0;$$

$$k_x(\tau) = 0 - \gamma^2 m_u^2 = -\gamma^2 m_u^2;$$

3) при $1 - \gamma < \tau < 1$

$$\mathbf{P}(H_1) = 0; \quad \mathbf{P}(H_2) = \gamma - (1 - \tau);$$

$$\mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] = [\gamma - (1 - \tau)] m_u^2.$$

$$k_x(\tau) = (\gamma - 1 + \tau) m_u^2 - \gamma^2 m_u^2 = (\gamma - 1 + \tau - \gamma^2) m_u^2.$$

Дальнейшие интервалы значений τ исследуются аналогичным образом.

График функции $k_x(\tau)$ представлен на рис. 9.32, б. При $|\tau| > \frac{1}{2}$ кривая $k_x(\tau)$ периодически повторяется, достигая в целых точках местных максимумов, равных $\gamma(1 - \gamma) m_u^2$.

9.33*. Рассматривается стационарная случайная функция $X(t)$, представляющая собой пилообразное напряжение (рис. 9.33, а). Начало отсчета занимает по отношению к зубцам случайное положение, как в задаче 9.31. Найти математическое ожидание m_x , дисперсию D_x и корреляционную функцию.

Решение. Математическое ожидание m_x легко найти, если учесть, что распределение $X(t)$ при любом t — равномерное на интервале $(0, 1)$. Отсюда $m_x = \frac{1}{2}$.

Для отыскания корреляционной функции поступим следующим образом: свяжем последовательность зубцов жестко с осью $0t$, но зато будем случайным образом бросать на эту ось начало t отрезка $(t, t + \tau)$ (рис. 9.33, б). Так как зубцы периодичны, достаточно случайным образом бросить точку t на первый интервал $(0, 1)$, распределяя ее с постоянной плотностью.

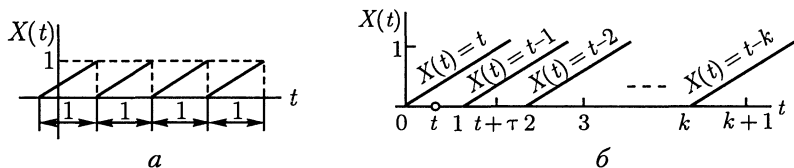


Рис. 9.33

При этом, как видно из рис. 9.33, б, значение $X(t) = t$, а значение $X(t + \tau)$ равно дробной части числа $t + \tau$, т. е.

$$X(t + \tau) = t + \tau - E(t + \tau),$$

где $E(t + \tau)$ — целая часть числа $(t + \tau)$. Если целая часть числа τ равна n , $n \leq \tau < n + 1$, то

$$E(t + \tau) = \begin{cases} n & \text{при } t + \tau < n + 1, \\ n + 1 & \text{при } t + \tau \geq n + 1, \end{cases}$$

и, значит,

$$X(t + \tau) = \begin{cases} t + \tau - n & \text{при } t < n + 1 - \tau, \\ t + \tau - (n + 1) & \text{при } t \geq n + 1 - \tau. \end{cases}$$

По формуле для математического ожидания функции от случайной величины t имеем при $n \leq \tau < n + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] &= \int_0^1 X(t) X(t + \tau) \cdot 1 \cdot dt = \\ &= \int_0^{n+1-\tau} t(t + \tau - n) dt + \int_{n+1-\tau}^1 t(t + \tau - n - 1) dt = \\ &= \frac{(n + 1 - \tau)^2}{2} + \frac{\tau - n}{2} - \frac{1}{6} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что корреляционная функция зависит только от τ и при $n \leq \tau < n + 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет вид

$$\begin{aligned} K_x(t, t + \tau) &= k_x(\tau) = \mathbf{M}[X(t) X(t + \tau)] - m_x^2 = \\ &= \frac{(n + 1 - \tau)^2}{2} + \frac{\tau - n}{2} - \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Это периодическая функция с периодом 1, график которой состоит из периодически повторяющихся отрезков парабол, обращенных выпуклостью вниз.

В интервале $0 \leq \tau < 1$ это парабола

$$k_x(\tau) = \frac{(1 - \tau)^2}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{5}{12}$$

с вершиной в точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{24}\right)$. Полагая $\tau = 0$, получим $D_x = k_x(0) = -\frac{1}{12}$.

9.34. Рассматриваются две некоррелированные центрированные случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ и их произведение $Z(t) = X(t) Y(t)$. Доказать, что корреляционная функция произведения равна произведению корреляционных функций сомножителей:

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') K_y(t, t').$$

Решение. $K_z(t, t') = \mathbf{M}[\dot{Z}(t) \dot{Z}(t')]$; $\dot{Z}(t) = Z(t) - m_z(t)$. Так как случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ некоррелированы и центрированы, то

$$m_z(t) = m_x(t) m_y(t) = 0;$$

отсюда

$$\dot{Z}(t) = X(t) Y(t) = \dot{X}(t) \dot{Y}(t)$$

и

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{Y}(t) \dot{X}(t') \dot{Y}(t')] = \\ &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] \mathbf{M}[\dot{Y}(t) \dot{Y}(t')] = K_x(t, t') K_y(t, t'). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, при $t = t'$

$$D_z(t) = D_x(t) D_y(t).$$

9.35. Доказать, что корреляционная функция произведения n независимых центрированных случайных функций

$$Z(t) = \prod_{i=1}^n X_i(t)$$

равна произведению корреляционных функций сомножителей

$$K_z(t, t') = \prod_{i=1}^n K_{x_i}(t, t').$$

Решение. Доказательство аналогично предыдущему, с той разницей, что для применения теоремы умножения математических ожиданий в этом случае недостаточно некоррелированности сомножителей, а независимости — достаточно.

9.36. Рассматривается произведение двух некоррелированных случайных функций

$$Z(t) = X(t) Y(t),$$

причем случайная функция $X(t)$ такая, как в задаче 9.21 (случайное чередование значений $+1$ и -1 с простейшим потоком перемен знаков), а случайная функция $Y(t)$ — такая, как в задаче 9.26. Найти характеристики случайной функции $Z(t)$.

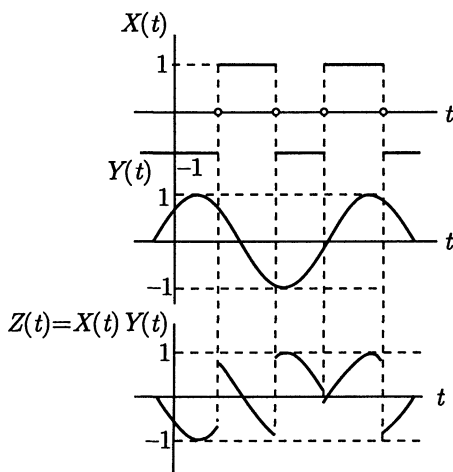


Рис. 9.36

Решение. Имеем:

$$m_x(t) = m_y(t) = 0; \quad m_z(t) = 0;$$

$$K_x(t, t') = e^{-2\lambda|\tau|}; \quad K_y(t, t') = \frac{D_\omega}{2} \cos \omega_1 \tau \quad (\tau = t' - t).$$

На основании задачи 9.34 имеем

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') K_y(t, t') = \frac{D_\omega}{2} e^{-2\lambda|\tau|} \cos \omega_1 \tau.$$

На рис. 9.36 показана одна из возможных реализаций случайной функции $Z(t)$, полученная перемножением соответствующих ординат реализации случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

9.37. На телефонную станцию поступает простейший поток заявок с плотностью λ . Случайная функция $X(t)$ — число заявок, поступившее за время t (см. задачу 9.20). Найти характеристики ее производной $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Решение. В обычном смысле разрывная случайная функция $X(t)$ недифференцируема, однако, пользуясь обобщенной дельта-функцией, можно записать характеристики производной. Преобразование $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$, связывающее случайную функцию $Y(t)$ с $X(t)$, является линейным однородным. Поэтому на основе задачи 9.20

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} \lambda t = \lambda;$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t'} [\lambda t \mathbf{1}(t' - t) + \lambda t' \mathbf{1}(t - t')] \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\lambda(t - t') \delta(t - t') + \lambda \mathbf{1}(t - t')], \end{aligned}$$

но $(t - t') \delta(t - t') \equiv 0$, откуда

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \mathbf{1}(t - t')) = \lambda \delta(t - t') = \lambda \delta(\tau).$$

Таким образом, корреляционная функция случайной функции $Y(t)$ пропорциональна дельта-функции, т.е. функция $Y(t)$ представляет собой стационарный белый шум с интенсивностью $G = \lambda$ и средним уровнем $m_y = \lambda$. Спектральная плотность такого белого шума будет

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

9.38*. Имеется функция $k_x(\tau)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$;
- 2) $k_x(0) > 0$;
- 3) $|k_x(\tau)| \leq k_x(0)$.

Требуется выяснить, может ли функция $k_x(\tau)$ быть корреляционной функцией стационарной случайной функции, т.е. обладает ли она свойством положительной определенности. Показать, что достаточным условием положительной определенности является условие, чтобы функция

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (9.38a)$$

была неотрицательна при любом значении ω :

$$S_x(\omega) \geq 0, \quad (9.38б)$$

т.е. чтобы, вычисляя спектральную плотность по формуле 9.38a, мы ни при каких ω не получали отрицательных значений этой плотности.

Решение. Предположим, что $S_x(\omega) \geq 0$, и докажем, что при этом функция $k_x(\tau) = k_x(t' - t)$ будет положительно определенной. Имеем

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' d\omega + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' d\omega. \end{aligned} \quad (9.38в)$$

Положительная определенность функции $k_x(t' - t)$ состоит в том, что для любой функции $\varphi(t)$ и любой области интегрирования B должно выполняться условие

$$\int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t' - t) \varphi(t) \varphi(t') dt dt' \geq 0.$$

Проверим это неравенство по отношению к функции (9.38в):

$$\begin{aligned} &\int_{(B)} \int_{(B)} \left\{ \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' \varphi(t) \varphi(t') d\omega + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' \varphi(t) \varphi(t') d\omega \right\} dt dt' = \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty S_x(\omega) \left\{ \int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t) dt \int_{(B)} \cos \omega t' \varphi(t') dt' + \right. \\ \left. + \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t) dt \int_{(B)} \sin \omega t' \varphi(t') dt' \right\} d\omega.$$

Обозначая

$$\int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t) dt = \psi_1(B, \omega), \quad \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t) dt = \psi_2(B, \omega),$$

имеем

$$\int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t - t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' = \\ = \int_0^\infty S_x(\omega) \{ [\psi_1(B, \omega)]^2 + [\psi_2(B, \omega)]^2 \} d\omega \geq 0,$$

так как по условию $S_x(\omega) \geq 0$.

Можно доказать, что условие (9.38б) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы корреляционная функция была положительно определенной.

9.39. Имеется стационарная случайная функция с характеристиками

$$m_x(t) = m_x; \quad K_x(t, t') = k_x(\tau), \quad \text{где } \tau = t' - t.$$

Найти характеристики ее производной $Y(t) = \frac{d}{dt}X(t)$ и показать, что она также стационарна.

Решение. Так как $Y(t)$ связана с $X(t)$ линейным однородным преобразованием, то

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = 0 = \text{const};$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} k_x(\tau) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dt} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t'} \right].$$

Но $\frac{\partial \tau}{\partial t'} = 1$ и $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -1$, поэтому

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{d\tau} k_x(\tau) \right] = \frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau).$$

Так как правая часть равенства зависит только от τ , то

$$K_y(t, t') = k_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau),$$

и случайная функция $Y(t)$ стационарна.

9.40. Стационарная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию $k_x(\tau)$. Случайная функция $Y(t)$ получается из нее дифференцированием: $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. Найти корреляционную

функцию $k_y(\tau)$, если:

а) $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$; б) $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$;

в) $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right] \quad (\alpha > 0).$

Решение. При решении задачи будем применять аппарат обобщенных функций, правила пользования которым приведены в начале данной главы.

$$\begin{aligned} \text{а) } k_y(\tau) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|} = -\frac{d}{d\tau} \left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau} \right] = \\ &= \alpha \left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \left(\frac{d|\tau|}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|} \right] = \\ &= \alpha e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - \alpha (\operatorname{sgn} \tau)^2]. \end{aligned}$$

Наличие слагаемого $2\delta(\tau)$ показывает, что в составе случайной функции $Y(t)$ есть белый шум.

$$\begin{aligned} \text{б) } k_y(\tau) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} [e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|)] = \\ &= -\frac{d}{d\tau} \left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau} (1 + \alpha|\tau|) + \alpha \frac{d|\tau|}{d\tau} e^{-\alpha|\tau|} \right] = \\ &= \alpha^2 \frac{d}{d\tau} [e^{-\alpha|\tau|} \operatorname{sgn} \tau \cdot |\tau|] = \alpha^2 \frac{d}{d\tau} [e^{-\alpha|\tau|} \tau] = \\ &= \alpha^2 \left[e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\alpha|\tau|} \tau \frac{d|\tau|}{d\tau} \right] = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad k_y(\tau) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right] = \\
 &= -\frac{d}{d\tau} \left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right] \frac{d|\tau|}{d\tau} + \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\alpha|\tau|} \left[-\beta \sin \beta \tau + \alpha \cos \beta |\tau| \frac{d|\tau|}{d\tau} \right] \right] = \\
 &= -\frac{d}{d\tau} \left[-\sin \beta \tau e^{-\alpha|\tau|} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \right] = \\
 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \left[\beta \cos \beta \tau e^{-\alpha|\tau|} - \alpha \sin \beta \tau e^{-\alpha|\tau|} \frac{d|\tau|}{d\tau} \right] = \\
 &= (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left[\cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right].
 \end{aligned}$$

9.41. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции с корреляционной функцией:

$$k_y(\tau) = \alpha e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sgn} \tau)^2].$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 S_y^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d|\tau| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha|\tau|} 2\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 (\operatorname{sgn} \tau)^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Так как

$$(\operatorname{sgn} \tau)^2 = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \neq 0, \\ 0 & \text{при } \tau = 0 \end{cases}$$

и подынтегральная функция второго интеграла в точке $\tau = 0$ не имеет особенностей, во втором интеграле можно пренебречь точкой $\tau = 0$. Получим

$$S_y^*(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

График спектральной плотности представлен на рис. 9.41.

Спектральную плотность $S_y^*(\omega)$ можно было получить проще следующими рассуждениями. Представим случайную функцию $Y(t)$ как производную случайной функции $X(t)$ из задачи 9.40 (пункт а). Имеем

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|};$$

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2};$$

амплитудно-частотная характеристика оператора дифференцирования равна $\Phi(i\omega) = i\omega$, следовательно,

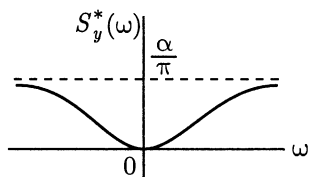


Рис. 9.41

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega) |\Phi(i\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} |i\omega|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

9.42. Спектральная плотность стационарной случайной функции $X(t)$ на участке от $-\omega_1$ до $+\omega_1$ постоянна, а вне его равна нулю, т.е. имеет вид, показанный на рис. 9.42 а:

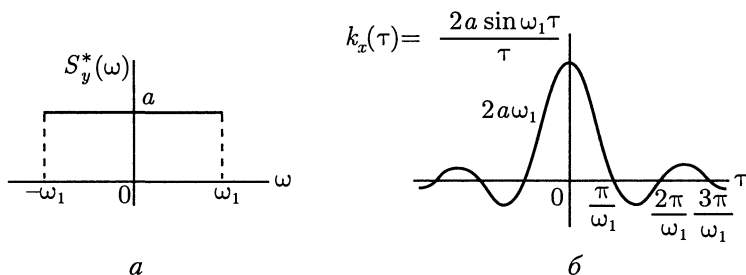


Рис. 9.42

$$S_x^*(\omega) = \begin{cases} a & \text{при } |\omega| < \omega_1, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

или, в другой записи,

$$S_x^*(\omega) = a \cdot \mathbf{1} \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_1} \right).$$

Найти корреляционную функцию $k_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$.

Решение.

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2a \int_0^{\omega_1} \cos \omega\tau d\omega = \frac{2a \sin \omega_1\tau}{\tau};$$

$$D_x = k_x(0) = 2a\omega_1.$$

График корреляционной функции показан на рис. 9.42, б.

9.43. Показать, что не существует никакой стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой $k_x(\tau)$ постоянна в каком-то интервале $(-\tau_1, \tau_1)$ и равна нулю вне его.

Решение. Предположим противное, т.е. что существует случайная функция $X(t)$, для которой корреляционная функция равна $b \neq 0$ при $|\tau| < \tau_1$ и равна 0 при $|\tau| > \tau_1$.

Попробуем найти спектральную плотность случайной функции $X(t)$:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_1} b \cos \omega \tau d\tau = \frac{b}{\pi} \frac{\sin \omega \tau_1}{\omega}.$$

Из этого выражения видно, что функция $S_x(\omega)$ для некоторых значений ω отрицательна, что противоречит свойствам спектральной плотности, и следовательно, корреляционной функции указанного выше вида существовать не может.

9.44. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, у которой корреляционная функция задана выражением

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda^2 \tau^2}.$$

Решение. Имеем

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\lambda^2 \tau^2} e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau^2 - i\omega \tau} d\tau.$$

Пользуясь известной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 \pm 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}} \quad (A > 0)$$

и имея в виду, что $i^2 = -1$, получим

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}} = \frac{D_x}{2\lambda \sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda^2}}.$$

График этой функции подобен кривой нормального закона.

9.45. Показать, что взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t, t')$ стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной $Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$ удовлетворяет условию

$$R_{xy}(t, t') = -R_{xy}(t', t),$$

т.е. при перемене местами аргументов меняет знак.

Решение. Пусть $K_x(t, t') = k_x(\tau)$, где $\tau = t' - t$.

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= \mathbf{M} \left[\dot{X}(t) \frac{d}{dt'} \dot{X}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{M} \left[\dot{X}(t) \dot{X}(t') \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau). \end{aligned}$$

Но $\tau = t' - t$, следовательно,

$$R_{xy}(t, t') = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t'} = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} R_{xy}(t', t) &= \frac{\partial}{\partial t} K_x(t, t') = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \\ &= -\frac{d}{d\tau} k_x(\tau) = -R_{xy}(t, t'), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9.46*. Определить, обладает ли функция

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta|\tau| \right) \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

свойствами корреляционной функции.

Решение. Нужно проверить выполнение следующих свойств:

$$\begin{aligned} &1) k_x(0) > 0; \quad 2) k_x(-\tau) = k_x(\tau); \quad 3) |k_x(\tau)| \leq k_x(0); \quad 4) S_x^*(\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \geq 0 \text{ при любом } \omega. \end{aligned}$$

Свойства 1) и 2) очевидны. Проверим остальные.

3) Так как функция $k_x(\tau)$ четная, достаточно исследовать ее при $\tau \geq 0$:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) - \frac{1}{2} e^{-(\alpha+\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right).$$

Так как $k_x(0) = 1$, нужно, чтобы это выражение по модулю не превосходило единицы. Можно доказать, что при $\alpha < \beta$ это условие не выполняется, так как при $\tau \rightarrow \infty$ выражение $e^{-(\alpha-\beta)\tau}$ будет неограниченно возрастать. В случае $\alpha = \beta$ $k_x(\tau) \equiv 1$; при $\alpha > \beta$ $k_x(\tau) \leq 1$. Таким образом, свойство 3) выполняется только при $\alpha \geq \beta$.

$$\begin{aligned}
 4) S_x^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\beta+i\omega)\tau} d\tau + \right. \\
 &+ \left. \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \frac{1}{2\pi\beta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta+i\omega} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+i\omega} \right\} = \\
 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\pi\beta} \left\{ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2 + \omega^2} \right\} = \\
 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\pi} \frac{2\alpha}{[(\alpha-\beta)^2 + \omega^2][(\alpha+\beta)^2 + \omega^2]} \geq 0
 \end{aligned}$$

при $\alpha \geq \beta$ (Re — действительная часть).

При $\alpha = \beta$ имеем $S_x^*(\omega) = \delta(\omega)$.

Таким образом, функция $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta|\tau| \right)$ при $\alpha \geq \beta$ обладает всеми свойствами корреляционной функции. Графики $k_x(\tau)$ и $S_x^*(\omega)$ при $\alpha > \beta$ показаны на рис. 9.46, а и б.

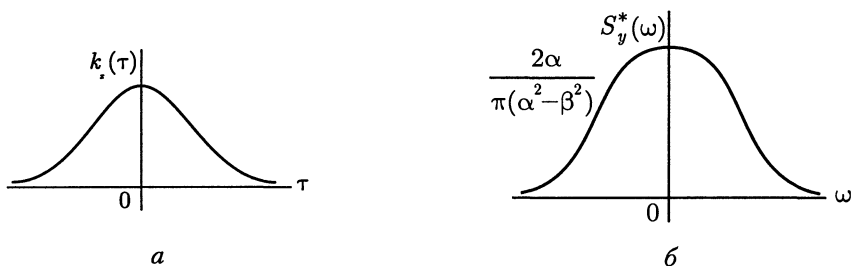


Рис. 9.46

9.47. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta|\tau| \right)$ ($\alpha \geq \beta > 0$). Случайная функция $Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$. Найти ее корреляционную функцию $k_y(\tau)$ и спектральную плотность $S_y^*(\omega)$.

Решение. При нахождении $k_y(\tau)$ применяем свойства 3, 4 и 9 обобщенных функций (см. с. 270):

$$\begin{aligned}
 k_y(\tau) &= -\frac{d^2}{d\tau^2} k_x(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \left[-e^{-\alpha|\tau|} \alpha \frac{d|\tau|}{d\tau} \times \right. \\
 &\times \left. \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta|\tau| \right) + e^{-\alpha|\tau|} \left(\beta \operatorname{sh} \beta\tau + \alpha \operatorname{ch} \beta|\tau| \right) \frac{d|\tau|}{d\tau} \right] =
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} e^{-\alpha|\tau|} \operatorname{sh} \beta\tau \right) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} \left[-\alpha e^{-\alpha|\tau|} \operatorname{sh} \beta\tau \frac{d|\tau|}{d\tau} + \right. \\ \left. + \beta e^{-\alpha|\tau|} \operatorname{ch} \beta\tau \right] = (\alpha^2 - \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left[\operatorname{ch} \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta|\tau| \right];$$

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega) |i\omega|^2 = \frac{2\alpha\omega^2}{\pi} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}.$$

Так как предел $\lim_{\tau \rightarrow 0} k_y(\tau)$ существует (он равен $k_y(0) = \alpha^2 - \beta^2$), то случайная функция $X(t)$ дифференцируема.

9.48. Случайная функция $X(t)$ с характеристиками $m_x(t) = t^2 + 3$ и $K_x(t, t') = 5tt'$ подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t) = \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + t^3.$$

Определить характеристики случайной функции $Y(t)$: $m_y(t)$ и $K_y(t, t')$.

Решение. $m_y(t) = \int_0^t \tau (\tau^2 + 3) d\tau + t^3 = \frac{t^4}{4} + \frac{3}{2}t^2 + t^3.$

Однородная часть рассматриваемого линейного преобразования будет $L_t^{(0)}\{X(t)\} = \int_0^t \tau X(\tau) d\tau$. Следовательно,

$$K_y(t, t') = \int_0^t d\tau \int_0^{t'} \tau \tau' K_x(\tau, \tau') d\tau' = 5 \int_0^t \tau \tau \left(\int_0^{t'} \tau' \tau' d\tau' \right) d\tau = \frac{5}{9} t^3 t'^3.$$

9.49. Случайная функция $X(t)$ с характеристиками

$$m_x(t) = 0; \quad K_x(t, t')$$

подвергается линейному неоднородному преобразованию:

$$Y(t) = L_t^{(0)}\{X(t)\} + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция. Найти взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t, t')$.

Решение. Имеем

$$\dot{X} = X(t); \quad \dot{Y}(t) = L_t^{(0)}\{\dot{X}(t)\},$$

так как при центрировании случайной функции $Y(t)$ неслучайное слагаемое $\varphi(t)$ уничтожается.

Отсюда

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{Y}(t')] = \mathbf{M}[\dot{X}(t) L_{t'}^{(0)} \{\dot{X}'(t')\}] = \\ &= L_{t'}^{(0)} \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = L_{t'}^{(0)} K_x(t, t'). \end{aligned}$$

9.50. Случайная функция $X(t)$, имеющая характеристики $m_x(t) = 0$ и $K_x(t, t') = 3e^{-(t+t')}$, подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t) = -t \frac{dX(t)}{dt} + \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + \sin \omega t.$$

Найти корреляционный момент случайных величин $X(0)$ и $Y(1)$ (т.е. двух сечений случайных функций: $X(t)$ при $t = 0$ и $Y(t')$ при $t' = 1$).

Решение. На основании решения предыдущей задачи

$$R_{xy}(t, t') = L_{t'}^{(0)} \{K_x(t, t')\},$$

где $L_{t'}^{(0)}$ — однородная часть линейного преобразования, примененная по аргументу t' . В нашем случае

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= -3t' \frac{\partial e^{-(t+t')}}{\partial t'} + 3 \int_0^{t'} \tau' e^{-(t+\tau')} d\tau' = \\ &= 3t' e^{-(t+t')} + 3e^{-t} [e^{-t'}(-t' - 1) + 1] = 3e^{-t} (1 - e^{-t'}). \end{aligned}$$

Полагая $t = 0$; $t' = 1$, получаем

$$K_{X(0), Y(1)} = R_{xy}(0, 1) = 3(1 - e^{-1}) \approx 1,90.$$

9.51. В различных технических задачах, относящихся к стационарным случайным процессам, часто пользуются в виде характеристики так называемым «временем корреляции»

$$\tau_k = \int_0^\infty |\rho(\tau)| d\tau,$$

где $\rho(\tau)$ — нормированная корреляционная функция случайного процесса.

На рис. 9.51, а время корреляции геометрически интерпретируется заштрихованной площадью.

Найти время корреляции τ_k для стационарного случайного процесса с нормированной корреляционной функцией вида

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1 - \alpha |\tau| & \text{при } \tau \in \left(-\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}\right); \\ 0 & \text{при } \tau \notin \left(-\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}\right), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$.

Решение. Изобразим на рис. 9.51, б график зависимости $\rho(\tau)$. Величина τ_k численно равна заштрихованной на рис. 9.51, б площади: $\tau_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha}$.

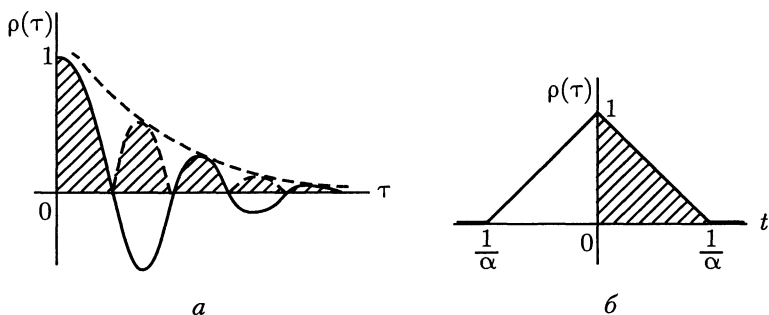


Рис. 9.51

9.52. Найти время корреляции τ_k для стационарной случайной функции $X(t)$, нормированная корреляционная функция которой имеет вид

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (\alpha > 0).$$

Как будет вести себя время корреляции при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$?

Решение. $\tau_k = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}.$

При $\alpha \rightarrow 0$ случайная функция вырождается в случайную величину и ее время корреляции $\tau_k \rightarrow \infty$. При $\alpha \rightarrow \infty$ случайная функция превращается в стационарный белый шум, а $\tau_k \rightarrow 0$.

9.53. Найти время корреляции для стационарной случайной функции $X(t)$ с нормированной корреляционной функцией вида $\rho(\tau) = e^{-(\alpha\tau)^2}$.

Ответ. $\tau_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}.$

9.54. В радиотехнике в качестве характеристики случайного процесса иногда пользуются величиной Δf_3 — «энергетической шириной спектра» стационарной случайной функции:

$$\Delta f_3 = \frac{1}{S_{\max} 2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{D_x}{S_{\max} 2\pi} = \frac{1}{s_{\max} 2\pi},$$

где $S_{\max}$ — максимальное значение спектральной плотности, достигаемое в точке $\omega_{\max}$: $S_{\max} = S(\omega_{\max})$; $s_{\max} = \frac{S_{\max}}{D_x}$. Найти энергетическую ширину спектра стационарной случайной функции, нормированная корреляционная функция которой имеет вид

$$\rho_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \alpha |\tau| & \text{при } \tau \in \left(-\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}\right), \\ 0 & \text{при } \tau \notin \left(-\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}\right), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$.

Решение. Нормированная спектральная плотность случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$s_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\alpha}{\pi \omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Эта функция достигает своего максимума при $\omega = \omega_{\max} = 0$:

$$s_x(\omega_m) + s_{\max} = \frac{1}{\pi \alpha}.$$

Имеем

$$\Delta f_3 = \frac{1}{s_{\max} 2\pi} = \frac{\alpha}{2}.$$

9.55. Показать, что для стационарной случайной функции с нормированной корреляционной функцией

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha |\tau|},$$

независимо от значения α , произведение $\tau_k \Delta f_3$ равно $1/4$.

Решение. Из задачи 9.52 имеем $\tau_k = \frac{1}{\alpha}$. Нормированная спектральная плотность равна

$$s_x(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)};$$

ее максимальное значение $s_{\max} = \frac{2}{\pi\alpha}$, откуда

$$\tau_k \Delta f_3 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\pi\alpha}{2 \cdot 2\pi} = \frac{1}{4}.$$

9.56*. Показать, что для любой стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой неотрицательна ($k_x(\tau) \geq 0$), произведение времени корреляции τ_k на энергетическую ширину спектра Δf_3 равно $1/4$.

Решение. В данном случае $\rho_x(\tau) \geq 0$, поэтому

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau.$$

Нормированная спектральная плотность выражается через $\rho_x(\tau)$ интегралом

$$s_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Полагая в этой формуле $\omega = 0$, имеем

$$s_x(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \tau_k.$$

Покажем, что если $\rho_x(\tau) \geq 0$, то максимум спектральной плотности достигается в точке $\omega = 0$:

$$s_{\max} = s_x(0).$$

Это непосредственно вытекает из оценки интеграла:

$$s_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cdot 1 d\tau = s_x(0).$$

Таким образом, при $\rho_x(\tau) \geq 0$

$$s_{\max} = s_x(0) = \frac{2}{\pi} \tau_k; \quad \Delta f_3 = \frac{1}{s_{\max} \cdot 2\pi} = \frac{1}{4\tau_k},$$

откуда

$$\tau_k \Delta f_3 = \frac{1}{4}.$$

9.57. На вход колебательного звена системы автоматического регулирования, передаточная функция которой имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{k}{Tp^2 + \xi p + k} \quad (\xi > 0),$$

подается белый шум, спектральная плотность которого равна $S_x^*(\omega) = N$. Определить дисперсию выходного сигнала¹⁾.

Решение.

$$S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega) |\Phi(j\omega)|^2 = \frac{Nk}{|T(j\omega)^2 + \xi j\omega + k|^2},$$

откуда

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Nk d\omega}{|T(j\omega)^2 + \xi j\omega + k|^2} = \frac{\pi k N}{\xi}.$$

Заметим, что дисперсия выходного сигнала не зависит от постоянной времени колебательного звена T , а зависит лишь от коэффициента усиления k , коэффициента демпфирования ξ и мощности сигнала N .

9.58. Передаточная функция системы, на которую подается сигнал $X(t)$, имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{1 + T_1 p}{T_1^2 p^2 + p + k},$$

где $k = 25 \left[\frac{1}{\text{с}} \right]$; $T_1 = 0,05 [\text{с}]$.

Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x^*(\omega) = \frac{2T\delta_x}{1 + \omega^2 T^2},$$

где $T = 1 [\text{с}]$, $\delta_x = 4 \left[\frac{\text{град}^2}{\text{с}^2} \right]$.

Требуется найти дисперсию выходного сигнала.

Решение.

$$\begin{aligned} S_y^*(\omega) &= S_x^*(\omega) |\Phi(j\omega)|^2 = \\ &= 2\delta_x \frac{-T_1^2 (j\omega)^2 + 1}{|TT_1(j\omega)^3 + (T + T_1)(j\omega)^2 + (1 + kT)j\omega + k|^2}; \end{aligned}$$

¹⁾ Подразумевается, что речь идет о достаточно удаленных участках времени, после окончания переходных процессов.

$$D_\nu = \int_0^\infty S_y^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{b_0(j\omega)^4 + b_1(j\omega)^2 + b_2}{|a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2j\omega + a_3|^2} d\omega =$$

$$= \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)};$$

в нашем случае $b_0 = 0$, $b_1 = -T_1^2$, $b_2 = 1$, $a_0 = TT_1$, $a_1 = T + T_1$, $a_2 = 1 + kT$, $a_3 = k$.

$$D_y = 4\pi T \delta_x \frac{b_1 - \frac{a_1b_2}{a_3}}{2(a_0a_3 - a_1a_2)} \approx 0,0428 [\text{град}^2].$$

9.59. Случайная функция $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_x(t) = 5$ и спектральную плотность

$$S_x^*(\omega) = \frac{8}{\pi(1 + \omega^2)}.$$

Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$.

Решение. В задаче 9.17 было показано, что для корреляционной функции вида $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ спектральная плотность имеет вид

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Следовательно, в нашем случае $\alpha = 1$; $D_x = 8$; $k_x(\tau) = 8e^{-|\tau|}$.

9.60. Случайная функция $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_x(t) = 8$ и спектральную плотность

$$S_x^*(\omega) = \frac{20}{\pi} \frac{5 + \omega^2}{25 + 6\omega^2 + \omega^4}.$$

Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$.

Решение. В задаче 9.18 было показано, что для корреляционной функции вида

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$$

спектральная плотность имеет вид

$$S_x^*(\omega) = \frac{D_x \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2][\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]} =$$

$$= \frac{D_x \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4}.$$

Следовательно, $\alpha^2 + \beta^2 = 5$, $\alpha^2 - \beta^2 = 3$, откуда $\alpha_{1,2} = \sqrt{4} = \pm 2$.

Нас удовлетворяет только положительное значение корня: $\alpha = 2$; тогда $\beta = \pm 1$ (оба корня отвечают условиям задачи), а $D_x = \frac{20}{\alpha} = 10$.

Таким образом, $k_x(\tau) = 10e^{-2|\tau|} \cos \tau$.

ПОТОКИ СОБЫТИЙ. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п.

Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n, \dots$ (рис. 10.0.1) с интервалами между ними: $T_1 = \Theta_2 - \Theta_1$, $T_2 = \Theta_3 - \Theta_2$, ..., $T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n$. При его вероятностном описании поток событий может быть представлен как последовательность случайных величин: Θ_1 ; $\Theta_2 = \Theta_1 + T_1$; $\Theta_3 = \Theta_1 + T_1 + T_2$;

Заметим, что термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от ранее введенного термина «случайное событие». В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях «событий», образующих поток (например, о «вероятности вызова» на телефонной станции; ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один). С «поток событий» можно связывать различные случайные события, например:

$A = \{\text{в течение времени от } t_0 \text{ до } t_0 + \tau \text{ придет хотя бы один вызов}\}$

или

$B = \{\text{в течение того же времени придут ровно два вызова}\}.$

Вероятности таких событий можно вычислять.

Заметим также, что на рисунке в виде ряда точек можно изобразить не сам поток событий (он случаен), а только какую-то его конкретную реализацию.

В гл. 5 упоминалось о потоках событий и некоторых их свойствах; здесь осветим их более подробно. Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета или, более конкретно, если вероятность попадания того или дру-

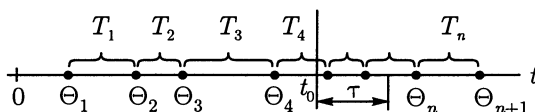


Рис. 10.0.1

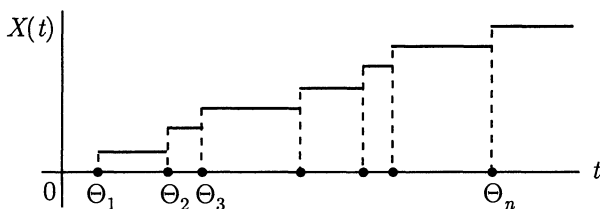


Рис. 10.0.2

того числа событий на любой интервал времени зависит только от длины τ этого интервала и не зависит от того, где именно на оси $0t$ он расположен.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Практически ординарность потока означает, что события в нем появляются «поодиночке», а не группами по два, по три и т. д. (точное совпадение моментов появления двух событий теоретически возможно, но имеет нулевую вероятность).

Ординарный поток событий можно интерпретировать как случайный процесс $X(t)$ — число событий, появившихся до момента t (рис. 10.0.2). Случайный процесс $X(t)$ скачкообразно возрастает на одну единицу в точках $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$.

Поток событий называется *поток без последствия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени τ , не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга.

Поток событий называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последствия.

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0), \quad (10.0.1)$$

где $\lambda = 1 / M[T]$ — величина, обратная среднему значению интервала T .

Ординарный поток событий без последствия называется *пуассоновским*. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно стационарный пуассоновский поток).

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = \text{const}$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда она стремится к нулю. Среднее число событий, наступающих на интервале времени τ , следующем непосредственно за моментом t_0 (см. рис. 10.0.1), равно

$a(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt$. Если поток событий стационарный, то $a(t_0, \tau) = a(\tau) = \lambda\tau$.

Ординарный поток событий называется *поток Пальма* (или *рекуррентным* потоком, или потоком с ограниченным последствием), если интервалы времени $T_1, T_2, \dots$ между последовательными событиями (см. рис. 10.0.1) представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины. В связи с одинаковостью распределений $T_1, T_2, \dots$ поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону (10.0.1), где λ — интенсивность потока.

Потоком Эрланга k -го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая k -я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются (на рис. 10.0.3 показано получение потока Эрланга 4-го порядка из простейшего потока).

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин $T_1, T_2, \dots, T_k$, имеющих показательное распределение с параметром λ :

$$T = \sum_{i=1}^k T_i. \quad (10.0.2)$$

Закон распределения случайной величины T называется *законом Эрланга k -го порядка* (см. задачу 8.3) и имеет плотность

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0). \quad (10.0.3)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T (10.0.2) соответственно равны:

$$m_t = k / \lambda; \quad D_t = k / \lambda^2; \quad \sigma_t = \sqrt{k / \lambda}. \quad (10.0.4)$$

Коэффициент вариации случайной величины (10.0.2) равен

$$v_t = \sigma_t / m_t = 1 / \sqrt{k}; \quad (10.0.5)$$

$v_t \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. при увеличении порядка потока Эрланга «степень случайности» интервала между событиями стремится к нулю.

Если одновременно с «прореживанием» простейшего потока изменять масштаб по оси $0t$ (делением на k), получится *нормированный* поток

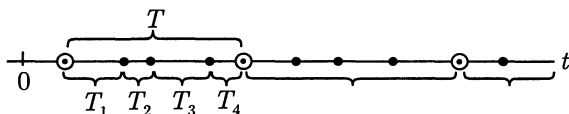


Рис. 10.0.3

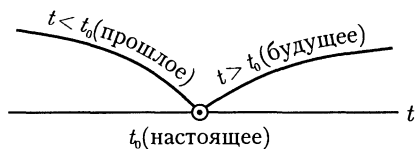


Рис. 10.0.4

Эрланга k -го порядка, интенсивность которого не зависит от k . Интервал времени $\tilde{T}$ между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга k -го порядка имеет плотность

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda (k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t} \quad (\text{при } t > 0). \quad (10.0.6)$$

Числовые характеристики случайной величины

$$\tilde{T} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i$$

равны:

$$M|\tilde{T}| = 1/\lambda; \quad D|\tilde{T}| = 1/k\lambda^2; \quad \tilde{\sigma}_t = 1/(\lambda\sqrt{k}); \quad v_t = 1/\sqrt{k}. \quad (10.0.7)$$

При увеличении k нормированный поток Эрланга неограниченно приближается к *регулярному потоку* с постоянным интервалом $l = 1/\lambda$ между событиями.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S , называется *марковским* (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 (рис. 10.0.4) *вероятность любого состояния системы в будущем* (при $t > t_0$) *зависит только от ее состояния в настоящем* (при $t = t_0$) *и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние* (иначе: при фиксированном настоящем будущее не зависит от предыстории процесса — от прошлого).

В данной главе будем рассматривать только марковские процессы с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_n$. Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью графа состояний (рис. 10.0.5), где прямоугольниками (или кружками) обозначены состояния $s_1, s_2, \dots$ системы S , а стрелками — возможные переходы из состояния в состояние (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Иногда на графе состояний отмечают не только возможные переходы из состояния в состояние, но и возможные задержки в прежнем состоянии; это изображается стрелкой («петлей»), направленной из данного состояния в него же (рис. 10.0.6), но можно обходиться и без этого. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

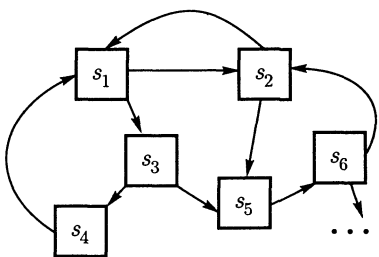


Рис. 10.0.5



Рис. 10.0.6

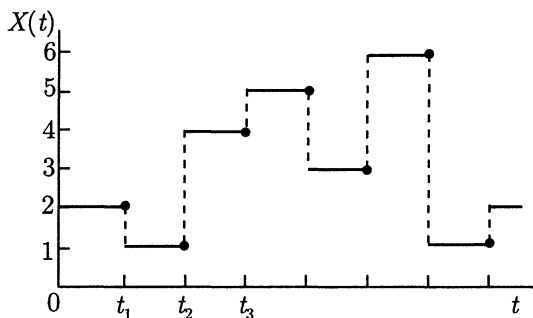


Рис. 10.0.7

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса моменты $t_1, t_2, \dots$, когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t , а номер шага: $1, 2, \dots, k, \dots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний

$$S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots, \quad (10.0.8)$$

если $S(0)$ — начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ — состояние системы непосредственно после первого шага; $\dots$; $S(k)$ — состояние системы непосредственно после k -го шага $\dots$.

Событие $\{S(k) = s_i\} = \{\text{сразу после } k\text{-го шага система находится в состоянии } s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) является случайным событием, поэтому последовательность состояний (10.0.8) можно рассматривать как последовательность случайных событий. Начальное состояние $S(0)$ может быть как заданным заранее, так и случайным. О событиях последовательности (10.0.8) говорят, что они образуют марковскую цепь.

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_n$. Если обозначить $X(t)$ номер состояния, в котором находится система S в момент t , то процесс (марковская цепь) описывается целочисленной случайной функцией $X(t) > 0$, возможные значения которой равны $1, 2, \dots, n$. Эта функция совершает скачки от одного целочисленного значения к другому в заданные моменты $t_1, t_2, \dots$ (рис. 10.0.7) и является непрерывной слева, что отмечено точками на рис. 10.0.7.

Рассмотрим одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$. Обозначим через $p_i(k)$ вероятность того, что после k -го шага [и до $(k+1)$ -го] система S будет в состоянии s_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Вероятности $p_i(k)$ называются *вероятностями состояний* цепи Маркова. Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1. \quad (10.0.9)$$

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0) \quad (10.0.10)$$

называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи. В частности, если начальное состояние $S(0)$ системы S в точности известно, например $S(0) = s_i$, начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода на k -м шаге из состояния s_i в состояние s_j называется условная вероятность того, что система S после k -го шага окажется в состоянии s_j , при условии, что непосредственно перед этим (после $k - 1$ шагов) она находилась в состоянии s_i . Вероятности перехода иногда называются также «переходными вероятностями».

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход:

$$P \{S(k) = s_j | S(k-1) = s_i\} = P_{ij}. \quad (10.0.11)$$

Переходные вероятности однородной марковской цепи P_{ij} образуют квадратную таблицу (матрицу) размером $n \times n$:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10.0.12)$$

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.0.13)$$

Матрицу, обладающую таким свойством, называют *стохастической*. Вероятность P_{ii} есть не что иное, как вероятность того, что система, пришедшая к данному шагу в состояние s_i , в нем же и задержится на очередном шаге.

Если для однородной цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей (10.0.10) и матрица переходных вероятностей (10.0.12), то вероятности состояний системы $p_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) могут быть определены по рекуррентной формуле

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) P_{ij} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n). \quad (10.0.14)$$

Для неоднородной цепи Маркова вероятности перехода в матрице (10.0.12) и формуле (10.0.14) зависят от номера шага k .

Для однородной цепи Маркова, если все состояния являются существенными, а число состояний конечно, существует предел $\lim_{u \rightarrow \infty} P_i(u) = P_i$,

определяемый из системы уравнений

$$P_i = \sum_{j=1}^n P_j P_{ji} \text{ и } \sum_{i=1}^n P_i = 1. \text{ Сумма переход-}$$

ных вероятностей в любой строке матрицы равна единице.

При фактических вычислениях по формуле (10.0.14) надо в ней учитывать не все состояния s_j , а только те, для которых переходные вероятности отличны от нуля, т.е. те, из которых на графе состояний ведут стрелки в состояние s_i .

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем иногда называют «непрерывной цепью Маркова». Для такого процесса вероятность перехода из состояния s_i в s_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij} , которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния s_i в состояние s_j за малый промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t , к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = \text{const}$), так и зависящей от времени [$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$]. В первом случае марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным*. Типичный пример такого процесса — случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке (см. рис. 10.0.2).

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно представлять себе переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только происходит первое событие в потоке с интенсивностью λ_{ij} , система из состояния s_i скачком переходит в s_j). Если все эти потоки пуассоновские (т.е. ординарные и без последствия, с постоянной или зависящей от времени интенсивностью), то процесс, протекающий в системе S , будет марковским.

Рассматривая марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, очень удобно пользоваться графом состояний, на котором против каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в s_j , проставлена интенсивность λ_{ij} потока событий, переводящего систему по данной стрелке (рис. 10.0.8). Такой граф состояний называют *размеченным*¹⁾.

Вероятность того, что система S , находящаяся в состоянии s_i , за элементарный промежуток времени $(t, t + dt)$ перейдет в состояние s_j (элемент вероятности перехода из s_i в s_j), есть вероятность того, что за это вре-

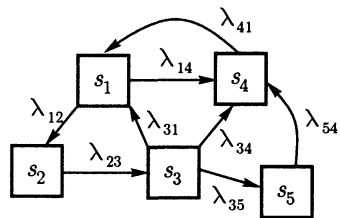


Рис. 10.0.8

¹⁾ На графе состояний системы с непрерывным временем мы не будем проставлять петли, соответствующие задержке системы в данном состоянии, так как такая задержка всегда возможна.

мя dt появится хотя бы одно событие потока, переводящего систему S из s_i в s_j . С точностью до бесконечно малых высших порядков эта вероятность равна $\lambda_{ij}dt$.

Потоком вероятности перехода из состояния s_i в s_j называется величина $\lambda_{ij}p_i(t)$ (здесь интенсивность λ_{ij} может быть как зависящей, так и не зависящей от времени).

Рассмотрим случай, когда система S имеет конечное число состояний $s_1, s_2, \dots, s_n$. Для описания случайного процесса, протекающего в этой системе, применяются вероятности состояний

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t), \quad (10.0.15)$$

где $p_i(t)$ — вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии s_i :

$$p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}. \quad (10.0.16)$$

Очевидно, для любого t

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1. \quad (10.0.17)$$

Для нахождения вероятностей (10.0.15) нужно решить систему дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова), имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, опуская аргумент t у переменных p_i ,

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}p_j - p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.0.18)$$

Напомним, что интенсивности потоков λ_{ij} могут зависеть от времени t (аргумент t для краткости написания опущен).

Уравнения (10.0.18) удобно составлять, пользуясь размеченным графом состояний системы и следующим мнемоническим правилом: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие*. Например, для системы S , размеченный граф состояний которой дан на рис. 10.0.8, система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} dp_1 / dt &= \lambda_{31}p_3 + \lambda_{41}p_4 - (\lambda_{12} + \lambda_{14}) p_1; \\ dp_2 / dt &= \lambda_{12}p_1 - \lambda_{23}p_2; \\ dp_3 / dt &= \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{34} + \lambda_{35}) p_3; \\ dp_4 / dt &= \lambda_{14}p_1 + \lambda_{34}p_3 + \lambda_{51}p_5 - \lambda_{41}p_4; \\ dp_5 / dt &= \lambda_{35}p_3 - \lambda_{54}p_5. \end{aligned} \quad (10.0.19)$$

Так как для любого t выполняется условие (10.0.17), можно любую из вероятностей (10.0.15) выразить через остальные и таким образом уменьшить число уравнений на одно.

Чтобы решить систему дифференциальных уравнений (10.0.18) для вероятностей состояний $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$, нужно задать начальное распределение вероятностей

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0), \quad (10.0.20)$$

сумма которых равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1.$$

Если, в частности, в начальный момент $t = 0$ состояние системы S в точности известно, например, $S(0) = s_i$, то $p_i(0) = 1$, а остальные вероятности (10.0.20) равны нулю.

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими (т.е. стационарными пуассоновскими с постоянными интенсивностями λ_{ij}), в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10.0.21)$$

не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это означает, что с течением времени в системе S устанавливается *предельный стационарный режим*, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована как *среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической* и соответствующий случайный процесс — эргодическим.

Для существования финальных вероятностей состояний одного условия $\lambda_{ij} = \text{const}$ недостаточно, требуется выполнение еще некоторых условий, проверить которые можно по графу состояний, выделив на нем «существенные» и «несущественные» состояния. Состояние s_i называется *существенным*, если нет другого состояния s_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из s_i в s_j , система уже не может вернуться в s_i . Все состояния, не обладающие таким свойством, называются *несущественными*.

Например, для системы S , граф состояний которой дан на рис. 10.0.9, со-

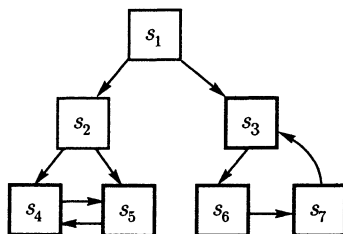


Рис. 10.0.9

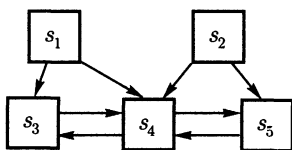


Рис. 10.0.10

стояния s_1, s_2 несущественны (из s_1 можно уйти, например, в s_2 и не вернуться, а из s_2 в s_4 или s_5 и не вернуться), а состояния s_4, s_5, s_3, s_6, s_7 — существенны (существенные состояния обведены жирными линиями).

При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей *необходимо и достаточно*, чтобы из каждого *существенного* состояния можно было (за какое-то число шагов) *перейти в каждое другое существенное*. Граф, представленный на рис. 10.0.9, этому условию не удовлетворяет (например, из существенного состояния s_4 нельзя перейти в существенное состояние s_6); для графа, показанного на рис. 10.0.10, финальные вероятности существуют (из каждого существенного состояния возможен переход в каждое другое существенное).

Несущественные состояния потому так и называются, что из каждого такого состояния система рано или поздно уйдет в какое-то из существенных и больше не вернется. Естественно, финальные вероятности для несущественных состояний равны нулю.

Если система S имеет конечное число состояний $s_1, s_2, \dots, s_n$, то для существования финальных вероятностей *достаточно*, чтобы из любого состояния системы можно было (за какое-то число шагов) *перейти в любое другое*. Если число состояний $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ бесконечно, то это условие перестает быть достаточным, и существование финальных вероятностей зависит не только от графа состояний, но и от интенсивностей λ_{ij} .

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений, они получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить в них левые части (производные) равными нулю. Однако удобнее составлять эти уравнения непосредственно по графу состояний, пользуясь мнемоническим правилом: для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему. Например, для системы S , размеченный граф состояний которой дан на рис. 10.0.11, уравнения для финальных вероятностей состояний имеют вид

$$(\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1 = \lambda_{21} p_2;$$

$$(\lambda_{21} + \lambda_{24}) p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4;$$

$$(\lambda_{34} + \lambda_{35}) p_3 = \lambda_{13} p_1; \quad (10.0.22)$$

$$\lambda_{42} p_4 = \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3 + \lambda_{54} p_5;$$

$$\lambda_{54} p_5 = \lambda_{35} p_3.$$

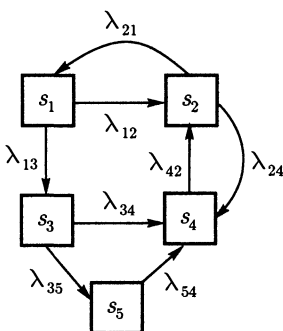


Рис. 10.0.11

Таким образом, получается (для системы S с n состояниями) система n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными $p_1, p_2, \dots, p_n$. Из этой системы можно найти неизвестные $p_1, p_2, \dots, p_n$ с точностью до произвольного множителя. Чтобы найти точ-

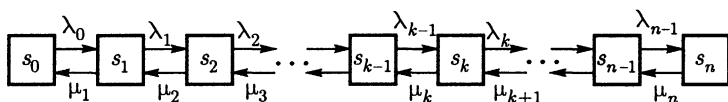


Рис. 10.0.12

ные значения $p_1, \dots, p_n$, к уравнениям добавляют *нормировочное условие* $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей p_i через другие (и соответственно отбросить одно из уравнений).

На практике очень часто приходится встречаться с системами, граф состояний которых имеет вид, показанный на рис. 10.0.12 (все состояния можно вытянуть в цепь, причем каждое из них связано прямой и обратной связью с двумя соседними, кроме двух крайних, каждое из которых связано только с одним соседним). Схема, изображенная на рис. 10.0.12, называется *схемой гибели и размножения*. Это название заимствовано из биологических задач, где состояние популяции s_k означает наличие в ней k единиц. Переход вправо связан с «размножением» единиц, а влево — с их «гибелью». На рис. 10.0.12 «интенсивности размножения» ($\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$) проставлены у стрелок, ведущих слева направо, «интенсивности гибели» ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$) — у стрелок, ведущих справа налево; каждая из них отмечена индексом того состояния, из которого исходит соответствующая стрелка.

Для схемы гибели и размножения финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \dots;$$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 \quad (k = 0, \dots, n); \dots;$$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0; \quad p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right\}^{-1}. \quad (10.0.23)$$

Обратим внимание на правило вычисления любой вероятности состояния (при $k = 1, 2, \dots, n$)

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0,$$

которое можно сформулировать так: *вероятность любого состояния в схеме гибели и размножения (см. рис. 10.0.12) равна дроби, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей размножения, стоящих левее s_k , а в знаменателе — всех интенсивностей гибели, стоящих левее s_k , умноженной на вероятность крайнего левого состояния p_0 .*

Если процесс описывается схемой гибели и размножения, то можно записать дифференциальные уравнения для математического ожидания

и дисперсии случайной функции $X(t)$ — числа единиц в системе в момент времени t :

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n (\lambda_k - \mu_k) p_k(t); \quad (10.0.24)$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n [\lambda_k + \mu_k + 2k(\lambda_k - \mu_k) - 2m_x(t)(\lambda_k - \mu_k)] p_k(t). \quad (10.0.25)$$

В этих формулах нужно полагать $\lambda_n = \mu_0 \equiv 0$. Интенсивности λ_k ($0 \leq k \leq n-1$) и μ_k ($1 \leq k \leq n$) могут быть любыми неотрицательными функциями времени.

При достаточно больших значениях $m_x(t)$ (> 20) и выполнении условия $0 < m_x(t) \pm 3\sqrt{D_x(t)} < n$ можно приближенно полагать, что сечение случайной функции $X(t)$ представляет собой нормальную случайную величину с параметрами $m_x(t)$, $\sqrt{D_x(t)}$, полученными решением уравнений (10.0.24), (10.0.25). Формулы (10.0.24) и (10.0.25) остаются справедливыми при $n \rightarrow \infty$, если верхний предел в суммах заменить на ∞ .

10.1. Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: 1) потока I с интенсивностью λ_1 и 2) потока II с интенсивностью λ_2 (рис. 10.1). Будет ли поток III, получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?

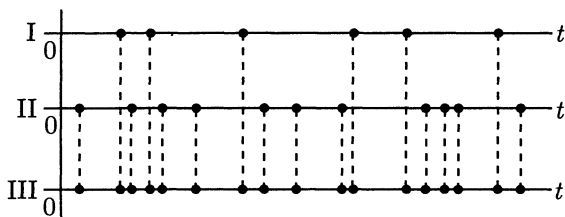


Рис. 10.1

Решение. Да, будет, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия сохраняются; интенсивность потока III равна $\lambda_1 + \lambda_2$.

10.2. Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью λ ; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью $1 - p$ выбрасывается (в дальнейшем такую операцию будем называть p -преобразованием потока). Каким будет поток, получающийся в результате p -преобразования простейшего потока?

Решение. Поток будет простейшим с интенсивностью λp . Действительно, все свойства простейшего потока (стационарность, ординарность, отсутствие последействия) при p -преобразовании сохраняются, а интенсивность умножается на p .

10.3. Интервал времени T между событиями в ординарном потоке имеет плотность

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{при } t > t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Интервалы между событиями независимы. 1) Построить график плотности $f(t)$. 2) Является ли данный поток простейшим? 3) Является ли он потоком Пальма? 4) Какова его интенсивность $\tilde{\lambda}$? 5) Каков коэффициент вариации v_t интервала между событиями?

Решение. 1) См. рис. 10.3; распределение такого вида назовем «сдвинутым на t_0 показательным». 2) Нет, не является, так как распределение (10.3) непоказательное. 3) Да, является в силу ординарности потока, независимости интервалов и одинакового их распределения.

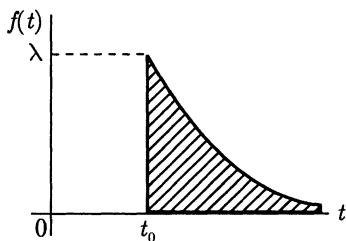


Рис. 10.3

4) $\tilde{\lambda} = 1/\mathbf{M}[T]$; $\mathbf{M}[T] = 1/\lambda + t_0$; $\tilde{\lambda} = (1/\lambda + t_0)^{-1} = \lambda/(1 + \lambda t_0)$.

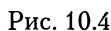
5) $\mathbf{D}[T] = \frac{1}{\lambda}$; $\sigma_t = \frac{1}{\lambda}$; $v_t = \frac{\sigma_t}{\mathbf{M}[T]} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + t_0} = \frac{1}{1 + \lambda t_0}$.

10.4. На оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ . Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется еще одно событие (на рис. 10.4 где кружками обозначены основные, крестиками — вставленные события). Найти плотность распределения $f(t)$ интервала T между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма? Каков коэффициент вариации интервала T между событиями?

Решение. $T = X/2$, где X имеет показательное распределение с параметром λ : $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$). Пользуясь решением задачи 8.1 и полагая в формуле (8.1) $a = 1/2$; $b = 0$, получаем

$$f(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} \quad (t > 0). \quad (10.4)$$

Это есть показательное распределение с коэффициентом вариации $v_t = 1$. Тем не менее новый поток не будет ни простейшим, ни даже потоком Пальма. Докажем сначала, что он не будет потоком Пальма. Хотя интервалы между событиями распределены одинаково по закону (10.4), они не являются независимыми. Рас-



330

Решение. Так как простейший поток не обладает последовательностью, то «будущее» не зависит от «прошлого», в частности, от того, сколько времени тому назад прошел последний автомобиль. Распределение времени T точно такое же, как и распределение промежутка времени между появлением соседних автомобилей, т.е. показательное с параметром λ : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t > 0$); отсюда $m_t = 1/\lambda$; $D_t = 1/\lambda^2$; $\sigma_t = 1/\lambda = m_t$; $v_t = 1$.

Примечание. Если поток автомобилей, идущих по шоссе, является многорядным, то его можно рассматривать как суперпозицию нескольких потоков, соответствующих каждому ряду. Если каждый поток — простейший, то результат суперпозиции также является простейшим потоком, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последовательности при суперпозиции сохраняются (см. задачу 10.1).

10.7. Пассажир выходит на остановку автобуса в некоторый момент времени, никак не связанный с расписанием движения. Автобусы следуют друг за другом регулярно с интервалом времени длины l . Найти закон распределения времени T , которое придется пассажиру ждать автобуса, и выразить его характеристики m_t, σ_t через интенсивность потока автобусов λ .

Решение. Момент прихода пассажира распределен с постоянной плотностью на интервале длины l между двумя автобусами; плотность распределения времени ожидания T будет также постоянной [равномерное распределение на интервале $(0, l)$]: $f(t) = 1/l$ ($0 < t < l$) или, обозначая $1/l = \lambda$, $f(t) = \lambda$ ($0 < t < 1/\lambda$). Для равномерного распределения на участке длины $1/\lambda$ имеем $m_t = 1/(2\lambda)$; $D_t = 1/(12\lambda^2)$; $\sigma_t = 1/(2\sqrt{3}\lambda)$; $v_t = 1/\sqrt{3}$.

10.8*. На оси $0t$ имеется пальмовский поток событий, интервалы между которыми распределены с плотностью $f(t)$. На ось $0t$ случайным образом бросается точка t^* (например, прибывает «инспектор», наблюдающий за появлением событий, или же «пассажир» появляется на остановке автобуса), причем момент t^* никак не связан с моментами появления событий потока (рис. 10.8). Найти плотность распределения того интервала T^* , на который попала точка t^* , его математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. С первого взгляда может показаться, что эта плотность — такая же, как плотность распределения $f(t)$ любого интервала T между событиями, однако это не так. Тот факт, что на участок T^* попала случайно брошенная точка t^* , меняет его

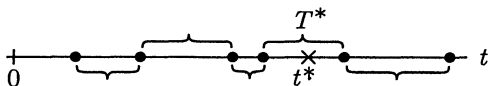


Рис. 10.8

распределение; действительно, если на оси $0t$ есть разные участки (большие и маленькие), то с большей вероятностью точка t^* попадет на один из больших участков.

Найдем плотность распределения $f^*(t)$ того участка T^* , на который попала точка t^* . Для этого найдем элемент вероятности $f^*(t) dt$, равный вероятности того, что точка t^* попадет на промежуток, длина которого заключена в пределах $(t, t + dt)$. Эта вероятность приближенно равна отношению суммарной длины всех таких промежутков на очень большом интервале времени Ω к полной длине этого интервала.

Пусть на очень большом интервале Ω уложилось большое число N промежутков между событиями. Среднее число промежутков, длина которых лежит в пределах $(t, t + dt)$, равна $Nf(t) dt$; средняя суммарная длина всех таких промежутков приближенно равна $tNf(t) dt$. Средняя же общая продолжительность всех N промежутков на участке Ω будет (приближенно) равна Nm_t , где

$m_t = \mathbf{M}[T] = \int_0^{\infty} tf(t) dt$. Разделив одно на другое, получим

$$f^*(t) dt \approx \frac{tNf(t) dt}{Nm_t} = \frac{tf(t)}{m_t} dt.$$

Это равенство выполняется тем точнее, чем более длительный интервал времени Ω будет рассматриваться (чем больше N). В пределе закон распределения случайной величины T^* будет

$$f^*(t) = \frac{t}{m_t} f(t) \quad (t > 0). \quad (10.8)$$

$$\mathbf{M}[T^*] = \frac{1}{m_t} \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \frac{1}{m_t} \alpha_2(t) = \frac{1}{m_t} (D_t + m_t^2);$$

$$\mathbf{D}[T^*] = \alpha_2[T^*] - (\mathbf{M}[T^*])^2 = \frac{1}{m_t} \int_0^{\infty} t^3 f(t) dt - (\mathbf{M}[T^*])^2.$$

10.9. В условиях задачи 10.8 поток Пальма представляет собой простейший поток с интенсивностью λ , т.е. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t > 0$). Найти плотность $f^*(t)$ того интервала T^* , на который попадает точка t^* .

Решение. С учетом того что $m_t = 1/\lambda$, формула (10.8) дает $f^*(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ ($t > 0$), что представляет собой не что иное, как закон Эрланга 2-го порядка [см. формулу (10.0.3) при $k=2$].

10.10*. На оси $0t$ имеется пальмовский поток событий с плотностью $f(t)$ интервала T между соседними событиями. Случайная точка t^* («инспектор») попадает куда-то на интервал T^* (рис. 10.10).

Она делит его на два промежутка: Q — от ближайшего предыдущего события до t^* и H — от t^* до ближайшего последующего события. Найти распределение обоих этих промежутков.

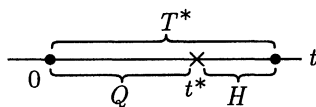


Рис. 10.10

Решение. Предположим, что случайная величина T^* приняла значение s : $T^* = s$, и найдем условное распределение промежутка Q при этом условии. Обозначим его плотность $f_Q(t|s)$. Так как точка t^* бросается на ось $0t$ совершенно случайно (безотносительно к событиям потока), очевидно, она будет иметь равномерное распределение в пределах промежутка $T^* = s$:

$$f_Q(t|s) = 1/s \quad \text{при} \quad 0 < t < s. \quad (10.10.1)$$

Чтобы найти безусловное распределение $f_Q(t)$, надо осреднить плотность (10.10.1) с «весом» $f^*(s)$. Пользуясь формулой (10.8), получаем

$$f^*(s) = \frac{s}{m_t} f(s); \quad f_Q(t) = \int_0^\infty f_Q(t|s) f^*(s) ds.$$

Учитывая, что $f_Q(t|s)$ отлично от нуля только при $s > t$, можно написать

$$f_Q(t) = \int_0^\infty \frac{s}{sm_t} f(s) ds = \frac{1}{m_t} \int_0^\infty f(t) dt = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)],$$

где $F(t)$ — функция распределения интервала T между событиями в потоке Пальма.

Итак,

$$f_Q(t) = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)]. \quad (10.10.2)$$

Очевидно, то же распределение будет иметь и промежуток времени $H = T^* - Q$:

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t} [1 - F(t)]. \quad (10.10.3)$$

10.11. Пользуясь результатами предыдущей задачи, проверить решение задачи 10.6, полученное из других соображений.

Решение. Имеем $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t > 0$); $m_t = 1/\lambda$. По формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \lambda [1 - 1 + e^{-\lambda t}] = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0),$$

т.е. задача 10.6 решена верно.

10.12. Пассажир выходит на остановку автобуса в момент времени, никак не связанный с расписанием. Поток автобусов представляет собой поток Пальма с интервалами, имеющими равномерное распределение в пределах от 5 до 10 мин. Найти: 1) плотность распределения того интервала между автобусами, на который попал пассажир; 2) плотность распределения времени H , которое ему придется ждать автобуса; 3) среднее время ожидания автобуса.

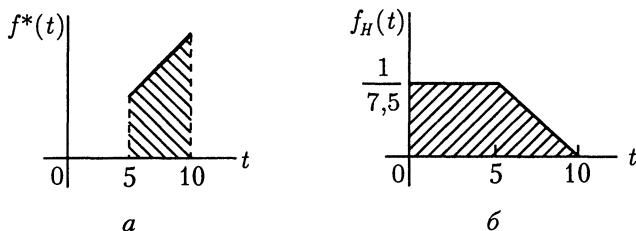


Рис. 10.12

Решение. Имеем $f(t) = 1/5$ при $t \in (5, 10)$; $m_t = 7,5$.

1) По формуле (10.8) $f^*(t) = t / 37,5$ при $t \in (5, 10)$. График плотности $f^*(t)$ показан на рис. 10.12, а.

$$2) \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 5; \\ (t - 5) / 5 & \text{при } 5 < t \leq 10; \\ 1 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

Отсюда по формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 / 7,5 & \text{при } 0 < t < 5; \\ (10 - t) / 37,5 & \text{при } 5 < t < 10; \\ 0 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

График плотности $f_H(t)$ показан на рис. 10.12, б.

3) Среднее время ожидания

$$m_H = \int_0^5 \frac{t}{7,5} dt + \int_5^{10} t \frac{10 - t}{37,5} dt \approx 6,11 \text{ [мин]}.$$

10.13. Рассматривается поток Эрланга k -го порядка с плотностью распределения интервала T между событиями:

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (10.13.1)$$

Найти функцию распределения $F_k(t)$ этого интервала.

Решение. Можно было бы найти функцию распределения по обычной формуле

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t) dt,$$

но проще найти ее исходя непосредственно из определения $F_k(t) = \mathbf{P}\{T < t\}$.

Перейдем к противоположному событию и найдем $\mathbf{P}\{T > t\}$. Свяжем начало отсчета 0 с одним из событий потока Эрланга и отложим от него вправо два участка: T (расстояние до следующего события потока Эрланга) и $t < T$ (рис. 10.13).

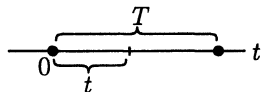


Рис. 10.13

Для выполнения неравенства $T > t$ нужно, чтобы на участок t попало меньше чем k событий простейшего потока с интенсивностью λ (либо 0, либо 1, ..., либо $k - 1$).

Вероятность того, что на участок t попадет m событий, равна

$$\mathbf{P}_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

По правилу сложения вероятностей

$$\mathbf{P}\{T > t\} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

откуда

$$F_n(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = 1 - R(k-1, \lambda t), \quad (10.13.2)$$

где $1 - R(m, a)$ — табулированная таблица (см. табл. 1 прил. 1).

10.14*. Поток отказов ЭВМ представляет собой поток Эрланга k -го порядка с плотностью (10.13.1) интервала между отказами (восстановление машины после отказа происходит мгновенно). «Инспектор» прибывает в случайный момент времени t^* и ожидает первого отказа. Найти плотность распределения времени H , в течение которого ему придется ждать отказа, и его математическое ожидание m_H .

Решение. По формуле (10.10.3)

$$f_H(t) = \frac{1}{m_t} [1 - F_k(t)],$$

где $F_k(t)$ дается формулой (10.13.2), а $m_t = k / \lambda$. Отсюда

$$f_H(t) = \frac{\lambda}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda (\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (10.14.1)$$

Перепишем формулу (10.14.1) в виде

$$f_H(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \frac{\lambda (\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (10.14.2)$$

Из (10.14.2) видно, что случайная величина H имеет распределение, «смешанное» из k эрланговских распределений разных порядков; с одинаковой вероятностью $1/k$ она имеет эрланговское распределение 1, 2, ..., k -го порядков. Математическое ожидание такой случайной величины найдем по формуле полного математического ожидания:

$$m_H = \mathbf{M}[H] = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mathbf{M}[H|r], \quad (10.14.3)$$

где $\mathbf{M}[H|r]$ — условное математическое ожидание случайной величины H при условии, что она распределена по закону Эрланга r -го порядка.

Находим по первой формуле (10.0.4) $\mathbf{M}[H|r] = r / \lambda$, откуда

$$m_H = \frac{1}{k\lambda} \sum_{r=1}^k r = \frac{(k+1)^k}{2k\lambda} = \frac{k+1}{2\lambda}. \quad (10.14.4)$$

10.15*. Пальмовский поток событий с плотностью распределения $f^*(t)$ интервала между событиями подвергается p -преобразованию (см. задачу 10.2). Случайная величина V — интервал между событиями в преобразованном потоке. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины V .

Решение. Случайная величина V представляет собой сумму случайного числа независимых случайных величин (см. задачу 8.63): $V = \sum_{k=1}^Y T_k$, где Y — дискретная случайная величина, имеющая геометрическое распределение $\mathbf{P}\{Y = m\} = pq^{m-1}$ ($m = 1, 2, \dots$), $q = 1 - p$, а каждая из случайных величин T_k имеет распределение $f(t)$.

Тогда последовательные интервалы между событиями в p -преобразованном потоке будут

$$V_1 = \sum_{k=1}^{Y_1} T_k; \quad V_2 = \sum_{i=1}^{Y_2} T_{j+Y_1} \dots,$$

где случайные величины $V_1, V_2, \dots$ независимы, и преобразованный поток есть поток Пальма. В соответствии с задачей 8.63

$$m_V = \frac{m_t}{p}; \quad D_V = \frac{D_t}{p} + m_t^2 \frac{q}{p^2},$$

где

$$m_t = \int_0^{\infty} t f(t) dt; \quad D_t = \int_0^{\infty} (t - m_t)^2 f(t) dt.$$

Примечание. Можно доказать, что при многократном p -преобразовании потока Пальма получается поток, близкий к простейшему.

10.16. Найти закон распределения интервала T между событиями в потоке Пальма, если случайная величина T определяется из выражения $T = \sum_{k=1}^Y T_k$, т.е. представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, где случайные величины T_k независимы и подчинены показательному закону с параметром λ , а случайная величина Y не зависит от них и имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы: $p_n = \mathbf{P}\{Y = n\} = pq^{n-1} \times$
 $\times (0 < p < 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots)$.

Решение. В задаче 8.62 было показано, что случайная величина T подчинена показательному закону с параметром λp , следовательно, рассматриваемый поток Пальма является простейшим с интенсивностью λp , который получается путем p -преобразования простейшего потока с интенсивностью λ . Это подтверждает правильность решения задачи 10.2.

10.17. Поток автобусов, приходящих на остановку, представляет собой поток Пальма; интервал T между ними имеет плотность распределения $f_T(t)$. Автобус находится на остановке в течение неслучайного времени τ . Пассажир, подойдя к остановке в случайный момент t^* (рис. 10.17, а), садится в автобус, если тот находит-

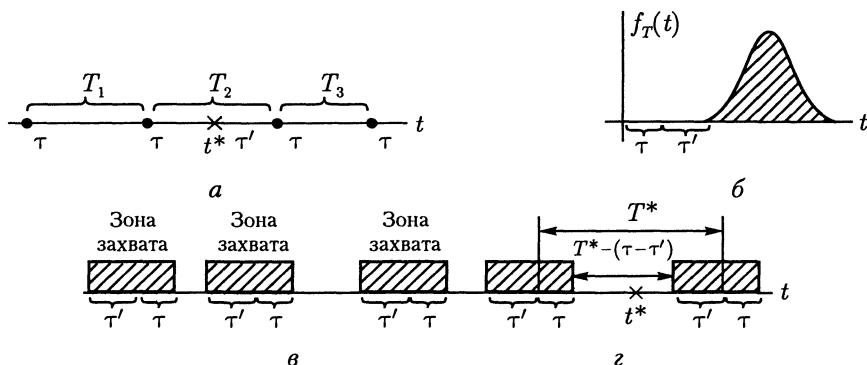


Рис. 10.17

ся на остановке; если же автобуса нет, то ждет его в течение времени τ' и, если за это время автобус не подойдет, покидает остановку и идет пешком. Закон распределения $f_T(t)$ таков, что случайная величина T не может быть меньше, чем $\tau + \tau'$ (рис. 10,17, б). Найти вероятность того, что пассажир сядет в автобус.

Решение. Переходим к противоположному событию $\bar{A} = \{\text{пассажир не сядет в автобус}\}$. Это означает, что пассажир придет на остановку в момент t^* , когда на ней нет автобуса, и за время ожидания следующий автобус не придет. Каждое событие «подход автобуса к остановке» сопровождается «зоной захвата» пассажира; ширина этой зоны $\tau' + \tau$ (рис. 10,17, в).

Событие $\bar{A} = \{\text{пассажир не сел в автобус}\}$ соответствует попаданию точки t^* вне пределов зоны захвата (рис. 10,17, з). Точка t^* распределена равномерно по всей длине интервала T^* . Вероятность того, что она попадет на участок $T^* - (\tau + \tau')$, не вошедший в зону захвата, равна (по интегральной формуле полной вероятности)

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \sum_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t - (\tau + \tau')}{t} f^*(t) dt = \int_{\tau+\tau'}^{\infty} \frac{t - (\tau + \tau')}{t} \frac{t}{m_t} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} t f(t) dt - \frac{\tau + \tau'}{m_t} \int_{\tau+\tau'}^{\infty} f(t) dt, \end{aligned}$$

где m_t — средний интервал между автобусами.

Вероятность того, что пассажир сядет в автобус, равна $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

10.18. Происходит преобразование простейшего потока с интенсивностью λ , состоящее в следующем. Если расстояние между соседними событиями T_i оказывается меньше какого-то допустимого предела t_0 («интервала безопасности»), то событие отодвигается от предыдущего на интервал t_0 ; если же $T_i > t_0$, то событие остается на своем месте (рис. 10.18). Является ли преобразованный поток, образованный точками $\Theta'_1, \Theta'_2, \dots$ на оси $0't'$, простейшим? Является ли он потоком Пальма?

Решение. Ни тем, ни другим преобразованный поток не является, так как в нем имеется сколь угодно далеко идущее после-

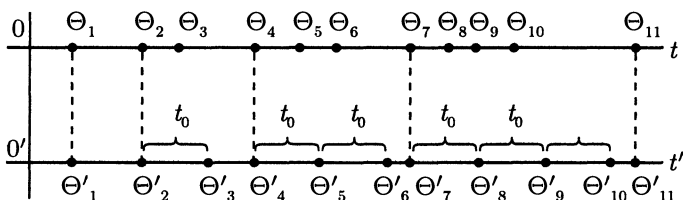


Рис.10.18

действие. Например, «теснящиеся» на оси $0't'$ точки $\Theta_7, \Theta_8, \Theta_9, \Theta_{10}$ отодвигают каждую последующую точку на оси $0't'$ на отрезок времени, зависящий от моментов прихода событий и интервалов между ними в прошлом. Если t_0 много меньше среднего расстояния между событиями в исходном потоке: $t_0 \ll 1/\lambda$, то последствием в преобразованном потоке можно пренебречь.

10.19. Происходит наложение (суперпозиция) двух независимых потоков Пальма с плотностями распределения интервала между событиями $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Будет ли результирующий поток потоком Пальма?

Решение. Суперпозиция двух потоков Пальма выглядит, как показано на рис. 10.19. Ясно, что интервалы $T_1, T_2, \dots$ результирующего потока III не будут независимыми, так как их размеры могут быть обусловлены размерами одного и того же интервала на оси I или II. Например, T_1 и T_2 в сумме дают T_{II} и, значит, не являются независимыми. Однако эта зависимость быстро затухает по мере увеличения расстояния по времени между началами интервалов.

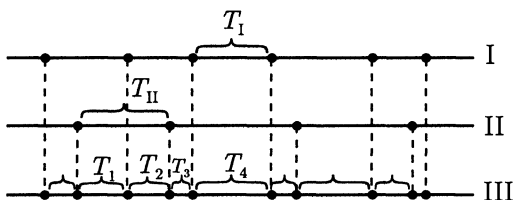


Рис. 10.19

Примечание. Можно доказать, что при суперпозиции достаточно большого числа независимых потоков Пальма со сравнимыми интенсивностями получается поток, близкий к простейшему.

10.20. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S , которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: s_1 — ЭВМ полностью исправна; s_2 — ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи; s_3 — ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач; s_4 — ЭВМ полностью вышла из строя.

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна (состояние s_1). Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3 . Процесс, протекающий в системе S , может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая, третья проверки ЭВМ). Матрица переходных вероятностей имеет вид

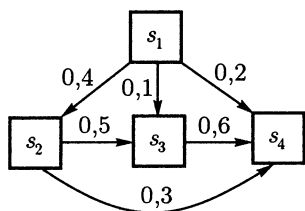


Рис.10.20

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{vmatrix}.$$

Определить вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

Решение. Граф состояний ЭВМ имеет вид, показанный на рис. 10.20.

Против каждой стрелки проставлена соответствующая вероятность перехода. Начальные вероятности состояний $p_1(0)=1$; $p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0$.

По формуле (10.0.14), учитывая в сумме вероятностей только те состояния, из которых возможен непосредственный переход в данное, находим:

$$p_1(1) = p_1(0) P_{11} = 1 \cdot 0,3 = 0,3;$$

$$p_2(1) = p_1(0) P_{12} = 1 \cdot 0,4 = 0,4;$$

$$p_3(1) = p_1(0) P_{13} = 1 \cdot 0,1 = 0,1;$$

$$p_4(1) = p_1(0) P_{14} = 1 \cdot 0,2 = 0,2;$$

$$p_1(2) = p_1(1) P_{11} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$p_2(2) = p_1(1) P_{12} + p_2(1) P_{22} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,20;$$

$$p_3(2) = p_1(1) P_{13} + p_2(1) P_{23} + p_3(1) P_{33} = 0,27;$$

$$p_4(2) = p_1(1) P_{14} + p_2(1) P_{24} + p_3(1) P_{34} + p_4(1) P_{44} = 0,44;$$

$$p_1(3) = p_1(2) P_{11} = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027;$$

$$p_2(3) = p_1(2) P_{12} + p_2(2) P_{22} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,20 \cdot 0,2 = 0,076;$$

$$p_3(3) = p_1(2) P_{13} + p_2(2) P_{23} + p_3(2) P_{33} = 0,217;$$

$$p_4(3) = p_1(2) P_{14} + p_2(2) P_{24} + p_3(2) P_{34} + p_4(2) P_{44} = 0,680.$$

Итак, вероятности состояний ЭВМ после трех проверок: $p_1(3)=0,027$; $p_2(3)=0,076$; $p_3(3)=0,217$; $p_4(3)=0,680$.

10.21. Точка S «блуждает» по оси абсцисс $0x$ (рис. 10.21, а) по следующему закону: на каждом шаге она с вероятностью 0,5 остается на месте, с вероятностью 0,3 перескакивает на единицу вправо и с вероятностью 0,2 — влево. Состояние системы S после k шагов определяется одной координатой (абсциссой) точки S . Начальное положение точки — начало координат. Рассматривая последовательность положений точки S как цепь Маркова, найти

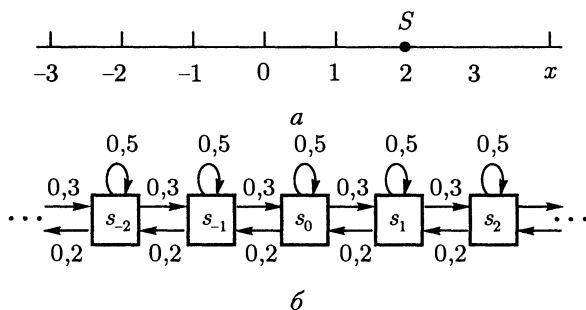


Рис. 10.21

вероятность того, что она после четырех шагов окажется от начала координат не дальше, чем на расстоянии, равном единице.

Решение. Обозначим состояние системы (точки S) через s_i , где i — координата S на оси абсцисс. Размеченный граф состояний показан на рис. 10.21, б. (Здесь для наглядности проставлены «петли», соответствующие задержке S в прежнем положении.)

Последовательность состояний образует цепь Маркова с бесконечным числом состояний. Переходные вероятности $\mathbf{P}_{ij}$ отличны от нуля только в случае $j = i$; $j = i - 1$; $j = i + 1$; $\mathbf{P}_{i,i} = 0,5$; $\mathbf{P}_{i,i+1} = 0,3$; $\mathbf{P}_{i,i-1} = 0,2$. Все остальные переходные вероятности равны нулю. Искомая вероятность $\mathbf{P}$ равна сумме вероятностей: $p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4)$. Найдем их, пользуясь рекуррентными соотношениями (10.0.14).

Имеем $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_{-1}(0) = \dots = 0$. Далее,

$$v_0(1) = p_0(0)\mathbf{P}_{0,0} = 0,5; \quad p_1(1) = p_0(0)\mathbf{P}_{0,1} = 0,3;$$

$$p_{-1}(1) = p_0(1)\mathbf{P}_{0,-1} = 0,2;$$

$$p_0(2) = p_0(1)\mathbf{P}_{0,0} + p_1(1)\mathbf{P}_{1,0} + p_{-1}(1)\mathbf{P}_{-1,0} = 0,5 \cdot 0,5 + \\ + 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,37;$$

$$p_1(2) = p_0(1)\mathbf{P}_{0,1} + p_1(1)\mathbf{P}_{1,1} = 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,30;$$

$$p_2(2) = p_1(1)\mathbf{P}_{1,2} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09;$$

$$p_{-1}(2) = p_0(1)\mathbf{P}_{0,-1} + p_{-1}(1)\mathbf{P}_{-1,-1} = 0,5 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,20;$$

$$p_{-2}(2) = p_{-1}(1)\mathbf{P}_{-1,-2} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04;$$

$$p_0(3) = p_0(2)\mathbf{P}_{0,0} + p_1(2)\mathbf{P}_{1,0} + p_{-1}(2)\mathbf{P}_{-1,0} = 0,305;$$

$$p_1(3) = p_0(2)\mathbf{P}_{0,1} + p_1(2)\mathbf{P}_{1,1} + p_2(2)\mathbf{P}_{2,2} = 0,279;$$

$$p_2(3) = p_1(2)\mathbf{P}_{1,2} + p_2(2)\mathbf{P}_{2,2} = 0,135;$$

$$p_3(3) = p_2(2)\mathbf{P}_{2,3} = 0,027;$$

$$p_{-1}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-1} + p_{-1}(2)P_{-1,-1} + p_0(2)P_{0,-1} = 0,186;$$

$$p_{-2}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-2} + p_{-1}(2)P_{-1,-2} = 0,060;$$

$$p_{-3}(3) = p_{-2}(2)P_{-2,-3} = 0,008;$$

$$p_0(4) = p_1(3)P_{1,0} + p_0(3)P_{0,0} + p_{-1}(3)P_{-1,0} \approx 0,264;$$

$$p_1(4) = p_2(3)P_{2,1} + p_1(3)P_{1,1} + p_0(3)P_{0,1} \approx 0,257;$$

$$p_{-1}(4) = p_0(3)P_{0,-1} + p_{-1}(3)P_{-1,-1} + p_{-2}(3)P_{-2,-1} \approx 0,172.$$

Искомая вероятность

$$p = p_0(4) + p_1(4) + p_{-1}(4) \approx 0,693.$$

Итак, вероятность события A , состоящего в том, что за четыре шага точка S окажется от начала координат на расстоянии, не большем единицы, равна 0,693.

10.22. В условиях предыдущей задачи найти вероятности того, что за четыре шага точка S ни разу не удалится от начала координат дальше, чем на единицу.

Решение. Обозначим $\tilde{p}_0(k)$, $\tilde{p}_1(k)$, $\tilde{p}_{-1}(k)$ вероятности состояний s_0 , s_1 , s_{-1} при условии, что до k -го шага включительно точка S ни разу не удалялась от начала координат больше, чем на единицу.

С первого взгляда здесь процесс не является цепью Маркова (так как вероятности будущих состояний зависят от «предыстории» — была ли точка S хотя бы один раз дальше, чем на одну единицу, от начала координат), но его можно свести к цепи Маркова, если ввести еще одно состояние s^* — точка хотя бы один раз была от начала координат на расстоянии, большем, чем единица.

Граф состояний показан на рис. 10.22. Из состояния s^* нет перехода ни в какое другое, такое состояние называется в теории марковских цепей «поглощающим».

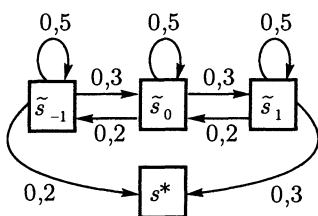


Рис. 10.22

Вероятность события $A = \{\text{точка } S \text{ за четыре шага ни разу не отойдет от начала координат на расстояние, большее, чем единица}\}$ вычислится как сумма вероятностей $\tilde{p}_0(4) + \tilde{p}_{-1}(4) + \tilde{p}_1(4)$ для системы с графом состояний, соответствующим рис. 10.22. Предоставляем читателю вычислить эти вероятности самостоятельно.

10.23. Система S — техническое устройство, состоящее из m узлов и время от времени (в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k$), подвергающееся профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состояний: s_0 — все узлы исправны (ни один не заме-

нялся новым); s_1 — один узел заменен новым, остальные исправны; s_2 — два узла заменены новыми, остальные исправны; ...; s_i — i узлов ($i < m$ заменены новыми, остальные исправны; ...; s_m — все m узлов заменены новыми).

Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна p (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния системы S как марковскую цепь, найти переходные вероятности и для $m = 3$, $p = 0,4$ вычислить вероятности состояний системы S после трех шагов (в начальный момент все узлы исправны).

Решение. Обозначая $q = 1 - p$, запишем переходные вероятности цепи. Для любого состояния системы s_i вероятность P_{ij} равна нулю при $j < i$; вероятность P_{ii} равна вероятности того, что на данном шаге ни один узел не придется заменить новым, т.е. $m - i$ еще не замененных узлов остаются в составе устройства: $P_{ii} = q^{m-i}$. При $i < j$ вероятность перехода P_{ij} равна вероятности того, что на данном шаге из $m - i$ еще не замененных узлов $j - i$ придется заменить новыми. Пользуясь биномиальным распределением, находим $P_{ij} = C_{m-i}^{j-i} p^{j-i} q^{m-j+i}$. Состояние s_m является поглощающим. Для $m = 3$, $p = 0,4$ граф состояний системы имеет вид, показанный на рис. 10.23:

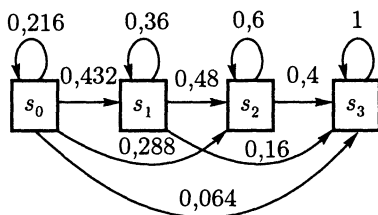


Рис. 10.23

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \\ 0 & 0,36 & 0,48 & 0,16 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{vmatrix}.$$

Имеем $p_0(0) = 1$; $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$. Находим вероятности состояний после одного, двух, трех шагов:

$$p_0(1) = 0,216; \quad p_1(1) = 0,432;$$

$$p_2(1) = 0,288; \quad p_3(1) = 0,064;$$

$$p_1(2) = p_1(1)P_{11} + p_0(1)P_{0,1} \approx 0,249;$$

$$p_2(2) = p_2(1)P_{22} + p_0(1)P_{02} + p_1(1)P_{12} \approx 0,442;$$

$$p_3(2) = p_3(1)P_{33} + p_2(1)P_{23} + p_1(1)P'_{13} + p_0(1)P_{03} \approx 0,262;$$

$$p_0(3) = p_0(2)P_{00} \approx 0,010;$$

$$p_1(3) = p_1(2)P_{11} + p_0(2)P_{01} \approx 0,110;$$

$$p_2(3) = p_2(2)P_{22} + p_0(2)P_{02} + p_1(2)P_{12} \approx 0,398;$$

$$p_3(3) = p_3(2)P_{33} + p_0(2)P_{03} + p_1(2)P_{13} + p_2(2)P_{23} \approx 0,482.$$

10.24. В моменты времени t_1, t_2, t_3 производится осмотр ЭВМ. Возможные состояния ЭВМ: s_0 — полностью исправна; s_1 — незначительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ; s_2 — существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач; s_3 — ЭВМ полностью вышла из строя.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Построить граф состояний. Найти вероятности состояний ЭВМ после одного, двух, трех осмотров, если вначале (при $t = 0$) ЭВМ была полностью исправна.

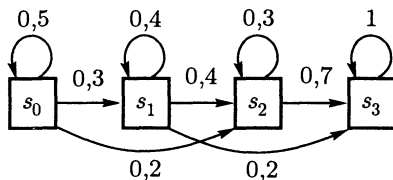


Рис. 10.24

Решение. Граф состояний показан на рис. 10.24.

$$p_0(1) = p_0(0)P_{00} = 1 \cdot 0,5 = 0,5;$$

$$p_1(1) = p_0(0)P_{01} = 1 \cdot 0,3 = 0,3;$$

$$p_2(1) = p_0(0)P_{02} = 1 \cdot 0,2 = 0,2;$$

$$p_0(2) = p_0(1)P_{00} = 0,25; \quad p_1(2) = p_0(1)P_{01} + p_1(1)P_{11} = 0,27;$$

$$p_2(2) = p_0(1)P_{02} + p_1(1)P_{12} + p_2(1)P_{22} = 0,28;$$

$$p_3(2) = p_2(1)P_{23} + p_1(1)P_{13} = 0,20; \quad p_0(3) = p_0(2)P_{00} = 0,125;$$

$$p_1(3) = p_0(2)P_{01} + p_1(2)P_{11} = 0,183;$$

$$p_2(3) = p_0(2)P_{02} + p_1(2)P_{12} + p_2(2)P_{22} = 0,242;$$

$$p_3(3) = p_1(2)P_{13} + p_2(2)P_{23} + p_3(2)P_{33} = 0,450.$$

10.25. Рассматривается процесс работы ЭВМ. Поток отказов (сбоев) работающей ЭВМ — простейший с интенсивностью λ .

Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается, и обслуживающий персонал приступает к устранению неисправности (ремонт). Закон распределения времени ремонта — показательный с параметром μ : $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$ ($t > 0$). В начальный момент ($t = 0$) ЭВМ исправна. Найти: 1) вероятность того, что в момент t ЭВМ будет работать; 2) вероятность того, что за время $(0, t)$ ЭВМ дает хотя бы один сбой; 3) финальные вероятности состояний ЭВМ.

Решение. 1) Состояния системы S (ЭВМ) следующие: s_0 — исправна, работает; s_1 — неисправна, ремонтируется. Размеченный граф состояний дан на рис. 10.25, а.

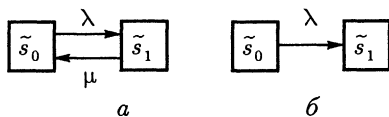


Рис. 10.25

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний $p_0(t)$ и $p_1(t)$ имеют вид

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_1 - \lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 - \mu p_1. \quad (10.25.1)$$

Из этих уравнений одно (любое) может быть отброшено, так как для любого момента t имеем $p_0 + p_1 = 1$. Подставляя в первое из уравнений (10.25.1) $p_1 = 1 - p_0$, получаем одно дифференциальное уравнение относительно p_0 :

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu - (\lambda + \mu) p_0.$$

Решая это уравнение при начальном условии $p_0(0) = 1$, получаем

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right], \quad (10.25.2)$$

откуда

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]. \quad (10.25.3)$$

2) Для нахождения вероятности $\tilde{p}(t)$ того, что за время t ЭВМ дает хотя бы один сбой, введем новые состояния системы S : $\tilde{s}_0$ — ЭВМ ни разу не давала сбоя; $\tilde{s}_2$ — ЭВМ хотя бы один раз дала сбой. Состояние $\tilde{s}_1$ будет «поглощающим» (рис. 10.25, б).

Решая уравнение Колмогорова $dp_0/dt = -\lambda \tilde{p}_0$ при начальном условии $\tilde{p}_0(0) = 1$, получаем $\tilde{p}_0(t) = e^{-\lambda t}$, откуда $p_1(t) = 1 - \tilde{p}_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Итак, вероятность того, что за время t ЭВМ даст хотя

бы один сбой, равна $\tilde{p}_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Эту вероятность в данном случае можно было бы вычислить и проще, как вероятность того, что за время t появится хотя бы одно событие (сбой) в простейшем потоке сбоев с интенсивностью λ .

3) Из уравнений (10.25.2), (10.25.3) при $t \rightarrow \infty$ получим финальные вероятности состояний: $p_0 = \mu / (\lambda + \mu)$; $p_1 = \lambda / (\lambda + \mu)$, которые, впрочем, можно было бы получить непосредственно из графа состояний, пользуясь схемой гибели и размножения (предоставим читателю сделать это самостоятельно).

10.26. В условиях предыдущей задачи 10.25 неисправность ЭВМ обнаруживается не сразу, а по прошествии некоторого времени, имеющего показательное распределение с параметром ν . Написать и решить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Найти финальные вероятности состояний (непосредственно по графу состояний).

Решение. Состояния системы: s_0 — ЭВМ исправна, работает;

s_1 — ЭВМ неисправна, но это не обнаружено; s_2 — ЭВМ ремонтируется. Граф состояний дан на рис. 10.26.

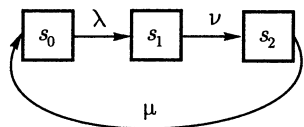


Рис. 10.26

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний будут:

$$\frac{dp_0}{dt} = \mu p_2 - \lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = \lambda p_0 - \nu p_1; \quad \frac{dp_2}{dt} = \nu p_1 - \mu p_2. \quad (10.26.1)$$

Решать эту систему будем с помощью преобразования Лапласа. Тогда уравнения (10.26.1) с учетом начальных условий для изображений π_i вероятностей p_i примут вид:

$$s\pi_0 = \mu\pi_2 - \lambda\pi_0 + 1; \quad s\pi_1 = \lambda\pi_0 - \nu\pi_1;$$

$$s\pi_2 = \nu\pi_1 - \mu\pi_2.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получаем следующие уравнения для изображений:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{s + \nu} \pi_0; \quad \pi_2 = \frac{\nu}{s + \mu} \pi_1 = \frac{\nu\lambda}{(s + \nu)(s + \mu)} \pi_0;$$

$$\pi_0 = \frac{(s + \nu)(s + \mu)}{s(s^2 + s(\mu + \nu + \lambda) + \nu\lambda + \nu\mu + \lambda\mu)}.$$

Обозначим

$$a = -\frac{\mu + \nu + \lambda}{2} + \sqrt{\frac{(\mu + \nu + \lambda)^2}{4} - \nu\lambda - \nu\mu - \lambda\mu};$$

$$b = -\frac{\mu + \nu + \lambda}{2} - \sqrt{\frac{(\mu + \nu + \lambda)^2}{4} - \nu\lambda - \nu\mu - \lambda\mu}.$$

Тогда выражения для вероятностей примут вид:

$$p_0(t) = \frac{ae^{at} - be^{-bt}}{a - b} + (\nu + \mu) \frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b} + \mu\nu \left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)} \right];$$

$$p_1(t) = \lambda \frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b} + \lambda\mu \left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)} \right];$$

$$p_2(t) = \nu\lambda \left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)} \right].$$

Для нахождения финальных вероятностей можно воспользоваться как изображениями, так и самими вероятностями:

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\pi_0(s) = \frac{\mu\nu}{\lambda\mu + \lambda\nu + \nu\mu};$$

$$p_1 = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu + \lambda\nu + \nu\mu}; \quad p_2 = 1 - p_0 - p_1 = \frac{\lambda\nu}{\lambda\mu + \lambda\nu + \nu\mu}. \quad (10.26.2)$$

Финальные вероятности состояний можно найти и непосредственно по графу рис. 10.26: $\mu p_2 = \lambda p_0$; $\lambda p_0 = \nu p_1$; $\nu p_1 = \mu p_2$. Из этих уравнений любое (например, последнее) можно отбросить. Выражая p_2 через p_0 и p_1 : $p_2 = 1 - p_0 - p_1$, получаем два уравнения:

$$\mu(1 - p_0 - p_1) = \lambda p_0; \quad \lambda p_0 = \nu p_1.$$

Решение этих уравнений даст те же результаты (10.26.2).

10.27. Электронное техническое устройство (ЭТУ) состоит из двух одинаковых взаимозаменяемых узлов. Для работы ЭТУ достаточно, чтобы работал хотя бы один узел. При выходе из строя одного из узлов ЭТУ продолжает нормально функционировать за счет работы другого узла. Поток отказов каждого узла — простейший с параметром λ . При выходе из строя узла он сразу начинает ремонтироваться. Время ремонта узла — показательное с параметром μ . В начальный момент (при $t = 0$) оба узла работают. Найти следующие характеристики работы ЭТУ:

1) вероятности состояний как функции времени: s_0 — исправны оба узла; s_1 — исправен один узел, другой ремонтируется; s_2 — ремонтируются оба узла (ЭТУ не работает);

2) вероятность $p(t)$ того, что за время t ЭТУ ни разу не прекратит работу;

3) финальные вероятности состояний ЭТУ;

4) для предельного (стационарного) режима ЭТУ среднее относительное время, в течение которого ЭТУ будет работать;

5) для того же предельного режима среднее время $\bar{t}_p$ бесперебойной работы ЭТУ (от включения после восстановления до очередного выхода из строя).

Решение. Граф состояний ЭТУ дан на рис. 10.27, а (у левой верхней стрелки стоит 2λ , так как работают и могут выходить из строя два узла; по аналогичной причине стоит 2μ у правой нижней стрелки, так как оба узла ремонтируются).

1) Уравнения Колмогорова имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dt} &= \mu p_1 - 2\lambda p_0; \quad \frac{dp_1}{dt} = 2\lambda p_0 + 2\mu p_2 - (\lambda + \mu) p_1; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \lambda p_1 - 2\mu p_2. \end{aligned} \quad (10.27.1)$$

При этом должно выполняться условие $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Решая эту систему уравнений при начальных условиях $p_0(0) = 1; \quad p_1(0) = p_2(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b} + (\lambda + 3\mu) \frac{e^{at} - e^{bt}}{a + b} + \\ &+ 2\mu^2 \left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)} \right], \quad \text{где } a = -(\lambda + \mu); \quad b = -2(\lambda + \mu); \\ a - b &= \lambda + \mu; \quad ab = 2(\lambda + \mu)^2; \\ p_1(t) &= \frac{a^2 e^{at} - b^2 e^{bt}}{\mu(a - b)} + \frac{(\lambda + 3\mu)(ae^{at} - be^{bt})}{\mu(a - b)} + \frac{2\mu(e^{at} - e^{bt})}{a - b} + \frac{2\lambda}{\mu} p_0(t) \end{aligned}$$

Из полученных выражений находим:

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t); \quad p_2(0) = 0.$$

2) Чтобы найти вероятность $\tilde{p}(t)$, сделаем состояние s_2 (ЭТУ прекратило работу) поглощающим ($\tilde{s}_2$) (рис. 10.27, б). Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний ЭТУ будут

$$d\tilde{p}_0/dt = \mu \tilde{p}_1 - 2\lambda \tilde{p}_0; \quad d\tilde{p}_1/dt = 2\lambda \tilde{p}_0 - (\lambda + \mu) \tilde{p}_1; \quad d\tilde{p}_2/dt = 2\lambda \tilde{p}_1.$$

Решая первые два уравнения при начальных условиях $\tilde{p}_0(0) = 1, \tilde{p}_1(0) = 0$, получаем

$$\tilde{p}_0(t) = \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu) \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta},$$

где

$$\alpha = \frac{-(3\lambda + \mu) + \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}; \quad \beta = \frac{-(3\lambda + \mu) - \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2}}{2}$$

(величины α и β отрицательны при любых положительных значениях λ и μ). Далее

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{\mu} \frac{d\tilde{p}_0}{dt} + \frac{2\lambda}{\mu} \tilde{p}_0 = \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\alpha^2 e^{\alpha t} - \beta^2 e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu) \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right] + \frac{2\lambda}{\mu} \tilde{p}_0(t). \end{aligned}$$

Искомая вероятность $\tilde{p}(t) = \tilde{p}_0(t) + \tilde{p}_1(t)$. Заметим, что функция $\tilde{p}(t)$ является монотонной убывающей, при этом $p(0) = 1$; $p(\infty) = 0$.

3) Финальные вероятности состояний найдем по графу (рис. 10.27, а) и общим формулам (10.0.23) для схемы гибели и размножения

$$p_1 = \frac{2\lambda}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{2\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0; \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1;$$

$$p_0 = [1 + 2\lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2]^{-1} = \mu^2 / (\lambda + \mu)^2.$$

4) Среднее относительное время, которое ЭТУ будет работать, равно

$$1 - p_2 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2.$$

5) Величина $\bar{t}_p$ есть математическое ожидание времени T_p , проходящего между моментом включения ЭТУ в работу и моментом ее следующего выхода из строя.

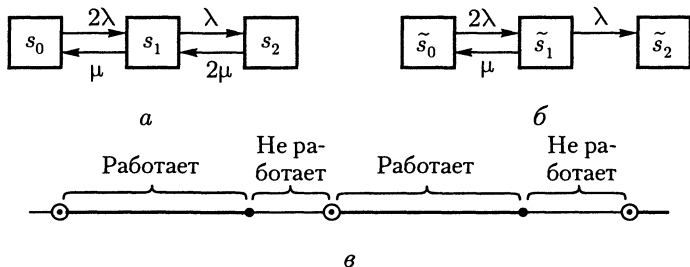


Рис. 10.27

Представим работу ЭТУ в стационарном режиме как состоящую из ряда циклов: «работает» и «не работает» (на рис. 10.27, в участки работы показаны утолщенной линией). Среднее время $\bar{t}_{\text{нр}}$, в течение которого ЭТУ не работает (математическое ожидание длительности нерабочего периода), очевидно равно $1 / (2\mu)$ (так как на ЭТУ, находящееся в состоянии «не работает», действует поток переходов в «рабочее» состояние с интенсивностью 2μ).

Далее, отношение среднего времени бесперебойной работы $\bar{t}_p$ к среднему времени простоя $\bar{t}_{\text{нр}}$ равно отношению финальной вероятности $1 - p_2$ того, что ЭТУ работает, к вероятности p_2 того, что оно не работает: $\bar{t}_p / \bar{t}_{\text{нр}} = (1 - p_2) / p_2$. Отсюда, учитывая, что $\bar{t}_{\text{нр}} = 1 / (2\mu)$,

$$\bar{t}_p = \bar{t}_{\text{нр}} \frac{1 - p_2}{p_2} = \frac{1}{2\mu} \frac{1 - p_2}{p_2}.$$

10.28. Условия и вопросы те же, что и в задаче 10.27, с той разницей, что пока один из узлов работает, другой находится в «холодном резерве» и выходить из строя не может. При включении резервного узла он немедленно начинает работать и подвергается потоку отказов с интенсивностью λ .

Решение. Граф состояний ЭТУ будет иметь вид, показанный на рис. 10.28, а, граф с «поглощающим состоянием» — на рис. 10.28, б.

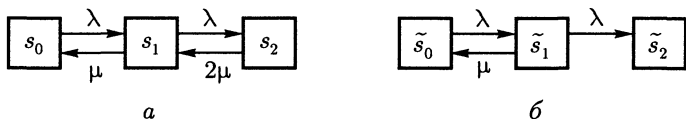


Рис. 10.28

Ответы на вопросы:

$$1) p_0(t) = \frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b} + (\lambda + 3\mu) \frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b} + 2\mu^2 \left[\frac{1}{ab} + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{ab(a - b)} \right];$$

$$p_1(t) = \frac{a^2 e^{at} - b^2 e^{bt}}{\mu(a - b)} + \frac{(\lambda + 3\mu)}{\mu(a - b)} (ae^{at} + be^{bt}) + \frac{2\mu}{a - b} [e^{at} - e^{bt}] + \frac{\lambda}{\mu} p_0(t);$$

$$p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t);$$

$$a = \frac{-(2\lambda + 3\mu) + \sqrt{4\mu\lambda + \mu^2}}{2}; \quad b = \frac{-(2\lambda + 3\mu) - \sqrt{4\mu\lambda + \mu^2}}{2};$$

$$2) \bar{p}_0(t) = \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu) \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta};$$

$$\bar{p}_1(t) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\alpha^2 e^{\alpha t} - \beta^2 e^{\beta t}}{\alpha - \beta} + (\lambda + \mu) \frac{\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \right] + \frac{\lambda}{\mu} \bar{p}_0(t);$$

$$\bar{p}_2(t) = 1 - \bar{p}_0(t) - \bar{p}_1(t); \quad \alpha = \frac{-(2\lambda + \mu) + \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2};$$

$$\beta = \frac{-(2\lambda + \mu) - \sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}}{2}; \quad \bar{p}(t) = 1 - \bar{p}_2(t);$$

$$3) \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 p_0; \quad p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \right]^{-1};$$

$$4) \quad 1 - p_2; \quad 5) \quad \bar{t}_p = \frac{1}{2\mu} \frac{1 - p_2}{p_2}.$$

10.29. Условия задачи 10.27 изменены таким образом, что не-работающий узел находится в «облегченном резерве» и выходит из строя с интенсивностью $\lambda' < \lambda$. 1) Построить граф состояний ЭТУ, написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. 2) Не решая этих уравнений, найти финальные вероятности состояний; вычислить их для $\lambda = 1$; $\lambda' = 0,5$, $\mu = 2$. 3) Для этих же численных данных найти среднее время $\bar{t}_p$ бесперебойной работы ЭТУ.

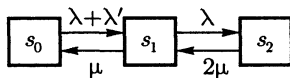


Рис. 10.29

Решение. 1) Граф состояний показан на рис. 10.29. Уравнения Колмогорова:

$$\frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \lambda') p_0 + \mu p_1;$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda + \mu) p_1 + (\lambda + \lambda') p_0 + 2\mu p_2;$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

2) Финальные вероятности состояний найдем, пользуясь общими формулами (10.0.23) для схемы гибели и размножения:

$$p_1 = \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} p_0; \quad p_2 = \frac{(\lambda + \lambda') \lambda}{2\mu^2} p_0;$$

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda + \lambda'}{\mu} + \frac{(\lambda + \lambda') \lambda}{2\mu^2} \right\}^{-1}.$$

Подставляя сюда $\lambda = 1$, $\lambda' = 0,5$, $\mu = 2$, получаем

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{1,5}{2} + \frac{1,5 \cdot 1}{8} \right\}^{-1} \approx 0,516; \quad p_1 \approx 0,387; \quad p_2 \approx 0,097.$$

$$3) \bar{t}_p = \frac{1}{4} \frac{1 - p_2}{p_2} \approx 2,32.$$

10.30. В состав ЭВМ входят четыре накопителя на магнитных дисках (НМД). Бригада в составе четырех человек обслуживающего персонала проводит профилактический ремонт каждого диска. Суммарный поток моментов окончания ремонтов для всей бригады — пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$. После окончания ремонта диск проверяется; с вероятностью p он оказывается работоспособным (время проверки мало, и им можно пренебречь по сравнению со временем профилактики). Если диск оказался неработоспособным, то вновь проводится его профилактика (время, потребное на нее, не зависит от того, проводилась ли ранее профилактика) и т.д. В начальный момент все НМД нуждаются в профилактическом ремонте.

Построить граф состояний для системы S (четыре НМД), написать дифференциальные уравнения для вероятностей состояний. Найти M_τ — математическое ожидание числа дисков, успешно прошедших профилактику к моменту τ .

Решение. s_0 — все четыре НМД нуждаются в профилактическом ремонте; s_1 — один НМД успешно прошел профилактику, а три НМД нуждаются в профилактическом ремонте; s_2 — два НМД успешно прошли профилактику, а два нуждаются в профилактическом ремонте; s_3 — три НМД успешно прошли профилактику, один нуждается в профилактическом ремонте; s_4 — все четыре НМД успешно прошли профилактику.

То, что каждый профилактический ремонт заканчивается успешно с вероятностью p , равносильно p -преобразованию потока окончаний ремонтов, после которого он остается пуассоновским, но с интенсивностью $p\lambda(t)$.

Граф состояний показан на рис. 10.30. Уравнения Колмогорова:

$$\begin{aligned} dp_0 / dt &= -p\lambda(t) p_0; & dp_1 / dt &= p\lambda(t)(p_0 - p_1); \\ dp_2 / dt &= p\lambda(t)(p_1 - p_2); & dp_3 / dt &= p\lambda(t)(p_2 - p_3); \\ dp_4 / dt &= p\lambda(t) p_3. \end{aligned} \quad (10.30.1)$$

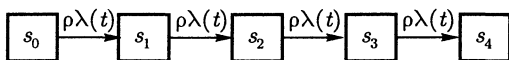


Рис. 10.30

Начальные условия $p_0(0) = 1; p_1(0) = \dots = p_4(0) = 0$.

Математическое ожидание числа дисков, успешно прошедших профилактику к моменту τ , равно

$$M_\tau = \sum_{i=1}^4 i p_i(\tau). \quad (10.30.2)$$

При постоянной интенсивности λ решениями уравнений (10.30.1) будут:

$$p_0(t) = e^{-\lambda pt}; \quad p_1(t) = \lambda p t e^{-\lambda pt}; \quad p_2(t) = \frac{(\lambda p t)^2}{2} e^{-\lambda pt};$$

$$p_3(t) = \frac{(\lambda p t)^3}{3!} e^{-\lambda pt}; \quad p_4(t) = 1 - \sum_{i=0}^3 p_i(t).$$

10.31. В условиях предыдущей задачи за каждым членом бригады закрепляется свой НМД, который он ремонтирует. Поток окончаний профилактики, приходящийся на одного члена бригады, имеет интенсивность $\lambda(t) / 4$. Ответить на вопросы предыдущей задачи.

Решение. Граф состояний дан на рис. 10.31. Уравнения Колмогорова:

$$dp_0 / dt = -p\lambda(t) p_0; \quad dp_1 / dt = p\lambda(t)(p_0 - (3/4)p_1);$$

$$dp_2 / dt = p\lambda(t)((3/4)p_1 - (1/2)p_2);$$

$$dp_3 / dt = p\lambda(t)((1/2)p_2 - (1/4)p_3); \quad dp_4 / dt = (1/4)p\lambda(t) p_3.$$

Выражение (10.30.2) для M_τ сохраняется.

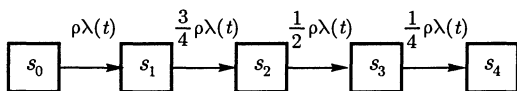


Рис. 10.31

10.32. Техническое устройство (ТУ) подвергается простейшему потоку отказов с интенсивностью λ . Отказ обнаруживается не сразу, а через случайное время, распределенное показательно с параметром ν . Как только отказ обнаружен, производится осмотр ТУ, в результате которого оно либо направляется в ремонт (вероятность этого p), либо списывается и заменяется новым. Время осмотра — показательное с параметром γ , время ремонта — показательное с параметром μ , время замены списанного ТУ новым — показательное с параметром χ . Найти финальные вероятности состояний ТУ. Определить: 1) какую долю времени в среднем ТУ будет рабо-

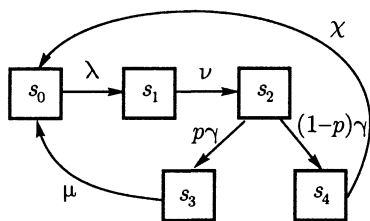


Рис. 10.32

тать нормально; 2) какую долю времени ТУ будет работать с необнаруженным отказом (давать брак); 3) какова средняя стоимость ремонтов ТУ и его замен за единицу времени, если средняя стоимость ремонта равна r , а нового ТУ равна c ; 4) какова средняя величина потерь за единицу времени от ТУ, работающего иногда с необнаруженным отказом, если такое ТУ приносит в единицу времени убыток l .

Решение. Состояния ТУ: s_0 — исправно, работает; s_1 — неисправно, но отказ не обнаружен, дает брак; s_2 — неисправность обнаружена, ведется осмотр; s_3 — ремонтируется; s_4 — заменяется новым. Граф состояний дан на рис. 10.32.

Линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0 = \mu p_3 + \chi p_4; \quad \lambda p_0 = \nu p_1; \quad \nu p_1 = \gamma p_2; \quad p \gamma p_2 = \mu p_3; \\ (1 - p) \gamma p_2 = \chi p_4.$$

Нормировочное условие $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Решая эти уравнения, получаем:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{p\lambda}{\mu} + \frac{(1-p)\lambda}{\chi} \right]^{-1}; \\ p_1 = \frac{\lambda}{\nu} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda}{\gamma} p_0; \\ p_3 = \frac{p\lambda}{\mu} p_0; \quad p_4 = \frac{(1-p)\lambda}{\chi} p_0.$$

1) Доля времени нормальной работы ТУ равна p_0 ; 2) p_1 ; 3) ТУ проводит в среднем долю времени p_3 в состоянии ремонта; каждый ремонт длится в среднем $1/\mu$; поток отремонтированных ТУ, выходящих из состояния s_3 , имеет интенсивность μp_3 ; средняя стоимость ремонтов в единицу времени $r \mu p_3$. Аналогично средняя стоимость новых ТУ в единицу времени $c \chi p_4$; общая средняя стоимость того и другого равна $r \mu p_3 + c \chi p_4$; 4) средние потери от работы ТУ в неисправном состоянии за единицу времени равны $l \nu p_1$.

10.33. Рассматривается процесс накопления информации в базах данных, хранимых в ЭВМ. Интенсивность поступления единиц информации в базы данных равна $\lambda(t)$ и не зависит от того, сколько их накоплено. Каждая единица информации, поступив-

шая в базы данных, хранится в них бессрочно. Найти характеристики $m_x(t)$, $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$ — числа накопленных единиц информации в базах данных в предположении, что поток поступлений единиц информации пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$ и в начальный момент времени $t = 0$ случайная функция $X(0) = 0$.

Решение. В этой задаче мы имеем дело с процессом «чистого размножения» без ограничения числа состояний ($n \rightarrow \infty$). Все интенсивности «размножения» $\lambda_k = \lambda(t)$ (рис. 10.33) и интенсивности «гибели» $\mu_k = \mu_k(t) \equiv 0$.

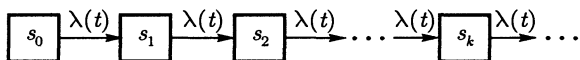


Рис. 10.33

Дифференциальные уравнения (10.0.24) и (10.0.25) для этого случая примут вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(t) p_k(t) = \lambda(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda(t) + 2k\lambda(t) - 2m_x(t)\lambda(t)] p_k(t) = \lambda(t),$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = m_x(t).$$

Решая эти уравнения для начальных условий $m_x(0) = D_x(0) = 0$, получаем

$$m_x(t) = D_x(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

Этот результат можно было ожидать; его можно найти непосредственно из теории потоков. Можно доказать, что случайная величина $X(t)$ для любого момента времени t будет подчинена закону Пуассона с найденными характеристиками $m_x(t) = D_x(t)$.

10.34. Условия те же, что и в предыдущей задаче, за исключением того, что принятая на хранение в базах данных единица информации хранится некоторое время, после чего по определенному признаку исключается из баз данных. Поток исключений для каждой единицы информации — пуассоновский с интенсивностью $\mu(t)$.

Решение. В этой задаче имеет место процесс «гибели и размножения» числа единиц информации, хранимых в базах данных ЭВМ. Интенсивность гибели $\mu_k(t) = k\mu(t)$, так как в состоянии s_k в базах данных накоплено k единиц информации и на каждую из них действует поток исключений с интенсивностью $\mu(t)$.

Дифференциальные уравнения для функций $m_x(t)$ и $D_x(t)$ имеют вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(t) - k\mu(t)) p_k(t) = \lambda(t) - \mu(t) m_x(t); \quad (10.34.1)$$

$$+ 2m_x(t)k\mu(t)] p_k(t) = \lambda(t) + \mu(t)m_x(t) - 2\mu(t) D_x(t), \quad (10.34.2)$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t) = m_x(t);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(t) = \alpha_{2x}(t) = D_x(t) + m_x^2(t).$$

Для начальных условий $m_x(0) = m_0$, $D_x(0) = D_0$ постоянных интенсивностей пополнения и исключения единиц информации $\lambda(t) = \lambda$; $\mu(t) = \mu$ решения этих уравнений будут иметь вид

$$m_x(t) = m_0 e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) = \frac{\lambda}{\mu} + e^{-\mu t} \left(m_0 - \frac{\lambda}{\mu} \right);$$

$$D_x(t) = \lambda \left[\frac{1}{\mu} + \frac{e^{-2\mu t} - 2e^{-\mu t}}{\mu} \right] + (\lambda + \mu D_0 + \mu m_0) \frac{e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}}{\mu} + D_0 (2e^{-2\mu t} - e^{-\mu t}) = m_x(t) + (D_0 - m_0) e^{-2\mu t}.$$

Для начальных условий $m_0 = D_0 = 0$ получим $m_x(t) = D_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$. Можно доказать, что для этих начальных условий

процесс накопления информации $X(t)$ будет распределен по закону Пуассона для любого момента времени t и для любого вида функции $\lambda(t)$ (интенсивности поступления информации), но для этого интенсивность исключения единиц информации μ должна быть постоянной.

При постоянных λ и μ и $t \rightarrow \infty$ в системе будет устанавливаться стационарный режим накопления информации, который, есте-

ственно, не будет зависеть от начальных условий: $m_x = D_x = \lambda / \mu$.

10.35. Рассматривается процесс производства ЭВМ определенного вида. Интенсивность производства ЭВМ $\lambda(t)$ представлена на графике рис. 10.35, а. Эта интенсивность линейно возрастает в течение первого года производства от 0 до 1000 ЭВМ в год, затем три года производство сохраняется на уровне 1000 ЭВМ в год, после чего ЭВМ снимается с производства. Средний срок эксплуатации ЭВМ 5 лет. Считая все потоки событий простейшими, определить математическое ожидание и дисперсию числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации в любой момент времени t .

Решение. Интенсивность производства ЭВМ

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ kt & \text{при } 0 \leq t < 1; \\ \lambda & \text{при } 1 \leq t < 4; \\ 0 & \text{при } t \geq 4, \end{cases}$$

где $k = 1000 \text{ 1/год}^2$; $\lambda = 1000 \text{ 1/год}$.

Найдем решения уравнений (10.34.1) и (10.34.2) для участка времени $0 \leq t < 1$ и при условии, что $\mu = 0,2 \text{ 1/год}$ для любых участков $t > 0$. Уравнение (10.34.1) при этих условиях имеет вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = kt - \mu m_x(t).$$

Решая это уравнение для начального условия $m_x(0) = 0$, получаем

$$m_x(t) = \frac{k}{\mu^2} (e^{-\mu t} - 1 + \mu t) = 25000 \left(e^{-t/5} - 1 + \frac{t}{5} \right).$$

По истечении одного года в эксплуатации будет в среднем $m_x(1) = 25000(e^{-1/5} - 1 + 0,2) = 468$ ЭВМ. Заметим, что если бы ЭВМ имели неограниченный срок службы, то их к концу года было бы в эксплуатации 500 ЭВМ.

Уравнение (10.34.2) при тех же условиях имеет вид

$$dD_x(t) / dt = 1000t + 0,2m_x(t) - 0,4D_x(t).$$

Решая это уравнение для начального условия $D_x(0) = 0$, получаем $D_x(t) = m_x(t) = 25000(e^{-t/5} - 1 + t/5)$. По истечении одного года дисперсия числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, будет равна $D_x = 468$; $\sigma_x = 21,6$. Число ЭВМ, находящихся в эксплуатации по истечении года, будет приближенно подчинено нормальному закону с характеристиками $m_x = 468$; $\sigma_x = 21,6$.

На участке времени $1 \leq t < 4$ соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \lambda - \mu m_x(t); \quad \frac{dD_x(t)}{dt} = \lambda + \mu m_x(t) - 2\mu D_x(t).$$

Их нужно решать при начальных условиях: $m_x(1) = D_x(1) = 468$. Решение этих уравнений было найдено в задаче 10.34, откуда

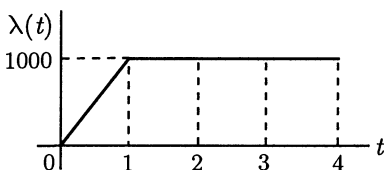
$$m_x(t) = m_x(1) e^{-\mu(t-1)} + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu(t-1)}) \quad (1 \leq t < 4);$$

$$D_x(t) = m_x(t).$$

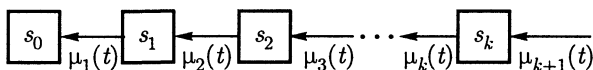
Найдем значение $m_x(t)$ для $t = 4$:

$$m_x(4) = m_x(1) e^{-3\mu} + \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-3\mu}) = 2513.$$

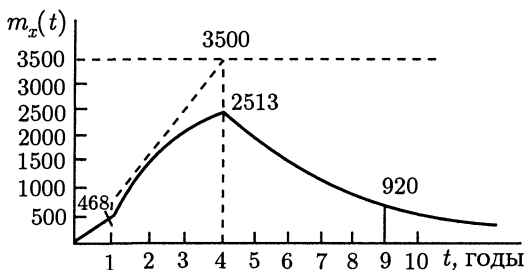
Таким образом, среднее число ЭВМ, находящихся в эксплуатации к концу четвертого года выпуска, будет равно 2513. Обратим внимание на то обстоятельство, что к этому времени было выпу-



a



б



в

Рис. 10.35

щено в среднем 3500 ЭВМ. Следовательно, в среднем за четыре года было исключено из эксплуатации 987 ЭВМ.

На участке времени $t > 4$ будет иметь место процесс «чистой гибели», граф состояний которого показан на рис. 10.35, б.

Дифференциальные уравнения для математического ожидания и дисперсии процесса чистой гибели в общем случае имеют вид

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(t) p_k(t);$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} [k\mu_k(t) - 2k^2\mu_k(t) + 2m_x(t)k\mu_k(t)] p_k(t).$$

Для нашего случая $\mu_k(t) = k\mu$, следовательно, получим уравнение

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{\infty} k\mu p_k(t) = -\mu m_x(t),$$

которое нужно решать при начальном условии $m_x(4) = 2513$. Решение этого уравнения будет иметь вид

$$m_x(t) = m_x(4) e^{-\mu(t-4)} \quad (t > 4).$$

Так как $D_x(4) = m_x(4)$ и $\mu = \text{const}$, то $D_x(t) = m_x(t)$ на участке времени $t > 4$.

На рис. 10.35, в показана зависимость $m_x(t)$ — среднего числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации от времени t . На этом же графике пунктирной линией показана зависимость от t среднего числа выпущенных ЭВМ к моменту времени t .

10.36. Рассматривается процесс накопления терминов в динамическом словаре (тезаурусе) при функционировании автоматизированного банка данных (АБД). Сущность процесса в том, что термины заносятся в словарь по мере их появления в той информации, которая вводится в АБД. Например, в АБД автоматизированной системы управления производством (АСУП) могут в качестве терминов заноситься наименования организаций, с которыми данное предприятие поддерживает производственные отношения. Динамический словарь наименований таких организаций будет накапливаться в АБД АСУП по мере появления этих наименований в единицах информации, вводимых в АБД.

В каждой единице информации, поступающей в АБД, в среднем встречается χ терминов словаря, а интенсивность поступления единиц информации в АБД $\lambda(t)$. Следовательно, интенсивность потока терминов словаря в информации, поступающей в

АБД, будет $\lambda(t) = \chi \lambda(t)$. Предполагается, что поток терминов словаря является пуассоновским. Число терминов словаря n является конечным и неслучайным, хотя, возможно, и неизвестным заранее. Все термины словаря могут находиться в единице информации с одинаковой вероятностью, а в словарь заносятся естественно лишь те термины, которые до сих пор еще не встречались в единицах информации. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию числа терминов, накопленных в динамическом словаре.

Решение. Обозначим $X(t)$ число терминов, накопленных в динамическом словаре. Очевидно, что случайный процесс $X(t)$ есть процесс «чистого размножения» с конечным числом состояний n , граф состояний которого представлен на рис. 10.36. Для нахождения интенсивности $\lambda_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) введем в рассмотрение гипотезу о том, что процесс находится в состоянии s_k ;

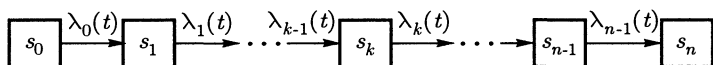


Рис. 10.36

вероятность этой гипотезы по определению равна $p_k(t)$. В предположении, что эта гипотеза имеет место, интенсивность потока новых (еще не занесенных в динамический словарь) терминов будет

$$\lambda_k(t) = \lambda(t) \frac{n-k}{n} = \lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Дифференциальные уравнения (10.0.24) и (10.0.25) примут вид:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n \lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n}\right) p_k(t) = \lambda(t) - \frac{m_x(t) \lambda(t)}{n}; \quad (10.36.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD_x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^n \left[\lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n}\right) + 2k \lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n}\right) - \right. & (10.36.2) \\ \left. - 2m_x(t) \lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n}\right) \right] p_k(t) = \lambda(t) - \lambda(t) \frac{m_x(t)}{n} - 2\lambda(t) \frac{D_x(t)}{n}. \end{aligned}$$

Найдем решение этих уравнений для простейшего случая, когда

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const}; \quad n = \text{const}; \quad m_x(0) = D_x(0) = 0,$$

$$m_x(t) = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{n}}\right); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = n; \quad (10.36.3)$$

$$D_x(t) = n \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t} \right) e^{-\frac{\lambda}{n}t} = m_x(t) e^{-\frac{\lambda}{n}t};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = 0. \quad (10.36.4)$$

Обратим внимание на то, что функция $m_x(t)$ монотонно увеличивается, стремясь в пределе к n , в то время как функция $D_x(t)$ равна нулю при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$ и достигает своего максимума при некотором значении t_m , которое можно найти из условия $dD_x(t)/dt = 0$ ($t > 0$).

Отсюда

$$0,5 = e^{-\frac{\lambda}{n}t_m} \rightarrow t_m \approx 0,7 n / \lambda.$$

При этом значении t_m максимальная дисперсия $\max_i D_x(t) \approx \approx n (1 - e^{-0,7}) e^{-0,7} = n 0,25$; $\sigma_x(t_m) = 0,5\sqrt{n}$, а максимальное значение коэффициента вариации $\sigma_x(t_m) / m_x(t_m) = 1 / \sqrt{n}$.

Если известна интенсивность λ потока терминов словаря в единицах информации, поступающих в АБД, и общее число терминов n , то можно с достаточной точностью определить среднее время t_n , потребное для накопления 95 % объема динамического словаря: $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}t_n} = 0,95$, откуда $t_n \approx 3n / \lambda$.

Если n неизвестно (что чаще всего на практике имеет место), то можно найти оценку $\bar{n}$ величины n следующим образом. Для моментов времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_l$ ($\tau_i < \tau_{i+1}$) определяют фактические количества накопленных терминов в словаре $m_1, m_2, \dots, m_i$. Полагаем эти величины приближенно равными средним количествам накопленных терминов: $m_i = n (1 - e^{-\lambda \tau_i / n})$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Решая это уравнение относительно n , находим l значений $n_1, n_2, \dots, n_l$ для соответствующих пар значений: (m_1, τ_1) ; (m_2, τ_2) ; $\dots$; (m_l, τ_l) . Оценка $\bar{n}$ находим по формуле

$$\bar{n} = \left(\sum_{i=1}^l n_i \right) / l.$$

10.37. Для условий предыдущей задачи найти время t_n заполнения словаря на 95 % и вероятность того, что через два года после начала накопления словаря он будет содержать не менее 90 % всех терминов, если общее число терминов $n = 100\,000$, в год в АБД вводится 100 000 документов и каждый документ содержит в среднем 1,5 термина.

Р е ш е н и е. Найдем интенсивность потока терминов словаря в единицах информации, вводимых в АБД:

$$\lambda = 100000 \cdot 1,5 = 150000 \text{ 1/год.}$$

Величина t_n определяется из выражения $t_n = 3n / \lambda = 3 \cdot 100\,000 : 150\,000 = 2$ года. Для определения вероятности того, что через два года после начала наполнения словарь будет содержать не менее 90 % всех терминов, нужно прежде всего найти $m_x(2)$ и $D_x(2)$ [см. формулы (10.36.3) и (10.36.4)]: $m_x(2) = 100\,000 \times (1 - e^{-1,5 \cdot 2}) = 0,95 \cdot 100\,000 = 95\,000$; $D_x(2) = 95\,000 \cdot 0,05 = 4750$; $\sigma_x(2) = 68,9$.

Заметим, что максимальная дисперсия $D_x(t_m) = 0,25n = 25\,000$; $\sigma_x(t_m) = 158$.

Число терминов в словаре в момент времени $t = 2$ года есть случайная величина $X(2)$, приближенно распределенная по нормальному закону с найденными выше характеристиками; поэтому $P\{X(2) > 0,9n\} \approx 1$, так как $m_x - 3\sigma_x > 0,9n$.

10.38. Рассматривается более общий случай функционирования динамического словаря АБД. Первое усложнение по сравнению с условиями задачи 10.36 состоит в том, что максимальное число терминов словаря n не является постоянным, а зависит от времени t . $n(t)$ (в случае с динамическим словарем названий организаций это означает, что общее число организаций со временем изменяется: увеличивается или уменьшается).

Кроме того, введенные в динамический словарь термины по истечении некоторого случайного времени исключаются из словаря в связи с тем, что сам термин устаревает. Предполагается, что поток исключений термина в динамическом словаре — пуассоновский с интенсивностью $\mu(t)$, одинаковой для всех терминов словаря.

В этом случае интенсивности потоков «размножения» и «гибели» будут иметь вид

$$\lambda_k(t) = \lambda(t) \left(1 - \frac{k}{n(t)}\right); \quad \mu_k(t) = \mu(t) k, \quad (10.38.1)$$

а уравнения (10.0.24) и (10.0.25) примут вид (зависимости от времени t функций $m_x(t)$, $D_x(t)$, $n(t)$, $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $p_k(t)$ для краткости опущены):

$$\begin{aligned} dm_x / dt &= \lambda - m_x(\lambda / n + \mu); \\ dD_x / dt &= \lambda - m_x(\lambda / n - \mu) - 2(\lambda / n + \mu) D_x. \end{aligned} \quad (10.38.2)$$

Если величины λ , n , μ постоянны (не зависят от времени), то при $t \rightarrow \infty$ существует стационарный режим работы, для которого $dm_x / dt = dD_x / dt = 0$, откуда

$$m_x = n \left(1 + \frac{\mu n}{\lambda}\right)^{-1}; \quad D_x = m_x \left(1 + \frac{\lambda}{\mu n}\right)^{-1}.$$

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок (требований), поступающих на нее в случайные моменты времени. Примеры СМО: телефонная станция; бюро ремонта; билетная касса; парикмахерская; ЭВМ. Теория массового обслуживания изучает случайные процессы, протекающие в системах массового обслуживания.

Любое устройство, непосредственно занимающееся обслуживанием заявок, называется *каналом обслуживания* (или «прибором»). СМО бывают как одно-, так и многоканальными. Пример одноканальной СМО — билетная касса с одним кассиром; пример многоканальной — та же касса с несколькими кассирами.

Различают СМО с *отказами* и СМО с *очередью*. В СМО с отказами заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем в процессе ее работы не участвует. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент занятости всех каналов, не покидает СМО, а становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-нибудь канал. Число мест в очереди m может быть как ограниченным, так и неограниченным. При $m = 0$ СМО с очередью превращается в СМО с отказами. Очередь может иметь ограничения не только по количеству стоящих в ней заявок (длине очереди), но и по времени ожидания (такие СМО называются «системами с нетерпеливыми клиентами»).

СМО с очередью различаются не только по ограничениям очереди, но и по *дисциплине обслуживания*: обслуживаются ли заявки в порядке поступления, или в случайном порядке, или же некоторые заявки обслуживаются вне очереди (так называемые «СМО с приоритетом»). Приоритет может иметь несколько градаций или рангов.

Аналитическое исследование СМО является наиболее простым, если все потоки событий, переводящие ее из состояния в состояние, — простейшие (стационарные пуассоновские). Это значит, что интервалы времени между событиями в потоках имеют показательное распределение с параметром, равным интенсивности соответствующего потока. Для СМО это допущение означает, что как поток заявок, так и поток обслуживания — простейшие. Под *потоком обслуживаний* понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Этот поток

оказывается простейшим, только если время обслуживания заявки $T_{\text{обсл}}$ представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение. Параметр этого распределения μ есть величина, обратная среднему времени обслуживания: $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$, где $\bar{t}_{\text{обсл}} = M[T_{\text{обсл}}]$. Вместо «поток обслуживаний — простейший» часто говорят «время обслуживания показательное». Условимся в дальнейшем для краткости всякую СМО, в которой все потоки простейшие, называть *простейшей* СМО. В этой главе будем рассматривать главным образом простейшие СМО.

Если все потоки событий простейшие, то процесс, протекающий в СМО, представляет собой марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. При выполнении некоторых условий для этого процесса существует финальный стационарный режим, при котором как вероятности состояний, так и другие характеристики процесса не зависят от времени.

Задачи теории массового обслуживания — нахождение вероятностей различных состояний СМО, а также установление зависимости между заданными параметрами (числом каналов n , интенсивностью потока заявок λ , распределением времени обслуживания и т.д.) и *характеристиками эффективности* работы СМО. В качестве таких характеристик могут рассматриваться, например, следующие:

среднее число заявок A , обслуживаемое СМО в единицу времени, или *абсолютная пропускная способность* СМО;

вероятность обслуживания поступившей заявки Q или *относительная пропускная способность* СМО; $Q = A / \lambda$;

вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, т.е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, получит отказ; $P_{\text{отк}} = 1 - Q$;

среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) $\bar{z}$;

среднее число заявок в очереди $\bar{r}$;

среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) $\bar{t}_{\text{сист}}$;

среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$;

среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

В общем случае все эти характеристики зависят от времени. Но многие СМО работают в неизменных условиях достаточно долгое время, и поэтому для них успевает установиться режим, близкий к стационарному. Мы здесь повсюду, не оговаривая этого каждый раз специально, будем вычислять финальные вероятности состояний и финальные характеристики эффективности СМО, относящиеся к предельному, стационарному режиму ее работы.

Для любой открытой СМО¹⁾ в предельном стационарном режиме среднее время пребывания заявки в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ выражается через среднее число заявок в системе с помощью *формулы Литтла*:

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda, \quad (11.0.1)$$

где λ — интенсивность потока заявок.

¹⁾ СМО называется открытой, если интенсивность поступающего на нее потока заявок не зависит от состояния самой СМО.

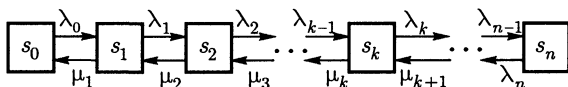


Рис. 11.01

Аналогичная формула (называемая также формулой Литтла) связывает среднее время пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ и среднее число $\bar{r}$ заявок в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (11.0.2)$$

Формулы Литтла очень полезны, так как позволяют вычислять не обе характеристики эффективности (среднее время пребывания и среднее число заявок), а только какую-нибудь одну из них.

Специально подчеркнем, что формулы (11.0.1) и (11.0.2) справедливы для любой открытой СМО (одноканальной, многоканальной, при любых видах потоков заявок и обслуживании); единственное требование к потокам заявок и обслуживаний — чтобы они были стационарными.

Аналогично универсальное значение для открытых СМО имеет формула, выражающая среднее число занятых каналов $\bar{k}$ через абсолютную пропускную способность A :

$$\bar{k} = A / \mu, \quad (11.0.3)$$

где $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$ — интенсивность потока обслуживаний.

Очень многие задачи теории массового обслуживания, касающиеся простейших СМО, решаются с помощью схемы гибели и размножения (см. гл. 10). Если граф состояний СМО может быть представлен в виде, показанном на рис. 11.0.1, то финальные вероятности состояний выражаются формулами (10.0.23):

$$\begin{aligned} p_0 &= \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right\}^{-1}; \\ p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0; \dots; \quad p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 \quad (0 \leq k \leq n); \dots; \\ p_n &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0. \end{aligned} \quad (11.0.4)$$

При выводе формул для среднего числа заявок (в очереди или в системе) широко используется прием дифференцирования рядов, состоящий в следующем. Если $x < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k = x \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

и окончательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad (11.0.5)$$

Ниже приведем без вывода ряд формул, выражающих финальные вероятности состояний и характеристики эффективности для некоторых часто встречающихся типов СМО. Другие примеры СМО будут разобраны далее в виде задач.

1. Простейшая СМО с отказами (задача Эрланга). На n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди, оно совпадает с числом занятых каналов):

s_0 — СМО свободна;

s_1 — занят один канал, остальные свободны; ...;

s_k — занято k каналов, остальные свободны ($1 \leq k \leq n$); ...;

s_n — заняты все n каналов.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$p = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (11.0.6)$$

где $\rho = \lambda / \mu$.

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda (1 - p_n); \quad Q = 1 - p_n; \quad P_{\text{отк}} = p_n; \quad \bar{k} = \rho (1 - p_n). \quad (11.0.7)$$

При больших значениях n вероятности состояний (11.0.8) удобно вычислять через табулированные функции:

$$P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (\text{распределение Пуассона}) \quad (11.0.8)$$

и

$$R(m, a) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (11.0.9)$$

(см. прил. 1), из которого первую можно выразить через вторую:

$$P(m, a) = R(m, a) - R(m-1, a). \quad (11.0.10)$$

Пользуясь этими функциями, формулы Эрланга (11.0.6) можно переписать в виде

$$p_k = P(k, \rho) / R(n, \rho) \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (11.0.11)$$

2. Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. Длина очереди не ограничена. Финальные вероятности существуют только при $\rho = \lambda / \mu < 1$ (при $\rho \geq 1$ очередь растет неограниченно). Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО, находящихся в очереди или обслуживаемых:

s_0 — СМО свободна;

s_1 — канал занят, очереди нет;

s_2 — канал занят, заявка стоит в очереди; ...;

s_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди;

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$\rho_0 = 1 - \rho, \quad \rho_k = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (11.0.12)$$

где $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda; \quad Q = 1; \quad P_{\text{отк}} = 0; \quad (11.0.13)$$

$$\bar{z} = \frac{\mu}{1 - \rho}; \quad \bar{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda (1 - \rho)}; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda (1 - \rho)}; \quad (11.0.14)$$

среднее число занятых каналов (или вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = \lambda / \mu = \rho. \quad (11.0.15)$$

3. Простейшая одноканальная СМО с ограничением по длине очереди. На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. В очереди m мест. Если заявка приходит в момент, когда все эти места заняты, она получает отказ и покидает СМО. Состояния СМО:

s_0 — СМО свободна;

s_1 — канал занят, очереди нет;

s_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; ...;

s_k — канал занят, $k - 1$ заявок стоят в очереди; ...;

s_{m+1} — канал занят, m заявок стоят в очереди.

Финальные вероятности состояний существуют при любом $\rho = \lambda / \mu$ и равны:

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}; \quad p_k = \rho^k p_0 \quad (k = 1, \dots, m + 1). \quad (11.0.16)$$

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda (1 - p_{m+1}); \quad Q = 1 - p_{m+1}; \quad P_{\text{отк}} = p_{m+1}.$$

Среднее число занятых каналов (вероятность того, что канал занят)

$$\bar{k} = 1 - p_0. \quad (11.0.17)$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}. \quad (11.0.18)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}. \quad (11.0.19)$$

По формуле Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (11.0.20)$$

4. Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью.

На n -канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания одной заявки — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. Финальные вероятности существуют только при $\rho / n = \chi < 1$, где $\rho = \lambda / \mu$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО:

$$\left. \begin{aligned} s_0 & \text{— СМО свободна;} \\ s_1 & \text{— занят один канал;} \dots; \\ s_k & \text{— занято } k \text{ каналов } (1 \leq k \leq n); \dots; \\ s_n & \text{— заняты все } n \text{ каналов;} \end{aligned} \right\} \text{ очереди нет;}$$

s_{n+1} — заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди; ...;

s_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди;

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1 - \chi} \right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 \quad (r \geq 1). \quad (11.0.21)$$

С помощью функций $P(m, a)$ и $R(m, a)$ формулы (11.0.21) могут быть приведены к виду

$$p_k = \frac{P(k, \rho)}{R(n, \rho) + P(n, \rho) \frac{\chi}{1 - \chi}} \quad (k = 0, \dots, n); \quad (11.0.22)$$

$$p_{n+r} = \chi^r p_n \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{r} = \rho^{n+1} p_0 / [n \cdot n! (1 - \chi)^2] = \chi p_n / (1 - \chi)^2; \quad (11.0.23)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \bar{r} + \rho; \quad (11.0.24)$$

$$\bar{t}_{\text{ост}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (11.0.25)$$

5. Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди. Условия и нумерация состояний те же, что в п. 4, с той разницей, что число m мест в очереди ограничено. Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - \chi^m}{1 - \chi} \right\}^{-1};$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 \quad (1 \leq r \leq m), \quad (11.0.26)$$

где $\chi = \rho / n = \lambda / (n \mu)$.

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda (1 - p_{n+m}); \quad Q = 1 - p_{n+m}; \quad P_{\text{отк}} = p_{n+m}; \quad \bar{k} = \rho (1 - p_{n+m}); \quad (11.0.27)$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \frac{1 - (m+1) \chi^m + m \chi^{m+1}}{(1 - \chi)^2}; \quad (11.0.28)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}; \quad (11.0.29)$$

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda. \quad (11.0.30)$$

6. Многоканальная СМО с отказами при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания. Формулы Эрланга (11.0.6) остаются справедливыми и тогда, когда поток заявок — простейший, а время обслуживания $T_{\text{обсл}}$ имеет произвольное распределение с математическим ожиданием $t_{\text{обсл}} = 1 / \mu$.

7. Одноканальная СМО с неограниченной очередью при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания. Если на одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , а время обслуживания $T_{\text{обсл}}$ распределяется по произвольному закону с математическим ожиданием $1 / \mu$ и коэффициентом вариации v_μ , то среднее число заявок в очереди выражается *формулой Полячека—Хинчина*

$$\bar{r} = \rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2 (1 - \rho)], \quad (11.0.31)$$

где $\rho = \lambda / \mu$, а среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \{\rho^2 (1 + v_\mu)^2 / [2 (1 - \rho)]\} + \rho. \quad (11.0.32)$$

Из (11.0.31) и (11.0.32) по формуле Литтла получим

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu)^2}{2 \lambda (1 - \rho)}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\rho^2 (1 + v_\mu^2)}{2 \lambda (1 - \rho)} + \frac{1}{\mu}. \quad (11.0.33)$$

8. Одноканальная СМО при произвольном (пальмовском) потоке заявок и произвольном времени обслуживания. Точных формул для этого случая не существует, приближенная оценка длины очереди может быть произведена по формуле

$$\bar{r} \approx \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2 (1 - \rho)], \quad (11.0.34)$$

где v_λ — коэффициент вариации интервала между событиями во входном потоке; $\rho = \lambda / \mu$; λ — величина, обратная математическому ожиданию этого интервала; $\mu = 1 / t_{\text{обсл}}$ — величина, обратная среднему времени обслуживания; v_μ — коэффициент вариации времени обслуживания. Среднее число заявок, связанных с СМО,

$$\bar{z} \approx \{\rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2 (1 - \rho)]\} + \rho, \quad (11.0.35)$$

а средние времена пребывания заявки в очереди и в СМО соответственно равны:

$$\bar{t}_{\text{оч}} \approx \rho^2 (v_{\lambda}^2 + v_{\mu}^2) / [2 \lambda (1 - \rho)]; \quad (11.0.36)$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} \approx \{\rho^2 (v_{\lambda}^2 + v_{\mu}^2) / [2 \lambda (1 - \rho)]\} + 1 / \mu. \quad (11.0.37)$$

9. Простейшая многофазовая СМО с очередью. Анализ многофазовых СМО в общем случае затруднен тем, что входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последствие. Однако если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО — простейший, с той же интенсивностью λ , что и входящий. Из этого следует, что многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО.

Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

Далее будем пользоваться обозначениями для характеристик эффективности СМО, приведенными на с. 364, и по мере необходимости вводить некоторые другие обозначения.

В дальнейшем, задавая плотность $f(x)$ различными формулами на разных участках оси Ox , мы также не будем указывать значения $f(x)$ на границах участков.

Если единица измерения времени не фиксирована, будем для краткости обозначать интенсивности потоков событий просто буквами $\lambda, \mu, \dots$ (без указаний размерностей). То же относится и ко времени $\bar{t}_{\text{сист}}, \bar{t}_{\text{оч}}$. Если же единица времени фиксирована (час, минута, год и т.д.), то мы будем указывать единицы измерения.

В данной главе нам удобно будет записывать закон распределения смешанной случайной величины T не в форме функции распределения $F(t)$, а в форме «обобщенной» плотности $f(t)$, которая определяется следующим образом:

$$f(t) = F'_n(t) + \sum_i p_i \delta(t - t_i),$$

где $F'_n(t)$ — производная функции распределения на участках ее непрерывности: $p_i = P\{T = t_i\}$; $\delta(x)$ — дельта-функция, свойства которой даны в прил. 2.

11.1. На вход одноканальной СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания — показательное с параметром μ . В начальный момент времени $t = 0$ канал свободен. Построить размеченный граф состояний

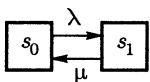


Рис. 11.1

СМО. Написать и решить дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний СМО. Найти финальные вероятности состояний и (для установившегося режима) характеристики эффективности СМО: $A, Q, P_{\text{отк}}, k$.

Решение. Состояния СМО: s_0 — свободна; s_1 — канал занят. Граф состояний показан на рис. 11.1. Уравнения Колмогорова:

$$dp_0/dt = -\lambda p_0 + \mu p_1; \quad dp_1/dt = \lambda p_0 - \mu p_1. \quad (11.1.1)$$

Так как $p_0 + p_1 = 1$ для любого t , можно выразить p_1 через p_0 : $p_1 = 1 - p_0$ и получить одно уравнение для p_0 :

$$dp_0/dt = -(\lambda + \mu)p_0 + \mu. \quad (11.1.2)$$

Решая это уравнение, получаем p_0 как функцию t :

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right];$$

отсюда

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}].$$

При $t \rightarrow \infty$ получим финальные вероятности

$$p_0 = \mu / (\lambda + \mu); \quad p_1 = \lambda / (\lambda + \mu), \quad (11.1.3)$$

которые можно было бы найти и гораздо проще, решая линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0 = \mu p_1; \quad p_0 + p_1 = 1.$$

Формулы (11.1.3) можно записать компактнее, если ввести обозначение $\rho = \lambda / \mu$:

$$p_0 = 1 / (1 + \rho); \quad p_1 = \rho / (1 + \rho).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$A = \lambda p_0 = \frac{\lambda}{1 + \rho}; \quad Q = \frac{1}{1 + \rho}; \quad P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\rho}{1 + \rho};$$

$$\bar{k} = 1 - p_0 = \frac{\rho}{1 + \rho}. \quad (11.1.4)$$

11.2. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 0,4$ вызовов/мин. Средняя продолжительность разговора $\bar{t}_{\text{обсл}} = 3$ мин; время разговора имеет показательное распределение. Найти финальные вероятности состояний СМО: p_0 и p_1 , а также A , Q , $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы разговор длился в точности 3 мин, а заявки шли одна за другой регулярно, без перерывов.

Решение. $\lambda = 0,4$; $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}} = 1 / 3$; $\rho = \lambda / \mu = 1,2$. По формулам (11.1.3) $p_0 \approx 1 / 2,2 \approx 0,455$; $p_1 \approx 0,545$; $Q \approx 0,455$; $A = \lambda Q \approx 0,182$; $\bar{k} = p_1 \approx 0,545$.

Таким образом, линия в среднем будет обслуживать 0,455 поступающих на нее заявок, т.е. 0,182 разговора в минуту. Номинальная пропускная способность канала была бы (при регулярно приходящих и регулярно обслуживаемых заявках) $A_{\text{ном}} = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}} = 1 / 3 \approx 0,333$ разг/мин, что почти вдвое больше, чем действительная пропускная способность A .

11.3. Имеется одноканальная СМО с отказами. Поток заявок — простейший с интенсивностью λ . Время обслуживания — не случайное и в точности равно $t_{\text{обсл}} = 1 / \mu$. Найти относительную и абсолютную пропускную способность СМО в предельном стационарном режиме.

Решение. Рассмотрим на оси $0t$ простейший поток заявок с интенсивностью λ (рис. 11.3). Будем отмечать кружками все заявки, которые приняты к обслуживанию. Пусть какая-то заявка,

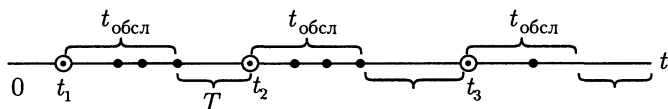


Рис. 11.3

пришедшая в момент t_1 , принята к обслуживанию. Тогда все заявки, пришедшие после нее за время $t_{\text{обсл}}$, получают отказ; следующей будет принята к обслуживанию заявка, пришедшая в момент t_2 такой, что $t_2 - t_1 > t_{\text{обсл}}$. Рассмотрим интервал T между концом обслуживания первой заявки и моментом t_2 прихода ближайшей следующей, которая будет принята к обслуживанию. Из-за отсутствия последствия в простейшем потоке распределение интервала T совершенно такое же, как и в вообще интервала между заявками, т.е. показательное с параметром λ . Средняя длина интервала T равна $m_t = 1 / \lambda$.

Итак, на оси $0t$ будут чередоваться неслучайные интервалы занятости канала длины $t_{\text{обсл}} = 1 / \mu$ и случайные свободные интервалы со средней длиной $1 / \lambda$. На первые попадет доля всех заявок, равная

$$\frac{1 / \mu}{1 / \mu + 1 / \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

а на вторые — доля, равная

$$\mu(\lambda + \mu) = 1 / (1 + \rho), \text{ где } \rho = \lambda / \mu.$$

Эта величина и есть относительная пропускная способность СМО

$$Q = 1 / (1 + \rho), \quad (11.3.1)$$

откуда

$$A = \lambda Q = \lambda / (1 + \rho). \quad (11.3.2)$$

Отметим, что формулы (11.3.1), (11.3.2) совпадают с (11.1.4), соответствующими показательному распределению времени обслуживания. Это и естественно, так как формулы Эрланга остаются справедливыми при любом распределении времени обслуживания со средним значением, равным $1/\mu$.

11.4. Доказать, пользуясь формулой (11.0.5), что для простейшей одноканальной СМО с неограниченной очередью среднее число заявок, находящихся в СМО, равно $\bar{z} = \rho / (1 - \rho)$, где $\rho = \lambda/\mu$, а среднее число заявок в очереди $\bar{r} = \rho^2 / (1 - \rho)$.

Решение. По формулам (11.0.12) $p_0 = 1 - \rho$; $p_k = \rho^k (1 - \rho)$ ($k = 1, 2, \dots$).

Обозначим Z фактическое (случайное) число заявок в СМО:

$$\bar{z} = M[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k (1 - \rho) = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k.$$

По формуле (11.0.5) для $\rho < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2},$$

откуда $\bar{z} = \rho / (1 - \rho)$. Среднее число заявок в очереди равно $\bar{z}$ минус среднее число занятых каналов $\bar{k} = A / \mu = \lambda / \mu = \rho$, т.е. $\bar{r} = [\rho / (1 - \rho)] - \rho = \rho^2 / (1 - \rho)$.

11.5. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью $\lambda = 2$ состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (ропуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением $\bar{t}_{\text{обсл}} = 20$ мин. Найти финальные вероятности состояний СМО, среднее число $\bar{z}$ составов, связанных с горкой, среднее число $\bar{r}$ составов в очереди, среднее время $\bar{t}_{\text{сост}}$ пребывания состава в СМО, среднее время $\bar{t}_{\text{оч}}$ пребывания состава в очереди.

Решение. $\lambda = 2$ состава/ч; $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/3$ ч; $\mu = 3$ состава/ч; $\rho = \lambda/\mu = 2/3$. По формулам (11.0.12) $p_0 = 1 - 2/3 = 1/3$; $p_1 = (2/3) \times (1/3) = 2/9$; $p_2 = (2/3)^2 (1/3) = 4/27$; ... $p_k = (2/3)^k (1/3)$; ... По формулам (11.0.13), (11.0.14) $\bar{z} = \rho / (1 - \rho) = 2$ состава; $\bar{r} = 4/3$ состава; $\bar{t}_{\text{сист}} = 1$ ч; $\bar{t}_{\text{оч}} = 2/3$ ч.

11.6. Условия предыдущей задачи усложняются тем, что в парке прибытия железнодорожной сортировочной горки могут находиться одновременно не более трех составов (включая обслуживаемый). Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находится три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф a руб. Определить средний суточный штраф, который придется уплатить за ожидание составов на внешних путях.

Решение. Вычислим среднее число $\bar{z}_B$ — составов, находящихся на внешних путях:

$$\begin{aligned}\bar{z}_B &= 1 \cdot p_4 + 2p_5 + \dots = \sum_{k=4}^{\infty} kp_k = \sum_{k=4}^{\infty} kp^k p_0 = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k; \\ \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k &= p \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho \sum_{k=4}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^k = \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{k=4}^{\infty} \rho^k = \\ &= \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^4}{1-\rho} = \frac{\rho^4(4-3\rho)}{(1-\rho)^2}; \quad \bar{z} = p_0 \sum_{k=4}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho^4(4-3\rho)}{1-\rho} \approx 1,18.\end{aligned}$$

По формуле Литтла среднее время, проводимое одним составом на внешних путях, $t_B \approx 1,18 / \lambda = 1,18 / 2 = 0,59$ ч. За сутки (24 ч) на станцию приходит в среднем $24\lambda = 48$ составов. Средний суточный штраф составляет $48 \cdot 0,59 \cdot a \approx 28,3a$.

11.7. Вычислить непосредственно по графу состояний, пользуясь схемой гибели и размножения, финальные вероятности состояний для простейшей двухканальной СМО ($n = 2$) с тремя местами в очереди ($m = 3$) при $\lambda = 0,6$; $\mu = 0,2$; $\rho = \lambda / \mu = 3$. Найти для этой СМО характеристики $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, не пользуясь формулами (11.0.26), а непосредственно через финальные вероятности, и сравнить с теми, которые получаются по формулам (11.0.26).

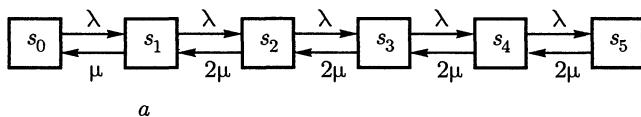


Рис. 11.7

Решение. Граф состояний СМО показан на рис. 11.7. По схеме гибели и размножения, обозначая $\lambda / \mu = \rho$, получаем:

$$p_0 = \left\{ 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^3} + \frac{\rho^5}{2^4} \right\}^{-1} = (40,58)^{-1} \approx 0,025;$$

$$p_1 = \frac{3}{40,58} \approx 0,074; \quad p_2 = \frac{4,5}{40,58} \approx 0,111; \quad p_3 = \frac{6,75}{40,58} \approx 0,165;$$

$$p_4 = \frac{10,15}{40,58} \approx 0,250; \quad p_5 = \frac{15,18}{40,58} \approx 0,375;$$

$$\bar{z} = 1 \cdot 0,074 + 2 \cdot 0,111 + 3 \cdot 0,165 + 4 \cdot 0,250 + 5 \cdot 0,375 \approx 3,67;$$

$$\bar{r} = 1 \cdot 0,165 + 2 \cdot 0,250 + 3 \cdot 0,375 \approx 1,79;$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / 0,6 \approx 6,11; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / 0,6 \approx 2,98.$$

11.8. Формула для $\bar{r}$ (11.0.28) справедлива для любого $\chi < 1$ или $\chi > 1$. При $\chi = 1$ она перестает работать (дает неопределенность вида $0/0$). Пользуясь непосредственно схемой гибели и размножения, вывести для этого случая вероятности состояний $p_0, p_1, \dots; p_{n+m}$ и найти характеристики эффективности СМО: $A, Q, P_{\text{отк}}, k, \bar{r}, \bar{z}, \bar{t}_{\text{оч}}, \bar{t}_{\text{сист}}$.

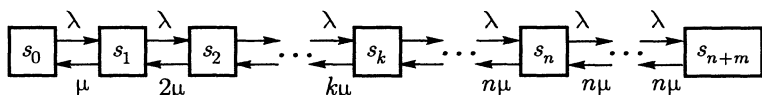


Рис. 11.8

Решение. Граф состояний СМО имеет вид, показанный на рис. 11.8. Пользуясь общими формулами для схемы гибели и размножения и обозначая $\lambda / \mu = \rho$, имеем

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} + \dots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \right\}^{-1} =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right] \right\}^{-1}.$$

При $\chi = \rho / n = 1$

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m\rho^n}{n!} \right\}^{-1}; \quad (11.8.1)$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \quad p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (1 \leq r \leq m); \quad (11.8.2)$$

$$P_{\text{отн}} = p_{n+m}; \quad Q = 1 - p_{n+m} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right]; \quad \bar{k} = A / \mu = \rho \left[1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right];$$

$$\bar{r} = \sum_{r=1}^m r p_{n+r} = \sum_{r=1}^m r \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \sum_{r=1}^m r = \frac{\rho^n}{n!} \frac{m(m+1)}{2} p_0; \quad (11.8.3)$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda.$$

11.9. Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки ($n = 2$); площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомобилей ($m = 4$). Поток автомобилей, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью $\lambda = 1$ авт/мин. Время обслуживания автомобиля — показательное со средним значением $\bar{t}_{\text{обсл}} = 2$ мин. Найти финальные вероятности состояний АЗС и ее характеристики: A , Q , $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. $\lambda = 1$, $\mu = 1/2 = 0,5$; $\rho = 2$; $\chi = \rho/n = 1$. По формулам (11.8.1)–(11.8.3) имеем:

$$p_0 = \left[1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^2}{2!} \cdot 4 \right]^{-1} = \frac{1}{13}; \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2}{13};$$

$$P_{\text{отк}} = 2/13; \quad Q = 1 - P_{\text{отк}} = 11/13;$$

$$A = \lambda Q = 11/13 \approx 0,85 \text{ авт/мин};$$

$$\bar{k} = A / \mu = 22/13 \approx 1,69 \text{ колонки};$$

$$\bar{r} = \frac{2^2}{2!} \frac{4(4+1)}{2} \cdot \frac{1}{13} \approx 1,54 \text{ автомобиля};$$

$$\bar{z} = \bar{r} + k \approx 3,23 \text{ автомобиля}.$$

11.10. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки/ч. Среднее время обслуживания одной заявки $t_{\text{обсл}} = 0,8$ ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход $c = 4$ руб. Содержание каждого канала обходится 2 руб/ч. Решить: выгодно или невыгодно в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех?

Решение. По формулам Эрланга (11.0.6)

$$p_0 = \left[1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2!} \right]^{-1} = (9,32)^{-1} \approx 0,107; \quad p_2 \approx \frac{5,12}{9,32} \approx 0,550;$$

$$Q = 1 - p_2 \approx 0,450; \quad A = 4Q \approx 1,8 \text{ заявки/ч}.$$

Доход от заявок, приносимый СМО в данном варианте, равен $D = A \cdot c \approx 7,2$ руб/ч.

Подсчитаем те же характеристики для трехканальной СМО (отмечая их штрихом сверху):

$$p'_0 = \left\{ 1 + 3,2 + \frac{3,2^2}{2!} + \frac{3,2^3}{3!} \right\}^{-1} \approx 0,0677; \quad p'_3 \approx 5,48 \cdot 0,0677 \approx 0,371;$$

$$Q' = 1 - p'_3 \approx 0,629; \quad A' = 4Q' \approx 2,52; \quad D' = A' \cdot c \approx 10,08 \text{ руб/ч.}$$

Увеличение дохода равно $D' - D = 2,88$ руб/ч; увеличение расхода равно 2 руб/ч; из этого видно, что переход от $n = 2$ к $n = 3$ экономически выгоден.

11.11. Рассматривается простейшая СМО с практически неограниченным числом каналов ($n \rightarrow \infty$). На вход СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ ; интенсивность потока обслуживаний (для одного канала) равна μ . Найти финальные вероятности состояний СМО и среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

Решение. Данная СМО не дает ни отказов, ни очередей; ее можно рассматривать как предельный случай СМО с отказами при $n \rightarrow \infty$. Формулы Эрланга (11.0.6) дают

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \right\}^{-1} = e^{-\rho}, \text{ где } \rho = \lambda / \mu; \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = P(k, \rho)$$

(см. прил. 1). При неограниченном числе каналов $A = \lambda$; $k = \lambda / \mu = \rho$.

11.12. Рассматривается одноканальная СМО с отказами; на ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$. Работающий канал может время от времени выходить из строя (отказывать); поток отказов канала — простейший с интенсивностью ν . Восстановление (ремонт) вышедшего из строя канала начинается мгновенно после его отказа; время ремонта T_p — показательное с параметром $\gamma = 1 / \bar{t}_p$. Заявка, которая обслуживалась в момент выхода канала из строя, покидает СМО необслуженной.

Найти финальные вероятности состояний СМО: s_0 — канал свободен; s_1 — канал занят, исправен; s_2 — канал ремонтируется и характеристики СМО: A и Q .

Решение. Граф состояний СМО дан на рис. 11.12, а. Алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\lambda p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2; \quad (\mu + \nu) p_1 = \lambda p_0; \quad \nu p_1 = \gamma p_2; \quad (11.12.1)$$

к ним прибавляется нормировочное условие

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1. \quad (11.12.2)$$

Выразим вероятности p_1, p_2 из (11.12.1) через p_0 :

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} p_0; \quad p_2 = \frac{\nu}{\gamma} p_1 = \frac{\lambda \nu}{\gamma (\mu + \nu)} p_0.$$

Подставляя p_1 и p_2 в (11.12.2), получаем

$$p_0 = \{1 + \lambda / (\mu + \nu) + \lambda \nu / [\gamma (\mu + \nu)]\}^{-1}. \quad (11.12.3)$$

Чтобы найти относительную пропускную способность Q , нужно вероятность p_0 того, что заявка будет принята к обслуживанию, умножить на условную вероятность p' того, что заявка, принятая к обслуживанию, фактически будет обслужена (канал не откажет за время обслуживания заявки). Найдем эту условную вероятность по интегральной формуле полной вероятности. Сделаем гипотезу, состоящую в том, что время обслуживания заявки попало на участок от t до $t + dt$; вероятность этой гипотезы приближенно равна $f(t) dt$, где $f(t)$ — плотность распределения времени обслуживания: $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ ($t > 0$). Условная вероятность того, что канал не выйдет из строя за время t , равна $e^{-\nu t}$; отсюда

$$p' = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t} e^{-\nu t} dt = \int_0^{\infty} \mu e^{-(\mu + \nu)t} dt = \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

Эту условную вероятность можно найти и проще: она равна вероятности того, что начатое обслуживание закончится раньше, чем канал выйдет из строя. Представим на оси $0t$ (рис. 11.12, б) совмещение (суперпозицию) двух потоков: потока обслуживания с интенсивностью μ (обозначен крестиками) и потока отказов канала с интенсивностью ν (обозначен кружками). Зафиксируем любую точку t на оси $0t$ и найдем вероятность того, что

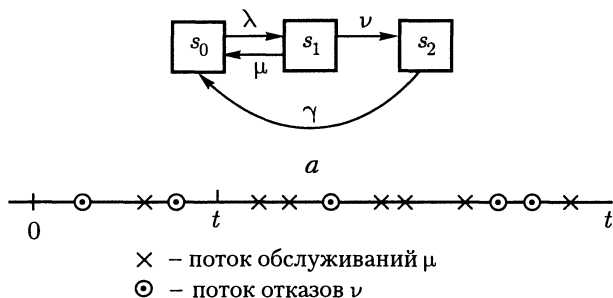


Рис. 11.12

первый после нее крестик придет раньше, чем кружок. Очевидно, она равна отношению интенсивности потока крестиков к суммарной интенсивности потока крестиков и кружков; $\mu / (\mu + \nu)$. Таким образом,

$$Q = p_0 p' = \left(\frac{\mu}{\mu + \nu} \right) / \left(1 + \frac{\lambda}{\mu + \nu} + \frac{\lambda \nu}{\gamma (\mu + \nu)} \right) = \frac{\mu}{\mu + \nu + \gamma (1 + \nu / \gamma)};$$

$$A = \lambda Q. \quad (11.12.4)$$

11.13. Условия задачи 11.12 повторяются, но с той разницей, что канал может выходить из строя и в неработающем состоянии (с интенсивностью $\nu' < \nu$).

Решение. Граф состояний СМО дан на рис. 11.13. Из уравнений

$$(\lambda + \nu') p_0 = \mu p_1 + \gamma p_2; \quad (\mu + \nu) p_1 = \lambda p_0; \quad \gamma p_2 = \nu p_1 + \nu' p_0;$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1$$

найдем финальные вероятности

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\mu + \nu} + \frac{\lambda \nu + \mu \nu' + \nu \nu'}{\gamma (\mu + \nu)} \right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu + \nu} p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda \nu + \mu \nu' + \nu \nu'}{\gamma (\mu + \nu)} p_0;$$

$$Q = p_0 \frac{\mu}{\mu + \nu}; \quad A = \lambda Q = p_0 \frac{\lambda \mu}{\mu + \nu}.$$

11.14. Рассматривается простейшая одноканальная СМО с ограниченной очередью $m = 2$; работающий канал может иногда выходить из строя (отказывать). Заявка, которая обслуживается в момент отказа канала, становится в очередь, если в ней еще есть свободные места; если нет, она покидает СМО необслуженной. Интенсивность потока заявок λ , потока обслуживаний μ , потока отказов канала ν , потока восстановлений (ремонтов) γ . Перечислить состояния СМО и найти для них финальные вероятности, а

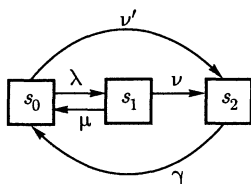


Рис. 11.13

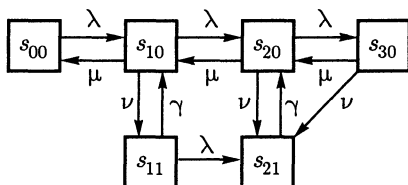


Рис. 11.14

также характеристики эффективности СМО: $A, \bar{k}, \bar{r}, \bar{z}, \bar{t}_{\text{сист}}, \bar{t}_{\text{оч}}$ при $\lambda = 2, \mu = 1, \nu = 0,5, \gamma = 1$.

Решение. Состояния СМО:

s_{00} — СМО свободна, канал исправен;

s_{10} — канал занят и исправен, очереди нет;

s_{11} — канал вышел из строя, ремонтируется; в СМО имеется одна заявка, ждущая очереди;

s_{20} — канал занят и исправен; одна заявка обслуживается, другая ждет очереди;

s_{21} — канал вышел из строя, ремонтируется; в очереди ждут две заявки;

s_{30} — канал занят и исправен; две заявки ждут очереди, одна обслуживается.

Граф состояний СМО показан на рис. 11.14. Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\mu p_{10} = \lambda p_{00}; \quad \mu p_{20} + \gamma p_{11} + \lambda p_{00} = (\mu + \gamma + \nu) p_{10};$$

$$\mu p_{30} + \gamma p_{21} + \lambda p_{10} = (\mu + \gamma + \nu) p_{20};$$

$$\lambda p_{20} = (\mu + \nu) p_{30}; \quad \nu p_{20} = (\mu + \nu) p_{30};$$

$$\nu p_{10} = (\gamma + \lambda) p_{11}; \quad \lambda p_{11} + \nu p_{20} + \nu p_{30} = \gamma p_{21};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{11} + p_{20} + p_{21} + p_{30} = 1.$$

Решая эти уравнения при $\lambda = 2, \mu = 1, \nu = 0,5, \gamma = 1$, получаем:

$$p_{00} = 3/61 \approx 0,049; \quad p_{10} = 6/61 \approx 0,098; \quad p_{20} = 14/61 \approx 0,230;$$

$$p_{30} = 56/183 \approx 0,306; \quad p_{11} = 1/61 \approx 0,016; \quad p_{21} = 5/183 \approx 0,301.$$

Отсюда

$$\bar{z} = 1(p_{10} + p_{11}) + 2(p_{20} + p_{21}) + 3p_{30} = 383/183 \approx 2,09;$$

$$\bar{r} = 1(p_{20} + p_{11}) + 2(p_{21} + p_{30}) = 89/61 \approx 1,46.$$

$$\bar{k} = 1(p_{10} + p_{20} + p_{30}) = 116/183 \approx 0,63.$$

Абсолютная пропускная способность A для СМО с неотказывающими каналами могла бы быть найдена умножением $\bar{k}$ на μ ; в нашем случае производительность одного канала (среднее число заявок, фактически обслуживаемых в единицу времени) можно найти, умножая $\bar{k}$ на вероятность $\mu / (\mu + \nu)$ того, что начатое обслуживание будет доведено до конца: $A = \bar{k} \mu \cdot \mu / (\mu + \nu) = k \mu^2 / (\mu + \nu) \approx 0,42$.

11.15. В стоматологическом кабинете три кресла ($n = 3$), а в коридоре имеются три стула ($m = 3$) для ожидающих приема. Поток клиентов — простейший с интенсивностью $\lambda = 12$ клиент/ч. Время обслуживания (приема клиента) — показательное со средним

значением $\bar{t}_{\text{обсл}} = 20$ мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время $\bar{t}_{\text{сист}}$, которое клиент проведет в коридоре и в кабине; то же самое среднее время при условии, что клиент будет обслужен.

Решение. $\rho = 12/3 = 4$; $\chi = \rho/3 = 4/3$; $n = 3$; $m = 3$. По формулам (11.0.26)–(11.0.30) находим:

$$p_0 = \left\{ 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{3 \cdot 6} \cdot \frac{1 - (4/3)^3}{1 - 4/3} \right\}^{-1} \approx 0,01218 \approx 0,012;$$

$$p_1 = 4 \cdot 0,01218 \approx 0,049; \quad p_2 = 8 \cdot 0,01218 \approx 0,097;$$

$$p_3 = \frac{32}{3} \cdot 0,01218 \approx 0,130; \quad p_{3+1} = \frac{4^4}{36} \cdot 0,01218 \approx 0,173;$$

$$p_{3+2} = \frac{4}{3} p_{3+1} \approx 0,231; \quad p_{3+3} = \frac{4}{3} p_{3+2} \approx 0,307.$$

Средняя доля обслуживаемых клиентов $Q = 1 - P_{\text{отн}} = 1 - p_{3+3} \approx 1 - 0,307 = 0,693$.

Среднее число клиентов, обслуживаемых за час, равно $A = \lambda Q \approx 12 \cdot 0,683 \approx 8,32$.

Среднее число занятых каналов (кресел) [по формуле (11.0.27)] $\bar{k} = 4(1 - p_{3+3}) \approx 2,78$.

Среднее число клиентов в очереди [по формуле (11.0.28)]

$$\bar{r} = \frac{4^4 \cdot 0,01218}{3 \cdot 6} \frac{1 - 4 \cdot (4/3)^3 + 3(4/3)^4}{(1 - 4/3)^2} \approx 1,56;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = 4,34; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda \approx 0,13 \text{ ч}; \quad t_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda \approx 0,362 \text{ ч}.$$

Такие малые значения $\bar{t}_{\text{сист}}$ и $\bar{t}_{\text{оч}}$ связаны с тем, что некоторые клиенты уходят, не становясь в очередь. Условное среднее время, проведенное клиентом в системе, при условии, что он был обслужен, равно $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{сист}} / Q \approx 0,52$ ч, а условное среднее время пребывания в очереди (при том же условии) $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{t}_{\text{оч}} / Q \approx 0,19$ ч.

11.16. Формулы (11.0.26), (11.0.28) при $\chi = 1$ дают неопределенность вида 0/0. Раскрыть эту неопределенность и написать формулы, справедливые при $\chi = 1$.

Решение. При правилу Лопиталя

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - \chi^m}{1 - \chi} = \frac{-m\chi^{m-1}}{-\chi} = m;$$

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \right\}^{-1}; \quad (11.16.1)$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \quad (11.16.2)$$

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \dots = p_{n+m} = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad (11.16.3)$$

т.е. все вероятности, начиная с p_n и заканчивая p_{n+m} , равны друг другу.

Формулы для A , Q , $P_{\text{отк}}$, k остаются прежними.

Раскрывая неопределенность в формуле (11.0.28), получаем

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - (m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2} = \frac{m(m+1)}{2};$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0 m (m+1)}{2n \cdot n!}. \quad (11.16.4)$$

Формулы (11.0.29), (11.0.30) остаются прежними.

Формулы (11.16.1)–(11.16.3) можно было бы вывести и не раскрывая неопределенность, а непосредственно из схемы гибели и размножения.

11.17. 1) Подсчитать характеристики эффективности A , Q , $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$ для простейшей одноканальной СМО с тремя местами в очереди ($m=3$) при условиях: $\lambda=4$ заявки/ч; $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/\mu = 0,5$ ч. 2) Выяснить, как эти характеристики изменяются, если увеличить число мест в очереди до $m=4$.

Решение. $\mu=2$; $\rho=\lambda/\mu=2$; по формулам (11.0.12)–(11.0.16) при $m=3$ имеем: $p_0 = 1/31$; $p_4 = 16/31$; $Q \approx 0,484$; $A = \lambda Q \approx 1,93$ заявки/ч; $\bar{k} = \rho Q \approx 0,968$; $\bar{r} \approx 2,19$ заявки; $\bar{z} \approx 3,16$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0,55$ ч; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0,79$ ч.

2) При $m=4$ имеем $p_0 = 1/63 \approx 0,0158$; $p_5 = 32/63 \approx 0,507$; $Q \approx 0,493$; $A \approx 1,96$ заявки/ч; $\bar{r} \approx 3,11$ заявки; $\bar{z} = 4,09$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0,78$ ч; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 1,02$ ч.

Таким образом, увеличение числа мест s с трех до четырех приводит к незначительному увеличению абсолютной (и относительной) пропускной способности, сопровождаясь при этом некоторым увеличением среднего числа заявок в очереди и в системе, а также соответствующих средних времен. Это и естественно, так как некоторые заявки, получающие отказ в первом варианте, все же становятся в очередь во втором.

11.18. Как изменятся характеристики эффективности СМО предыдущей задачи, если λ и μ остаются прежними, $m = 3$, но число каналов обслуживания увеличится до $n = 2$?

Решение. $\chi = 1$; по формулам (11.16.1), (11.16.2) имеем $p_0 = 1/11$; $p_1 = \dots = p_5 = 2/11$; $Q = 1 - 2/11 \approx 0,818$; $A \approx 3,27$ заявки/ч; $\bar{r} = 12/11 \approx 1,09$ заявки; $\bar{k} = A/\mu \approx 1,64$; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2,73$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0,27$ ч; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0,68$ ч.

11.19. Система массового обслуживания — билетная касса с одним окошком ($n = 1$) и неограниченной очередью. В кассе продаются билеты в пункты A и B ; пассажиров, желающих купить билет в пункт A , приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт B — двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания — показательное. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО и если да — вычислить первые три из них: p_0 , p_1 , p_2 . Найти характеристики эффективности СМО: $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$ и $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. $\lambda_A = 3/20 = 0,15$ заявки/мин; $\lambda_B = 2/20 = 0,10$ заявки/мин. Общая интенсивность потока заявок $\lambda = \lambda_A + \lambda_B = 0,25$ заявки/мин; $\mu = 3/10 = 0,3$ заявки/мин; $\rho = \lambda/\mu \approx 0,833 < 1$, финальные вероятности существуют. По формулам (11.0.12)–(11.0.14): $p_0 \approx 0,167$; $p_1 \approx 0,139$; $p_2 \approx 0,116$; $\bar{z} \approx \frac{0,833}{0,167} \approx 4,99$ заявки; $\bar{r} = 0,833^2 / 0,167 \approx 4,16$ заявки; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 4,99 / 0,25 \approx 20,0$ мин; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 4,16 / 0,25 \approx 16,7$ мин.

11.20. Одноканальная СМО — ЭВМ, на которую поступают заявки (требования на расчеты). Поток заявок — простейший со средним интервалом между заявками $\bar{t} = 10$ мин. Время обслуживания $T_{\text{обсл}}$ распределено по закону Эрланга 3-го порядка с математическим ожиданием $\bar{t}_{\text{обсл}} = 8$ мин. Определить среднее число $\bar{z}$ заявок в СМО и среднее число $\bar{r}$ заявок в очереди, а также средние времена пребывания заявки в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ и в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. Характеристики СМО могут быть найдены по формуле Полячека — Хинчина (11.0.31), (11.0.32). Имеем: $\lambda = 0,1$ заявки/мин; $\mu = 0,125$ заявки/мин; $\rho = \lambda/\mu = 0,8$.

Коэффициент вариации времени обслуживания для закона Эрланга 3-го порядка равен $1/\sqrt{3}$. По формуле (11.0.31) $\bar{r} = 0,64(1 + 1/3) : (2 \cdot 0,2) \approx 2,13$. По формуле (11.0.32) $\bar{z} = \bar{r} + 0,8 \approx 2,93$. По формуле Литтла $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 21,3$ мин, $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 29,3$ мин.

11.21. Условия предыдущей задачи изменены: поток заявок уже не простейший, а пальмовский, причем интервал между событиями в потоке распределен по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка (см. задачу 8.31) с параметрами $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Найти

приближенно, по формулам (11.0.34)–(11.0.37), характеристики эффективности СМО.

Решение. Случайная величина T , распределенная по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка, есть сумма двух случайных величин T_1 и T_2 , распределенных по показательным законам с параметрами: $\lambda_1 = 1/2$; $\lambda_2 = 1/8$. Отсюда $\mathbf{M}[T] = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 = 10$ мин; $\mathbf{D}[T] = \mathbf{D}[T_1] + \mathbf{D}[T_2] = 2^2 + 8^2 = 68$; $v_\lambda^2 = 68/10^2 = 0,68$; $v_\mu^2 = 1/3$. Следовательно, $\bar{r} = 1,62$ заявки; $\bar{z} = 2,42$ заявки; $\bar{t}_{\text{оч}} = 16,2$ мин; $\bar{t}_{\text{сист}} = 24,2$ мин.

11.22. Техническое устройство (ТУ) может время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ – простейший с интенсивностью $\lambda = 1,6$ отказа в сутки. Время T_b восстановления (ремонта) ТУ имеет равномерное распределение на участке от 0 до 1 сут. Найти (для предельного стационарного режима) среднюю долю R времени, в течение которого ТУ работает.

Решение. Состояния ТУ: s_0 – работает; s_1 – ремонтируется. Граф состояний ТУ показан на рис. 11.22, где $\mu = 1/\mathbf{M}[T_b] = 1/0,5 = 2$. Этот граф в точности совпадает с графом состояний одноканальной СМО с отказами. Мы знаем, что если поток заявок, поступающих на СМО, – простейший, а время обслуживания имеет произвольное распределение, то справедливы формулы Эрланга (11.0.6); в данном случае $\rho = \lambda/\mu = 0,8$; $p_0 = \{1 + \rho/1!\}^{-1} = 1/1,8 \approx 0,556$; $p_1 = 1 - 0,556 \approx 0,444$. Итак, $R \approx 0,556$, т.е. ТУ будет работать немногим более половины всего времени, а остальное время ремонтироваться.

11.23. В условиях предыдущей задачи ТУ дублировано точно таким же ТУ, которое может выходить из строя только в работающем состоянии; λ, μ – такие же, как в задаче 11.22. Найти величину R , а также среднее число $\bar{k}$ неисправных ТУ.

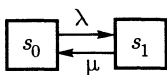


Рис. 11.22

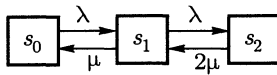


Рис. 11.23

Решение. Состояния системы S : s_0 – оба ТУ исправны (одно из них работает, другое нет); s_1 – одно ТУ работает, другое ремонтируется; s_2 – оба ТУ ремонтируются. Граф состояний дан на рис. 11.23. Граф в точности совпадает с графом состояний двухканальной СМО с отказами. По формулам Эрланга (11.0.6)

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} \right\}^{-1} = \{1 + 0,8 + 0,64/2\}^{-1} \approx 0,472;$$

$$p_1 \approx 0,8 \cdot 0,472 = 0,378; \quad R = p_0 + p_1 \approx 0,850; \quad p_2 = 0,150;$$

$$\bar{k} = 1 \cdot p_1 + 2p_2 = 0,678.$$

Очевидно, тот же прием (сведения к СМО с отказами) может быть применен и в случае, когда число дублирующих ТУ более одного.

11.24. Система массового обслуживания — обувной магазин, в котором каждый покупатель проходит три фазы обслуживания: 1) примерка и выбор обуви; 2) уплата денег в кассу и 3) получение покупки на контроле. В магазин прибывает простейший поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 45$ чел/ч.

В отделе примерки имеются четыре стула, занимая которые, покупатели могут самостоятельно выбирать и примерять обувь. Среднее время примерки и выбора обуви $\bar{t}_1 = 5$ мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе $\bar{t}_2 = 1$ мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца; среднее время выдачи покупки $\bar{t} = 2$ мин. Все потоки событий — простейшие.

Рассматривая магазин как трехфазовую СМО, найти характеристики ее эффективности:

$\bar{r}_1 (\bar{r}_2, \bar{r}_3)$ — среднее число покупателей в очереди к первой (второй, третьей) фазе обслуживания;

$\bar{z}_1 (\bar{z}_2, \bar{z}_3)$ — среднее число покупателей, связанных с первой (второй, третьей) фазой обслуживания;

$\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)}, (\bar{t}_{\text{оч}}^{(2)}, \bar{t}_{\text{оч}}^{(3)})$ — среднее время ожидания покупателя в очереди к первой (второй, третьей) фазе;

$\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)}, (\bar{t}_{\text{сист}}^{(2)}, \bar{t}_{\text{сист}}^{(3)})$ — среднее время пребывания покупателя в первой (второй, третьей) фазе обслуживания;

$\bar{r}$ — общее среднее число покупателей во всех трех очередях;

$\bar{z}$ — общее среднее число покупателей в магазине;

$\bar{t}_{\text{оч}}$ — общее среднее время, проводимое покупателем в очередях;

$\bar{t}_{\text{сист}}$ — общее среднее время, затрачиваемое покупателем на приобретение обуви в магазине.

Дополнительно ответить на следующие вопросы: 1) В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей? 2) Как можно было бы учесть тот факт, что не все покупатели находят себе подходящую обувь, и какая-то доля α из них ($0 < \alpha < 1$) уходит из магазина, не сделав покупки?

Решение. Так как все потоки событий простейшие, то выходные потоки всех трех фаз тоже будут простейшими, и можно рассматривать три последовательные фазы как три отдельные СМО со своими характеристиками.

1. Первая фаза. Так как в отделе примерки четыре стула, то число каналов $n_1 = 4$. Далее, имеем $\bar{t}_1 = 1/\mu_1 = 5 \text{ мин} = 1/12 \text{ ч}$; $\rho_1 = 45/12 = 15/4 \approx 3,75$; $\chi_1 = \rho_1/n_1 = 15/16 < 1$. По формулам (11.0.21)–(11.0.25) находим:

$$p_0^{(1)} = \left\{ 1 + 3,75 + \frac{(3,75)^2}{2} + \frac{(3,75)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(3,75)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(3,75)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4(1 - 15/16)} \right\}^{-1} \approx (151,58)^{-1} \approx 0,0066; \quad k_1 = 3,75;$$

$$\bar{r}_1 = \frac{(3,75)^5}{4 \cdot 4!} \frac{p_0^{(1)}}{(1 - \chi_1)^2} \approx 13,01; \quad \bar{z}_1 = 16,76;$$

$$\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} = \bar{r}_1/\lambda \approx 0,289 \text{ ч} \approx 17,3 \text{ мин}; \quad \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} = \bar{z}_1/\lambda \approx 0,372 \text{ ч} \approx 22,3 \text{ мин.}$$

2. Вторая фаза. $\lambda = 45$; $n_2 = 1$; $\rho_2 = 0,75 < 1$. По формулам (11.0.12)–(11.0.14) получаем:

$$\bar{r}_2 = \rho_2^2/(1 - \rho_2) = 9/4 = 2,25; \quad \bar{z}_2 = \rho_2/(1 - \rho_2) = 3;$$

$$\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} = \bar{r}_2/\mu = 0,05 \text{ ч} = 3 \text{ мин}; \quad \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} = 1/15 \text{ ч} = 4 \text{ мин.}$$

3. Третья фаза. $n_3 = 3$; $\lambda = 45$; $\rho_3 = 3/2$; $\chi_3 = 0,5 < 1$. По формулам (11.0.21)–(11.0.25) находим: $p_0^{(3)} \approx 0,210$; $\bar{r}_3 \approx 0,237$;

$$\bar{z}_3 \approx 1,737; \quad \bar{t}_{\text{оч}}^{(3)} \approx 0,316 \text{ мин}; \quad \bar{t}_{\text{сист}}^{(3)} \approx 2,316 \text{ мин.}$$

Складывая средние численности трех очередей, получаем общую среднюю численность очереди:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 \approx 15,5.$$

Аналогично находим среднее число покупателей в магазине $\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 \approx 21,5$.

Среднее время пребывания покупателя в очереди

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} + \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)} + \bar{t}_{\text{оч}}^{(3)} \approx 20,6 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания покупателя в магазине

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} + \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)} + \bar{t}_{\text{сист}}^{(3)} \approx 28,6 \text{ мин.}$$

1) Улучшить обслуживание можно, уменьшая время пребывания покупателя в первой фазе, которая представляет собой наиболее слабое звено СМО. Всего проще достигнуть этого, увеличив число n_1 стульев в отделе примерки, т.е. число каналов обслуживания в первой фазе. Например, простое увеличение числа стульев на еди-

ницу (т.е. переход от $n_1 = 4$ к $n_1 = 5$) дает существенный выигрыш во времени. Действительно, при $n_1 = 5$ для первой фазы получим:

$$\rho_1 = 3,75; \quad \chi_1 = 3,75/5 = 0,75; \quad p_0^{(1)} = \{59,71\}^{-1}; \quad \bar{r}_1 \approx 2,08; \\ \bar{z}_1 \approx 5,13; \quad \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} \approx 1,84 \text{ мин}; \quad \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} \approx 6,84 \text{ мин}.$$

2) Учесть наличие доли покупателей α , уходящих из магазина без покупки, можно, умножив интенсивность входного потока второй и третьей фаз на $(1 - \alpha)$.

11.25. На железнодорожную сортировочную станцию поступает эрланговский 10-го порядка поток составов с интенсивностью $\lambda = 12$ состава/ч.¹⁾ Время обслуживания состава $T_{\text{обсл}}$ распределено в интервале от 0 до 1 ч по закону с плотностью $\varphi(t)$, показанной на рис. 11.25. Оценить приближенно [по формулам (11.0.34)–(11.0.37)] характеристики эффективности станции — среднее число $\bar{z}$ составов на станции, в очереди $\bar{r}$, среднее время $\bar{t}_{\text{сист}}$ пребывания состава на станции, среднее время $\bar{t}_{\text{оч}}$ ожидания составом очереди на обслуживание.

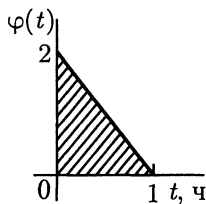


Рис. 11.25

Решение. Для закона $\varphi(t)$ имеем $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1/3$; $\rho = \lambda/\mu = 0,8 < 1$. Для потока Эрланга 10-го порядка $v_\lambda^2 = (1/\sqrt{k})^2 = 0,1$; v_μ^2 определяем, разделив дисперсию $D[T_{\text{обсл}}]$ на квадрат математического ожидания: $v_\mu^2 = 1/2 = 0,5$.

Находим характеристики СМО:

$$\bar{r} = \rho^2 (v_\lambda^2 + v_\mu^2) / [2(1 - \rho)] = 0,8^2 (0,1 + 0,5) / (2 \cdot 0,2) = 0,96;$$

$$\bar{z} = \bar{r} + \rho \approx 0,96 + 0,8 = 1,76;$$

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda \approx 0,8 \text{ ч}; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + 1/\mu \approx 1,13 \text{ ч}.$$

11.26. Показать, что для простейшей n -канальной СМО с неограниченным числом мест в очереди среднее число заявок, находящихся в очереди, заключено в пределах

$$\frac{\chi^{n+1}}{1 - \chi} \frac{n}{\chi^n (n - 1) + 1} < \bar{r} < \frac{\chi^{n+1}}{1 - \chi}.$$

Решение. Запишем выражение для $\bar{r}$ в следующем виде [см. формулы (11.0.23), (11.0.21)]:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! (1 - \chi)^2} \frac{p_0}{(1 - \chi)^2} p_n, \text{ где } p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

¹⁾ Подчеркнем, что здесь λ — интенсивность именно эрланговского потока, а не того простейшего потока, прореживанием которого получен эрланговский.

Следовательно,

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{n}{\rho} + \frac{n(n-1)}{\rho^2} + \dots + \frac{n!}{\rho^n} + \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{-1} >$$

$$> \left(1 + \frac{n^1}{\rho} + \frac{n^2}{\rho^2} + \dots + \frac{n^n}{\rho^n} + \dots + \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{-1} = \chi^n (1 - \chi).$$

С другой стороны,

$$p_n < \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{n}{\rho^2} + \dots + \frac{n^{n-1}}{\rho^n} + \frac{\chi}{1 - \chi} \right)^{-1} = \frac{\chi^n (1 - \chi) n}{\chi^n (n - 1) + 1}.$$

Так как $[\chi^n (1 - \chi) n] / [\chi^n (n - 1) + 1] < p_n < \chi^n (1 - \chi)$, то указанное в задаче неравенство также выполняется. Заметим, что последнее неравенство может быть использовано для приближенного определения всех характеристик рассматриваемой СМО.

11.27. Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Ленинград и Киев. Потoki пассажиров, приобретающих билеты в Ленинград и в Киев, одинаковы по интенсивности, которая равна $\lambda_0 = 0,45$ пасс/мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) $\bar{t}_{\text{обсл}} = 2$ мин.

Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Ленинград, а во второй — только в Киев. Считая в первом приближении все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

Решение. 1) Вычислим характеристики очереди для двухканальной СМО (существующий вариант). Интенсивность потока заявок $\lambda = 2\lambda_0 = 0,9$ пасс/мин; $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обсл}} = 0,5$ пасс/мин; $\rho = \lambda / \mu = 1,8$; $\chi = \rho / 2 = 0,9 < 1$, финальные вероятности существуют. По формуле (11.0.21)

$$p_0 = \left\{ 1 + 1,8 + \frac{1,8^2}{2} + \frac{1,8^3}{4} \frac{1}{1 - 0,9} \right\}^{-1} \approx 0,0525;$$

по формуле (11.0.23)

$$\bar{r} = \frac{1,8^3 \cdot 0,0525}{2 \cdot 2 \cdot 0,01} \approx 7,7 \text{ пасс}; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{7,7}{0,9} \approx 8,56 \text{ мин.}$$

2) Во втором варианте (предлагаемом) имеем две одноканальные СМО: $\rho = \lambda_0 / \mu = 0,45 / 0,5 = 0,9 < 1$.

Средняя длина очереди у одной кассы [по формуле (11.0.13)] равна $\bar{r} = \rho^2 / (1 - \rho) = 0,9^2 / 0,1 = 8,1$ пасс. Суммарная длина очереди к обоим кассам будет $2\bar{r} = 16,2$ пасс.

Время пребывания пассажира в очереди (11.0.14) $\bar{t}_{оч} = \bar{r} / \lambda = 8,1 / 4,5 = 18$ мин, что почти вдвое превосходит время стояния в очереди в существующем варианте: 8,6 мин.

Вывод: «рационализаторское» предложение нужно отвергнуть, как резко снижающее эффективность СМО. Резкое ухудшение характеристик СМО при переходе от двухканальной СМО (существующий вариант) к двум одноканальным СМО (предлагаемый вариант) объясняется тем, что, разделив кассу на две специализированные, мы лишили кассиров возможности подменять друг друга.

11.28*. Простейшая многоканальная СМО с «нетерпеливыми» заявками и с неограниченным числом мест в очереди. Имеется простейшая n -канальная СМО с очередью; интенсивность потока заявок λ , потока обслуживаний $\mu = 1 / \bar{t}_{обсл}$. Время пребывания заявки в очереди ограничено некоторым случайным сроком T , распределенным по показательному закону с параметром ν (на каждую заявку, стоящую в очереди, действует «поток уходов» с интенсивностью ν).

Написать формулы для финальных вероятностей состояний, найти относительную пропускную способность СМО Q , среднюю длину очереди $\bar{r}$, среднее время $\bar{t}_{оч}$ пребывания заявки в очереди, среднее число $\bar{z}$ заявок в СМО и среднее время $\bar{t}_{сист}$ пребывания заявки в СМО.

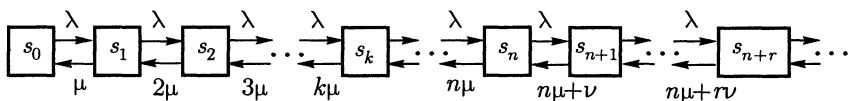


Рис. 11.28

Решение. Состояния системы по-прежнему будем нумеровать соответственно числу заявок, находящихся в СМО. Граф состояний показан на рис. 11.28. Пользуясь общими формулами для схемы гибели и размножения и вводя обозначения $\rho = \lambda / \mu$; $\beta = \nu / \mu$, получаем:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\rho}{n + \beta} + \frac{\rho^2}{(n + \beta)(n + 2\beta)} + \dots + \frac{\rho^r}{(n + \beta)(n + 2\beta) \dots (n + r\beta)} + \dots \right] \right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; \dots; p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \dots; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho}{n + \beta} p_0; \dots;$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\rho^r}{(n + \beta)(n + 2\beta) \dots (n + r\beta)} \cdot p_0 \quad (r \geq 1); \dots \quad (11.28.1)$$

В первую формулу (11.28.1) входит бесконечная сумма, не являющаяся геометрической прогрессией, но члены которой убывают быстрее, чем члены геометрической прогрессии. Можно доказать, что ошибка, возникающая от отбрасывания всех членов бесконечной суммы, начиная с r -го, меньше, чем $\frac{\rho^n}{n!} \frac{(\rho / \beta)^r}{r!} e^{-\rho/\beta}$.

Предположим, что вероятности $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots, p_{n+r}, \dots$ вычислены, и покажем, как можно найти характеристики данной СМО: относительную пропускную способность Q , среднее число заявок в очереди $\bar{r}$ и др. Найдем прежде всего Q . Обслужены будут все заявки, кроме тех, которые уйдут из очереди досрочно. Подсчитаем, сколько заявок в среднем уходит из очереди досрочно в единицу времени. Интенсивность потока уходов, приходящаяся на одну заявку, стоящую в очереди, равна ν , а суммарная средняя интенсивность потока уходов, приходящаяся на все заявки, стоящие в очереди, равна $\nu \bar{r}$. Значит, абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda - \nu \bar{r}, \quad (11.28.2)$$

а относительная

$$Q = A / \lambda = 1 - \nu \bar{r} / \lambda. \quad (11.28.3)$$

Таким образом, для того чтобы найти Q , нужно прежде всего знать $\bar{r}$, которую непосредственно можно было бы найти по формуле $r = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + \dots + rp_{n+r} + \dots$. Но эта формула плоха тем, что содержит бесконечное число слагаемых. Этого можно избежать, если воспользоваться выражением для среднего числа занятых каналов $\bar{k}$ через A : $\bar{k} = A / \mu$ или, учитывая (11.28.2),

$$\bar{k} = (\lambda - \nu \bar{r}) / \mu = \rho - \beta \bar{r}. \quad (11.28.4)$$

Из (11.28.4) получим

$$\bar{r} = (\rho - \bar{k}) / \beta, \quad (11.28.5)$$

а среднее число занятых каналов $\bar{k}$ можно подсчитать как математическое ожидание случайной величины K (число занятых каналов) с возможными значениями $0, 1, 2, \dots, n$ и соответствующими вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, [1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})]$:

$$\begin{aligned}\bar{k} = & 1p_1 + 2p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} + \\ & + n[1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1})].\end{aligned}\quad (11.28.6)$$

Далее по формуле (11.28.5) вычисляем $\bar{r}$. Величину $\bar{t}_{\text{оч}}$ находим по формуле Литтла:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \quad (11.28.7)$$

Среднее число заявок в СМО

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k}, \quad (11.28.8)$$

а среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda. \quad (11.28.9)$$

Примечание. Можно доказать, что для рассмотренной СМО с «не-терпеливыми» заявками финальные вероятности существуют всегда, если только $\beta > 0$. Это подтверждается тем, что ряд в первой формуле (11.28.1) сходится при любых положительных ρ и β . По существу это означает, что очередь не может расти неограниченно: чем больше длина очереди, тем интенсивнее уходят из нее заявки.

11.29. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с «не-терпеливыми» заявками (см. задачу 11.28). Интенсивность потока заявок $\lambda = 3$ заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1 / \mu = 1$ ч; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти характеристики эффективности СМО: Q , A , $\bar{k}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$.

Решение. Имеем $\lambda = 3, \mu = 1, \nu = 2; \rho = 3, \beta = 2, n = 2$. По формулам задачи 11.28 получаем:

$$\begin{aligned}p_0 = & \left\{ 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^2}{2} \left[\frac{3}{4} + \frac{3^2}{4 \cdot 6} + \frac{3^3}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{3^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3^5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \frac{3^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \frac{3^7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \right] \right\}^{-1} \approx 0,0692;\end{aligned}$$

откуда

$$p_1 = 3p_0 \approx 0,208; \quad p_2 = \frac{3}{2}p_1 \approx 0,311; \quad p_3 = \frac{3}{4}p_2 \approx 0,234;$$

$$p_4 = \frac{3}{6}p_3 \approx 0,117; \quad p_5 = \frac{3}{8}p_4 \approx 0,044; \quad p_6 = \frac{3}{10}p_5 \approx 0,013;$$

$$p_7 = \frac{3}{12} p_6 \approx 0,003; \quad p_8 = \frac{3}{18} p_7 \approx 0,001.$$

Среднее число занятых каналов согласно (11.28.6): $\bar{k} = 1p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) \approx 1,654$; средняя длина очереди согласно (11.28.5) $\bar{r} = (\rho - \bar{k})/\beta = (3 - 1,654)/2 \approx 0,673$; абсолютная пропускная способность $A = \bar{k}\mu \approx 1,654$ заявки/ч; относительная пропускная способность $Q = A/\lambda \approx 0,551$ и далее: $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda \approx 0,224$ ч; $\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} \approx 2,327$; $t_{\text{сист}} = \bar{z}/\lambda \approx 0,776$ ч.

11.30. Простейшая СМО с «ошибками». Имеется n -канальная СМО с неограниченной очередью. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания — показательное с параметром μ . Обслуживание происходит без гарантии качества; с вероятностью p оно удовлетворяет заявку, а с вероятностью $q = 1 - p$ — не удовлетворяет, и заявка обращается в СМО вторично и либо сразу обслуживается, если нет очереди, либо становится в очередь, если она есть. Ввести состояния СМО (нумеруя их по числу заявок в СМО); найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО. Найти среднее число рекламаций, поданных в единицу времени, если каждая неудачно обслуженная заявка подает рекламацию с вероятностью R .

Решение. Состояния СМО:

s_0 — СМО свободна; s_1 — занят один канал; ...; s_k — занято k каналов ($1 \leq k \leq n$); ...; s_n — заняты все n каналов	}	очереди нет;
---	---	--------------

s_{n+r} — заняты все n каналов, а r заявок стоят в очереди ($r = 1, 2, \dots$).

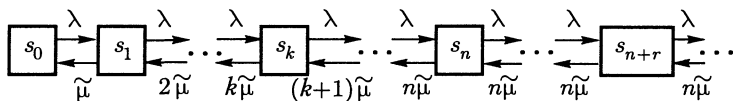


Рис. 11.30

Граф состояний приведен на рис. 11.30, где $\tilde{\mu} = p\mu$. Из этого графа видно, что данная СМО эквивалентна другой СМО с полной гарантией качества обслуживания, но с интенсивностью потока обслуживаний, равной $\tilde{\mu} = p\mu$; для этой СМО $\tilde{\rho} = \lambda / \tilde{\mu} = \lambda / (p\mu)$. Формулы (11.0.21)–(11.0.25) остаются справедливыми, но при замене ρ на $\tilde{\rho}$, μ на $\tilde{\mu}$.

11.31. Простейшая одноканальная замкнутая СМО. Один рабочий обслуживает t станков, которые время от времени отказы-

вают (требуют наладки). Интенсивность потока отказов одного станка равна λ . Если в момент отказа станка рабочий свободен, он немедленно приступает к наладке; если нет — станок становится в очередь на наладку, поток отказов станка простейший, время наладки — показательное с параметром $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обсл}}$. Ввести состояния СМО, нумеруя их по числу неисправных станков; найти финальные вероятности состояний СМО и следующие характеристики ее эффективности: A — среднее количество станков, ремонтируемое рабочим в единицу времени; $\bar{w}$ — среднее число неисправных станков; $\bar{r}$ — среднее число станков, ожидающих ремонта в очереди; $P_{\text{зан}}$ — вероятность того, что рабочий будет занят.

Решение. Состояния СМО:

s_0 — все станки исправны (рабочий свободен);

s_1 — один станок неисправен (рабочий занят его наладкой); ...;

s_k — k станков неисправны, один налаживается, $k - 1$ ждут очереди;

s_m — все m станков неисправны, один налаживается, $m - 1$ ждут очереди.

Граф состояний показан на рис. 11.31.

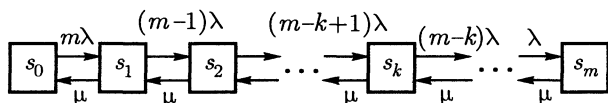


Рис. 11.31

По общим формулам схемы гибели и размножения, обозначая $\rho = \lambda/\mu$, получаем

$$p_0 = \{1 + m\rho + m(m-1)\rho^2 + \dots + m(m-1)\dots(m-k+1)\rho^k + \dots + m!\rho^{m-1}\};$$

$$p_1 = m\rho p_0; \quad p_2 = m(m-1)\rho^2 p_0; \dots;$$

$$p_k = m(m-1)\dots(m-k+1)\rho^k p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \dots;$$

$$p_m = m!\rho^m p_0. \quad (11.31.1)$$

Чтобы определить абсолютную пропускную способность A , найдем сначала вероятность того, что рабочий занят:

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0. \quad (11.31.2)$$

Если рабочий занят, он налаживает μ станков в единицу времени; значит,

$$A = (1 - p_0)\mu. \quad (11.31.3)$$

Среднее число неисправных станков $\bar{w}$ можно выразить через A с помощью следующих рассуждений. Каждый работающий станок порождает поток отказов с интенсивностью λ ; в среднем работает $m - \bar{w}$ станков; порождаемый ими поток отказов имеет интенсивность $(m - \bar{w})\lambda$; все эти неисправности ликвидируются рабочим, значит, $(1 - p_0)\mu = (m - \bar{w})\lambda$, откуда

$$\bar{w} = m - (1 - p_0) / \rho. \quad (11.31.4)$$

Среднее число $\bar{r}$ станков в очереди найдем следующим путем:

$$\bar{w} = \bar{r} + \bar{k}, \quad (11.31.5)$$

где $\bar{k}$ — среднее число обслуживаемых станков (или, иначе, среднее число занятых каналов обслуживания). В нашем случае число занятых каналов равно 0, если рабочий свободен, и 1, если он занят: $\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1(1 - p_0) = 1 - p_0$. Следовательно,

$$\bar{r} = m - (1 - p_0) / \rho - (1 - p_0)$$

или

$$\bar{r} = m - (1 - p_0)(1 + 1 / \rho). \quad (11.31.6)$$

11.32*. В условиях задачи 11.31 найти среднее время $\bar{t}_{\text{оч}}$, которое будет ожидать наладки произвольно выбранный вышедший из строя станок.

Решение. Формула Литтла, которой мы пользовались ранее, пригодна только для открытых СМО, где интенсивность потока заявок не зависит от состояния СМО. Для замкнутых СМО она непригодна. Время $\bar{t}_{\text{оч}}$ найдем с помощью следующих рассуждений. Пусть в какой-то момент t появилась заявка (отказал станок). Найдем вероятность того, что в этот момент СМО находилась в состоянии s_k ($k = 0, \dots, m - 1$) (ясно, что в состоянии s_m она находиться не могла). Рассмотрим m гипотез:

H_0 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_0 ;

H_1 — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_1 ;

H_k — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_k ...;

H_{m-1} — в момент появления заявки СМО находилась в состоянии s_{m-1} .

Априорные вероятности этих гипотез равны $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots, \dots, p_{m-1}$.

Теперь найдем апостериорные вероятности гипотез при условии, что наблюдалось событие $A = \{\text{на элементарном участке време-$

ни $(t, t + dt)$ появился отказ станка}. Условные вероятности этого события при гипотезах $H_0, H_1, \dots, H_{m-1}$ равны:

$$\mathbf{P}(A|H_0) = m\lambda dt; \quad \mathbf{P}(A|H_1) = (m-1)\lambda dt; \dots;$$

$$\mathbf{P}(A|H_k) = (m-k)\lambda dt; \dots; \mathbf{P}(A|H_{m-1}) = \lambda dt.$$

По формулам Байеса найдем апостериорные вероятности гипотез (при условии, что событие A произошло). Обозначая эти вероятности $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \dots, \tilde{p}_{m-1}$, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= \frac{mp_0}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)p_k}; \quad \tilde{p}_1 = \frac{(m-1)p_1}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)p_k}; \dots; \\ \tilde{p}_k &= \frac{(m-k)p_k}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)p_k}; \dots; \quad \tilde{p}_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k)p_k}. \end{aligned} \quad (11.32.1)$$

Зная эти вероятности, найдем полное математическое ожидание времени пребывания отказавшего станка в очереди. Если станок отказал в момент, когда система находится в состоянии s_0 , он не будет стоять в очереди; если в состоянии s_1 , то будет находиться в ней в среднем время $1/\mu$, если в состоянии s_2 — время $2/\mu$ и т.д. Умножая вероятности (11.32.1) на эти числа и складывая, получаем

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m-1} k\tilde{p}_k. \quad (11.32.2)$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить выражения для плотностей распределения случайных величин:

$T_{\text{оч}}$ — времени нахождения в очереди и

$T_{\text{пр}}$ — времени простоя станка:

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{оч}}(t) &= \delta(t) \tilde{p}_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\mu (\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} \tilde{p}_k; \\ f_{\text{пр}}(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu (\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \tilde{p}_k. \end{aligned} \right\} \quad (11.32.3)$$

При этом будет иметь место равенство:

$$M[T_{\text{пр}}] = M[T_{\text{оч}}] + M[T_{\text{обс}}] = \bar{t}_{02} + \frac{1}{\mu},$$

где

$$\bar{t}_{02} = \int_0^{\infty} t f_{02}(t) dt = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m-1} k \tilde{p}_k.$$

Находим $\tilde{p}_k \left(p_k = \frac{P(m-k, \chi)}{R(m, \chi)}; \chi = \frac{\mu}{\lambda} \right)$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k &= \frac{(m-k) P(m-k, \chi) / R(m, \chi)}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k) P(m-k, \chi) / P(m, \chi)} = \\ &= \frac{(m-k) P(m-k, \chi)}{\sum_{k=0}^m (m-k) P(m-k, \chi)} = \frac{(m-k) P(m-k, \chi)}{\sum_{k=0}^m P(k, \chi)} = \\ &= \frac{(m-k) P(m-k, \chi)}{\chi R(m-1, \chi)} = \frac{P(m-k-1, \chi)}{R(m-1, \chi)} \quad (k=0, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{\text{пр}}(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu e^{-\mu t} (\mu t)^k}{k!} \frac{\chi^{m-1} \cdot \chi^{-k} \cdot e^{-\chi}}{(m-1-k)! R(m-1, \chi)} = \\ &= \frac{\mu e^{-\mu t} \chi^{m-1} e^{-\chi}}{R(m-1, \chi)(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mu t / \chi)^k (m-1)!}{k! (m-1-k)!} = \\ &= \frac{\mu e^{-\mu t} P(m-1, \chi)}{R(m-1, \chi)} (1 + \lambda t)^{m-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $f_{\text{оч}}(t)$ и $f_{\text{пр}}(t)$ представляют собой вероятностную смесь законов распределения.

11.33. Рабочий обслуживает четыре станка ($m = 4$); каждый станок отказывает с интенсивностью $\lambda = 0,5$ отказа/ч; среднее время ремонта $\bar{t}_p = 1 / \mu = 0,8$ ч. Все потоки событий — простейшие. Пользуясь формулами задач 11.31, 11.32, найти: 1) финальные вероятности состояний; 2) пропускную способность A ; 3) среднее относительное время простоя рабочего $P_{\text{пр}}$; 4) среднее число станков в очереди $\bar{r}$; 5) среднее число неисправных станков $\bar{w}$; 6) среднее время пребывания в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ одного отказавшего станка; 7) среднюю производительность группы станков с учетом их неполной надежности, если в работающем состоянии один станок дает l единиц продукции.

Решение. $\mu = 1 / \bar{t}_p = 1,25$; $\rho = \lambda / \mu = 0,4$.

1) По формулам (11.31.1) имеем: $p_0 = \{1 + 1,6 + 1,92 + 1,53 + 0,61\}^{-1} = 6,66^{-1} \approx 0,150$; $p_1 = 1,6 p_0 \approx 0,240$; $p_2 = 1,92 p_0 \approx 0,288$; $p_3 = 1,53 p_0 \approx 0,230$; $p_4 = 0,061 p_0 \approx 0,092$;

$$2) A = 0,850\mu \approx 1,06 \text{ станка/ч;}$$

$$3) P_{\text{пр}} = p_0 = 0,150;$$

$$4) \bar{r} \approx 4 - 0,850 (1 + 2,5) \approx 1,03;$$

$$5) \bar{w} \approx 1,03 + \bar{k} \approx 1,03 + 0,85 = 1,88;$$

$$26) \text{ по формулам (11.32.1) и (11.32.2) } \bar{p}_0 = \frac{4p_0}{4p_0 + 3p_1 + 2p_2 + p_3} \approx 0,283; p_1 \approx 0,340; \bar{p}_2 = 0,270; \bar{p}_3 = 0,108; t_{\text{оч}} = 0,8 (\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 + 3\bar{p}_3) \approx 0,964 \text{ ч;}$$

$$7) \text{ производительность группы станков равна } (m - \bar{w}) l \approx 2,12 l.$$

11.34. Простейшая многоканальная замкнутая СМО. Бригада из n рабочих обслуживает m станков ($n < m$). Поток отказов каждого станка имеет интенсивность λ ; среднее время наладки станка $t_{\text{обсл}} = 1 / \mu$. Все потоки событий — простейшие. Найти финальные вероятности состояний СМО; абсолютную пропускную способность A ; среднее число неисправных станков $\bar{w}$.

Решение. Состояния СМО нумеруем по числу неисправных станков:

s_0 — все станки исправны, рабочие не заняты;

s_1 — один станок неисправен, один рабочий занят, остальные свободны; ...;

s_k — k станков неисправны, k рабочих заняты, остальные свободны ($k < m$); ...;

s_n — n станков неисправны, все рабочие заняты;

s_{n+1} — $n + 1$ станков неисправны, из них n налаживаются, один стоит в очереди; ...;

s_{n+r} — $n + r$ станков неисправны, из них n налаживаются, r в очереди ($n + r < m$); ...;

s_m — все m станков неисправны, из них n налаживаются, $m - n$ ждут очереди.

Предоставляя читателю самостоятельно построить граф состояний СМО, приведем только окончательные формулы для вероятностей состояний:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{m}{1!} \rho + \frac{m(m-1)}{2!} \rho^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \rho^k + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!n} \rho^{n+1} + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n+r-1)]}{n!n^r} \times \right. \\ \left. \times \rho^{n+r} + \dots + \frac{m!}{n!n^{m-n}} \rho^m \right\}^{-1};$$

$$p_1 = \frac{m}{1!} \rho p_0; \quad p_2 = \frac{m(m-1)}{2!} \rho^2 p_0; \dots;$$

$$p_k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \rho^k p_0 \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$p_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \rho^n p_0; \dots;$$

$$p_{n+r} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n+r-1)]}{n!n^r} \rho^{n+r} p_0 \quad (1 \leq r \leq m-1);$$

$$p_m = \frac{m!}{n!n^{m-n}} \rho^m p_0, \text{ где } \rho = \lambda / \mu. \quad (11.34.1)$$

Через эти вероятности выражается среднее число занятых рабочих:

$$k = 0 \cdot p_0 + 1p_1 + 2p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} + n(p_n + p_{n+1} + \dots + p_m) = \\ = p_1 + 2p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} + n(1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{n-1}). \quad (11.34.2)$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \bar{k}\mu, \quad (11.34.3)$$

а среднее число неисправных станков

$$\bar{w} = m - \bar{k}\mu / \lambda = m - \bar{k} / \rho. \quad (11.34.4)$$

11.35. Двое рабочих ($n = 2$) обслуживают шесть станков ($m = 6$). Станок требует наладки в среднем через каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Все потоки событий — простейшие. 1) Определить характеристики СМО: среднее число занятых рабочих k ; абсолютную пропускную способность A ; среднее число неисправных станков $\bar{w}$; 2) Установить, улучшатся ли характеристики СМО, если рабочие будут наладивать станки совместно, тратя вдвоем на наладку одного станка в среднем 5 мин.

Решение. 1) Решаем задачу в первом варианте (рабочие наладивают станки порознь). Имеем $m = 6$; $n = 2$; $\lambda = 2$; $\mu = 6$; $\rho = \lambda / \mu = 1/3$. По формулам (11.34.1)

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{6}{1} \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{1}{3^2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{3^3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \frac{1}{3^4} + \right. \\ \left. + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 2^3} \frac{1}{3^5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \frac{1}{3^6} \right\}^{-1} \approx 0,153;$$

$$p_1 = 6 / 1 \cdot 1 / 3 \cdot p_0 \approx 0,306.$$

Среднее число занятых рабочих находим по формуле (11.34.2); $\bar{k} = 1 \cdot p_1 + 2(1 - p_0 - p_1) \approx 1,235$. Абсолютная пропускная спо-

способность $A = \bar{k}\mu \approx 7,41$. Среднее число неисправных станков $\bar{w} = 6 - 7,41 / 2 \approx 2,30$.

2) Если рабочие налаживают станки вместе, то СМО превращается в одноканальную ($m = 6; n = 1$) при $\mu = 12$. Расчеты произведем для $\rho = \lambda / \mu = 1 / 6$. По формулам (11.31.1)

$$p_0 = \left\{ 1 + 1 + \frac{6 \cdot 5}{6^2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} \right\}^{-1} \approx 0,264; \quad p_1 \approx 0,264; \quad p_2 \approx 0,220; \quad p_3 \approx 0,147;$$

$$p_4 \approx 0,076; \quad p_5 \approx 0,024; \quad p_6 \approx 0,004; \quad \bar{w} = 6 - \frac{0,736}{1/6} \approx 1,59.$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 1 - p_0 = 0,736$. Однако, учитывая, что «канал» обслуживания состоит в данном случае из двух рабочих, среднее число занятых рабочих будет

$$\bar{k}' = 2 \cdot 0,736 \approx 1,47; \quad A = \bar{k}\mu = 0,736 \cdot 12 \approx 8,8.$$

Таким образом, взаимопомощь между рабочими (каналами обслуживания) в данном случае повысила среднюю занятость с 1,23 до 1,47, снизила среднее число неисправных станков с 2,30 до 1,59 и повысила пропускную способность с 7,4 до 8,8.

11.36. Имеется простейшая трехканальная СМО с отказами; на нее поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки/мин; время обслуживания заявки одним каналом $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1 / \mu = 0,5$ мин. Спрашивается, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу? При чем в этом случае среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?

Решение. 1) Находим вероятности состояний СМО без взаимопомощи между каналами по формулам Эрланга (11.0.6):

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right\}^{-1} \approx 0,158; \quad P_{\text{отн}} = p_3 = \frac{2^3}{3!} p_0 \approx 0,21;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отн}} \approx 0,79; \quad A = \lambda Q \approx 3,16.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО вычислим как вероятность Q того, что заявка будет принята к обслуживанию, умноженную на среднее время обслуживания: $t_{\text{сист}} \approx 0,79 \cdot 0,5 \approx 0,395$ мин.

2) Объединяем все три канала в один с параметром $\mu = 3 \cdot 2 = 6$; получаем

$$p_0 = \frac{1}{(1 + 2/3)^{-1}} = 0,6; \quad p_1 = (2/3) 0,6 = 0,4;$$

$$P_{\text{отк}} = p_1 = 0,4; \quad Q = 1 - P_{\text{отк}} = 0,6; \quad A = \lambda Q = 4 \cdot 0,6 = 2,4.$$

Сравнив эту пропускную способность с пропускной способностью СМО в первоначальном варианте, видим, что она не увеличилась (как это было в предыдущей задаче), а уменьшилась! Легко понять, почему это произошло: благодаря объединению двух каналов в один увеличилась вероятность отказа (того, что пришедшая заявка застанет оба канала занятыми и уйдет необслуженной).

Среднее время пребывания заявки в СМО во втором варианте будет меньше, чем в первом: $\bar{t}_{\text{сист}} = Q (1/6) = 0,1$ мин. Однако это уменьшение куплено «дорогой ценой» — тем, что ряд заявок вообще не обслуживаются и, значит, проводят в СМО нулевое время.

Почему же в предыдущей задаче объединение двух каналов в один повысило эффективность обслуживания? Предлагаем читателю подумать над этим вопросом и объяснить кажущееся противоречие. Не потому ли, что в СМО с отказами заявки не становятся в очередь?

11.37. Имеется простейшая трехканальная СМО с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ заявки/ч; среднее время обслуживания $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1 / \mu = 0,5$ ч. Выгодно ли, имея в виду: 1) среднюю длину очереди, 2) среднее время пребывания заявки в очереди, 3) среднее время пребывания заявки в СМО, объединить все три канала в один, с вдвое меньшим средним временем обслуживания?

Решение. 21) В первоначальном варианте (трехканальная СМО): $n = 3$, $\lambda = 4$, $\mu = 1 / 0,5 = 2$; $\rho = \lambda / \mu = 2$; $\chi = \rho / n = 2 / 3 < 1$. Финальные вероятности существуют. Вычисляем p_0 по формулам (11.0.21):

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4 \cdot (1/3)}{3!(1 - 2/3)} \right\}^{-1} = \frac{1}{9};$$

$$\bar{r} = \frac{2^4 \cdot 1/9}{3 \cdot 3! (1/3)^2} = \frac{8}{9} \approx 0,889; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2}{9} \approx 0,222 \text{ ч};$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} \approx 0,722.$$

2) При объединении трех каналов в один: $n = 1$; $\lambda = 4$; $\mu = 6$; $\rho = 2/3$. По формулам (11.0.12)–(11.0.14) имеем

$$\bar{r} = \frac{(2/3)^2}{1/3} \approx 1,333; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \approx 0,333 \text{ ч};$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{об}} = 1/3 + 1/6 = 0,500.$$

Таким образом, объединение трех каналов в один, несколько снизив среднее время пребывания заявки в СМО (с 0,722 до 0,500), повысило среднюю длину очереди и среднее время пребывания заявки в ней. Это произошло потому, что, пока три канала совместно обслуживают одну заявку, другим (вновь пришедшим) заявкам приходится ждать в очереди.

Повышение эффективности обслуживания, наблюдаемое при объединении каналов в замкнутой СМО, связано с тем, что интенсивность потока заявок при выходе из строя их источников (станков) уменьшается.

11.38. Рассматривается система массового обслуживания — стоянка такси, на которую поступают простейший поток пассажиров с интенсивностью λ и простейший поток автомобилей с интенсивностью μ . Пассажиры образуют очередь, которая уменьшается на единицу, когда к стоянке подходит автомобиль (берется «идеальный» случай, когда водитель безропотно везет каждого пассажира туда, куда ему требуется). В случае, если на стоянке нет пассажиров, в очередь становятся автомобили. Число мест для автомобилей на стоянке ограничено (равно m); число мест в очереди для пассажиров также ограничено (равно l). Все потоки событий — простейшие. Посадка производится мгновенно. Построить граф состояний СМО, найти финальные вероятности состояний, среднюю длину $\bar{r}_n$ очереди пассажиров, среднюю длину $\bar{r}_T$ очереди автомобилей, среднее время $\bar{t}_{оч,п}$ пребывания в очереди пассажира, среднее время $\bar{t}_{оч,т}$ пребывания в очереди такси и посмотреть, как эти характеристики изменятся при $m \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$.

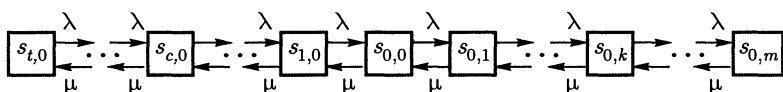


Рис. 11.38

Решение. Состояния СМО будем нумеровать соответственно числу пассажиров и автомобилей на стоянке двумя индексами: первый — число пассажиров, второй — число автомобилей. Состояние $s_{0,0}$ означает, что на стоянке нет ни пассажиров, ни автомобилей; состояние $s_{0,k}$ — нет автомобилей, k пассажиров; состояние $s_{c,0}$ — с автомобилей, ни одного пассажира. Граф состояний СМО показан на рис. 11.38. Граф соответствует схеме гибели и размножения. Применяя общие формулы (11.0.4) для этой схемы и обозначая $\lambda / \mu = \rho$, получаем:

$$p_{l-1,0} = \rho p_{l,0}; \quad p_{l-2,0} = \rho^2 p_{l,0}; \dots; \quad p_{c,0} = \rho^{l-c} p_{l,0}; \dots;$$

$$p_{0,0} = \rho^l p_{l,0}; \dots; \quad p_{0,k} = \rho^{l+k} p_{l,0}; \dots; \quad p_{0,m} = \rho^{l+m} p_{l,0};$$

$$p_{l,0} = \{1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{l+m}\}^{-1} \quad (11.38.1)$$

или, суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем ρ ,

$$p_{l,0} = (1 - \rho) / (1 - \rho^{l+m+1}). \quad (11.38.2)$$

Вероятности (11.38.1) образуют геометрическую прогрессию с первым членом $p_{l,0}$ и знаменателем ρ . Если $\rho > 1$, наивероятнейшее состояние системы будет $s_{0,m}$ — автомобилей нет, все места в очереди пассажиров заняты; если $\rho < 1$ — наивероятнейшее состояние $s_{l,0}$ — пассажиров нет, все места в очереди автомобилей заняты.

При $m \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$ финальные вероятности не существуют; при $\rho > 1$ очередь пассажиров, а при $\rho < 1$ очередь автомобилей имеют тенденцию возрастать неограниченно (эта тенденция сдерживается тем, что как число пассажиров, так и число такси в городе бесконечными быть не могут).

11.39*. В столовой самообслуживания имеется один раздаточный пункт, на котором отпускаются как первые, так и вторые блюда. Поток посетителей столовой — простейший с интенсивностью λ ; на отпуск как первого, так и второго блюда идет случайное время, распределенное по показательному закону с одним и тем же параметром μ . Некоторые посетители берут и первое, и второе (доля таких посетителей равна q), другие — только второе (доля $1 - q$). Найти: 1) условия, при которых существует устойчивый, стационарный режим работы столовой; 2) среднюю длину очереди и среднее время пребывания посетителей в столовой, если посетитель съедает одно блюдо в среднем за время τ , а два блюда — за время 2τ .

Решение. Время, идущее на обслуживание одного посетителя, представляет собой случайную величину T , распределенную с вероятностью q по закону Эрланга 2-го порядка, со средним значением $\bar{t}_{\text{обсл}} = 2 / \mu$, а с вероятностью $(1 - q)$ — по показательному закону с параметром μ . Найдем математическое ожидание случайной величины T . Для этого воспользуемся формулой полного математического ожидания с двумя гипотезами: $H_1 = \{\text{посетитель берет только второе блюдо}\}$; $H_2 = \{\text{посетитель берет оба блюда}\}$. Вероятности этих гипотез: $\mathbf{P}(H_1) = 1 - q$; $\mathbf{P}(H_2) = q$.

Полное математическое ожидание случайной величины T равно

$$\mathbf{M}[T] = \mathbf{P}(H_1) \mathbf{M}[T|H_1] + \mathbf{P}(H_2) \mathbf{M}[T|H_2] = (1 - q)(1 / \mu) + q(2 / \mu) = (q + 1) / \mu;$$

значит, столовая может обслуживать в среднем $\mu / (q + 1)$ посетителей в единицу времени; если $\lambda \geq \mu / (q + 1)$, то СМО перегружена, и финальные вероятности не существуют, если же $\lambda < \mu / (q + 1)$, то они существуют. Предположим, что $\lambda < \mu / (q + 1)$.

Для нахождения средней длины очереди $\bar{r}$, средних времен пребывания заявки в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$ и в системе (столовой) $\bar{t}_{\text{сист}}$ воспользуемся формулой Полячека — Хинчина (11.0.31). Для этого надо знать коэффициент вариации случайной величины T — времени обслуживания. Найдем сначала второй начальный момент этой величины $\mathbf{M}[T_2]$. По формуле полного математического ожидания (с теми же гипотезами H_1 и H_2) получим

$$\mathbf{M}[T^2] = (1 - q) \mathbf{M}[T^2|H_1] + q \mathbf{M}[T^2|H_2]. \quad (11.39.1)$$

При гипотезе H_1 случайная величина T распределена показательно с параметром μ :

$$\mathbf{M}[T^2|H_1] = \mathbf{D}[T|H_1] + (\mathbf{M}[T|H_1])^2 = 1/\mu^2 + (1/\mu)^2 = 2/\mu^2.$$

При гипотезе H_2 вычислим второй начальный момент величины T по формуле

$$\mathbf{M}[T^2|H_2] = \mathbf{D}[T|H_2] + (\mathbf{M}[T|H_2])^2.$$

Но $\mathbf{M}[T|H_2] = 2/\mu$, $(\mathbf{M}[T|H_2])^2 = 4/\mu^2$; дисперсия $\mathbf{D}[T|H_2]$ вдвое больше, чем $\mathbf{D}[T|H_1]$, как дисперсия суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин T_1 и T_2 , т.е. $\mathbf{D}[T|H_2] = 2/\mu^2$. Следовательно,

$$\mathbf{M}[T^2|H_2] = 2/\mu^2 + 4/\mu^2 = 6/\mu^2,$$

откуда по (11.39.1)

$$\mathbf{M}[T^2] = (1 - q) 2/\mu^2 + q 6/\mu^2 = 2(1 + 2q)/\mu^2.$$

Дисперсия случайной величины T

$$\mathbf{D}[T] = \mathbf{M}[T^2] - (\mathbf{M}[T])^2 = (1 + 2q - q^2)/\mu^2;$$

отсюда коэффициент вариации случайной величины T

$$v_\mu = \sqrt{1 + 2q - q^2} / (q + 1).$$

Подставляя это выражение и $\rho = \lambda(q + 1)/\mu$ в формулу Полячека — Хинчина (11.0.31), получаем

$$\bar{r} = \frac{(\lambda^2/\mu^2)(q + 1)^2 \left[1 + \frac{1 + 2q - q^2}{(q + 1)^2} \right]}{2[1 - (\lambda/\mu)(q + 1)]} = \frac{(\lambda^2/\mu^2)(1 + 2q)}{1 - (\lambda/\mu)(q + 1)}.$$

Далее

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r}/\lambda; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + (q + 1)/\mu + (q + 1)\tau = \bar{t}_{\text{оч}} + (q + 1)(\tau + 1/\mu).$$

11.40. Пример простейшей СМО с отказами и с приоритетом.

Имеется двухканальная СМО с отказами, на которую поступают два простейших потока заявок: I с интенсивностью λ_1 и II с интенсивностью λ_2 (будем кратко называть их «заявки I» и «заявки II»). Заявки I имеют перед заявками II приоритет, состоящий в следующем: если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты и хотя бы один из них обслуживает заявку II, то пришедшая заявка I «вытесняет» из обслуживания заявку II, становится на ее место, а та покидает СМО необслуженной. Если заявка I приходит в момент, когда все каналы заняты обслуживанием заявок I, то она получает отказ и покидает СМО. Заявка II получает отказ, если она приходит в момент, когда заняты оба канала (безразлично какими заявками).

Построить размеченный граф состояний СМО, нумеруя состояния двумя индексами (i, j) ; первый указывает число заявок I, второй — число заявок II, находящихся в СМО. Написать уравнения для финальных вероятностей состояний. Решить их при $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Выразить через p_{ij} ($i + j \leq 2$) следующие характеристики эффективности СМО:

$P_{\text{отк}}^{(1)} (P_{\text{отк}}^{(2)})$ — вероятность отказа в момент поступления для заявки I (II);

$A_1 (A_2)$ — среднее число заявок I (II), обслуживаемое СМО в единицу времени;

$\bar{k}_1 (\bar{k}_2)$ — среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок I (II);

$P_{\text{отк}}, A, \bar{k}$ — те же характеристики для СМО в целом, безотносительно к виду заявок.

Решение. Состояния СМО: s_{00} — в СМО нет заявок; s_{10} — в СМО одна заявка I и ни одной заявки II; s_{01} — в СМО ни одной заявки I и одна заявка II; s_{20} — в СМО две заявки I и ни одной заявки II; s_{11} — в СМО по одной заявке I и II; s_{02} — в СМО ни одной заявки I и две заявки II. Размеченный граф состояний СМО дан на рис. 11.40.

Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}; (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 \times \\ \times p_{20} + \mu_2 p_{11}; 2\mu_1 p_{20} = \lambda_1 p_{10} + \lambda_1 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) \times p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_{11} + 2\mu_2 p_{02};$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) p_{11} = \lambda_2 p_{10} + \lambda_1 p_{01} + \lambda_1 p_{02}; (\lambda_1 + 2\mu_2) p_{02} = \lambda_2 p_{01};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{01} + p_{11} + p_{02} = 1.$$

Решая их при $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
p_{00} &= 0,20; & p_{10} &= 0,25; & p_{20} &= 0,20; \\
p_{01} &= 0,15; & p_{11} &= 0,15; & p_{02} &= 0,005; \\
P_{\text{отк}}^{(1)} &= p_{20} = 0,2; \\
P_{\text{отк}}^{(2)} &= p_{20} + p_{11} + p_{02} = 0,40; \\
A_1 &= \lambda_1 (1 - P_{\text{отк}}^{(1)}) = 0,8.
\end{aligned}$$

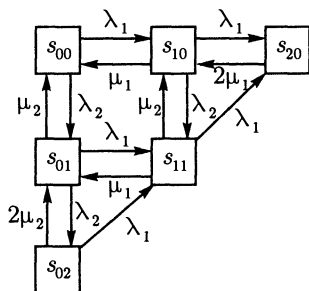


Рис. 11.40

Величину A_2 вычислим, учитывая то, что некоторые заявки II, принятые к обслуживанию, вытесняются заявками I и покидают СМО необслуженными. Среднее число таких заявок в единицу времени равно $\lambda_{11}(p_{11} + p_{02})$, следовательно,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \lambda_2 [1 - (p_{20} + p_{11} + p_{02})] - \lambda_1 (p_{11} + p_{02}) = 0,4; \\
\bar{k}_1 &= A_1 / \mu_1; & k_2 &= A_2 / \mu_2.
\end{aligned}$$

Вероятность $P_{\text{отк}}$ того, что произвольно выбранная заявка, поступившая в СМО, получит отказ, найдем по формуле полной вероятности с гипотезами: $H_1 = \{\text{пришла заявка I}\}$; $H_2 = \{\text{пришла заявка II}\}$. Вероятности этих гипотез

$$P(H_1) = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2); \quad P(H_2) = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Следовательно,

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{\text{отк}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} P_{\text{отк}}^{(2)} = 0,3.$$

Заметим, что все характеристики для заявок I можно было бы получить, совершенно игнорируя заявки II и рассматривая задачу так, как если бы на двухканальную СМО с отказами поступали только заявки I. Предоставляем читателю убедиться в этом, подсчитав все характеристики для двухканальной СМО с отказами, на которую поступает только поток заявок I.

11.41. Условия предыдущей задачи изменены так, что количество каналов СМО с отказами равно $n = 3$. Построить граф состояний СМО. Написать уравнения для финальных вероятностей p_{ij} ($i + j \leq 3$), где i — число заявок I, j — число заявок II, находящихся в СМО. Считая эти уравнения уже решенными, выразить через p_{ij} те же характеристики эффективности, что и в предыдущей задаче.

Решение. Граф состояний показан на рис. 11.41.

Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01};$$

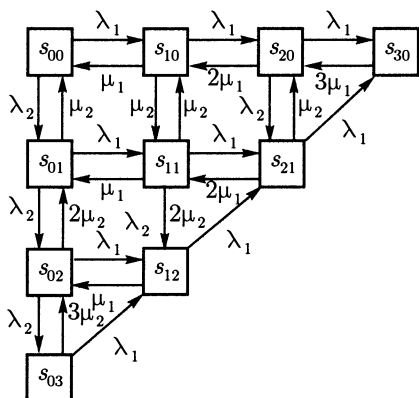


Рис. 11.41

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{10} = \lambda_1 p_{00} + 2\mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1) p_{20} = \lambda_1 p_{10} + 3\mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) p_{01} = \lambda_2 p_{00} + \mu_2 p_{11} + 2\mu_2 p_{20};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) p_{11} = \lambda_1 p_{01} + \lambda_2 p_{10} + 2\mu_1 p_{21} + 2\mu_2 p_{12};$$

$$(\lambda_1 + \mu_2 + 2\mu_1) p_{21} = \lambda_1 (p_{11} + p_{12}) + \lambda_2 p_{20};$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_2) p_{02} =$$

$$= \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + 3\mu_2 p_{03}; (\lambda_1 + \mu_1 + 2\mu_2) p_{12} = \lambda_1 (p_{02} + p_{03}) + \lambda_2 p_{11};$$

$$(\lambda_1 + 3\mu_2) p_{03} = \lambda_2 p_{02};$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$

$$P_{\text{отк}}^{(1)} = p_{30}; P_{\text{отк}}^{(2)} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03};$$

$$A_1 = \lambda_1 (1 - p_{30}); A_2 = \lambda_2 [1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1 (p_{03} + p_{12} + p_{03});$$

$$\bar{k}_1 = A_1 / \mu_1; \bar{k}_2 = A_2 / \mu_2; \bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2;$$

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{\text{отк}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P_{\text{отк}}^{(2)}.$$

11.42. Пример СМО с очередью и с абсолютным приоритетом.

Имеется одноканальная СМО с двумя местами в очереди ($m = 2$). На вход СМО поступают два простейших потока заявок I и II с интенсивностями λ_1, λ_2 . Времена обслуживания — показательные с параметрами μ_1, μ_2 . Заявка I, прибывшая в СМО, «вытесняет» заявку II, если она обслуживается, и занимает место в очереди перед ней, если она стоит в очереди. «Вытесненная» заявка II покидает СМО необслуженной, если в очереди уже нет мест, и становится в очередь, если места есть. Нумеруя состояния СМО двумя индексами i, j соответственно числу заявок I и II, находящихся в СМО, построить размеченный граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний. Считая этим уравнения уже решенными, выразить через p_{ij} ($i + j \leq 3$) следующие характеристики эффективности СМО:

$P_{\text{отк}}^{(1)} (P_{\text{отк}}^{(2)})$ — вероятность того, что заявка I (II) получит отказ немедленно после прибытия;

Q_1 (Q_2) — вероятность того, что заявка I (II) будет обслужена;
 $\bar{z}_1$ ($\bar{z}_2$) — среднее число заявок I (II), связанных с СМО;
 $\bar{r}_1$ ($\bar{r}_2$) — среднее число заявок I (II), находящихся в очереди;
 $\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)}$ ($\bar{t}_{\text{сист}}^{(2)}$) — среднее время пребывания в системе заявки I (II);
 $\bar{t}_{\text{оч}}^{(1)}$ ($\bar{t}_{\text{оч}}^{(2)}$) — среднее время пребывания в очереди заявки I (II);
 $\bar{t}_{\text{сист}}$ — среднее время пребывания в системе любой (произвольной) заявки;
 $\bar{t}_{\text{оч}}$ — среднее время пребывания в очереди любой заявки.

Решение. Состояние СМО: s_{ij} — в СМО находится i заявок I и j заявок II ($i + j \leq 3$). Размеченный граф состояний показан на рис. 11.42.

Уравнения для финальных вероятностей состояний:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 + \lambda_2) p_{00} &= \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{01}; & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{10} &= \lambda_1 p_{00} + \\
 &+ \mu_1 p_{20} + \mu_2 p_{11}; & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{20} &= \lambda_1 p_{10} + \mu_1 p_{30} + \mu_2 p_{21}; \\
 \mu_1 p_{30} &= \lambda_1 (p_{20} + p_{21}); & (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) p_{01} &= \lambda_2 p_{00} + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{02}; \\
 (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) p_{11} &= \lambda_2 p_{10} + \lambda_1 p_{01} + \mu_1 p_{21} + \mu_2 p_{12}; & (\lambda_1 + \lambda_2 + \\
 &+ \mu_2) p_{02} &= \lambda_2 p_{01} + \mu_1 p_{12} + \mu_2 p_{03}; & (\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2) p_{12} &= \lambda_1 p_{02} + \\
 &+ \lambda_2 p_{11} + \lambda_1 p_{03}; & (\lambda_1 + \mu_2) p_{03} &= \lambda_2 p_{02};
 \end{aligned}$$

$$p_{00} + p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{01} + p_{11} + p_{21} + p_{02} + p_{12} + p_{03} = 1;$$

$$P_{\text{отк}}^{(1)} = p_{30}; \quad P_{\text{отк}}^{(2)} = p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03}; \quad Q_1 = 1 - P_{\text{отк}}^{(1)} = 1 - p_{30}.$$

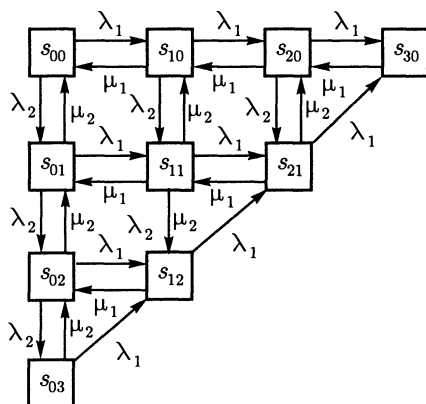


Рис. 11.42

Чтобы найти Q_2 , найдем сначала A_2 — среднее число обслуженных заявок II в единицу времени:

$$A_2 = \lambda_2(1 - P_{\text{отк}}^{(2)}) - \lambda_1(p_{03} + p_{12} + p_{21}) = \lambda_2[1 - (p_{30} + p_{21} + p_{12} + p_{03})] - \lambda_1(p_{03} + p_{12} + p_{21}).$$

Разделив это выражение на λ_2 , находим среднюю долю обслуживаемых заявок II (вероятность того, что заявка II будет обслужена): $Q_2 = A_2 / \lambda_2$. Тогда

$$\bar{z}_1 = 1(p_{10} + p_{11} + p_{12}) + 2(p_{20} + p_{21}) + 3p_{30}; \quad \bar{z}_2 = 1(p_{01} + p_{11} + p_{21}) + 2(p_{02} + p_{12}) + 3p_{03}; \\ r_1 = 1(p_{20} + p_{21}) + 2p_{30}; \quad \bar{r}_2 = 1(p_{11} + p_{21}) + 2p_{12}.$$

По формулам Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} = \bar{z}_1 / \lambda_1; \quad \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)} = \bar{z}_2 / \lambda_2; \quad \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} = \bar{r}_1 / \lambda_1; \quad \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)} = \bar{r}_2 / \lambda_2; \\ \bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{сист}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{сист}}^{(2)}; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{оч}}^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{\text{оч}}^{(2)}.$$

Все характеристики, относящиеся к заявкам I, можно вычислить и не решая уравнений (11.42), а просто игнорируя наличие заявок II, рассматривая СМО с ограниченным числом мест в очереди ($m=2$) и находя ее характеристики по формулам п. 3 (см. с. 379, 380).

11.43. Простейшая СМО без очереди и с «разогревом» каналов. На вход n -канальной СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания — показательное с параметром μ . Перед тем как начать обслуживание заявки, канал должен подготовиться («разогреться»). Время «разогрева» $T_{\text{раз}}$ имеет показательное распределение с параметром ν и не зависит от того, как давно канал прекратил работу. Заявка, заставшая канал свободным, «занимает» его и ждет, пока он разогреется, после чего поступает на обслуживание. Заявка, заставшая все каналы занятыми (обслуживаемой или ожидающей заявкой), покидает СМО и остается необслуженной. Найти финальные вероятности СМО и характеристики ее эффективности: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q , абсолютную пропускную способность A , среднее число занятых каналов k .

Решение. Будем считать, что обслуживание заявки состоит из двух фаз: ожидания разогрева и самого обслуживания: $\tilde{T}_{\text{обсл}} = T_{\text{раз}} + T_{\text{обсл}}$. Случайная величина $\tilde{T}_{\text{обсл}}$ распределена по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка (см. задачу 8.39) с параметрами μ, ν . Мы знаем, что формулы Эрланга (11.0.6) справедливы не только для показательного, но и для любого распределе-

ния времени обслуживания. Найдем величину $\tilde{\mu} = 1 / \mathbf{M}[\tilde{T}_{\text{обсл}}]$.
Имеем

$$\mathbf{M}[\tilde{T}_{\text{обсл}}] = \mathbf{M}[T_{\text{раз}}] + \mathbf{M}[T_{\text{обсл}}] = 1 / \mu + 1 / \nu = (\mu + \nu) / (\mu\nu),$$

откуда $\tilde{\mu} = (\mu\nu) / (\mu + \nu)$. Вычислив $\tilde{\rho} = \lambda / \tilde{\mu}$ и подставив это значение $\tilde{\rho}$ в формулы Эрланга (11.0.6), получим:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\tilde{\rho}}{1!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} + \dots + \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} \right\}^{-1}; \quad p_k = \frac{\tilde{\rho}^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n);$$

$$P_{\text{отк}} = p_n = \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \quad Q = 1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0; \quad A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} p_0 \right).$$

Чтобы найти среднее число занятых каналов $\bar{k}$, нужно разделить A на $\tilde{\mu}$:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} \right) p_0 = \tilde{\rho} \left(1 - \frac{\tilde{\rho}^n}{n!} \right) p_0.$$

11.44. Простейшая одноканальная СМО с очередью и «разогревом» канала. На одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания — показательное с параметром μ ($\mu > \lambda$). Перед тем как приступить к обслуживанию заявки, свободный до того канал должен «разогреться». Время «разогрева» — показательное с параметром ν и не зависит от того, как давно канал закончил работу. Если обслуживание начинается сразу же после окончания обслуживания предыдущей заявки, «разогрева» не нужно. Составить граф состояний СМО и написать уравнения для финальных вероятностей состояний; выразить через эти вероятности характеристики эффективности СМО: средние числа заявок в системе $\bar{z}$ и в очереди $\bar{r}$, средние времена пребывания заявок в системе $\bar{t}_{\text{сист}}$ и в очереди $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. Состояния СМО (рис. 11.44):

s_{00} — канал свободен, не разогрет;

s_{01} — пришла одна заявка и ждет, канал разогревается;

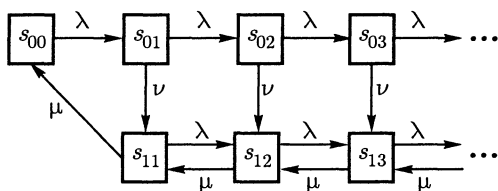


Рис. 11.44

s_{11} — канал разогрет, одна заявка обслуживается, очереди нет;
 s_{02} — канал разогревается, в очереди две заявки; ...;
 s_{0l} — канал разогревается, в очереди l заявок;
 s_{1l} — канал обслуживает одну заявку, $l - 1$ заявка стоит в очереди; ...

Уравнения для финальных вероятностей:

$$\lambda p_{00} = \mu p_{11}; \quad (\lambda + \nu) p_{01} = \lambda p_{00}; \quad (\lambda + \mu) p_{11} = \nu p_{01} + \mu p_{12};$$

$$(\lambda + \nu) p_{02} = \lambda p_{01}; \quad (\lambda + \mu) p_{12} = \nu p_{02} + \lambda p_{11} + \mu p_{13}; \dots;$$

$$(\lambda + \nu) p_{0,l} = \lambda p_{0,l-1};$$

$$(\lambda + \mu) p_{1,l} = \nu p_{0,l} + \lambda p_{1,l-1} + \mu p_{1,l+1}; \dots;$$

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{\infty} l (p_{0,i} + p_{1,i}); \quad \bar{r} = \sum_{l=1}^{\infty} l (p_{0,l} + p_{1,l+1}).$$

По формуле Литтла

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda.$$

11.45*. Имеется одноканальная СМО с очередью, ограниченной числом мест $m = 2$. На вход СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания распределено по обобщенному закону Эрланга с параметрами μ_1, μ_2 (см. задачу 8.31). Найти вероятности состояний СМО:

s_0 — в СМО нет заявок;

s_1 — в СМО одна заявка (очереди нет);

s_2 — в СМО две заявки (одна обслуживается, одна в очереди);

s_3 — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди).

1) Найти характеристики эффективности СМО: $P_{\text{отк}}, Q, A, \bar{z}, \bar{r}, \bar{t}_{\text{сист}}, \bar{t}_{\text{оч}}$. Вычислить их для значений $\lambda = 2, \mu_1 = 6; \mu_2 = 12$.

2) Сравнить их с теми, которые получились бы для простейшей СМО с таким же значением λ и значением μ , равным $1 / \bar{t}_{\text{обсл}}$, где $\bar{t}_{\text{обсл}}$ — среднее время обслуживания заявки в данной СМО.

Решение. Поток обслуживаний — не пуассоновский, значит, система не марковская, и найти вероятности состояний СМО по обычной методике, которую мы применяем для марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, нельзя. Однако процесс, протекающий в СМО, можно искусственно свести к марковскому с помощью так называемого «метода фаз».

Представим обслуживание состоящим из двух фаз (I и II), продолжающихся соответственно время T_1 и T_2 ; полное время обслуживания $T_{\text{обсл}} = T_1 + T_2$, где T_1 имеет показательное распределение с параметром μ_1 ; T_2 — показательное распределение с параметром μ_2 . Тогда $T_{\text{обсл}}$ будет иметь обобщенное распределение Эрланга с параметрами μ_1 и μ_2 (см. задачу 8.39).

Введем следующие состояния СМО:

s_0 — СМО свободна;

s_{11} — в СМО одна заявка, обслуживание в первой фазе;

s_{12} — в СМО одна заявка, обслуживание во второй фазе;

s_{21} — в СМО две заявки (одна обслуживается и одна в очереди); обслуживание в первой фазе;

s_{22} — в СМО две заявки, обслуживание во второй фазе;

s_{31} — в СМО три заявки, обслуживание в первой фазе;

s_{32} — в СМО три заявки, обслуживание во второй фазе.

Дальнейших состояний нет, так как (по условию $m = 2$) больше трех заявок в СМО быть не может. Размеченный граф состояний СМО показан на рис. 11.45. При таком подходе состояние s_1 расчленим на два: s_{11} и s_{12} (или, короче, $s_1 = s_{11} + s_{12}$); аналогично $s_2 = s_{21} + s_{22}$, $s_3 = s_{31} + s_{32}$. Уравнения для финальных вероятностей, соответствующих графу рис. 11.45, будут:

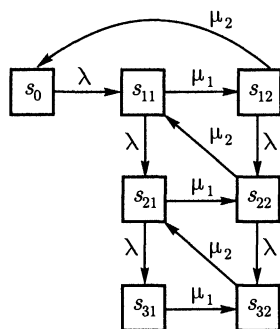


Рис. 11.45

$$\lambda p_0 = \mu_2 p_{12}; \quad (\lambda + \mu_1) p_{11} = \lambda p_0 + \mu_2 p_{22}; \quad (\lambda + \mu_2) p_{12} = \mu_1 p_{11};$$

$$(\lambda + \mu_1) p_{21} = \mu_2 p_{32} + \lambda p_{11}; \quad (\lambda + \mu_2) p_{22} = \mu_1 p_{21} + \lambda p_{12};$$

$$\mu_1 p_{31} = \lambda p_{21}; \quad \mu_2 p_{32} = \mu_1 p_{31} + \lambda p_{22};$$

нормировочное условие $p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

Решая эти уравнения, получаем:

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{(\lambda + \mu_2) \lambda}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^3 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2^2} + \frac{\lambda^4 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^3 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^3} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^3 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2^3} + \frac{\lambda^4 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^3 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^3 \mu_2^2} \right\}^{-1};$$

$$p_{11} = \frac{(\lambda + \mu_2) \lambda}{\mu_1 \mu_2} p_0; \quad p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_2} p_0; \quad p_{21} = \frac{\lambda^3 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^2 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2} p_0;$$

$$p_{22} = \frac{\lambda^2 (\mu_1 + \mu_2 + \lambda)}{\mu_1 \mu_2^2} p_0; \quad p_{31} = \frac{\lambda^4 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^3 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^3 \mu_2^2} p_0;$$

$$p_{32} = \left[\frac{\lambda^4 (\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \lambda^3 \mu_2 (\lambda + \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^3} + \frac{\lambda^3 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2^3} \right] p_0. \quad (11.45.1)$$

Далее находим финальные вероятности состояний s_1, s_2, s_3 :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{11} + p_{12} = \frac{\lambda}{\mu_1 \mu_2} (\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_0; \\ p_2 &= p_{21} + p_{22} = \frac{\lambda^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} [(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \mu_2(\lambda + \mu_2)] p_0; \\ p_3 &= p_{31} + p_{32} = \frac{\lambda^3}{\mu_1^3 \mu_2^3} [(\lambda \mu_2 + \lambda \mu_1 + \mu_1^2)(\lambda + \mu_1 + \mu_2) + \\ &\quad + \mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\lambda + \mu_2)] p_0, \end{aligned} \quad (11.45.2)$$

где p_0 определяется первой из формул (11.45.1).

Характеристики эффективности СМО могут быть найдены через вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 по формулам:

$$\begin{aligned} P_{\text{отк}} &= p_3; \quad Q = 1 - p_3; \quad A = \lambda (1 - p_3); \quad \bar{z} = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3; \\ \bar{r} &= 1p_2 + 2p_3; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad t_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda. \end{aligned} \quad (11.45.3)$$

Подставляя в формулы (11.45.1) численные данные $\lambda = 2, \mu_1 = 6, \mu_2 = 12$, получаем: $p_0 = 0,540; p_{11} = 0,182; p_{12} = 0,090; p_{21} = 0,087; p_{22} = 0,050; p_{31} = 0,029; p_{32} = 0,022$. Отсюда, возвращаясь к исходной (немарковской) СМО, имеем: $p_0 = 0,540; p_1 = 0,272; p_2 = 0,137; p_3 = 0,051$.

Далее, по формулам (11.45.3):

$$P_{\text{отк}} = 0,051; \quad Q = 0,949; \quad A = 1,89; \quad \bar{z} = 0,705; \quad \bar{r} = 0,243; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = 0,352; \quad t_{\text{оч}} = 0,122.$$

2) Подсчитаем те же характеристики для простейшей СМО с теми же $\lambda = 2, \mu = (1/\mu_1 + 1/\mu_2)^{-1} = 4$. По формулам (11.0.12)–(11.0.15) имеем:

$$\begin{aligned} \rho &= 0,5; \quad p_0 \approx 0,533; \quad k = 1 - p_0 \approx 0,467; \quad p_1 = \rho p_0 \approx 0,267; \\ p_2 &= \rho^2 p_0 \approx 0,133; \quad p_3 = \rho^3 p_0 \approx 0,067; \quad P_{\text{отк}} = p_3 \approx 0,067; \\ Q &= 1 - p_3 \approx 0,933; \quad A \approx 1,866; \quad \bar{z} \approx 0,733; \quad \bar{r} \approx 0,267; \quad \bar{t}_{\text{сист}} = 0,367; \\ &\quad \bar{t}_{\text{оч}} \approx 0,133. \end{aligned}$$

Видим, что наша немарковская СМО имеет над простейшей СМО некоторое преимущество по пропускной способности и очень мало отличается от нее (в лучшую сторону) по времени пребывания заявки в СМО и по длине очереди.

11.46*. Имеется одноканальная СМО с двумя местами в очереди. На ее вход поступает пальмовский поток заявок с интервалом T , распределенным по обобщенному закону Эрланга с параметрами

λ_1, λ_2 ; время обслуживания — показательное с параметром μ . 1) Применяя метод фаз, написать уравнения для финальных вероятностей состояний p_0, p_1, p_2, p_3 . Выразить через эти вероятности характеристики СМО: $P_{\text{отк}}, Q, A, \bar{z}, \bar{r}, \bar{t}_{\text{сист}}, \bar{t}_{\text{оч}}$. 2) Вычислить финальные вероятности и характеристики эффективности для следующих исходных данных: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6; \mu = 4$ и сравнить их с теми, которые соответствуют простейшей СМО с параметрами $\lambda = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)^{-1} = 2, \mu = 4$, рассмотренной в задаче 11.45.

Решение. 1) Если рассматривать, как мы делаем обычно, состояния СМО, нумеруя их соответственно числу заявок в СМО: s_0, s_1, s_2, s_3 , то система не будет марковской. Чтобы ее марковизировать, разделим на две фазы (I и II) не время обслуживания, а интервал T между заявками: $T = T_1 + T_2$, где случайные величины T_1 и T_2 имеют показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Состояния СМО будем нумеровать по числу заявок в СМО и номеру фазы между заявками:

s_{01} — заявок в СМО нет; интервал между заявками в первой фазе;
 s_{02} — заявок в СМО нет; интервал между заявками во второй фазе;

s_{11} — в СМО одна заявка (обслуживается); интервал между заявками в первой фазе;

s_{12} — в СМО одна заявка (обслуживается); интервал между заявками во второй фазе;

s_{21} — в СМО две заявки (одна обслуживается, другая в очереди); интервал между заявками в первой фазе;

s_{22} — в СМО две заявки (одна обслуживается, другая в очереди), интервал между заявками во второй фазе;

s_{31} — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди); интервал между заявками в первой фазе;

s_{32} — в СМО три заявки (одна обслуживается, две в очереди), интервал между заявками во второй фазе.

Граф состояний СМО дан на рис. 11.46.

Уравнения для финальных вероятностей:

$$\lambda_1 p_{01} = \mu p_{11}; \quad \lambda_2 p_{02} = \lambda_1 p_{01} + \mu p_{12}; \quad (\lambda_1 + \mu) p_{11} = \lambda_2 p_{02} + \mu p_{21};$$

$$(\lambda_2 + \mu) p_{12} = \lambda_1 p_{11} + \mu p_{22}; \quad (\lambda_1 + \mu) p_{21} = \lambda_2 p_{12} + \mu p_{31};$$

$$(\lambda_2 + \mu) p_{22} = \lambda_1 p_{21} + \mu p_{32}; \quad (\lambda_1 + \mu) p_{31} = \lambda_2 p_{22} + \lambda_2 p_{32};$$

$$(\lambda_2 + \mu) p_{32} = \lambda_1 p_{31}.$$

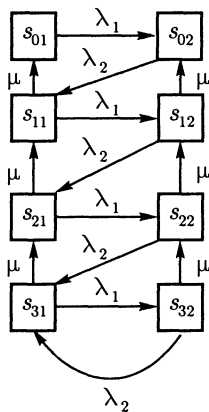


Рис. 11.46

Нормировочное условие $p_{01} + p_{02} + p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$.

Эти уравнения удобнее всего решать, выражая вероятности p_{ij} через последнюю, p_{32} . Выражения для вероятностей p_{ij} ($i = 0, 1, 2, 3; j = 1, 2$) имеют вид:

$$p_{32} = \left\{ 1 + \frac{\mu + \lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\mu(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{\mu(\mu^2 + \lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2(\mu^2 + 2\lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} + \right. \\ \left. + \frac{\mu^3(\mu^3 + 3\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + 3\lambda_1^2 \mu + 4\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} + \right. \\ \left. + \frac{\mu^3(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right\}^{-1};$$

$$p_{31} = \frac{\mu + \lambda_2}{\lambda_1} p_{32}; \quad p_{22} = \frac{\mu(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} p_{32};$$

$$p_{21} = \frac{\mu(\mu^2 + \lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2} p_{32};$$

$$p_{12} = \frac{\mu^2(\mu^2 + 2\lambda_1 \mu + 2\lambda_2 \mu + \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{11} = \frac{\mu^2(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} p_{32};$$

$$p_{02} = \frac{\mu^3}{\lambda_2^3 \lambda_2^2} (\mu^3 + 3\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 4\lambda_1 \lambda_2 \mu + \\ + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_2^3) p_{32};$$

$$p_{01} = \frac{\mu^3(\mu^3 + 2\lambda_1 \mu^2 + 3\lambda_2 \mu^2 + \lambda_1^2 \mu + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu + 3\lambda_2^2 \mu + \lambda_2^3)}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} p_{32}.$$

Переходя обратно к исходной (немарковской) СМО, получаем:

$$p_0 = p_{01} + p_{02}; \quad p_1 = p_{11} + p_{12}; \quad p_2 = p_{21} + p_{22}; \quad p_3 = p_{31} + p_{32}.$$

Далее, $P_{\text{отк}} = p_3$; $Q = 1 - p_3$; $A = Q\lambda$; $z = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3$; $\bar{r} = 1p_2 + 2p_3$; $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda$; $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda$.

Финальные вероятности состояний: $p_{01} \approx 0,308$; $p_{02} \approx 0,208$; $p_{11} \approx 0,231$; $p_{12} \approx 0,082$; $p_{21} \approx 0,091$; $p_{22} \approx 0,032$; $p_{31} \approx 0,037$; $p_{32} \approx 0,011$.

Для исходной (немарковской) СМО $p_0 \approx 0,616$; $p_1 \approx 0,313$; $p_2 \approx 0,123$; $P_{\text{отк}} \approx 0,048$; $Q \approx 0,952$; $A \approx 1,904$; $\bar{z} \approx 0,703$; $\bar{r} \approx 0,219$; $\bar{t}_{\text{сист}} \approx 0,352$; $\bar{t}_{\text{оч}} \approx 0,110$.

Из сравнения этих данных с результатами предыдущей задачи 11.45 делаем вывод, что СМО задачи 11.46 имеет незначительное преимущество перед СМО задачи 11.45 по всем характеристикам эффективности и несколько большее преимущество перед простейшей СМО с теми же λ, μ .

11.47. Простейшая СМО без очереди с неограниченной взаимопомощью между каналами. На n -канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Каналы работают со «взаимопомощью» — если в момент обслуживания очередной заявки в СМО есть свободные каналы, то все они подключаются к обслуживанию данной заявки. Интенсивность простейшего потока обслуживаний заявки есть некоторая функция $\mu = \varphi(k)$ числа k каналов, одновременно обслуживающих ее. Построить граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Выразить через них характеристики эффективности СМО: вероятность отказа $P_{\text{отк}}$, относительную пропускную способность Q , среднее число занятых каналов $\bar{k}$. Подсчитать эти характеристики при $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu(k) = k\mu$, $\mu = 0,5$ и сравнить их с теми же характеристиками в случае отсутствия взаимопомощи между каналами.

Решение. Так как в момент прихода первой же заявки все n каналов подключаются к ее обслуживанию, то это означает, что все каналы вместе всегда работают как один. СМО превращается в одноканальную СМО с отказами; ее состояния: s_0 — ни один канал не занят; s_n — все n каналов заняты. Размеченный граф состояний показан на рис. 11.47. Пользуясь этим графом, получаем финальные вероятности состояний:

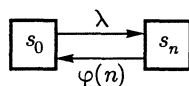


Рис. 11.47

$$p_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\varphi(n)} \right\}^{-1} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n) + \lambda};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\varphi(n)} p_0 = \frac{\lambda}{\varphi(n) + \lambda}.$$

При $\varphi(n) = n\mu$ имеем $p_0 = (n\mu) / (n\mu + \lambda)$; $p_1 = \lambda / (n\mu + \lambda)$.

При $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 0,5$ имеем $p_0 = 2 / 3$; $P_{\text{отк}} = p_1 = 1 / 3$; $p_1 = 1 / 3$; $Q = 1 - p_1 = 2 / 3$; $A = \lambda Q = 2 / 3 \approx 0,667$.

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = 4 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 4/3 \approx 1,333$. Этот же результат получим, разделив A на μ : $\bar{k} = (2/3) / 0,5 = 4/3$.

Для сравнения рассчитаем характеристики эффективности четырехканальной СМО без взаимопомощи между каналами [см. формулы Эрланга (11.0.6) и (11.0.7)]; при $\rho = \lambda / \mu = 2$

$$p_0 = \{1 + \rho + \rho^2 / 2 + \rho^3 / 6 + \rho^4 / 24\}^{-1} = 1 / 7;$$

$$P_{\text{отк}} = p_4 = (2 / 3)(1 / 7) = 2 / 21;$$

$$A = \lambda (1 - 2 / 21) \approx 0,905; \quad Q = A; \quad \bar{k} = A / \mu \approx 1,81.$$

Сравнивая эти характеристики с ранее полученными для СМО со взаимопомощью между каналами, приходим к выводу, что в наших условиях взаимопомощь невыгодна. Это на самом деле так — для СМО с отказами неограниченная взаимопомощь (когда все каналы сразу «набрасываются» на одну заявку, а тем временем вновь приходящие заявки получают отказ) всегда невыгодна.

11.48. Простейшая СМО без очереди с равномерной взаимопомощью между каналами. Имеется простейшая n -канальная СМО с отказами, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ . Между каналами осуществляется взаимопомощь, но не объединением всех каналов в один, как в предыдущем примере, а так называемая «равномерная» организованная следующим образом. Если заявка приходит в момент, когда все n каналов свободны, то все каналы принимаются за ее обслуживание; если в момент обслуживания заявки приходит еще одна, часть каналов переключается на ее обслуживание; если, пока обслуживаются эти две заявки, приходит еще заявка, часть каналов переключается на ее обслуживание и т.д., пока не окажутся занятыми все n каналов; если они все заняты, вновь пришедшая заявка получает отказ. Функция $\varphi(k) = k\mu$, т.е. обслуживание k каналами в k раз быстрее обслуживания одним каналом.

Составить размеченный граф состояний СМО, определить финальные вероятности состояний и характеристики эффективности: $Q, A, \bar{k}$. Подсчитать их при $n = 4, \lambda = 1, \mu = 0,5$, т.е. в условиях задачи 11.47, и сравнить с тем, что получается без взаимопомощи.¹⁾

Решение. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в ней. Граф состояний (11.48) — тот же, что для простейшей одноканальной СМО с производительностью $\mu^* = n\mu$ и ограниченной очередью, имеющей $n - 1$ мест. Для определения характеристик можно воспользоваться формулами (11.0.16) — (11.0.19); полагая $\rho = \rho^* = \lambda / \mu^* = \lambda / (n\mu) = 0,5$; имеем при $m = 3$:

¹⁾ При нашей постановке задачи все равно, какая часть каналов переключается на обслуживание вновь прибывшей заявки; важно, что все время работают все n каналов и ни одна вновь пришедшая заявка не получает отказа, пока в СМО не окажется n заявок и все n каналов будут по одному их обслуживать.

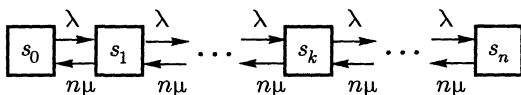


Рис. 11.48

$$p_0 = \frac{1 - \rho^*}{1 - (\rho^*)^5} = \frac{0,5}{1 - 0,5^5} \approx 0,514; \quad p_4 = (\rho^*)^4 p_0 \approx 0,032;$$

$$A = \lambda (1 - p_4) \approx 0,968; \quad Q = 1 - p_4 \approx 0,968; \quad \bar{k} = A / \mu^* \approx 1,936.$$

В условиях задачи 11.47 при отсутствии взаимопомощи $A \approx 0,905$; $Q \approx 0,905$; $k \approx 1,81$, т.е. взаимопомощь несколько увеличивает пропускную способность СМО. В данном случае это увеличение незначительно, так как СМО сравнительно мало нагружена.

11.49. Для простейшей трехканальной СМО с отказами и параметрами: $\lambda = 4$ заявки/мин, среднее время обслуживания заявки одним каналом $1/\mu = 0,5$ мин, интенсивность обслуживания заявки k каналами $\varphi(k) = k\mu$ определить характеристики эффективности СМО Q , A , $\bar{k}$ для трех вариантов использования СМО: 1) при отсутствии взаимопомощи; 2) при неограниченной взаимопомощи; 3) при равномерной взаимопомощи между каналами.

О т в е т. 1) $Q \approx 0,79$; $A \approx 3,16$; $\bar{k} \approx 1,58$; 2) $Q = 0,6$; $A = 2,4$; $\bar{k} = 1,2$; 3) $Q \approx 0,887$; $A \approx 3,51$; $\bar{k} \approx 1,76$.

11.50. Простейшая СМО с неограниченной очередью и со взаимопомощью между каналами. Имеется простейшая n -канальная СМО, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ ; время обслуживания заявки одним каналом — показательное с параметром μ . Интенсивность потока обслуживаний заявки k каналами пропорциональна их числу: $\varphi(k) = k\mu$. Каналы распределяются по заявкам, находящимся в СМО, произвольным образом, но при условии, что если в СМО находится хотя бы одна заявка, все n каналов заняты обслуживанием.

Построить граф состояний, найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности: k , $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Р е ш е н и е. Граф состояний этой СМО совпадает с графом состояний простейшей одноканальной СМО с неограниченной очередью, с интенсивностью потока заявок λ и потока обслуживаний $n\mu$ (см. § 2, с. 366, 367). Полагая в формулах (11.0.12)–(11.0.15) $\rho = \chi = \lambda / (n\mu)$, получаем $p_0 = 1 - \chi$; $p_k = \chi^k (1 - \chi)$ ($k = 1, 2, \dots$); $\bar{z} = \chi / (1 - \chi)$; $\bar{r} = \chi^2 / (1 - \chi)$; $\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\chi}{\lambda (1 - \chi)}$; $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\chi^2}{\lambda (1 - \chi)}$.

Характеристики эффективности СМО в данном случае совершенно не зависят от того, обслуживают ли каналы заявки «все как один» или «равномерно», так как заявки не получают отказов

(заметим, что не меняются от этого только средние значения случайных величин $Z, R, T_{\text{сист}}, T_{\text{оч}}$, а не их распределения).

11.51. Простейшая СМО с ограниченной очередью и равномерной взаимопомощью между каналами. Рассматривается простейшая СМО с n каналами и равномерной взаимной помощью между каналами. На СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ ; поток обслуживаний одного канала — простейший с интенсивностью μ ; k каналов, обслуживающих одну заявку, дают суммарный поток обслуживаний с интенсивностью $\varphi(k) = k\mu$. Каналы распределяются между заявками «равномерно» в том смысле, что каждая вновь пришедшая заявка начинает обслуживаться, если только есть возможность выделить для этого канал. Заявка, пришедшая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь. Число мест в очереди m ; если они все заняты, заявка получает отказ.

Нумеруя состояния СМО по числу заявок, находящихся в ней, составить размеченный граф состояний СМО и найти финальные вероятности состояний. Найти характеристики эффективности СМО: $P_{\text{отк}}, Q, A, \bar{z}, \bar{r}, \bar{t}_{\text{сист}}, \bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. Состояния СМО:

s_0 — система свободна;

s_1 — одна заявка обслуживается всеми n каналами; ...;

s_k — k заявок обслуживаются всеми n каналами ($1 < k < n$); ...;

s_n — n заявок обслуживаются n каналами, одна заявка стоит в очереди; ...;

s_{n+m} — n заявок обслуживаются n каналами, m заявок стоят в очереди.

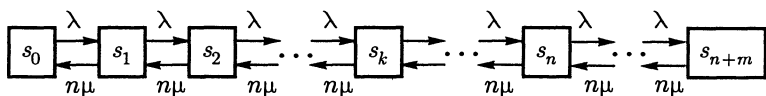


Рис. 11.51

Граф состояний СМО дан на рис. 11.51. Этот граф состояний СМО совпадает с графом состояний простейшей одноканальной СМО с ограниченным числом m мест в очереди, интенсивностью потока заявок λ и интенсивностью потока обслуживаний $n\mu$ (см. п. 3, с. 367). Подставляя в формулы (11.0.16)–(11.0.20) $\chi = \lambda / (n\mu)$ вместо ρ и $n + m$ вместо m , получаем:

$$p_0 = (1 - \chi) / (1 - \chi^{n+m+2}); \quad p_k = \chi^k p_0 \quad (k = 1, \dots, n+m);$$

$$P_{\text{отк}} = p_{n+m}; \quad Q = 1 - p_{n+m}; \quad A = \lambda Q.$$

$$\bar{r} = \frac{\chi^2 [1 - \chi^{n+m} (n+m+1 - (n+m)\chi)]}{(1 - \chi^{n+m+2})(1 - \chi)}; \quad \bar{z} = \bar{r} + \bar{k};$$

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{z} / \lambda; \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda.$$

11.52. На вход автоматизированного банка данных (АБД) подается в среднем $\lambda = 335$ статей/ч. Первая операция по обработке входного потока первичных информационных документов (ПИД) состоит в отборе тех статей, которые должны вводиться в АБД. В отборе участвует 6 чел. (отборщиков); средняя производительность каждого отборщика $\mu = 60$ статей/ч. Известно, что в среднем из входного потока отбирается для ввода в АБД 61,3 % ПИД. Все потоки событий — простейшие. Рассматривая систему отбора ПИД для ввода в АБД как шестиканальную ($n = 6$) СМО с неограниченной очередью, определить ее характеристики эффективно-сти: A , Q , $\bar{k}$, $\bar{z}$, $\bar{r}$, $\bar{t}_{\text{сист}}$, $\bar{t}_{\text{оч}}$.

Решение. Так как очередь неограниченна, $Q = 1$; $A = \lambda$. Интенсивность потока ПИД, отобранных для ввода в АБД, $\lambda_0 = \lambda p$, где $p \approx 0,613$, т.е. $\lambda_0 = 335 \cdot 0,613 \approx 205$ статей/ч.

Интенсивность потока ненужных для ввода в АБД ПИД будет $\lambda_n = \lambda (1 - p) \approx 130$ статей/ч.

Среднее число человек, занятых отбором ПИД, $\bar{k} = \lambda / \mu = \rho = 5,58$ и не зависит от числа каналов (отборщиков). Стационарный режим в СМО существует, если выполнено условие $\chi = \lambda / (n\mu) < 1$; в нашем случае оно выполнено ($\chi = 0,93$).

Вероятность того, что в СМО будут заняты работой все n отборщиков [см. формулу (11.0.22)], определяем по формуле:

$$p_n = \mathbf{P}(n, \rho) / \left[R(n, \rho) + \mathbf{P}(n, \rho) \frac{\chi}{1 - \chi} \right].$$

Пользуясь таблицами, данными в приложениях 1, 2, получаем:

$$p_6 = 0,1584 / \left(0,7603 + 0,1584 \frac{0,93}{0,07} \right) \approx 0,0569.$$

Среднее число ПИД в очереди [см. (11.0.23)] $\bar{r} = p_n \chi / (1 - \chi)^2 \approx 10,8$. Среднее время пребывания ПИД в очереди $\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{r} / \lambda \approx 1,87$ мин. Среднее число ПИД, находящихся в системе (в очереди и на обработке), $\bar{z} = r + \rho \approx 15,38$. Среднее время пребывания ПИД в системе $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{оч}} + 1 / \mu \approx 2,87$ мин.

11.53. На вход СМО (рис. 11.53) подается простейший поток заявок с интенсивностью λ . Обслуживание состоит из двух последовательных фаз, выполняемых в СМО₁ и СМО₂. В СМО₁ проводится обслуживание заявки, а в СМО₂ контролируется качество проведенного в СМО₁ обслуживания. Если в СМО₂ не обнаружено недостатков в обслуживании, то заявка считается обслуженной в СМО; если в СМО₂ обнаружены недостатки в обслуживании, то заявка возвращается на повторное обслуживание

в СМО₁ (см. рис. 11.53). Вероятность того, что заявка, обработанная в СМО₁, будет в результате контроля в СМО₂ возвращена на повторное обслуживание в СМО₂, равна $1 - p$ и не зависит от того, сколько раз она была обработана в СМО₁.

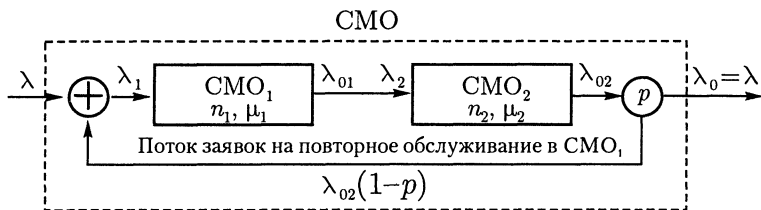


Рис. 11.53

СМО₁ и СМО₂ представляют собой n_1 - и n_2 -канальные системы с неограниченной очередью и интенсивностью потоков обслуживаний в каждом канале μ_1 и μ_2 соответственно. Время повторного обслуживания заявки в канале в СМО₁ и повторного контроля качества обслуживания заявки в канале в СМО₂ распределено (так же, как и при проведении этих операций впервые) по показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в СМО₁ и СМО₂, простейшие.

Решение. Обозначим λ_1 интенсивность потока заявок, подаваемых на вход СМО₁. Очевидно, что $\lambda_1 > \lambda$, так как на вход СМО₁ будет поступать поток заявок, направляемых на обслуживание в СМО₁ впервые (интенсивность потока λ), плюс поток заявок, направляемых на повторное обслуживание (см. рис. 11.53). Если стационарный режим существует, то интенсивность потока обслуженных в СМО₁ заявок λ_{01} будет равна интенсивности λ_1 . Поток обслуженных в СМО₁ заявок поступает в СМО₂, следовательно, на вход СМО₂ поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_{01}$. В силу наличия стационарного режима в СМО₂ интенсивность потока заявок на выходе СМО₂ (λ_{02}) будет также равна λ_2 . Таким образом,

$$\lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \quad (11.53.1)$$

Очевидно, что интенсивность потока обслуженных заявок λ_0 на выходе СМО в стационарном режиме будет равна интенсивности входного потока λ .

Интенсивность потока обслуженных в СМО заявок λ_0 будет равна интенсивности потока заявок на выходе СМО₂ (λ_{02}), умно-

женной на вероятность p того, что заявка не будет возвращена в СМО₁ на повторное обслуживание:

$$\lambda_{02}p = \lambda_0 = \lambda, \quad (11.53.2)$$

откуда

$$\lambda_{02} = \lambda / p. \quad (11.53.3)$$

Таким образом [см. формулы (11.53.1)–(11.53.3)],

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda / p. \quad (11.53.4)$$

Для того чтобы существовал стационарный режим работы в СМО, необходимо, чтобы как СМО₁, так и СМО₂ «справлялись» с потоком поступающих на них заявок; следовательно, должны выполняться два условия:

$$\chi_1 = \lambda_1 / (n_1 \mu_1) = \lambda / (p n_1 \mu_1) < 1; \quad (11.53.5)$$

$$\chi_2 = \lambda_2 / (n_2 \mu_2) = \lambda / (p n_2 \mu_2) < 1. \quad (11.53.6)$$

Они вытекают из того, что как СМО₁, так и СМО₂ представляют собой n_1 - и n_2 -канальные системы с интенсивностью обслуживания в каналах μ_1 и μ_2 соответственно, с неограниченными очередями (см. п. 4, с. 368).

11.54. Для условий предыдущей задачи определить среднее время пребывания заявки в СМО и среднее число заявок, находящихся в СМО.

Решение. Среднее время однократного пребывания заявки в СМО₁ $\bar{t}_1$ (см. рис. 11.53) будет определяться из условия, что на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda / p$, число каналов обслуживания n_1 , интенсивность обслуживания μ_1 , число мест в очереди не ограничено. Для этих условий в соответствии с (11.0.21)–(11.0.25) имеем

$$\bar{t}_1 = (\rho_1 + \bar{r}_1) \lambda_1^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 \cdot n_1! (1 - \chi_1)^2 \lambda_1}, \quad (11.54.1)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{p \mu_1}; \quad \chi_1 = \frac{\rho_1}{n_1}; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_1^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 \cdot n_1! (1 - \chi_1)} \right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_2$ — среднее время однократного пребывания заявки в СМО₂ для условий $\lambda_2 = \lambda / p$; n_2 ; μ_2 :

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2) \lambda_2^{-1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 \cdot n_2! (1 - \chi_2)^2 \lambda_2}, \quad (11.54.2)$$

где

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{p\mu_2}; \quad \chi_2 = \frac{\rho_2}{n_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{p};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 \cdot n_2!} \frac{1}{1 - \chi_2} \right]^{-1}.$$

Следовательно, среднее время однократной обработки заявки СМО₁ и СМО₂ будет

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \quad (11.54.3)$$

Из условия задачи 11.53 следует, что случайная величина X — число циклов обработки одной заявки в СМО₁ и СМО₂ будет иметь геометрическое распределение, начинающееся с единицы, с параметром p :

$$X: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \hline p & pq & pq^2 & \dots & pq^{k-1} & \dots \\ \hline \end{array}. \quad (11.54.4)$$

Обозначим $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ — время первого, второго, ..., k -го цикла обработки заявки в СМО₁ и СМО₂. По условиям задачи случайные величины $T_1, \dots, T_k, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $\bar{\tau}_{12}$.

Время пребывания заявки в СМО (с учетом возможных возвратов заявки на повторное обслуживание) можно записать в виде

$T = \sum_{k=1}^X T_k$, т.е. оно представляет собой сумму случайного числа

случайных слагаемых, где число слагаемых X не зависит от случайных величин $T_1, T_2, T_3, \dots$. В соответствии с решением задачи 7.64 находим математическое ожидание величины T :

$$\bar{t} = \mathbf{M}[T] = \mathbf{M}[T_k] \mathbf{M}[X] = \bar{\tau}_{12} / p. \quad (11.54.5)$$

Для рассмотренной СМО формула Литтла также справедлива, поэтому среднее число заявок, находящихся в СМО, будет определяться по формуле

$$\bar{z} = \bar{t} \lambda, \quad \bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \rho_1 + \rho_2 + r_1 + r_2. \quad (11.54.6)$$

11.55. Условия задачи (11.53) изменены так, что в СМО₁ и СМО₂ проводится только первичное обслуживание и его контроль; если заявка не прошла контроль в СМО₂, то она направляется на повторное обслуживание в СМО₃ и повторный контроль в СМО₄ (рис. 11.55). СМО₃ и СМО₄ представляют собой n_3 - и n_4 -канальные системы с показательным распределением времени обслуживания заявок в каналах с параметрами μ_3 и μ_4 соответственно. Вероятность того, что заявка, обработанная в СМО₃, будет в результате контроля в СМО₄ возвращена на повторное обслуживание в СМО₃, равна $1 - \pi$.

Определить условия существования стационарного режима работы рассмотренной в этой задаче СМО, считая, что потоки заявок, поступающие в СМО₁, СМО₂, СМО₃ и СМО₄, являются простейшими.

Решение. В рассматриваемой СМО в стационарном режиме будет иметь место очевидное равенство (см. рис. 11.55)

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_{01} = \lambda_2 = \lambda_{02}. \quad (11.55.1)$$

Следовательно, интенсивность потока заявок, которые прошли однократное обслуживание и контроль в СМО₁ и СМО₂, будет λp . Поток заявок, не прошедших контроль в СМО₂ и направляемых на повторное обслуживание в СМО₃ и СМО₄, будет иметь интенсивность $\lambda(1-p)$. Работа системы повторного обслуживания СМО₃ и СМО₄ (от точки 1 до точки 2 на рис. 11.55) принципиально ничем не отличается от работы системы, приведенной в задаче 11.53.

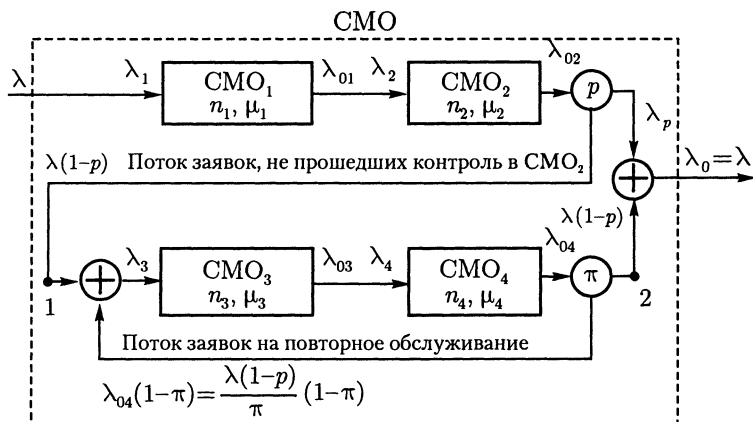


Рис. 11.55

Из всего сказанного следует, что для стационарной работы рассматриваемой в этой задаче СМО должны выполняться совместно следующие условия:

$$\chi_1 = \frac{\lambda}{n_1 \mu_1} < 1; \quad \chi_2 = \frac{\lambda}{n_2 \mu_2} < 1; \quad \chi_3 = \frac{\lambda(1-p)}{\pi n_3 \mu_3} < 1;$$

$$\chi_4 = \frac{\lambda(1-p)}{\pi n_4 \mu_4} < 1. \quad (11.55.2)$$

Кроме того, будут иметь место равенства (см. рис. 11.55)

$$\lambda_3 = \lambda_{03} = \lambda_4 = \lambda_{04} = \lambda(1-p)\pi^{-1}. \quad (11.55.3)$$

11.56. Для условий предыдущей задачи определить среднее время $\bar{t}$ пребывания заявки в СМО и среднее число заявок $\bar{z}$, находящихся в СМО.

Решение. Среднее время пребывания заявки в СМО₁ будет определяться из условия, что на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda$ [см. рис. 11.55 и формулу (11.55.1)], число каналов обслуживания n_1 , интенсивность обслуживания в канале μ_1 , число мест в очереди не ограничено. Для этих условий в соответствии с (11.0.21)–(11.0.25)

$$\bar{t}_1 = (\rho_1 + \bar{r}_1) \lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\rho_1^{n_1+1} p_{01}}{n_1 \cdot n_1! (1 - \chi_1)^2 \lambda}, \quad (11.56.1)$$

где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}; \quad \chi_1 = \frac{\rho_1}{n_1};$$

$$p_{01} = \left[1 + \frac{\rho_1}{1!} + \frac{\rho_1^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!} + \frac{\rho_1^{n_1+1}}{n_1 \cdot n_1! (1 - \chi_1)} \right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_2$ для СМО₂ при $\lambda_2 = \lambda, n_2, \mu_2$:

$$\bar{t}_2 = (\rho_2 + \bar{r}_2) \lambda^{-1} = \frac{1}{\mu_2} + \frac{\rho_2^{n_2+1} p_{02}}{n_2 \cdot n_2! (1 - \chi_2)^2 \lambda}, \quad (11.56.2)$$

где

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}; \quad \chi_2 = \frac{\rho_2}{n_2};$$

$$p_{02} = \left[1 + \frac{\rho_2}{1!} + \frac{\rho_2^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_2^{n_2}}{n_2!} + \frac{\rho_2^{n_2+1}}{n_2 \cdot n_2!} \frac{1}{1 - \chi_2} \right]^{-1}.$$

Среднее время пребывания заявки в СМО₁ и СМО₂ равно

$$\bar{\tau}_{12} = \bar{t}_1 + \bar{t}_2. \quad (11.56.3)$$

Среднее время $\bar{t}_3$ однократного пребывания заявки в СМО₃ будет определяться из следующих условий: на вход этой системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_3 = \lambda (1 - p) / \pi$ [см. рис. 11.55 и формулу (11.55.3)], число каналов обслуживания n_3 , интенсивность обслуживания в канале μ_3 , число мест в очереди не ограничено. Тогда в соответствии с (11.0.21)–(11.0.25)

$$\bar{t}_3 = (\rho_3 + \bar{r}_3) \lambda_3^{-1} = 1 / \mu_3 + \rho_3^{n_3+1} p_{03} / [n_3 \cdot n_3! (1 - \chi_3)^2 \lambda_3], \quad (11.56.4)$$

где

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{\lambda (1 - p)}{\pi \mu_3}; \quad \chi_3 = \frac{\rho_3}{n_3};$$

$$p_{03} = \left[1 + \frac{\rho_3}{1!} + \frac{\rho_3^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_3^{n_3}}{n_3!} + \frac{\rho_3^{n_3+1}}{n_3 \cdot n_3!} \frac{1}{1 - \chi_3} \right]^{-1}.$$

Аналогично рассчитываем величину $\bar{t}_4$ для СМО₄ при $\lambda_4 = \lambda (1 - p) / \pi, n_4, \mu_4$:

$$\bar{t}_4 = (\rho_4 + \bar{r}_4) \lambda_4^{-1} = 1 / \mu_4 + \rho_4^{n_4+1} p_{04} / [n_4 \cdot n_4! (1 - \chi_4)^2 \lambda_4], \quad (11.56.5)$$

где

$$\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{\lambda (1 - p)}{\pi \mu_4}; \quad \chi_4 = \frac{\rho_4}{n_4};$$

$$p_{04} = \left[1 + \frac{\rho_4}{1!} + \frac{\rho_4^2}{2!} + \dots + \frac{\rho_4^{n_4}}{n_4!} + \frac{\rho_4^{n_4+1}}{n_4 \cdot n_4!} \frac{1}{1 - \chi_4} \right]^{-1}.$$

Следовательно, среднее время однократной обработки заявки в СМО₃ и СМО₄ будет

$$\bar{\tau}_{34}^{(1)} = \bar{t}_3 + \bar{t}_4. \quad (11.56.6)$$

В соответствии с формулой (11.54.6) математическое ожидание времени пребывания заявки в СМО₃ и СМО₄ (см. рис. 11.55) с учетом возможной повторной обработки равно

$$\bar{\tau}_{34} = \bar{\tau}_{34}^{(1)} / \pi. \quad (11.56.7)$$

Для определения среднего времени пребывания заявки в СМО рассмотрим две гипотезы: 1) H_1 — заявка подвергалась только однократной обработке; $P(H_1) = p$; 2) H_2 — заявка подвергалась многократной обработке; $P(H_2) = 1 - p$.

При гипотезе H_1 математическое ожидание времени пребывания заявки в СМО будет определяться по формуле (11.56.3), при гипотезе H_2 — по формулам (11.56.7) и (11.56.3). Полное математическое ожидание времени пребывания заявки в СМО будет

$$\bar{t} = \bar{\tau}_{12} + \bar{\tau}_{34}^{(1)} (1 - p) / \pi. \quad (11.56.8)$$

Среднее число заявок, находящихся в СМО, определяется по формуле Литтла:

$$\bar{z} = \bar{t} \lambda. \quad (11.56.9)$$

11.57. Рассмотрим условия задачи 11.53 применительно к многократной обработке информации в двух фазах. С целью контроля правильности перфорации она осуществляется дважды: на перфораторе и на «контрольнике», с помощью которого обнаруживают ошибку. Перфораторщица осуществляет в среднем одну ошибку на 1000 знаков (букв, цифр и т.п.). Каждая перфокарта содержит в среднем 80 знаков. Если во время контроля на перфокарте обнаружена хотя бы одна ошибка, то эта перфокарта возвращается снова на перфорацию. За год необходимо обработать 50 000 документов, каждый из которых содержит в среднем 400 знаков.

Найти минимально необходимое число перфораторщиц, работающих на перфораторах и контрольниках, если одна перфораторщица в год перфорирует $4,2 \cdot 10^6$ знаков, и определить характеристики такой системы.

Решение. Из условий задачи следует, что в год необходимо в среднем отперфорировать и проконтролировать $50\,000 \cdot 400 / 80 = 250\,000$ перфокарт. Следовательно, $\lambda = 250\,000$ перфокарт/год $= 125$ перфокарт/ч $= 2,083$ перфокарт/мин. Производительность перфораторщицы, работающей за перфоратором или на «контрольнике», составляет $\mu_1 = \mu_2 = 4,2 \cdot 10^6 / 80 = 52\,500$ перфокарт/год $= 26,25$ перфокарт/ч $= 0,438$ перфокарт/мин. Вероятность необнаружения ни одной ошибки на перфокарте равна $p = 0,999^{80} \approx 0,9$. При этом мы пренебрегаем вероятностью того, что и перфораторщица и контролер ошибутся одинаково в одном и том же знаке. Эта вероятность намного меньше, чем $(0,001)^2 = 10^{-6}$, так как клавиатура перфоратора и «контрольника» имеет около 50 различных знаков. Если считать, что ошибочно может быть нажат на клавиатуре любой знак из 50, то получим вероятность одинаковой ошибки, равную $10^{-6} / 2500$. Если считать, что ошибочно может быть нажат на клавиатуре только ближай-

ший к нужному знаё (а их от 5 до 8), то эта вероятность будет $10^{-6} / 25 - 10^{-6} / 64$.

Условие стационарной работы перфораторщиц будет [см. формулы (11.53.5), (11.53.6)]

$$\lambda / (n_1 \mu_1 p) = \chi_1 < 1; \quad \lambda / (n_2 \mu_2 p) = \chi_2 < 1,$$

откуда $n_1 > \lambda / (\mu_1 p) = 250\,000 / (52\,500 \cdot 0,9) = 5,29$; $n_2 > 5,29$.

Таким образом, нужно иметь шесть перфораторщиц и шесть контролеров.

Характеристики работы перфораторщиц: $\lambda_{\text{вх1}} = \lambda / p = 250\,000 : 0,9 = 278\,000$ перфокарт/год; $n_1 = 6$; $\mu_1 = 52\,500$ перфокарт/год; $\chi_1 = \lambda / (n_1 p \mu) = 0,882$; $\rho_1 = \lambda / (\rho \mu_1) = 5,29$.

По формуле (11.0.22) находим вероятность того, что все шесть перфораторщиц будут заняты и «очереди» документов, подлежащих перфорации, нет:

$$p_{n_1} = \frac{P(n_1, \rho_1)}{R(n_1, \rho_1) + P(n_1, \rho_1) \frac{\chi_1}{1 - \chi_1}} = \frac{0,152}{0,282 + 0,152 \frac{0,882}{1 - 0,882}} = 0,107.$$

Среднее число перфокарт, ожидающих перфорации, $\bar{r}_1 = p_n \chi_1 / (1 - \chi_1)^2 = 6,78$.

Среднее время ожидания перфокарты в очереди: $\bar{t}_{\text{оч1}} = \bar{r}_1 p \lambda^{-1} = 2,92$ мин; $\bar{t}_1 = \bar{t}_{\text{оч1}} + 1 / \mu_1 = 5,21$ мин.

Общее число перфокарт в первой фазе $\bar{z}_1 = \bar{r}_1 + \bar{k}_1 = \bar{r}_1 + \rho_1 = 12,07$.

Так как характеристики второй фазы (контроля) такие же, как и первой, то можно выписать общие характеристики работы системы с учетом возврата перфокарт на новую обработку. Общее среднее число перфокарт, находящихся в системе, $\bar{z} = 2\bar{z}_1 = 24,14$; из них в очереди будет $\bar{r} = 2\bar{r}_1 = 13,56$. Общее среднее время обработки одной перфокарты с учетом ее возможного возврата на повторную обработку равно $\bar{t} = \bar{t}_{12} / p = (\bar{t}_1 + \bar{t}_2) / p = 2\bar{t}_1 / p = 11,57$ мин.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Т а б л и ц а 1

Значения вероятностей $Q(m, a) = 1 - R(m, a) = 1 - \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

m	$a = 0,1$	$a = 0,2$	$a = 0,3$	$a = 0,4$	$a = 0,5$
0	$9,5163^{-2^{2)}$	$1,8127^{-1}$	$2,5918^{-1}$	$3,2968^{-1}$	$8,9347^{-1}$
1	$4,6788^{-3}$	$1,7523^{-2}$	$3,6936^{-2}$	$6,1552^{-2}$	$9,0204^{-2}$
2	$1,5465^{-4}$	$1,1485^{-3}$	$3,5995^{-3}$	$7,9263^{-3}$	$1,4388$
3	$3,8468^{-6}$	$5,6840^{-5}$	$2,6581^{-4}$	$7,7625^{-4}$	$1,7516^{-3}$
4		$2,2592^{-6}$	$1,5785^{-5}$	$6,1243^{-5}$	$1,7212^{-4}$
5				$4,0427^{-6}$	$1,4165^{-5}$
6					$1,0024^{-6}$
m	$a = 0,6$	$a = 0,7$	$a = 0,8$	$a = 0,9$	
0	$4,5119^{-1}$	$5,0341^{-1}$	$5,5067^{-1}$	$5,9343^{-1}$	
1	$1,2190$	$1,5580$	$1,9121$	$2,2752$	
2	$2,3115^{-2}$	$3,4142^{-2}$	$4,7423^{-2}$	$6,2857^{-2}$	
3	$3,3581^{-3}$	$5,7535^{-3}$	$9,0799^{-3}$	$1,3459$	
4	$3,9449^{-4}$	$7,8554^{-4}$	$1,4113$	$2,3441^{-3}$	
5	$3,8856^{-5}$	$9,0026^{-5}$	$1,8434^{-4}$	$3,4349^{-4}$	
6	$3,2931^{-6}$	$8,8836^{-6}$	$2,0747^{-5}$	$4,3401^{-5}$	
7			$2,0502^{-6}$	$4,8172^{-6}$	

¹⁾ Вероятность $P(m, a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ может быть найдена через вероятность $Q(m, a)$ следующим образом:

$$P(m, a) = Q(m-1, a) - Q(m, a) \quad (m > 0),$$

$$P(0, a) = 1 - Q(0, a).$$

²⁾ Такая запись принята для краткости. Число $9,5163^{-2}$ означает $9,5163 \cdot 10^{-2}$.

m	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
0	$6,3212^{-1}$	$8,6466^{-1}$	$9,5021^{-1}$	$9,8168^{-1}$	$9,9326^{-1}$
1	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
2	$8,0301^{-2}$	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
3	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
4	$3,6598^{-3}$	$5,2653^{-2}$	1,8474	3,7116	5,5951
5	$5,9418^{-4}$	1,6564	$8,3918^{-2}$	2,1487	3,8404
6	$8,3241^{-5}$	$4,5338^{-3}$	3,3509	1,1067	2,3782
7	1,0249	1,0967	1,1905	$5,1134^{-2}$	1,3337
8	$1,1252^{-6}$	$2,3745^{-4}$	$3,8030^{-3}$	2,1363	$6,8094^{-2}$
9		$4,6498^{-5}$	1,1025	$8,1322^{-3}$	3,1828
10		$8,3082^{-6}$	$2,9234^{-4}$	2,8398	1,3695
11		1,3646	$7,1387^{-5}$	$9,1523^{-4}$	$5,4531^{-3}$
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			$3,4019^{-6}$	$7,6328^{-5}$	$6,9799^{-4}$
14				1,9932	2,2625
15				$4,8926^{-6}$	$6,9008^{-5}$
16				1,1328	1,9869
17					$5,4163^{-6}$
18					1,4017
m	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
0	$9,9752^{-1}$	$9,9909^{-1}$	$9,9966^{-1}$	$9,9988^{-1}$	$9,9995^{-1}$
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6986
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
9	$8,3924^{-2}$	$1,6950^{-1}$	$2,8338^{-1}$	$4,1259^{-1}$	$5,4207^{-1}$
10	4,2621	$9,8521^{-2}$	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	$8,8275^{-3}$	2,7000	$6,3797^{-2}$	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	$7,3851^{-2}$	1,3554
14	1,404	$5,7172^{-3}$	1,7257	4,1466	$8,3458^{-2}$
15	$5,0910^{-4}$	2,4066	$8,2310^{-3}$	2,2036	4,8740
16	1,7488	$9,5818^{-4}$	3,7180	1,1106	2,7042
17	$5,6917^{-5}$	3,6178	1,5943	$5,3196^{-3}$	1,4278
18	1,7597	1,2985	$6,5037^{-4}$	2,4264	$7,1865^{-3}$

m	$a = 6$	$a = 7$	$a = 8$	$a = 9$	$a = 10$
19	5,1802 ⁻⁶	4,4402 ⁻⁵	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	9,3968 ⁻⁵	4,3925 ⁻⁴	1,5883
21		4,5263 ⁻⁶	3,3407	1,7495	6,9965 ⁻⁴
22		1,3543	1,1385	6,6828 ⁻⁵	2,9574
23			3,7255 ⁻⁶	2,4519	1,2012
24			1,1722	8,6531 ⁻⁶	4,6949 ⁻⁵
25				2,9414	1,7680
26					6,4229 ⁻⁶
27					2,2535
m	$a = 11$	$a = 12$	$a = 13$	$a = 14$	$a = 15$
0	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹			
1	9,9980	9,9992	9,9997 ⁻¹	9,9999 ⁻¹	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	9,9996 ⁻¹
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1015	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6,4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5,3435
15	9,2604 ⁻²	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	6,2966 ⁻²	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	6,9833 ⁻²	1,1736	1,8053
19	9,2895 ⁻³	2,1280	4,2669	7,6505 ⁻²	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	8,2972 ⁻³
21	2,2519	6,0651 ⁻³	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	7,6225 ⁻³	1,6712	3,2744
23	4,6386 ⁻⁴	1,4729	3,9718	9,3276 ⁻³	1,9465
24	1,9871	6,8563 ⁻⁴	1,9943	5,0199	1,1165
25	8,2050 ⁻⁵	3,0776	9,6603 ⁻⁴	2,6076	6,1849 ⁻³
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	5,5836 ⁻⁵	2,0435	6,3513 ⁻⁴	1,7158
28	4,6847 ⁻⁶	2,2616	8,9416 ⁻⁵	2,9837	8,6072 ⁻⁴

m	$a = 11$	$a = 12$	$a = 13$	$a = 14$	$a = 15$
29	1,6882	8,8701 ⁻⁶	3,7894	1,3580	4,1845
30		3,3716	1,5568	5,9928 ⁻⁵	1,9731
31		1,2432	6,2052 ⁻⁶	2,5665	9,0312 ⁻⁵
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				4,3154 ⁻⁶	1,7356
34				1,6968	7,2978 ⁻⁶
35					2,9871
36					1,1910
m	$a = 16$	$a = 17$	$a = 18$	$a = 19$	$a = 20$
0					
1					
2	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹			
3	9,9991	9,9996	9,9998 ⁻¹	9,9999 ⁻¹	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	9,9998 ⁻¹
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	8,9227 ⁻²	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	9,5272 ⁻²	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	6,8260 ⁻²	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	7,3126 ⁻²	1,1218
26	7,4589 ⁻³	1,5174	2,8234	4,8557	7,7887 ⁻²
27	4,1051	8,8335 ⁻³	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334
29	1,1312	2,7272	5,9443 ⁻³	1,1850	2,1818

m	$a = 16$	$a = 17$	$a = 18$	$a = 19$	$a = 20$
30	$5,6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6,9819^{-3}$	1,3475
31	2,7620	$7,4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8,0918^{-3}$
32	1,3067	3,7453	$9,5975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	$6,0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	$8,6644^{-5}$	2,4767	$6,3674^{-4}$	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8,0366^{-4}$
36	$4,9772^{-6}$	1,8025	$5,7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	2,0599	$7,9123^{-6}$	2,6684	$8,0154^{-5}$	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	$5,3365^{-6}$	1,7797	$5,3202^{-5}$
40			2,3030	$8,0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5,4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603

Пример. Требуется определить вероятность того, что событие A появится не более двух раз, если $a = 7$.

Имеем

$$R(2, 7) = 1 - Q(2, 7) = 1 - 9,7036^{-1} = 1 - 0,97036 = 0,02964.$$

Примечания: 1. Если у числа в таблице показатель степени отсутствует, то им будет показатель степени ближайшего вышестоящего числа, у которого есть показатель степени. Например, $Q(33; 19) = 1,2067 \cdot 10^{-3}$. 2. При $a > 20$ вероятность $Q(m, a)$ можно рассчитывать по приближенной формуле

$$Q(m, a) \approx 1 - \Phi^* \left(\frac{m + 0,5 - a}{\sqrt{a}} \right),$$

$$R(m, a) \approx \Phi^* \left(\frac{m + 0,5 - a}{\sqrt{a}} \right).$$

Значения нормальной функции распределения:

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
-0,00	0,5000	-0,37	3557	-0,73	2327
-0,01	4960	-0,38	3520	-0,74	2297
-0,02	4920	-0,39	3483	-0,75	2266
-0,03	4880			-0,76	2236
-0,04	4840	-0,40	0,3446	-0,77	2206
-0,05	4801	-0,41	3409	-0,78	2177
-0,06	4761	-0,42	3372	-0,79	2148
-0,07	4721	-0,43	3336		
-0,08	4681	-0,44	3300	-0,80	0,2119
-0,09	4641	-0,45	3264	-0,81	2090
		-0,46	3228	-0,82	2061
-0,10	0,4602	-0,47	3192	-0,83	2033
-0,11	4562	-0,48	3156	-0,84	2005
-0,12	4522	-0,49	3121	-0,85	1977
-0,13	4483			-0,86	1949
-0,14	4443	-0,50	0,3085	-0,87	1922
-0,15	4404	-0,51	3050	-0,88	1894
-0,16	4364	-0,52	3015	-0,89	1867
-0,17	4325	-0,53	2981		
-0,18	4286	-0,54	2946	-0,90	0,1841
-0,19	4247	-0,55	2912	-0,91	1814
		-0,56	2877	-0,92	1788
-0,20	0,4207	-0,57	2843	-0,93	1762
-0,21	4168	-0,58	2810	-0,94	1736
-0,22	4129	-0,59	2776	-0,95	1711
-0,23	4090			-0,96	1685
-0,24	4052	-0,60	0,2743	-0,97	1660
-0,25	4013	-0,61	2709	-0,98	1635
-0,26	3974	-0,62	2676	-0,99	1611
-0,27	3936	-0,63	2643		
-0,28	3897	-0,64	2611	-1,00	0,1587
-0,29	3859	-0,65	2578	-1,01	1563
		-0,66	2546	-1,02	1539
-0,30	0,3821	-0,67	2514	-1,03	1515
-0,31	3783	-0,68	2483	-1,04	1492
-0,32	3745	-0,69	2451	-1,05	1469
-0,33	3707			-1,06	1446
-0,34	3669	-0,70	0,2420	-1,07	1423
-0,35	3632	-0,71	2389	-1,08	1401
-0,36	3594	-0,72	2358	-1,09	1379

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
-1,10	0,1357	-1,50	0,0668	-1,90	0,0288
-1,11	1335	-1,51	0655	-1,91	0281
-1,12	1314	-1,52	0643	-1,92	0274
-1,13	1292	-1,53	0630	-1,93	0268
-1,14	1271	-1,54	0618	-1,94	0262
-1,15	1251	-1,55	0606	-1,95	0256
-1,16	1230	-1,56	0594	-1,96	0250
-1,17	1210	-1,57	0582	-1,97	0244
-1,18	1190	-1,58	0571	-1,98	0239
-1,19	1170	-1,59	0559	-1,99	0233
-1,20	0,1151	-1,60	0,0548	-2,00	0,0228
-1,21	1131	-1,61	0537	-2,10	0179
-1,22	1112	-1,62	0526	-2,20	0139
-1,23	1093	-1,63	0516	-2,30	0107
-1,24	1075	-1,64	0505	-2,40	0082
-1,25	1056	-1,65	0495	-2,50	0062
-1,26	1038	-1,66	0485	-2,60	0047
-1,27	1020	-1,67	0475	-2,70	0035
-1,28	1003	-1,68	0465	-2,80	0026
-1,29	0985	-1,69	0455	-2,90	0019
-1,30	0,0968	-1,70	0,0446	-3,00	0,0014
-1,31	0951	-1,71	0436	-3,10	0010
-1,32	0934	-1,72	0427	-3,20	0007
-1,33	0918	-1,73	0418	-3,30	0005
-1,34	0901	-1,74	0409	-3,40	0003
-1,35	0885	-1,75	0401	-3,50	0002
-1,36	0869	-1,76	0392	-3,60	0002
-1,37	0853	-1,77	0384	-3,70	0001
-1,38	0838	-1,78	0375	-3,80	0001
-1,39	0823	-1,79	0367	-3,90	0000
-1,40	0,0808	-1,80	0,0359	0,00	0,5000
-1,41	0793	-1,81	0351	0,01	5040
-1,42	0778	-1,82	0344	0,02	5080
-1,43	0764	-1,83	0336	0,03	5120
-1,44	0749	-1,84	0329	0,04	5160
-1,45	0735	-1,85	0322	0,05	5199
-1,46	0721	-1,86	0314	0,06	5239
-1,47	0708	-1,87	0307	0,07	5279
-1,48	0694	-1,88	0301	0,08	5319
-1,49	0681	-1,89	0294	0,09	5359

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
0,10	0,5398	0,50	0,6915	0,90	0,8159
0,11	5438	0,51	6950	0,91	8186
0,12	5478	0,52	6985	0,92	8212
0,13	5517	0,53	7019	0,93	8238
0,14	5557	0,54	7054	0,94	8264
0,15	5596	0,55	7088	0,95	8289
0,16	5636	0,56	7123	0,96	8315
0,17	5675	0,57	7157	0,97	8340
0,18	5714	0,58	7190	0,98	8365
0,19	5753	0,59	7224	0,99	8389
0,20	0,5793	0,60	0,7257	1,00	0,8413
0,21	5832	0,61	7291	1,01	8437
0,22	5871	0,62	7324	1,02	8461
0,23	5910	0,63	7357	1,03	8485
0,24	5948	0,64	7389	1,04	8508
0,25	5987	0,65	7422	1,05	8531
0,26	6026	0,66	7454	1,06	8554
0,27	6064	0,67	7486	1,07	8577
0,28	6103	0,68	7517	1,08	8599
0,29	6141	0,69	7549	1,09	8621
0,30	0,6179	0,70	0,7580	1,10	0,8643
0,31	6217	0,71	7611	1,11	8665
0,32	6255	0,72	7642	1,12	8686
0,33	6293	0,73	7673	1,13	8708
0,34	6331	0,74	7703	1,14	8729
0,35	6368	0,75	7734	1,15	8749
0,36	6406	0,76	7764	1,16	8770
0,37	6443	0,77	7794	1,17	8790
0,38	6480	0,78	7823	1,18	8810
0,39	6517	0,79	7852	1,19	8830
0,40	0,6554	0,80	0,7881	1,20	0,8849
0,41	6591	0,81	7910	1,21	8869
0,42	6628	0,82	7939	1,22	8888
0,43	6664	0,83	7967	1,23	8907
0,44	6700	0,84	7995	1,24	8925
0,45	6736	0,85	8023	1,25	8944
0,46	6772	0,86	8051	1,26	8962
0,47	6808	0,87	8078	1,27	8980
0,48	6844	0,88	8106	1,28	8997
0,49	6879	0,89	8133	1,29	9015

x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$	x	$\Phi^*(x)$
1,30	0,9032	1,60	0,9452	1,90	0,9713
1,31	9049	1,61	9463	1,91	9719
1,32	9066	1,62	9474	1,92	9726
1,33	9082	1,63	9484	1,93	9732
1,34	9099	1,64	9495	1,94	9738
1,35	9115	1,65	9505	1,95	9744
1,36	9131	1,66	9515	1,96	9750
1,37	9147	1,67	9525	1,97	9756
1,38	9162	1,68	9535	1,98	9761
1,39	9177	1,69	9545	1,99	9767
1,40	0,9192	1,70	0,9554	2,00	0,9772
1,41	9207	1,71	9564	2,10	9821
1,42	9222	1,72	9573	2,20	9861
1,43	9236	1,73	9582	2,30	9893
1,44	9251	1,74	9591	2,40	9918
1,45	9265	1,75	9599	2,50	9938
1,46	9279	1,76	9608	2,60	9953
1,47	9292	1,77	9616	2,70	9965
1,48	9306	1,78	9625	2,80	9974
1,49	9319	1,79	9633	2,90	9981
1,50	0,9332	1,80	0,9641	3,00	0,9986
1,51	9345	1,81	9649	3,10	9990
1,52	9357	1,82	9656	3,20	9993
1,53	9370	1,83	9664	3,30	9995
1,54	9382	1,84	9671	3,40	9997
1,55	9394	1,85	9678	3,50	9998
1,56	9406	1,86	9686	3,60	9998
1,57	9418	1,87	9693	3,70	9999
1,58	9429	1,88	9699	3,80	9999
1,59	9441	1,89	9706	3,90	1,0000

Некоторые свойства обобщенных функций

При решении задач, связанных со случайными функциями, часто бывает удобно выполнять преобразования с помощью различных скачкообразных функций, а также обобщенных функций типа дельта-функции.

Приводим определения и основные свойства таких функций от действительного аргумента τ .

1. $|\tau|$ — модуль (абсолютная величина):

$$|\tau| = \begin{cases} \tau & \text{при } \tau \geq 0; \\ -\tau & \text{при } \tau < 0. \end{cases} = \tau (1(\tau) - 1(-\tau)).$$

2. $1(\tau)$ — единичная функция (единичный скачок):

$$1(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } \tau = 0; \\ 0 & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

3. $\text{sgn } \tau$ — знак величины τ (сигнум):

$$\text{sgn } \tau = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau > 0 \\ 0 & \text{при } \tau = 0 \\ -1 & \text{при } \tau < 0 \end{cases} = 1(\tau) - 1(-\tau).$$

4. $\delta(\tau)$ — дельта-функция:

$$\delta(\tau) = \frac{d}{d\tau} 1(\tau).$$

Дельта-функция — четная функция τ . Основные свойства дельта-функции:

а) $\tau \delta(\tau) \equiv 0$ и вообще $\varphi(\tau) \delta(\tau) \equiv 0$, если $\varphi(\tau)$ — нечетная функция, непрерывная при $\tau = 0$;

б) $\int\limits_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \psi(0)$, если функция $\psi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$ ($\varepsilon > 0$);

$$\int\limits_{0-\varepsilon}^0 \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \int\limits_0^{0+\varepsilon} \psi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \psi(0),$$

если функция $\psi(\tau)$ непрерывна в точке $\tau = 0$.

Из этих определений вытекают следующие свойства, имеющие место для любых действительных τ и нечетной функции $\varphi(\tau)$:

$$1) |\tau| = \tau \operatorname{sgn} \tau;$$

$$2) \tau = |\tau| \operatorname{sgn} \tau;$$

$$3) \varphi(\tau) = \varphi(|\tau|) \operatorname{sgn} \tau;$$

$$4) \varphi(|\tau|) = \varphi(\tau) \operatorname{sgn} \tau;$$

$$5) \varphi^2(|\tau|) = \varphi^2(\tau);$$

$$6) \operatorname{sgn} \tau = 2 \cdot \mathbf{1}(\tau) - 1;$$

$$7) \mathbf{1}(\tau) = \frac{\operatorname{sgn} \tau + 1}{2};$$

$$8) |\tau| = \tau [2 \cdot \mathbf{1}(\tau) - 1];$$

$$9) \frac{d|\tau|}{d\tau} = \operatorname{sgn} \tau;$$

$$10) \frac{d^2|\tau|}{d\tau} = \frac{d \operatorname{sgn} \tau}{d\tau} = 2\delta(\tau);$$

$$11) \mathbf{1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\tau} d(\operatorname{sgn} \tau).$$

Таблица соответствий корреляционных функций $k_x(\tau)$ и спектральных плотностей $S_x^*(\omega)$

$k_x(\tau)$	$S_x^*(\omega)$
1. $D\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция	$D/(2\pi)$
2. D	$D\delta(\omega)$
3. $D \cos \beta \tau$	$(D/2)[\delta(\omega + \beta) + \delta(\omega - \beta)]$
4. $\sum_{i=1}^n D_i \cos \beta_i \tau$	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_i [\delta(\omega + \beta_i) + \delta(\omega - \beta_i)]$
5. $De^{-\alpha \tau }$	$(D\alpha/\pi)(\alpha^2 + \omega^2)^{-1}$
6. $\sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i \tau }$	$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{D_i \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}$
7. $De^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2][\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]}$
8. $De^{-\alpha \tau } \left[\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right]$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{[\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2]^2 + 4\alpha^2 \beta^2}$
9. $De^{-\alpha \tau } \left[\cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right]$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{2\omega^2}{[\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2]^2 - 4\beta^2 \omega^2}$
10. $De^{-\alpha \tau } \left[\operatorname{ch} \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta \tau \right] (\alpha \geq \beta)$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}$
11. $D(1 - \tau) 1(1 - \tau)$, где $1(x)$ — единичная функция	$\frac{D}{2\pi} \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2$
12. $De^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$(D\alpha/\pi)[2\alpha^3/(\omega^2 + \alpha^2)^2]$
13. $De^{-\alpha \tau } \left[1 + \alpha \tau + \frac{1}{3} \sin \alpha^2 \tau^2 \right]$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{\alpha^4}{3(\omega^2 + \alpha^2)^3}$
14. $De^{-\alpha \tau } \left[1 + \alpha \tau - 2\alpha^2 \tau^2 + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau ^3 \right]$	$\frac{D\alpha}{\pi} \frac{16\alpha^3 \omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^4}$
15. $2\alpha \sin \beta \tau / \tau$	$\alpha 1(1 - \omega /\beta)$
16. $2\alpha^2(2 \cos \beta \tau - 1) \frac{\sin \beta \tau}{\tau}$	$\begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \beta, \\ \alpha^2 & \text{при } \beta < \omega \leq 2\beta, \\ 0 & \text{при } 2\beta < \omega \end{cases}$
17. $De^{-(\alpha\tau)^2}$	$\frac{D}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp \left[-\left(\frac{\omega}{2\alpha} \right)^2 \right]$
18. $De^{-\alpha \tau } [2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sgn} \tau)^2]$	$(D\alpha/\pi)[\omega^2/(\alpha^2 + \omega^2)]$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Издательский центр «Академия», 2003.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Издательский центр «Академия», 2003.
3. Ветцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Издательский центр «Академия», 2003.
4. Ветцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. / Под ред. А.А. Свешникова. — М.: Наука, 1965.
7. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1988.
8. Ханчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.: Физматгиз, 1963.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Наука, 1964.
10. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. — М.: Физматгиз, 1965.
11. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969.
12. Тараканов К.В., Овчаров Л.А., Тырышкин А.Н. Аналитические методы исследования систем. — М.: Сов. радио, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Основные понятия. Непосредственный подсчет вероятностей	4
Глава 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей	19
Глава 3. Формула полной вероятности и формула Байеса	49
Глава 4. Повторение опытов	70
Глава 5. Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин	85
Глава 6. Системы случайных величин (случайные векторы)	124
Глава 7. Числовые характеристики функций случайных величин	152
Глава 8. Законы распределения функций случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей	207
Глава 9. Случайные функции	261
Глава 10. Потоки событий. Марковские случайные процессы	317
Глава 11. Теория массового обслуживания	363
Приложения	428
Список литературы	440

Учебное издание

**Вентцель Елена Сергеевна,
Овчаров Лев Александрович**

Задачи и упражнения по теории вероятностей

Учебное пособие

**Редактор Л. В. Честная
Художественный редактор Ю. Э. Иванова
Технический редактор О. С. Александрова
Компьютерная верстка: В. Н. Канивец
Корректор Г. Н. Петрова**

Изд. № А-442. Подписано в печать 20.03.2003. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Петербург». Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 28,0.
Тираж 10 000 экз. (1-й завод 1 — 5100 экз.) Заказ № 28 27.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.002682.05.01 от 18.05.2001.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 223. Тел./факс: (095)330-1092, 334-8337.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.