И.Р. Венгеров

ХРОНОАРТЕФАКТЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Издательство
НОРД-ПРЕСС
Донецк–2005

УДК 536.1
PACS: 05.70.Ln
ББК В317.13
В29

Рекомендовано к печати Ученым советом физического факультета ДонНУ (протокол № 8 от 22 апреля 2005 г.)

Рецензенты:

д. т. н., профессор кафедры неравновесных процессов ДонНУ, акад. АИН и АН ВШ Украины Ф. В. Недопекин; д. т. н., ведущий научный сотр. ДонФТИ им. А. А. Галкина НАНУ Ю. Д. Заворотнев; к.ф.-м. н., старший научный сотр. ДонФТИ им. А. А. Галкина НАНУ М. А. Белоголовский

В монографии впервые системно рассматриваются известные и обнаруженные автором артефакты в парадигме термодинамики неравновесных процессов − в трех ее структурных уровнях: оболочке, базисе и ядре. Устранение этих артефактов осуществлено на основе новой, дискретной версии термодинамики. Введены новые понятия: макроточка, диссипатор, диссипаторные цепочки. Известные уравнения теплопроводности − Фурье, гиперболическое, нелинейное получены как приближения различных порядков общего континуального, соответствующего полученному разностному, уравнения. Дана новая трактовка вариационных принципов; обнаружен и устранен «фундаментальный хроноартефакт» — ошибочность парадигмы времени в механике и в термодинамике.

Монография представляет интерес для преподавателей и исследова-телей-теплофизиков.

Known and revealed by the author artifacts of the paradigm of non-equilibrium thermodynamics are investigated for the first time. Elimination of the artifacts is realized on the base on a new discrete version of thermodynamics. Novel notions as a macro-point, a dissipator, a chain of dissipators, are introduced. Known linear, hyperbolic, and non-linear equations of thermal conductivity are found to be approximations of a general continual equation corresponding to a discrete equation obtained by the author. A new interpretation of variational principles is proposed; a fundamental chrono-artifact, an erroneous paradigm of time in mechanics and thermodynamics, is revealed and eliminated. The book can be useful for lecturers and experts in the field of thermophysics.

ISBN 966-8085-94-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПАМЯТИ АНДРЕЯ ПОСВЯЩАЮ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Я не жду, что мои взгляды будут сразу приняты; человеческий ум привыкает видеть вещи определенным образом, и те, кто в течение части своего поприща рассматривали природу с известной точки зрения, обращаются лишь с трудом к новым представлениям.

А.Л. Лавуазье

Введенные Т. Куном [15] для обозначения фаз развития науки термины «нормальная» и «экстраординарная» могут характеризовать и отдельные разделы наук, их теоретические основы. В «нормальной» теории развитие осуществляется путем исследования новых объектов или (и) разработкой новых методов, но на основе существующей парадигмы. «Экстраординарная» теория устраняет имеющиеся в парадигме аномалии, парадоксы и «темные места» выходом за рамки существующей парадигмы, т.е. ее модернизацией или даже заменой новой парадигмой.

В этом смысле предлагаемая вниманию Читателя книга не совсем «нормальна»: предметом критического анализа в ней является парадигма неравновесной термодинамики (далее – термодинамики), для удобства анализа структурируемая на три уровня: оболочка, базис, ядро. Термодинамика базируется на классической термодинамике (далее – термостатике), в истории которой имеются и впечатляющие достижения и до сих пор до конца не проясненные парадоксы (встречаются и явные заблуждения) [2,11,21]. Суть этой противоречивости становится ясной после знакомства с высказываниями А. Эйнштейна: «Теория оказывается тем более впечатляющей, чем проще ее предпосылки, чем шире область ее применимости. Именно поэтому классическая термодинамика производит на меня очень глубокое впечатление. Это единственная общая физическая теория ... она никогда не будет опровергнута», и И.П. Базарова: «... нет другой области науки, в которой при ее создании и применениях делалось бы такое большое число неверных утверждений и выводов, как в термодинамике».

В еще большей степени эта полярность (эффективность в применении ко всевозможным проблемам и в то же время противоречивость и «запутанность») характерна для термодинамики, что поддерживает интерес к ней [6–9,19,110, 112,113]. Применения термодинамики необозримы, она – фундамент множества прикладных наук. Поэтому обнаружение в этом фундаменте «трещин» и их «заделка» имеют принципиальное значение.

С другой стороны, термодинамика уникальна: это единственный раздел физики, в основах которого (в термостатике) не содержится время. **Время в термостатику вводится** при переходе от термостатического соотношения Гиббса к термодинамическому уравнению баланса энтропии. Поэтому анализ парадигмы термодинамики это, во многом, и анализ **парадигмы времени**. Этот анализ (если в нем нет ошибок) ведет к почти «окончательным результатам» (как прекрасно сказано Б.С. Бокштейном в книге «Атомы блуждают по кристаллу»: «Нет» термодинамики – это истина в последней инстанции, опротестовывать это решение некуда»).

Упомянутые выше «трещины фундамента» – противоречия, ошибки, «темные» места во всех трех структурных уровнях термодинамики, известные из литературных источников и обнаруженные им, автор назвал артефактами (искусственными аномалиями парадигмы, подлежащими устранению); поскольку большинство этих артефактов оказалось связанным со временем (с его свойствами, приписываемыми существующей парадигмой), то в заглавии настоящей книги использован термин «хроноартефакты». Книга построена следующим образом: в Части I выявляются, а в Части III устраняются артефакты. Устранение осуществляется на основе результатов Части II, в которой излагаются элементы дискретной термодинамики (названной автором Боргартоникой – в память об Учителе – профессоре Боргардте Александре Александровиче).

Обнаруженные автором артефакты весьма различаются по их значимости: от простейших артефактов оболочки, легко устраняемых, до артефактов ядра парадигмы, включая и структурный артефакт – архитектуру самого ядра. Последнее – серьезная «ересь», так как устранение структурного артефакта требует замены ядра парадигмы. Тем не менее, излагаемое в Части III (включая главу 12) назвать «экстраординарным» нельзя, так как в той же парадигме, где выявлены артефакты, можно найти (что и было сделано) «подсказки» по устранению их на основе дискретной идеологии [3,6,8,9,20,23,33–36].

Глава 12 посвящена обнаруженному в итоге (хотя прав и А. Пуанкаре: «Догадка предшествует доказательству») фундаментальному хроноартефакту – ошибочному пониманию времени в физике. Устранение этого хроноартефакта заключается в смене парадигмы времени, которое, по мнению автора: 1) не является физическим параметром, а представляет собой шкалу интервалов, вводимую в механике и в термодинамике различным образом; 2) эта шкала может быть непрерывной или дискретной, в зависимости от того, какой является некоторая другая «порождающая» шкала; 3) шкала является существенно положительной – значения $t < 0$ запрещены.

Последнее означает, что механическая (и иная) обратимость времени – артефакт; тем самым устраняется парадокс Лошмидта и разрешается «проблема времени», длительно вызывавшая головную боль у очень многих [6,11,19,24, 128,206,210,222,227]. Устранение фундаментального хроноартефакта – большая «ересь», здесь, пожалуй, имеется полная «ненормальность», тем более, что оно порождает многочисленные проблемы – вынимается «подставка» из-под результатов, базирующихся на догмате «обратимости». Более подробно ознакомиться с содержанием книги можно по Оглавлению, а получить ответы на возникающие «простые» вопросы – в Заключении.

Кратко о методологии работы над книгой. Никакие «экстраординарные» методы, физические идеи, математические приемы не использованы. Вновь автор следовал «подсказкам»: 1) А.-Л. Ле-Шателье: «... примитесь за детальное исследование самых ... исследованных вопросов. Эти-то, на первый взгляд, простые и ничего в себе не таящие объекты и послужат тем источником, откуда Вы сможете, при умении, извлечь самые ценные и подчас совершенно неожиданные результаты»; 2) В.Л. Гинзбурга: «... большинство новых физических результатов было получено сравнительно простым способом, а «математизация» осуществлялась лишь на следующих этапах ... в теоретической физике главное все же физика, а не математика ... «вечные вопросы» с практической точки зрения, были уже давно выяснены ... Только поэтому здесь в течение столь длительного времени и могли сохраняться какие-то неясности»; 3) Р. Фейнмана: «... чаще всего приходится не столько добавлять, сколько отбрасывать. Ваша догадка, в сущности, состоит в том, что нечто – очень простое ...»; 4) Сходным мыслям авторов [28,33–38]. Поскольку постоянно приходилось касаться «вечных вопросов», о которых многое, многими и по-разному писалось, автор не смог обойтись без обильного цитирования как в тексте, так и в эпиграфах к частям и главам.

В Части II, при построении основ Боргартоники, вводятся новые понятия: Боргартон, макроточка, диссипатор, D-период, диссипаторные цепочки, хроногенерация, квазилокальные уравнения, квазифинитные функции и др. Однако все эти понятия имеют аналоги в других разделах физики. Это свидетельствует о том, что автор, работая над книгой, не столько «изобретал», сколько действовал в режиме КРИ (коллектора рассеянной информации – термин А. и Б. Стругацких).

БЛАГОДАРНОСТИ. Автор выражает искреннюю благодарность своей жене Людмиле, чье терпение и поддержка позволили осуществить задуманное. Важной была моральная (а иногда – материальная!) поддержка товарищей: М.А. Белоголовского, Ю.Д. Пащенко, М.М. Маломуда, А.Э. Дудельзака, Б.М. Михайловича, И.М. Резника, которым автор благодарен. Весьма признателен автор к.ф.-м.н. Сибаровой И.А., подготовившей рукопись к печати.

Автор посвящает эту книгу памяти сына Людмилы – Андрея Азарха-Волченского (1975, Донецк – 1998, Иерусалим).

ЧАСТЬ I
ВЫЯВЛЕНИЕ АРТЕФАКТОВ

... кому дорога истина вообще, то есть не только в настоящем, но и в будущем, тот не станет нагло ругаться над мыслью, проникшей в общество, какой бы странной она ему не казалась.

И.М. Сеченов

...думаю, что лет десять тому назад было бы большим риском отзываться здесь с таким неуважением о традиционном понимании термодинамики. Однако в настоящее время ... мы уже не относимся с таким почтением к догмам в физике.

М. Смолуховский

Все ... описано в учебниках, и хотя изложение может быть разным; по существу всюду пишут одно и то же ... Физика не могла бы развиваться, если бы все и всегда делали только привычное ... Иногда здание физики кое-где приходится разбирать и перестраивать.

Х. Юкава

ГЛАВА 1. ПАРАДИГМА И АРТЕФАКТЫ

Неуязвимый и непроницаемый Артефакт упрямо хранил свою тайну.

К. Саймак, «Заповедник гоблинов»

Не надо искать старое в новом, а надо находить новое в старом.

Я.И. Френкель

§1. Терминология

Определим основные используемые термины. Согласно [1], термодинамика – раздел физики, изучающий наиболее общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия и процессы перехода между этими состояниями. Раздел термодинамики, изучающий неравновесные процессы (процессы переноса) называется термодинамикой неравновесных процессов. И.П. Базаров считает [2], что «... термодинамика изучает свойства равновесных физических систем , исходя из трех основных законов, называемых началами термодинамики и не использует явно представлений о молекулярном строении вещества ...». Термодинамический метод является макроскопическим (феноменологическим), описывает равновесные и неравновесные состояния систем специфическими макропараметрами (температура, плотность, давление и др.). Статистические теории позволяют определить эти макропараметры и кинетические коэффициенты исходя из механики (классической или квантовой) систем большого числа частиц и вероятностных методов и являются более полными [3–8].

Современная термодинамика определяется [9] как феноменологическая полевая теория процессов в макротелах, связанных с взаимным превращением теплоты и других форм движения и обобщающая классическую (равновесную) термодинамику (называемую иногда термостатикой [9–11]). Существует и другая точка зрения, отрицающая «родство» неравновесной и равновесной термодинамик [12]. Д. Мейкснер полагает, что термодинамика – «наука с многими лицами» [9].

Солидаризуясь с Л.А. Коздобой, считающим, что «фактически термодинамика – это теплофизика» [13], примем **определение**: **термодинамика** – наука о макроскопических процессах переноса, включающая и описание связей между начальным и конечным состояниями систем – **термостатику**.

При анализе структуры прикладного раздела теплофизики – геотеплофизики [14] оказалось полезным понятие парадигмы, введенное Т. Куном [15]. **Парадигма** (пример, образец –греческ.) – термин, имеющий два основных значения: 1) строгая научная теория, система понятий которой выражает существенные черты действительности, принятая в настоящее время научным сообществом; 2) концептуальная схема, модель постановки новых проблем и их решения, методов исследования, «эталон». Наряду с парадигмой науки в целом, можно говорить о частных парадигмах – научных дисциплин, областей и направлений.

Нормальная наука – это совокупность исследований, прочно опирающихся на предшествующие научные результаты, признанные научным сообществом за основу [15]. Иначе говоря, нормальная наука – исследования, ведущиеся в рамках определенной парадигмы. Стадии медленного эволюционного развития (нормальная наука) могут переходить в быструю, революционную трансформацию парадигмы – в **экстраординарную науку** [25].

Научные революции (экстраординарная фаза развития науки) обычно являются реакцией на **научный кризис** – ситуацию, когда в рамках нормальной науки долго не удается справиться с имеющимися фундаментальными или (и) прикладными проблемами, заключающимися в несоответствии теории и эксперимента или присутствии в теории **аномалий** – «отклонений от нормы, от общей закономерности, «неправильностей» [16]. Эти аномалии именуют поразному: «трудностями, проблемами, заблуждениями» [2,8,9,11,17–20]; «ошибками, заблуждениями, парадоксами» [2,11,21–25]; «недоразумениями» [26]; «сюрпризами» [27]; «ошибками, промахами, монстрами» [28].

Рассматривая структуру парадигм« в горизонтальном разрезе», Т. Кун касался [15] частных парадигм – различных разделов и направлений науки. Существует, однако [14], и «**вертикальный разрез**» парадигмы, включающий ее **три иерархических уровня**: «ядро», «базис, «оболочку». **В термодинамике «ядро»** – это фундаментальный уровень. Он содержит термостатику, принципы механики сплошной среды, эмпирические законы и уравнения переноса, принципы локального термодинамического равновесия, вариационные принципы и т.д. **Базис термодинамики** – второй иерархический уровень. Содержит конкретные модели сплошных сред и процессов переноса в них (краевые задачи). Сюда же относятся и методы математической физики. **Оболочка** – «внешний», пограничный с экспериментом (или шире – с практикой) уровень. Его результаты (количественные и качественные) следуют из решений задач базиса и состоят из различных промежуточных и конечных формул и соотношений, асимптотических и иных оценок.

Ранее уже встречались аналогичные термины: в [28] – «теоретическое ядро» математики; в [8] четко разграничиваются «физика» и «математическая физика». Предлагаемая нами схема строения парадигмы: ядро – базис – оболочка представляется более гибкой и полной; на ее основе далее будут выявлены и устранены аномалии термодинамики, именуемыми нами «**артефактами**».

§2. Виды аномалий

Анализ используемых для названия различных аномалий терминов показывает что «недоразумения», «заблуждения», и «ошибки» обозначают разное : в первых двух случаях речь идет также об ошибках, но «простейших»; в третьем – подразумевается «научный брак». Термин «парадокс», согласно [1], означает: 1) неожиданное, непривычное, расходящееся с традициями утверждение, рассуждение или вывод; 2) в логике – противоречие, полученное в результате внешне логически правильных рассуждений. Наличие парадокса означает несостоятельность каких-либо из посылок (аксиом), используемых в рассуждении и в теории в целом, хотя эту несостоятельность зачастую трудно обнаружить, объяснить и, тем более, устранить. В [2,21], где парадоксам уделено большое внимание, дается определение: «Парадоксом ... называется верное утверждение, которое необычно, противоречит ранее известному и про которое хочется сказать, что этого не может быть». Верными результатами, «противоречащими интуиции», названы парадоксы в [23], где подчеркивается их отличие от софизмов – ложных результатов, полученных формально правильными методами. Термин «сюрпризы» в контексте его использования [27] также означает «парадоксы». «Монстрами» в прикладной математике [28] называют паразитные результаты формального характера, не имеющие физического смысла.

Таким образом, различные «аномалии» сводятся к «ошибкам» и «парадоксам» (т.е. к «противоречиям», включая и софизмы – «замаскированные» ошибки). Пусть некоторый теоретический (качественный или количественный) результат – уравнение, формула, число обозначается через y, а исходные предпосылки, из которых выводится y – через x. Если «оператор перехода» $x \rightarrow y$ (т.е. совокупность преобразований, вычислений, рассуждений) обозначить F, то верный результат (символически):

$$y = Fx. \tag{1.1}$$

Если в некоторых посылках ошибка (т.е. вместо x взято x'), или она имеется в операции преобразования (вывода), т.е. вместо F имеем F', то получим $y' \neq y$:

$$y' = Fx' \quad (a); \qquad\qquad y' = F'x \quad (b). \tag{1.2}$$

Случаю парадокса соответствует ситуация, когда видимых ошибок нет, но результат не соответствует ожидаемому:

$$y' = Fx. \tag{1.3}$$

Как видно из (1.2), разрешение парадокса состоит в обнаружении в (1.3) скрытых ошибок (*a*), (*b*) или (*ab*). В последнем, общем случае:

$$y' = F'x'. \tag{1.4}$$

Такое ошибочное использование x' и F' вместо x и F носит субъективный характер и не является неизбежным, если объективно существует «правильная связь» (1.1). Адекватным этой ситуации термином является «**артефакт**» – процесс или результат, не свойственные данному объекту объективно и возникающие в ходе его изучения [16] (artefactum – искусственно сделанное, привлеченное, лат.). Этот термин широко используется в биологии и геологии; артефакты в парадигме горной теплофизики обнаружены автором [29]. **Хроноартефактами** мы называем артефакты, связанные со временем [30]

В литературе уделяется большое внимание парадоксам, одному из видов артефактов: 1) в термодинамике [2,6,9,11,21,31]; 2) в других разделах физики [27,32–39]; 3) в математике [24,25,28,40,41]. Эти парадоксы обычно объясняются или «разрешаются» – указывается причина их – x' или F', которыми надо заменить изначально предполагавшиеся x и F, чтобы обосновать полученное y' (вместо ожидавшегося y).

Наш подход иной, мы устраняем артефакты, как результаты ошибочные, обусловленные (привнесенные исследователем) использованием x' вместо x или (и) F' вместо F, тем что находим «истинные» x и F, которые обеспечивают $y' = y$. Устранение артефактов должно начинаться на том же уровне парадигмы, где он выявлен, и только при невозможности такого устранения «разрешен» переход на более высокий иерархический уровень (принцип Оккама). Специфика термина «артефакт» заключается в его апостериорности: аномалия (противоречие) может быть названа артефактом лишь **после** ее устранения. Если аномалию устранить не удается, она не является артефактом. Мы используем термин «артефакты» априорно, «по подозрению». Это оправдано их последующим устранением.

§3. Примеры артефактов

Примеры аномальных результатов – предположительно артефактов – приводятся в [30] и относятся к оболочке парадигмы термодинамики: бесконечная скорость теплопередачи; неограниченность начальных потоков тепла на границах систем; скачки температур на границах контактов в составных системах; бесконечное время завершения нестационарного процесса. Некоторые из этих эффектов неоднократно трактовались как «парадоксы», требующие объяснения. Рассмотрим их кратко, а во второй главе – более подробно.

А. Бесконечная скорость теплопередачи. Решением задачи Коши для уравнения теплопроводности в области $\Sigma = R^{(1)} \times R_+$ ($R^{(1)} = \{x \in (-\infty, \infty)\}$, $R_+ = \{t \in (0, \infty)\}$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad T = T(x,t), \qquad x \in R^{(1)}, \qquad t \in R_+ \tag{1.5}$$

с начальным условием

$$T(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in R^{(1)} \tag{1.6}$$

является формула Пуассона [42–44]:

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right]\mathrm{d}\xi, \tag{1.7}$$

где a – коэффициент температуропроводности. Из (1.7) следует, что для любой положительной в области $x\in[c,d]$ и равной нулю вне ее начальной функции $\varphi(x)$, $T(x^*,t)T(x^*,t)>0$ для любого сколь угодно большого $|x^*|<\infty$ и сколь угодно малого $t>0$. Этот результат и трактуется как бесконечная скорость теплопередачи [28,45–50]. Этот парадокс математики «объясняли»: неточностью физических предпосылок, лежащих в основе вывода уравнения теплопроводности [48,49]; отсутствием учета инерционности молекул или их взаимодействия [28,45,46,50]. Теплофизики усматривали его причину в приближенности закона Фурье [43,51–59]:

$$q(x,t)=-\lambda\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Здесь $q(x,t)$ – плотность потока тепла; λ – коэффициент теплопроводности. Утверждалось, что (1.8) справедливо лишь для медленных процессов и малых градиентов температуры, а для интенсивных процессов и больших градиентов необходимо использовать иные, нелинейные, в частности, соотношения.

С бесконечной скоростью теплопередачи связывают и другой аномальный результат – обращение в бесконечность скорости ϑ_n изотермической поверхности в начальный момент времени. Координата этой поверхности $x_\delta=\delta(t)$ полагается равной (по аналогии с вычислением дисперсии в теории вероятностей) [22]:

$$\delta^2(t)=\left\langle x^2\right\rangle=\frac{M_2(t)}{M_0(t)},\qquad M_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^nT(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$

где $M_n(t)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ – моменты температурного поля – решения задачи Коши. Из (1.9) следует:

$$\delta^2(t)=2at,\qquad \vartheta_n=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{a}{2t}\right)^{1/2},\qquad \lim_{t\to 0}\vartheta_n=\infty. \tag{1.10}$$

Аналогичные (1.7) и (1.10) по форме и трактовке результаты в теории диффузии известны как «парадоксы броунова движения и диффузии» [23,51,60–62].

Специфический диффузионный парадокс «бесконечной скорости разбегания частиц» в двух различных формах рассматривается в [61,62]. В [61] авторы пишут: «... с ростом времени края «облака» частиц расходятся со скоростью $\vartheta=(h/\tau)\sim\left(h/h^2\right)\to\infty$ при $h\to 0$. Таким образом, в пределе могут найтись частицы, перемещающиеся за единицу времени как угодно далеко». Здесь h – величина скачка частицы в рассматриваемой модели «блуждания частиц на прямой», а τ – продолжительность скачка. Эти величины связаны соотношением $h^2 = 2D\tau$ (D – коэффициент диффузии). В [62] утверждается, что скорость диффузии определяется формулой

$$\mathbf{V}_D = -\frac{D\nabla\rho}{\rho} = \frac{x - x_0}{2(t - t_0)}, \tag{1.11}$$

где ρ – плотность частиц; x_0 – координата точки на прямой Ox, в которой при $t = t_0$ был осуществлен δ-видный «впрыск» частиц. Формула (1.11) интерпретируется как «парадокс бесконечной скорости разбегания частиц» от точки $x = x_0$ при $|x - x_0| \to \infty$ и произвольном конечном $t \in (t_0, \infty)$.Приведенные примеры – не парадоксы или артефакты, требующие объяснения или устранения, а явные ошибки, что будет далее показано. Можно было бы привести и другие подобные **квазиартефакты**. В ряде монографий и учебников по теории диффузии на основе схемы дискретных скачков частиц выводятся формулы для коэффициентов диффузии в одно-, двух- и трехмерных средах, которые оказываются различными [61,63–67]. В работах [58,59] к парадоксам теплопроводности отнесен «масштабный эффект» – зависимость коэффициента теплопроводности тонких пленок и волокон от их толщины (диаметра). В первом из этих случаев, при выводе выражений для коэффициентов диффузии, ошибочно принято (для случаев разной размерности системы) одинаковым число совершающих «прыжки» частиц; во втором (находящемся вне рамок феноменологического подхода) указанный эффект давно разъяснен методами статистической физики [68–70].

В. Обращение в бесконечность граничного потока тепла. Решение первой краевой задачи теплопроводности в области $\Sigma_1 = R_+^{(1)} \times R_+ (R_+^{(1)} = \{x \in (0, \infty)\})$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad T = T(x,t), \qquad x \in R_+^{(1)}, \quad t \in R_+. \tag{1.12}$$

$$T(x,0) = T_0 = \text{const}, \qquad x \in R_+^{(1)}, T(0,t) = T_c = \text{const}, \qquad t \in R_+ \tag{1.13}$$

имеет вид [43]:

$$\vartheta(x,t) = \frac{T_c - T(x,t)}{T_c - T_0} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \qquad T_c > T_0. \tag{1.14}$$

Из (1.14) для граничного потока тепла $q(0,t)$ следует:

$$q(0,t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\lambda(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi a t}}, \qquad \lim_{t\to 0} q(0,t) = \infty. \tag{1.15}$$

Этот «парадокс» (фактически артефакт) часто приводится в литературе (в [22,51,56,57] в частности). Аналогично поведение $q(0,0)$ и в задаче теплопроводности в составной системе $\left\{R_+^{(1)}, R_+^{(2)}\right\}$, где $x=0$ – точка контакта полупространств $x<0$ и $x>0$ с различными теплофизическими параметрами и начальными функциями [43,57–59,71]. Сингулярность начального граничного потока массы характерна и для аналогичных диффузионных задач [51,56,72].

Примеры аномалий, связанных с формулировками краевых задач переноса (уровень базиса парадигмы) или с основными положениями неравновесной термодинамики (уровень ядра парадигмы) в известной нам литературе отсутствуют (за исключением классических термодинамических парадоксов [2,11,21]).

ГЛАВА 2. АРТЕФАКТЫ ОБОЛОЧКИ ПАРАДИГМЫ

Пока еще никому не удавалось установить хотя бы приблизительно, что такое Артефакт
К. Саймак, «Заповедник гоблинов»

Бесконечность – это страна математических фокусов. Там царствует ноль–чародей, ..., там упразднены любые рамки, ибо ноль так или иначе все сводит к одинаковому уровню.
Н. Карус

§4. Канонические модели

В настоящей главе артефакты оболочки парадигмы рассматриваются путем анализа решений простейших, многократно встречающихся задач Коши и краевых задач для одномерного линейного уравнения теплопроводности – канонических моделей [42–49,71,72].

Модель 1 – Задача Коши для области $\Sigma = R^{(1)} \times R_+$ при δ-видном начальном распределении температуры:

$$T(x,0) = \varphi(x) = A_0\delta(x), \qquad A_0 = \frac{\Delta Q_0}{Sc_V} = T_0 L_0. \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta Q_0 = Sc_V T_0 L_0$ – количество тепла, подведенного к точке $x = 0$ при $t = 0$; c_V – объемная теплоемкость среды в области $R^{(1)}$; S_0 – площадь поперечного сечения одномерной области; T_0, L_0 – температура и «ширина» эквивалентного δ-источнику конечного теплового импульса. Решение задачи Коши с условием (2.1):

$$T(x,t) = \frac{T_0 L_0}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \qquad x \in R^{(1)}, \quad t \in R_+. \tag{2.2}$$

Модель 2 – Задача Коши при начальном распределении температуры типа «тепловой импульс»:

$$T(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_0, \ x \in [-L_0/2, L_0/2] \\ 0, \ x \overline{\in} [-L_0/2, L_0/2] \end{cases}. \tag{2.3}$$

Решение задачи имеет вид:

$$T(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x + L_0/2}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - L_0/2}{2\sqrt{at}}\right)\right], \quad x \in R^{(1)}, \quad t \in R_+. \quad (2.4)$$

Модель 3 – Задача Коши при начальном распределении температуры типа «ступенька»:

$$T(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, \ x > 0, \\ T_2, \ x < 0, \end{cases} \qquad T_2 > T_1. \quad (2.5)$$

Решение имеет вид:

$$T(x,t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (2.6)$$

Модель 4 - Краевая задача с постоянным граничным условием I-го рода для области $\Sigma_1 = R_+^{(1)} \times R_+$ при постоянной начальной температуре

$$T(x,0) = \varphi(x) = T_0; \qquad T(0,t) = T_c > T_0. \quad (2.7)$$

Решение имеет вид

$$T(x,t) = T_c - (T_c - T_0)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (2.8)$$

Модель 5 – Краевая задача с граничными условиями IV-го рода для двухслойной системы $\left\{R_+^{(1)}, R_+^{(2)}\right\}$ с постоянными, но различными начальными температурами в областях $R_+^{(i)}$ $(i = 1{,}2)$:

$$T_1(x,0) = \varphi_1(x) = T_{10}, \ x \in R_+^{(1)}; \ T_2(x,0) = \varphi_2(x) = T_{20} < T_{10}, \ x \in R_+^{(2)}. \quad (2.9)$$

Решение задачи для $T_1(x,t)$ (для $T_2(x,t)$ аналогично) имеет вид

$$T_1(x,t) = \frac{T_{20} + K_\varepsilon T_{10}}{1 + K_\varepsilon} + \frac{T_{10} - T_{20}}{1 + K_\varepsilon}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right), \quad (2.10)$$

где $K_\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$, $\varepsilon_i = \sqrt{\lambda_i c_{Vi}}$, $a_i = \lambda_i / c_{Vi}$, $i = 1{,}2$.

Модель 6 – Краевая задача с граничными условиями I-го рода для области $\Sigma_2 = \Omega \times R_+$, $\Omega = \left\{x \in (-L_0/2, L_0/2)\right\}$ (слой конечной толщины). Граничные и начальная температуры постоянны, но различны:

$$T(x,0) = \varphi(x) = T_0 = \text{const}, \qquad x \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$T(-L_0/2, t) = T(L_0/2, t) = T_c = \text{const}, \quad t \in R_+, \quad T_c < T_0. \quad (2.12)$$

Решение таково:

$$\vartheta(x,t)=\frac{T(x,t)-T_c}{T_0-T_c}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n}\cos\left(\mu_n\frac{x}{L_0/2}\right)\exp\left(-\mu_n^2F_0\right), \quad (2.13)$$

где

$$\mu_n=(2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad F_0=\frac{at}{(L_0/2)^2}.$$

Модель 7 – Граничная (стационарная) задача с циклическими граничными условиями (IV-го рода) для двухслойной системы $[\Omega_1,\Omega_2]$. Температуры в слоях – $T_i(x_i)$, $x_i\in\Omega_i=\{x_i\in(0,L_i)\}$, $i=1,2$. Для первой краевой задачи (система $\{\Omega_1,\Omega_2\}$ – не циклическая):

$$T_1(x_1)\big|_{x_1=0}=T_2(x_2)\big|_{x_2=0}=T_0;\ \ T_1(x_1)\big|_{x_1=L_1}=T_{c1};\ \ T_2(x_2)\big|_{x_2=L_2}=T_{c2}. \quad (2.14)$$

Температуры $T_i(x_i)$ в областях Ω_i удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda_i\frac{\mathrm{d}^2T_i}{\mathrm{d}x_i^{\,2}}+f_i(x_i)=0, \quad i=1,2, \quad (2.15)$$

где $f_i(x_i)$ – функции плотностей источников тепла в Ω_i.

Модель 8. – Нелинейная краевая задача (типа Стефана). Рассматриваются уравнения вида (1.5) для двух фаз («твердой» и «жидкой»), разделенных подвижной границей фазового перехода $x_f=\xi(t)$ с заданным на ней условием:

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)}=\gamma\sigma\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}, \quad (2.16)$$

где λ_i – теплопроводность фаз; γ – плотность твердой фазы; σ – удельная скрытая теплота фазового перехода; $\xi(t)$ – координата фронта фазового перехода, для которой из решения задачи следует [43]:

$$\xi(t)=\beta\sqrt{t}, \qquad \beta=\mathrm{const}. \quad (2.17)$$

Формулы типа (2.17) характерны и для решений более сложных задач типа Стефана [55,73].

§5. Задачи Коши

Исследование Моделей 1–3 строим так. По решениям (2.2), (2.4), (2.6) – функциям $T_i(x,t)$ ($i=1,2,3$ – номера моделей) находим функции $P_i(x,t)=\dfrac{\partial T_i}{\partial t}$ и $q_i(x,t)=-\lambda\dfrac{\partial T_i}{\partial x}$. Поведение функций T_i, P_i, q_i изучаем на границах области

Σ, а внутри ее – поведение $T_i(x,t)$. В первом случае вычисляем однократные пределы $x \to 0$, $x \to \infty$, $t \to 0$, $t \to \infty$, а затем – двойные пределы (комбинации однократных). Последние находим поочередно (например, вначале $\lim\limits_{t\to 0} T_i(0,t)$, а затем $\lim\limits_{x\to 0} T_i(x,0)$) и одновременно (когда $\lim\limits_{x\to 0, t\to 0} T_i(x,t) = \lim\limits_{t\to 0} T_i(x(t), t = T_i(0,0))$. Во втором случае исследуем $T_i(x,t)$ на экстремум (полагая x – параметром, а t – независимой координатой) и находим формулы – оценки эффективной локализации $T_i(x,t)$. Однократные и двойные пределы для $x \to 0-0$ и $x \to -\infty$ не вычисляем ввиду инвариантности решений относительно преобразования $x \to -x$.

Находим функции $P_i(x,t) = \dfrac{\partial T_i}{\partial t}$:

$$P_1(x,t) = \left(\frac{T_0 L_0}{4\sqrt{\pi a t^3}}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2at} - 1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \tag{2.18}$$

$$P_2(x,t) = \left(\frac{T_0}{2\sqrt{\pi a t^3}}\right)\left[x\,\mathrm{sh}\left(\frac{L_0 x}{4at}\right) - \frac{L_0}{2}\mathrm{ch}\left(\frac{L_0 x}{4at}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2 + (L_0/2)^2}{4at}\right), \tag{2.19}$$

$$P_3(x,t) = \left(\frac{T_2 - T_1}{4\sqrt{\pi a t^3}}\right) x\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \tag{2.20}$$

Вычисляем $q_i(x,t) = -\lambda\dfrac{\partial T_i}{\partial t}$:

$$q_1(x,t) = \left(\frac{\lambda T_0 L_0}{2\sqrt{\pi a t}}\right)\cdot\left(\frac{x}{2at}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \tag{2.21}$$

$$q_2(x,t) = \left(\frac{\lambda T_0}{\sqrt{\pi a t}}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{L_0 x}{4at}\right)\exp\left(-\frac{x^2 + (L_0/2)^2}{4at}\right), \tag{2.22}$$

$$q_3(x,t) = \frac{\lambda(T_2 - T_1)}{2\sqrt{\pi a t}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \tag{2.23}$$

Для функций $T_i(x,t)$ имеем:

$$T_1(x,t)\big|_{x\to 0} = \frac{T_0 L_0}{2\sqrt{\pi a t}},\quad T(x,t)\big|_{x\to\infty} = T_1(x,t)\big|_{t\to 0} = T_1(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0; \tag{2.24}$$

$$T_2(x,t)\big|_{x\to 0} = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{L_0/2}{2\sqrt{at}}\right), \quad T_2(x,t)\big|_{x\to\infty} = T_2(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0,$$

$$T_2(x,t)\big|_{t\to 0} = \begin{cases} T_0, |x| < L_0/2 \\ \dfrac{T_0}{2}, |x| = L_0/2 \\ 0, \quad |x| > L_0/2 \end{cases}; \tag{2.25}$$

$$T_3(x,t)\big|_{x\to 0} = T_3(x,t)\big|_{t\to\infty} = \frac{T_1 + T_2}{2}, \qquad T_3(x,t)\big|_{x\to\infty} = T_1,$$

$$T_3(x,t)\big|_{t\to 0} = \begin{cases} T_2, \qquad x < 0 \\ \dfrac{T_1 + T_2}{2}, x = 0 \\ T_1, \qquad x > 0 \end{cases}. \tag{2.26}$$

Для функций $P_i(x,t)$ из (2.18)–(2.20) следует:

$$P_1(x,t)\big|_{x\to 0} = -\frac{T_0 L_0}{4\sqrt{\pi a t^3}}, \quad P_1(x,t)\big|_{x\to\infty} = P_1(x,t)\big|_{t\to 0} = P_1(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0; \tag{2.27}$$

$$P_2(x,t)\big|_{x\to 0} = \left(\frac{T_0 L_0}{4\sqrt{\pi a t^3}}\right)\exp\left(-\frac{(L_0/2)^2}{4at}\right), \qquad P_2(x,t)\big|_{x\to\infty} = P_2(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0,$$

$$P_2(x,t)\big|_{x\to 0} = \begin{cases} 0, |x| \neq L_0/2 \\ \Psi_\varepsilon, x = L_0/2 \end{cases} \tag{2.28}$$

$$P_3(x,t)\big|_{x\to 0} = P_3(x,t)\big|_{x\to\infty} = P_3(x,t)\big|_{t\to 0} = P_3(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0. \tag{2.29}$$

Для функций $q_i(x,t)$ из (2.21)–(2.23) следует:

$$q_1(x,t)\big|_{x\to 0} = q_1(x,t)\big|_{x\to\infty} = q_1(x,t)\big|_{t\to 0} = q_1(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0; \tag{2.30}$$

$$q_2(x,t)\big|_{x\to 0} = q_2(x,t)\big|_{x\to\infty} = q_2(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0, \quad q_2(x,t)\big|_{t\to 0} = \begin{cases} 0, |x| \neq L_0/2 \\ W_\varepsilon, x = L_0/2 \end{cases}; \tag{2.31}$$

$$q_3(x,t)\big|_{x\to 0} = \frac{\lambda(T_2 - T_1)}{2\sqrt{\pi a t}}, \quad q_3(x,t)\big|_{x\to\infty} = q_3(x,t)\Big|_{t\to 0} = q_3(x,t)\big|_{t\to\infty} = 0. \tag{2.32}$$

В последних из соотношений (2.28) и (2.31) функции Ψ_ε и W_ε зависят от способа перехода $x \to L_0/2$, т.е. вида функции $x = x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$ (вычисляется двойной предел при $t \to 0$ и $x \to L_0/2$). Эти функции имеют вид:

$$\Psi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(x,t) = \frac{T_0}{4}\left(\frac{x_\varepsilon - L_0/2}{\sqrt{\pi a t^3}}\right)\Bigg|_{t\to 0},$$

$$W_\varepsilon = W_\varepsilon(x,t) = \left\{\left(\frac{\lambda T_0}{2\sqrt{\pi a t}}\right)\exp\left[-\left(\frac{x_\varepsilon - L_0/2}{2\sqrt{at}}\right)^2\right]\right\}_{t\to 0}. \qquad (2.33)$$

Для $\Psi_\varepsilon(x,t)$ полагаем $x_\varepsilon = L_0/2 + N_0\sqrt{\pi a t^{3+\varepsilon}}$, $N_0 = \mathrm{const}$, $\varepsilon > -3$.
Для $W_\varepsilon(x,t)$ положим $x_\varepsilon = L_0/2 + 2N_0\sqrt{a t^{1+\varepsilon}}$, $N_0 = \mathrm{const}$, $\varepsilon > -1$.
Поскольку при $x_\varepsilon \to (L_0/2) - 0$, $N_0 < 0$, а при $x_\varepsilon \to (L_0/2) + 0$ $N_0 > 0$, имеем:

$$\Psi_- = \lim_{t\to 0, x_\varepsilon \to (L_0/2)-0} \Psi_\varepsilon(x,t) = \lim_{t\to 0 (N_0<0)}\left(-\frac{T_0}{4}|N_0| t^{\varepsilon/2}\right) = \begin{cases} -\infty, & \varepsilon \in (-3,0) \\ -\frac{T_0}{4}|N_0|, & \varepsilon = 0 \\ 0, & \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\Psi_+ = \lim_{t\to 0, x_\varepsilon \to (L_0/2)+0} \Psi_\varepsilon(x,t) = -\Psi_-. \qquad (2.34)$$

Для $W_\varepsilon(x,t)$, независимо от знака ($x - L_0/2$) получаем:

$$W_\pm = \lim_{t\to 0, |x_\varepsilon| \to (L_0/2)} \Psi_\varepsilon(x,t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\lambda T_0}{2\sqrt{\pi a t}}\right)\exp\left(-N_0^{\,2} t^\varepsilon\right) = \begin{cases} 0, \varepsilon \in (-1,0) \\ \infty, \varepsilon \ge 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

Таким образом, убеждаемся в том, что: 1) Начальные условия для функций $T_i(x,t)$ не выполняются (у $T_1(x,t)$ «пропадает» δ-функция, у $T_2(x,t)$ и $T_3(x,t)$ обнаруживаются разрывы I-го рода (при $|x| = L_0/2$ и $x = 0$ соответственно); 2) Граничные значения (при $x = 0$) функций $T_1(x,t)$ и $T_3(x,t)$ в начальный момент времени ($t \to 0$) имеют разрывы II-го и I-го родов соответственно ($T_1(0,t)$ при $t \to 0$ обращается в ∞, а $T_3(0,t)$ при $t \to 0$ имеет скачок, принимая значение $(T_1 + T_2)/2$); 3) Начальная скорость изменения температуры $T_1(0,t)$ ($P_1(0,t)$ при $t \to 0$) бесконечна, а температуры $T_2(L_0/2, t)$ ($P_2(L_0/2, t)$ при $t \to 0$) зависит от способа предельного перехода $x_\varepsilon \to (L_0/2)$, причем в зависимости от выбора параметров N_0 и ε в (2.34) она может принимать (по модулю) любые значения от 0 до ∞; 4) Последнее относится и к функции $q_2(L_0/2, t)$ при $t \to 0$ с тем отличием, что знак ($x_\varepsilon - L_0/2$) роли не играет, а в зависимости от выбора параметра ε функция может принимать два значения – 0 и ∞.; 5) Граничное значение (при $x = 0$) функции $q_3(x,t)$ в начальный момент времени ($t \to 0$) испытывает разрыв II-го рода (обращается в ∞).

Вычисление двойных пределов осуществляем поочередно, а затем и одновременно, вводя функции $x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$. Обозначим: $L_{ij}(\alpha_1,\beta_2)$ – двойной предел при $x \to \alpha_1$ и $t \to \beta_2$, совершаемый в порядке: вначале $x \to \alpha_1$, затем $t \to \beta_2$. В обратном порядке вычисления пределов имеем $L_{ij}(\alpha_2,\beta_1)$. При одновременном $x \to \alpha$, $t \to \beta$, когда $x = x_\varepsilon(t)$, имеем $L_{ij}(\alpha,\beta)$. Индекс «i» обозначает номер модели (i = 1,2,3, а индекс «j» вид функции (j =1,2,3) соответственно для T_i, P_i, q_i). Для $T_1(x,t)$ имеем:

$$L_{11}(0_2,0_1) = 0; \qquad L_{11}(0_1,0_2) = \infty;$$

$$L_{11}(0_1,\infty_2) = L_{11}(0_2,\infty_1) = L_{11}(0,\infty) = 0;$$

$$L_{11}(\infty_2,0_1) = L_{11}(\infty_1,0_2) = L_{11}(\infty,0) = 0,$$

$$L_{11}(\infty_1,\infty_2) = L_{11}(\infty_2,\infty_1) = L_{11}(\infty,\infty) = 0 \tag{2.36}$$

В отличие от других, пределы при $x \to 0, t \to 0$ не совпадают: $L_{11}(0_1,0_2) \neq L_{11}(0_2,0_1)$. Поэтому $L_{11}(0,0)$ вычисляется с помощью $x_\varepsilon(t) = 2N_0\sqrt{at^{1+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > -1)$:

$$L_{11}(0,0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \in (-1,0) \\ \infty, & \varepsilon \geq 0 \end{cases}. \tag{2.37}$$

Для $T_2(x,t)$ находим, полагая $x_\varepsilon(t) = L_0/2 - 2N_0\sqrt{at^{1+\varepsilon}}$ $(|N_0| < \infty$, $\varepsilon > -1)$:

$$L_{21}(0_2,0_1) = L_{21}(0_1,0_2) = L_{21}(0,0) = T_0; \qquad L_{21}(\infty_1,0_2) = L_{21}(\infty_2,0_1) = L_{21}(0,\infty) = 0;$$

$$L_{21}(0_1,\infty_2) = L_{21}(0_2,\infty_1) = L_{21}(0,\infty) = 0;$$

$$L_{21}(\infty_1,\infty_2) = L_{21}(\infty_2,\infty_1) = L_{21}(\infty,\infty) = 0. \tag{2.38}$$

$$L_{21}((L_0/2)_1,0_2) = \frac{T_0}{2}; \quad L_{21}((L_0/2)_2,0_1) = \begin{cases} T_0, x \to (L_0/2) - 0, \\ \dfrac{T_0}{2}, x = L_0/2, \\ 0, x \to (L_0/2) + 0. \end{cases} \tag{2.39}$$

$$L_{21}(L_0/2\,,0) = \begin{cases} E_\varepsilon^{(+)}, N_0 > 0 (x_\varepsilon \to (L_0/2) - 0) \\ E_\varepsilon^{(-)}, N_0 < 0 (x_\varepsilon \to (L_0/2) + 0), \end{cases}$$

$$E_\varepsilon^{(+)} = \begin{cases} T_0, \varepsilon < 0 \\ \dfrac{T_0}{2}(1 + \operatorname{erf}|N_0|), \varepsilon = 0, \\ \dfrac{T_0}{2}, \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad E_\varepsilon^{(-)} = \begin{cases} 0, \varepsilon < 0, \\ \dfrac{T_0}{2}(1 - \operatorname{erf}|N_0|), \varepsilon = 0, \\ \dfrac{T_0}{2}, \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Для $T_3(x,t)$ получаем:

$$L_{31}(0_1,0_2)=\frac{T_1+T_2}{2},\quad L_{31}(0_2,0_1)=\begin{cases}T_1, x\to 0+0,\\ T_2, x\to 0-0,\end{cases}\quad L_{31}(\infty_1,\infty_2)=T_1,$$

$$L_{31}(\infty_2,\infty_1)=\frac{T_1+T_2}{2},\qquad L_{31}(\infty_1,0_2)=L_{31}(\infty_2,0_1)=L_{31}(\infty,0)=T_1,$$

$$L_{31}(0_1,\infty_2)=L_{31}(0_2,\infty_1)=L_{31}(0,\infty)=\frac{T_1+T_2}{2}. \tag{2.41}$$

$$L_{33}(0,0)=\frac{T_1+T_2}{2}+\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\times\begin{cases}1, & \varepsilon\in(-1,0)\\ \operatorname{erf}|N_0|, & \varepsilon=0\\ 0, & \varepsilon>0,\end{cases}$$

$$L_{33}(\infty,\infty)=\frac{T_1+T_2}{2}+\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\times\begin{cases}0, & \varepsilon\in(-1,0)\\ \operatorname{erf}|N_0|, & \varepsilon=0\\ 1, & \varepsilon>0.\end{cases} \tag{2.42}$$

Из (2.36)–(2.42) следует, что есть две группы величин $L_{ij}(\alpha,\beta)$: в первой группе («нормальной») $L_{ij}(\alpha_1,\beta_2)=L_{ij}(\alpha_2,\beta_1)=L_{ij}(\alpha,\beta)$, т.е. двойные поочередные пределы не зависят от порядка их вычисления и совпадают с двойными, вычисленными при одновременном переходе $x\to\alpha$, $t\to\beta$ $(x=x_\varepsilon(t))$; во второй группе («аномальной») двойные пределы зависят от порядка переходов, различны между собой и не совпадают с двойными одновременными.

Для функций $P_i(x,t)$ и $q_i(x,t)$ «нормальные» пределы опускаем, а «аномальные» далее приводим:

$$L_{12}(0_1,0_2)=-\infty,\quad L_{12}(0_2,0_1)=0,\quad L_{12}(0,0)=\begin{cases}0, & \varepsilon\in(-1,0)\\ \infty, & \varepsilon=0\\ -\infty, & \varepsilon>0.\end{cases} \tag{2.43}$$

$$L_{22}((L_0/2)_1,0_2)=0,\quad L_{22}((L_0/2)_2,0_1)=\infty,\quad L_{22}(L_0/2,0)=\Psi_+. \tag{2.44}$$

$$L_{32}(0_1,0_2)=L_{32}(0_2,0_1)=0,\ L_{32}(0,0)=\begin{cases}0, & \varepsilon\in(-1,0),\varepsilon>2,\\ \infty, & \varepsilon\in(0,2),\\ \dfrac{N_0}{2\sqrt{\pi}}(T_2-T_1), & \varepsilon=2.\end{cases} \tag{2.45}$$

$$L_{13}(0_1,0_2)=L_{13}(0_2,0_1)=0,\quad L_{13}(0,0)=\begin{cases}0, & \varepsilon\in(-1,0),\varepsilon>2\\ \infty, & \varepsilon\in(-0,2)\\ \left(\dfrac{\lambda N_0L_0}{2\sqrt{\pi}a}\right)T_0, & \varepsilon=2.\end{cases}\qquad(2.46)$$

$$L_{23}((L_0/2)_1,0_2)=\infty,\quad L_{23}((L_0/2)_2,0_1)=0,\quad L_{23}(L_0/2,0)=W_{\pm}.\qquad(2.47)$$

$$L_{33}(0_1,0_2)=L_{33}(0_2,0_1)=0,\qquad L_{33}(0,0)=\begin{cases}0, & \varepsilon\in(-1,0)\\ \infty, & \varepsilon\ge 0.\end{cases}\qquad(2.48)$$

Здесь Ψ_+ и $W_{\pm}$ соответствуют (2.34) и (2.35). Половина двойных пределов ((2.45), (2.46), (2.48)) при поочередном вычислении совпадают, однако не совпадают с двойными одновременными. У другой половины ((2.43), (2.44),(2.47)) поочередные пределы не совпадают ни друг с другом, ни с одновременными. В последних, выбирая соответствующие ε и N_0 для $L_{ij}(0,0)$ и $L_{23}(L_0/2,0)$ можно получить любые наперед заданные значения в интервале $(0,\infty)$ (или $(-\infty,\infty)$). Таким образом, у рассмотренных функций в точках $x=0$ и $x=L_0/2$ имеются разрывы.

Рассмотрим поведение функций $T_i(x,t)$ во внутренних точках области Σ. Из условия экстремума функций $T_i(x,t)$ по t (x играет роль параметра):

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}=P_i(x,t)=0,\qquad(2.49)$$

получаем, полагая $x=x_0$, $t=t_0$

$$P_1(x_0,t_0)=\left(\frac{T_0L_0}{4\sqrt{\pi a t^3}}\right)\cdot\left(\frac{x_0^2}{2at_0}-1\right)\exp\left(-\frac{x_0^2}{4at_0}\right)=0,\quad x_0>0,\quad t_0>0.\qquad(2.50)$$

Значение $t=t_0$ есть точка максимума функции $T_1(x,t)$ и связано с координатой $x=x_0\in(-\infty,\infty)$ следующей из (2.50) зависимостью:

$$x_0^2=2at_0.\qquad(2.51)$$

Максимальное в точке $x=x_0$ значение $T_1(x,t)$ достигается при $t=t_0$ и равно:

$$\max_{x,t\in\Sigma}T_1(x,t)=T_{1m}(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\left(\frac{T_0L_0}{x_0}\right).\qquad(2.52)$$

При $t<t_0$ температура в точке $x=x_0$ возрастает, а при $t>t_0$ убывает, так что (2.51), совпадающее с оценкой эффективной локализации температурного поля

(1.10) дает координату x_0 – локального максимума температуры. Для $T_2(x,t)$ из условия $P_2(x_0,t_0)=0$ следует:

$$x_0 \operatorname{sh}\left(\frac{L_0 x_0}{4at_0}\right)-\frac{L_0}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{L_0 x_0}{4at_0}\right)=0, \quad x_0>0, \quad t_0>0. \tag{2.53}$$

Положив $x_0/L_0=\eta$, $at_0/(L_0/2)^2=F_0$ из (2.53) получаем для $x>L_0/2$ ($\eta>1/2$):

$$2\eta \operatorname{th}\left(\frac{\eta}{F_0}\right)=1. \tag{2.54}$$

Если решить уравнение (2.54), то получим $\eta=\eta_0=\eta_0(F_0)$, или, возвращаясь к первоначальным переменным, $x_0=x_0(t_0)$. Преобразуем (2.54) к виду

$$\frac{2\eta}{F_0}=\ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{2\eta}}{1-\dfrac{1}{2\eta}}\right), \quad \frac{1}{2\eta}=z=\frac{L_0/2}{x}, \quad z<1 \tag{2.55}$$

и решаем его приближенно, разлагая логарифм:

$$\frac{1}{F_0}=2z^2\left(1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}+\frac{z^6}{7}+\ldots\right). \tag{2.56}$$

Из (2.56) при $\left(z^2/3\right)<<1$ следует уравнение 1-го приближения:

$$\frac{1}{F_0}=2z_1^2. \tag{2.57}$$

Пусть $\alpha<<1$ означает, что $\alpha\le 10^{-2}$. Тогда (2.57) справедливо для

$$x_0^{(1)}\ge 5{,}77\,(L_0/2). \tag{2.58}$$

Решение (2.57):

$$\left(x_0^{(1)}\right)^2=2at_0, \tag{2.59}$$

т.е. совпадает с (2.51). Из (2.58) и (2.59) получаем

$$t_0\ge 4{,}17\frac{L_0^2}{a}. \tag{2.60}$$

Уравнение 2-го приближения

$$\frac{1}{F_0}=2z_2^2\left(1+\frac{z_2^2}{3}\right) \tag{2.61}$$

следует из (2.56) при выполнении условия

$$\left(z_2^4/5\right)\left(1+z_2^2/3\right)^{-1} << 1, \qquad z_2 \le 0{,}33, \tag{2.62}$$

откуда следует уточнение оценки (2.58):

$$x_0^{(2)} \ge 3{,}03\,(L_0/2). \tag{2.63}$$

Второе приближение – решение (2.61) имеет вид:

$$\left(x_0^{(2)}\right)^2 = at\left[1+\sqrt{1+L_0^2/6at_0}\right] \cong 2at_0\left(1+\frac{L_0^2}{24at_0}\right). \tag{2.64}$$

Последнее соотношение выполняется с точностью в 1%. С точностью в 3,6% можно записать:

$$\left(x_0^{(2)}\right)^2 \cong 2at_0 \tag{2.65}$$

при

$$t_0 \ge 1{,}15\left(\frac{L_0^2}{a}\right). \tag{2.66}$$

Функция $T_3(x,t)$ максимума не имеет, так как $P_3(x,t)$ в ноль нигде в Σ не обращается. Однако $P_3(x,t)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, определяемый из условия $\partial P_3/\partial x = 0$:

$$x_0^2 = 2at_0,$$

т.е. вновь получили характерную для всех задач Коши зависимость.

Оценки эффективной локализации функцией типа (1.9) будем называть априорными оценками, так как их можно получить без информации о начальном условии и решении задачи Коши, используя лишь предположения о постоянстве нулевого момента температуры ($M_0(t) = \mathrm{const}$) и скорости убывания температурного поля при $|x| \to \infty$:

$$\left[xT(x,t)\right]_{-\infty}^{\infty} = \left[x^2\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{2.67}$$

Обосновать (2.67) можно только апостериорно, т.е. получив явный вид решения, однако в большинстве случаев (2.67) действительно имеет место. Условие $M_0 = \mathrm{const}$ справедливо для задач Коши при отсутствии в системе внутренних источников (стоков) тепла. В противном случае, как и в краевых задачах, $M_0 = M_0(t)$ и оценку (1.9) получить нельзя. Из условий и способа получения оценки $\left\langle x^2 \right\rangle$ следует, что она одинакова для всех задач Коши:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \delta^2(t) = 2at. \qquad (2.68)$$

Апостериорные оценки, т.е. использующие информацию о решении задачи Коши, напротив, индивидуальны. Найдем их, попутно уточнив смысл априорных оценок (2.68) и их модификаций – оценок «3σ», введенных по аналогии с теорией вероятностей:

$$\delta_{3\sigma} = 3\delta(t) = 3\sqrt{2at} = 4{,}24\sqrt{at}. \qquad (2.69)$$

Подставим $x^2 = \delta^2 = 2at$ в $T_1(x,t)$ ((2.2)) и получим

$$T_1(0,t) = \frac{T_0 L_0}{2\sqrt{\pi at}}, \quad \frac{T_1(\delta,t)}{T(0,t)} = 0{,}61. \qquad (2.70)$$

При $x = \delta_{3\sigma} = 4{,}24\sqrt{at}$ находим:

$$\frac{T_1(\delta_{3\sigma},t)}{T_1(0,t)} \cong 0{,}01. \qquad (2.71)$$

Таким образом, оценка $\delta(t)$ не описывает границу («фронт») температурного поля и ей следует предпочесть оценку $\delta_{3\sigma}(t)$, дающую координату «фронта», на котором температура $T_1(\delta_{3\sigma},t)$ составляет только 1% от максимального значения – $T_1(0,t)$. Для $T_2(x,t)$ оценка локализации поля (2.68) также не эффективна, так как подстановка $\delta(t) = L_0/2 + \sqrt{2at}$ в (2.4) дает:

$$\frac{T_2(\delta,t)}{T_0} = 0{,}112, \qquad t \ge t_* = 1{,}15\, L_0^2 / a. \qquad (2.72)$$

Оценка $\delta_{3\sigma}(t) = L_0/2 + 4{,}24\sqrt{at}$ при подстановке в (2.4) дает:

$$\frac{T_2(\delta_{3\sigma},t)}{T_0} \le 1{,}35 \cdot 10^{-3}, \qquad t > 0. \qquad (2.73)$$

Для $T_3(x,t)$ получим:

$$T_3(\delta,t) = T_1 + 0{,}16(T_2 - T_1), \quad T_3(\delta_{3\sigma},t) = T_1 + 1{,}35 \cdot 10^{-3}(T_2 - T_1). \quad (2.74)$$

Таким образом, в случае модели 1 оценка $\delta_{3\sigma}$ (2.71) описывает «квазифронт» температурного поля, где оно составляет 1% от максимального, но со временем это отношение уменьшается. Поэтому эта оценка завышена в отличие от оценки (2.73) для $T_2(x,t)$, где сравнение осуществляется с фиксированной температурой T_0. Оценка (2.74) – $\delta_{3\sigma}$ также от времени не зависит. Такие, далее именуемые стационарными, оценки более предпочтительны для прикладных исследований.

Рассмотрим $T_1(x,t)$, полагая $x = x_\delta$ таким, что $T_1(x_\delta,t) / T(0,t) = 10^{-2}$, а

$x=\bar{x}_\delta$ таким, что $T_1(\bar{x}_\delta,t)/T_0=10^{-2}$. Оценки x_δ и $\bar{x}_\delta$ представляют собой апостериорные нестационарную и стационарную оценку соответственно. Здесь T_0 – температура в точке $x=0$ в момент времени $t=t_L=$ $=L_0^2/4\pi a\cong 0{,}08\,L_0^2/a$. Находим:

$$x_\delta^2=18{,}42at,\qquad x_\delta(t)=4{,}3\sqrt{at}. \tag{2.75}$$

$$\left(\frac{\bar{x}_\delta}{L_0}\right)^2=\left[1{,}467-0{,}159\ln\left(\frac{t}{t_L}\right)\right]\left(\frac{t}{t_L}\right),\qquad \left(\frac{\bar{x}_\delta}{L_0}\right)_{t_L}=1{,}21. \tag{2.76}$$

При $\left(t/t_L\right)\le\left(t/t_L\right)_f$ формула (2.76) описывает движение температурного «фронта» направо, в сторону $x>0$. Функция $\bar{x}_\delta/L_0$ возрастает со временем, достигая максимума при $t=t_f$, а затем, при $\left(t/t_L\right)_f<\left(t/t_L\right)\le\left(t/t_L\right)_S$ – убывает. При $t=t_S$ она обращается в нуль. Убывающая функция $\bar{x}_\delta(t)/L_0$ описывает движение «заднего» (левого) «фронта» – уровня температуры в $0{,}01T_0$, распространяющегося в сторону $x=0$. «Правый фронт» при $t\ge t_f$ исчезает. Из (2.76) получаем:

$$\left(\frac{t}{t_L}\right)_f\cong 3790;\quad \left(\frac{t}{t_L}\right)_S\cong 10^4;\quad \left(\frac{\bar{x}_\delta}{L_0}\right)_{\max}=\frac{\bar{x}_\delta(t_f)}{L_0}\cong 24{,}5. \tag{2.77}$$

Для функции $T_2(x,t)$ оценку $x_\delta(t)$ определяем из условия $T_2(x_\delta,t)/T_2(L_0/2\,,t)=10^{-2}$. Из (2.4) приближенно находим

$$x_\delta=x_\delta(t)\cong L_0/2+3{,}66\sqrt{at}. \tag{2.78}$$

Для определения $\bar{x}_\delta(t)$ потребуем: $T_2(\bar{x}_\delta,t)/T_0=10^{-2}$. Тогда:

$$\bar{x}_\delta(t)\cong L_0/2+3{,}32\sqrt{at},\qquad t>0. \tag{2.79}$$

Если определение «фронта» уточнить, потребовав $T_2(\bar{x}_\delta^*,t)/T_0=10^{-3}$, то

$$\bar{x}_\delta^*\cong L_0/2+4{,}24\sqrt{at},\qquad t>0. \tag{2.80}$$

В случае $T_3(x,t)$ оценки $x_\delta(t)$ нет, а $\bar{x}_\delta$ определяется из условия $T_3(\bar{x}_\delta,t)=T_1+(T_2-T_1)10^{-2}$, которое дает:

$$\bar{x}_\delta=3{,}3\sqrt{at},\qquad t>0. \tag{2.81}$$

При условии $T_3(\bar{x}_\delta^*,t)=T_1+(T_2-T_1)10^{-3}$ получаем

$$\bar{x}_\delta^*=4{,}38\sqrt{at},\qquad t>0. \tag{2.82}$$

В настоящем §5 исследованием задач Коши (модели 1,2,3) было установлено следующее.

1. Для всех исследованных функций $-T_i(x,t), P_i(x,t), q_i(x,t)$ характерны особенности (аномалии) поведения на границах области определения Σ.

2. Эти аномалии (фактически – артефакты) образуют две группы: а) аномалии, выявленные анализом однократных пределов функций в граничных точках; б) аномалии, вытекающие из исследованных двукратных (поочередных и одновременных) пределов.

3. Аномалии группы а): не выполняются начальные условия $T_1(x,t)$; имеются разрывы I-го и II-го рода ($T_2(x,t)$, $T_3(x,t)$) в граничных значениях; обращение в бесконечность начальной скорости изменения граничной температуры; зависимость начальной температуры от способа предельного перехода $x \to L_0/2$ (где $L_0/2$ – точка разрыва начального распределения температуры).

4. Аномалии группы б): существенная часть двойных поочередных пределов не совпадает между собой и с двойными одновременными процессами ($L_{11}(0{,}0)$, $L_{21}(L_0/2{,}0)$, $L_{31}(0{,}0)$, $L_{12}(0{,}0)$ и др.); аномалии характерны для тех комбинаций x и t, при которых имеется разрыв в начальных и граничных условиях; для ряда величин $L_{ij}(\alpha,\beta)$ можно, выбором параметров N_0 и ε, получить любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

5. Во внутренних точках области Σ функции $T_1(x,t)$ и $T_2(x,t)$ имеют максимумы, в которых переменные связаны между собой: $x_0^2 = 2at_0$. Функция $T_3(x,t)$ изменяется монотонно, но $P_3(x,t) = \partial T_3/\partial t$ имеет экстремум, в котором также $x_0^2 = 2at_0$.

6. Оценки эффективной локализации температурного поля подразделяются на априорные и апостериорные. Первые одинаковы для всех задач Коши: $\delta(t) = \sqrt{2at}$, $\delta_{3\sigma}(t) = 4{,}24\sqrt{at}$, причем эффективна только оценка $\delta_{3\sigma}(t)$.

7. Апостериорные оценки обоих видов $x_\delta(t)$ (нестационарные) и $\bar{x}_\delta(t)$ (стационарные) следуют из условий ослабления поля на «фронте» в 10^2 раз, а при ужесточении этого условия (в 10^3) модифицируются несущественно.

8. Апостериорные оценки, как и априорные, пропорциональны $\sqrt{t}$, что приводит к аномалии – бесконечной начальной скорости движения температурного «фронта».

§6. Краевые задачи

При исследовании краевых задач (канонических моделей 4–8), учитывая бóльшее влияние их специфики, чем у задач Коши, общего подхода, как в §5, намечать не будем.

Модель 4. Из решения (2.8) получаем

$$P_4(x,t) = \left(\frac{T_c - T_0}{2\sqrt{\pi a t^3}}\right) x \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \tag{2.83}$$

$$q_4(x,t) = \left(\frac{\lambda(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi a t}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \tag{2.84}$$

Для функции $T_4(x,t)$ вычисление однократных пределов демонстрирует отсутствие аномалий. Двойные пределы ведут себя аналогично предыдущим моделям (задачи Коши):

$$L_{41}(\infty_1,0_2) = L_{41}(\infty_2,0_1) = L_{41}(\infty,0) = T_0,$$
$$L_{41}(0_1,\infty_2) = L_{41}(0_2,\infty_1) = L_{41}(0,\infty) = T_c. \tag{2.85}$$

$$L_{41}(0_1,0_2) = T_c \neq L_{41}(0_2,0_1) = T_0, \qquad L_{41}(0,0) = \begin{cases} T_0, & \varepsilon \in (-1,0) \\ T_c - (T_c - T_0)\operatorname{erf} N_0, & \varepsilon = 0 \\ T_c, & \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{2.86}$$

$$L_{41}(\infty_1,\infty_2) = T_0 \neq L_{41}(\infty_2,\infty_1) = T_c, \qquad L_{41}(\infty,\infty) = \begin{cases} T_c, & \varepsilon \in (-1,0) \\ T_c - (T_c - T_0)\operatorname{erf} N_0, & \varepsilon = 0 \\ T_0, & \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{2.87}$$

В (2.86), (2.87) положено: $x_\varepsilon(t) = 2N_0\sqrt{at^{1+\varepsilon}}$, $N_0 > 0$, $\varepsilon > -1$.

Функция $P_4(x,t)$ с точностью до множителя совпадает с $P_3(x,t)$ ((2.20). Поэтому свойства ее аналогичны ранее рассмотренным в §5 для $P_3(x,t)$. Такая же аналогия имеется и между функциями $q_4(x,t)$ и $q_3(x,t)$ – ((2.23).

Поведение $T_4(x,t)$ внутри области Σ_1 также аналогично поведению $T_3(x,t)$. Априорных оценок локализации поля нет, так как $M_0 = M_0(t)$. Апостериорная стационарная оценка локализации, следующее из условия $T_4(\bar{x}_\delta,t) = T_0 + (T_c - T_0)10^{-2}$, имеет вид:

$$\bar{x}_\delta \cong 3{,}3\sqrt{at}\,. \tag{2.88}$$

Модель 5. Поведение функций $T_5(x,t)$, $P_5(x,t), q_5(x,t)$ на границах аналогично поведению соответствующих функций в моделях 3 и 4. Внутри области $T_5(x,t)$ изменяется монотонно, а $P_5(x,t)$ имеет экстремум, в котором $x_0^2 = 2at_0$. Априорной оценки локализации нет, так как $M_0 = M_0(t)$. Апостериорная стационарная оценка локализации совпадает с (2.88).

Модель 6. Если зафиксировав левую границу области Ω ($x = -L_0/2$) удалить правую ($x = L_0/2$) на бесконечность, то получим Модель 4. Это соответствует рассмотрению промежутков времени $t << L_0^2/a$, поэтому все пределы при $t \to 0$ у модели 6 совпадают с таковыми в моделях 3 и 4. Поэтому ограничимся рассмотрением случаев: 1) $|x| \to 0,\ t \to \infty$; 2) $|x| \to L_0/2,\ t \to \infty$. Для больших значений t решение (2.13) с точностью 10^{-3} запишем в виде

$$T_6(x,t) \cong T_c + (T_0 - T_c)\tilde{\theta}(x,t),\ \tilde{\theta}(x,t) = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L_0/2}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}F_0\right), \tag{2.89}$$

$$F_0 = at/(L_0/2)^2 \geq 0{,}295, \qquad t \geq 0{,}147\left(L_0^2/a\right). \tag{2.90}$$

Из (2.89) видно, что при любом, сколь угодно малом перепаде температур ($T_0 - T_c > 0$) для установления в области Ω стационарного состояния с температурой T_c, необходимо бесконечное время: $T_c = T_6(x,\infty)$. При $x = 0$, $T_6(0,t) = \max\limits_{x\in\Omega} T_6(x,t) = T_{60}(t)$. При $x = L_0/2$, $T_6(L_0/2,t) = \min\limits_{x\in\Omega} T_6(x,t) =$ $= T_c$. С учетом (2.90) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_m T_6 = \max_{x\in\Omega} T_6(x,t) - \min_{x\in\Omega} T_6(x,t) = T_{60}(t) - T_c,\\
&\Delta_0 T_6 = \lim_{t\to\infty} \Delta_m T_6 = T_{60}(\infty) - T_c = T_0 - T_c,\\
&\frac{\Delta_m T_6}{\Delta_0 T_6} = \frac{T_{60}(t) - T_c}{T_0 - T_c} = \tilde{\theta}(0,t) = \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}F_0\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

Результаты расчетов по последней из формул (2.91) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Динамика безразмерной температуры

$\tilde{\theta}(0,t)$	$10\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-2}$	10^{-3}	0
F_0	0,418	0,491	0663	0,884	1,353	∞

Уменьшение $\widetilde{\theta}(0,t)$ на порядок (от $\widetilde{\theta} = 10^{-2}$ до $\widetilde{\theta} = 10^{-3}$) обеспечивается, как видно из таблицы, возрастанием времени процесса в $1{,}353/0{,}884 = 1{,}53$ раза, но достижение конечного значения $\widetilde{\theta} = 0$ требует $t = \infty$.

Модель 7. Рассмотрим вначале I-ю краевую задачу для двухслойной системы $\{\Omega_1, \Omega_2\}$. Граничные условия – (2.14), а уравнение теплопроводности – (2.15). Решение имеет вид:

$$T_1(x_1) = T_0 + \left(\frac{T_{1c} - T_0}{L_1} + \frac{f_1 L_1}{2\lambda_1}\right)x_1 - \frac{f_1}{2\lambda_1}x_1^2, \tag{2.92}$$

$$T_2(x_2) = T_0 + \left(\frac{T_{2c} - T_0}{L_2} + \frac{f_2 L_2}{2\lambda_2}\right)x_2 - \frac{f_2}{2\lambda_2}x_2^2, \tag{2.93}$$

где температура на контакте слоев – T_0 – неизвестная величина. Для определения T_0 используется второе из граничных условий IV-го рода – склейки потоков тепла на границе контакта:

$$q_1(x_1)\Big|_{x_1=0} + q_2(x_2)\Big|_{x_2=0} = 0, \quad q_i = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x_i}, \quad i = 1{,}2. \tag{2.94}$$

Подстановка в (2.94) выражений (2.92) и (2.93) дает:

$$T_0 = \left(\frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}\right)^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{L_1}T_{1c} + \frac{\lambda_2}{L_2}T_{2c}\right) + \frac{f_2 L_2 + f_2 L_2}{2}. \tag{2.95}$$

Подстановка (2.95) в (2.92) и в (2.93) исчерпывает решение задачи теплопроводности в составной области $\{\Omega_1, \Omega_2\}$. При переходе к системе $[\Omega_1, \Omega_2]$ – с периодическими граничными условиями, когда слои контактируют обеими границами ($x_1 = x_2 = 0$ и $x_1 = L_1, x_2 = L_2$), температуры T_{1c} и T_{2c} одинаковы:

$$T_{1c} = T_{2c} = T_c. \tag{2.96}$$

Температура T_c является неизвестной, для ее определения необходимо использовать второе из граничных условий IV-го рода – склейки потоков тепла на второй границе:

$$q_1(x_1)\Big|_{x_1=L_1} + q_2(x_2)\Big|_{x_2=L_2} = 0. \tag{2.97}$$

Если в (2.97) подставить решения (2.92) и (2.93), получим уравнение, которое совместно с (2.95) (являющимся следствием (2.94)) образует систему двух алгебраических уравнений относительно двух неизвестных – T_0 и T_c. Определитель этой системы D:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ -a_{11} & a_{11} \end{vmatrix} = 0, \quad a_{11} = \frac{\lambda_1}{L_1} + \frac{\lambda_2}{L_2}. \tag{2.98}$$

Таким образом, найти T_0 и T_c нельзя, т.е. задача стационарной теплопроводности в системе $[\Omega_1, \Omega_2]$ неразрешима.

Модель 8. Для решений в обеих фазах характерны те же аномалии, которые отмечены в моделях 3 и 4. В условии Стефана (2.16) один из тепловых потоков (или оба) при $t = 0$ может обращаться в ∞, так как $q \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$. Так как закон движения фронта $\xi(t) \sim \sqrt{t}$, скорость фронта в начальный момент времени также обращается в ∞.

В настоящем §6 на ряде краевых задач было показано, что:

1. Аномалии в поведении функций $T_i(x,t)$, $P_i(x,t), q_i(x,t)$ на границах областей ($x \to 0, t \to 0$) аналогичны таковым в задачах Коши.

2. Во внутренних точках областей особенностей нет; оценки локализации полей для конечных систем не рассматривались, а при переходе к неограниченной (полуограниченной) области они совпадают с таковыми в задачах Коши.

3. Для конечных областей (как и для бесконечных) переход от начальной температуры T_0 к конечной T_c требует бесконечного времени при любом $T_0 - T_c > 0$.

4. Для задачи с циклическими граничными условиями отсутствует стационарное (при $t = \infty$) решение.

5. В задаче Стефана имеются аномалии, аналогичные таковым для линейных задач (Коши и краевых), рассмотренных ранее.

ГЛАВА 3. АРТЕФАКТЫ БАЗИСА ПАРАДИГМЫ

– Ведь Вам известно – сказал он, – как нам всем дорог Артефакт.
К. Саймак, «Заповедник гоблинов»

Дифференциальное уравнение в частных производных вошло в теоретическую физику в качестве служанки, но постепенно стало госпожой.
А. Эйнштейн

§7. Постановки и решения краевых задач

Краевые задачи – модели процессов переноса, составляющие базис термодинамической парадигмы, крайне разнообразны. Анализом представительного массива публикаций (более 1600) в области теплофизики и геотеплофизики, автором предложена [14,30] классификация «7НЕ», охватывающая модели:

1) стационарные и нестационарные; 2) однородные и неоднородные; 3) линейные и нелинейные; 4) одномерные и неодномерные; 5) ординарные и неординарные; 6) локальные и нелокальные; 7) корректные и некорректные.

Рассмотрим характерные, на наш взгляд, примеры аномалий (артефактов), связанных с одномерными линейными и нелинейными, стационарными и нестационарными одномерными локальными моделями процессов переноса.

Для неподвижных твердых сред без источников тепла из уравнения баланса внутренней энергии u следует уравнение [52,75–77]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \qquad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{q}$ – вектор плотности потока тепла, в зависимости от модели сплошной среды представленный, согласно закона Фурье [52,76], одним из следующих способов:

$$\mathbf{q} = -\lambda_0 \nabla T; \quad \mathbf{q} = -\lambda(M) \nabla T; \quad \mathbf{q} = -\lambda(T) \nabla T; \quad \mathbf{q} = -\lambda(M,T) \nabla T. \qquad (3.2)$$

Здесь λ_0 – постоянный коэффициент теплопроводности; $\lambda(M)$ – коэффициент теплопроводности неоднородной среды, $M \in \Omega$ область среды; $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры (нелинейная среда); $\lambda(M,T)$ – случай, объединяющий два предыдущих.

Относительно выбора одного из соотношений (3.2) при построении конкретных моделей переноса, в литературе встречаются противоречивые сведения. В [75, с.19] говорится: «... множитель пропорциональности λ в общем случае следует рассматривать как некоторую функцию температуры и координат, а следовательно, и времени», а в [77, с.204]: «Очень часто ... коэффициент теплопроводности в твердом теле не зависит от температуры и, следовательно, от координат». В обеих цитатах «следовательно» употребляется некорректно.

Дивергентный член в (3.1) обычно записывают в правой части уравнения теплопроводности и в одномерном случае он принимает, согласно (3.2) один из видов:

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,T)\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{3.3}$$

В последнем из случаев (3.3) встречаются ошибки при преобразованиях, в [86] в частности, записано:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2. \tag{3.4}$$

Здесь третье слагаемое является лишним, так как оно уже содержится во втором:

$$\frac{\partial \lambda(x,T)}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} = \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_T + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_x \frac{\partial T}{\partial x}\right]\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2. \tag{3.5}$$

Ошибки, связанные с появлением «лишних» членов в левой части (3.1) также достаточно распространены. Удельная внутренняя энергия $u = u(c_V, T)$ (где $c_V = \rho C$, ρ – плотность, C – удельная теплоемкость среды при постоянном объеме) при преобразованиях, ведущих к появлению в левой части уравнения теплопроводности члена $\partial T/\partial t$, представляется в различных источниках двояко:

$$u = u(c_V, T) = c_V T; \qquad \mathrm{d}u = \int_{T_0}^{T} c_V(T')\mathrm{d}T'. \tag{3.6}$$

Первое из соотношений (3.6) приводит [52,55,56,78–84] к записи левой части уравнения в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (c_V T)}{\partial t} = c_V\frac{\partial T}{\partial t} + T\frac{\mathrm{d}c_V}{\mathrm{d}t} = \left(c_V + T\frac{\mathrm{d}c_V}{\mathrm{d}T}\right)\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{3.7}$$

где первое из равенств соответствует случаю $c_V = c_V(t)$, а второе – случаю $c_V = c_V(T)$. Однако термодинамически верным является только второе из соотношений (3.6), из которого следует [13,17,46,48,49,50,52,57,81,84–86]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_V \frac{\partial T}{\partial t}, \quad c_V = c_V(t), \quad c_V = c_V(T), \quad c_V = c_V(T,t). \qquad (3.8)$$

Встречаются работы, в которых уравнение теплопроводности в одном месте записывается с левой частью (3.7), а в другом – (3.8) [52,81,83,84].

Таким образом, если лишнее слагаемое в правой части уравнения теплопроводности – (3.4) очевидная ошибка, то часто встречающееся выражение (3.7) – артефакт, требующий устранения (что достигается использованием правильного, второго из выражений (3.6).

Рассмотрим **начальные условия**, задаваемые для параболических уравнений. В §5, для задач Коши, начальные значения температуры задавались при $t = 0$ в виде разрывных функций координаты. Часто начальная функция $\varphi(x) = T(x,0)$ непрерывна (или даже постоянна). Иногда решение определено для $t \in [t_0, \infty)$, т.е. начальное условие задается в виде

$$T(x,t_0) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \qquad t_0 \ge 0. \qquad (3.9)$$

Если область Ω конечна, то естественное ограничение для $\varphi(x)$ (понимаемой как обычная функция):

$$|\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Omega, \quad M < \infty. \qquad (3.10)$$

Для неограниченных ($R^{(1)}$) и полуограниченных $R_+^{(1)}$ областей условие (3.10) также, по физическим соображениям, обязательно. При этом условия (2.67) при $t \to 0$

$$\left[x\varphi(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \left[x^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \qquad (3.11)$$

фактически избыточны. Рассмотрим примеры. При $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi(x) = \mathrm{const}$ первое из условий (3.11) не выполняется. Тем не менее, задача Коши имеет решение. При $\varphi(x) = A\cos kx$ (A, k = const) та же ситуация, (3.11) не выполняется, а решение существует, поскольку соблюдается условие (3.10). Грубой ошибкой является встречающееся иногда в приложениях [87], условие линейной зависимости $\varphi(x)$ в областях $R_+^{(1)}$, противоречащее (3.10).

В парадигме математической физики существуют так называемые «вырожденные» задачи [44,45,48]. Под этим понимается удаление начального момента времени t_0 в (3.9) на «минус бесконечность» ($t_0 \to -\infty$). В теплофизической литературе такие задачи называют «задачами без начальных условий» [43,52] и формулируют при моделировании «температурных волн». Покажем, что использование начального условия при $t_0 \to -\infty$ чревато «сюрпризами».

Решение второй краевой задачи для полупространства ($x > 0$) с начальным условием $T = 0$ при $t_0 \to -\infty$, было найдено в виде [17, с.245]:

$$T(x,t)=\frac{\sqrt{a}}{\lambda\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{q(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{3.12}$$

При $q(t)=q_0=\mathrm{const}$ и $x=0$ из (3.12) следует

$$T(0,t)=\left(\frac{\sqrt{a}q_0}{\lambda\sqrt{\pi}}\right)\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t-\tau}}=\frac{2q_0\sqrt{a}}{\lambda\sqrt{\pi}}\sqrt{t+\infty}\,.$$

Такую же аномалию содержит и решение первой краевой задачи [17, с.246]. Решая обратную задачу теплопроводности, автор выписывает решение при $t=0$ прямой задачи с начальным условием при $t=t_0=-\infty$ [88, с. 9]:

$$T(x,0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{z(\tau)\exp\left(-x^2/4a\tau\right)}{\tau\sqrt{\tau}}\mathrm{d}\tau, \tag{3.13}$$

в котором подынтегральная функция содержит мнимость.

Формулировка начального условия при $t_0\to-\infty$ содержит еще одну «странность». Представим себе, что в начальный момент времени в системе начался некоторый процесс распространения тепла, обусловленный граничным неоднородным режимом или (и) действием внутренних источников тепла. Зададимся вопросом: как найти температурное поле в некоторой точке $x=x_0$ в момент времени $t=\tau_0$ ($\tau_0=\mathrm{const}$) после начала процесса? Какое бы сколь угодно большое, но конечное τ_0 мы не выбрали, мы будем иметь момент времени $t=t_0+\tau_0=-\infty+\tau_0=-\infty$, т.е. начальное состояние «законсервировано».

Таким образом, задание начального условия $T(x,t_0)=\varphi(x)$ при $t_0\to-\infty$ является артефактом, требующим устранения.

Граничные условия в краевых задачах, именуемые, по теплофизической терминологии, граничными условиями I–IV-го родов [43,71,75] в подавляющем числе приложений аномалий не содержат [13,56,57,72,76,77,81,89]. В особом положении – рассматриваемые далее граничные условия «режимов с обострением» [90,91] и модели переноса в нестационарных системах (с подвижными границами областей и переменным коэффициентом теплообмена) [50,52]. Несогласованность граничных условий с начальными (разрывы на границе) рассмотрена в гл. 2.

Методы решения краевых задач переноса многочисленны и излагаются в руководствах по математической физике, прикладной и вычислительной математике, теплофизике и в периодических изданиях [30]. Среди них встречаются «странные» (вроде применения преобразования Лапласа к нелинейным уравнениям), из «группы риска» [22,92–94], и внепарадигмальные (впереди или «сбоку» от парадигмы) [51,57]. Сомнительна обоснованность метода рядов [50,73].

Приведем пример аномалии (артефакта), связанной с решением задач теплопроводности в слоистых системах методом преобразования Лапласа. В двухслойной задаче [43] производилось обратное преобразование Лапласа методом вычетов. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\sin\mu\cos\left(K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}\mu\right)+K_{\varepsilon}\cos\mu\sin\left(K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}\mu\right)=0, \qquad (3.14)$$

где $K_{\varepsilon}, K_{\alpha}, K_{R_1}$ – параметры модели, определяемые экспериментально. Система корней (3.14) порождает решение – бесконечный ряд экспоненциально убывающих по времени мод. Кроме основной, у (3.14) существует дополнительная система корней – совпадающих корней уравнений

$$\sin\mu=0, \qquad \sin\left(K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}\mu\right)=0, \qquad (3.15)$$

порождающая «дополнительные» решения – еще один бесконечный ряд убывающих мод. В [43] основные и «дополнительные» решения суммируются. Аналогичное решение найдено и для системы «шар в шаре» [43], для составного кольца [74] и в других случаях. Во всех этих случаях «дополнительные» решения носят характер «резонансных», так как их существование обусловлено требованием, чтобы величина $K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}$ (или ее аналоги) была правильной дробью: $K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}=\dfrac{\beta}{b}$ (где β, b – целые числа). Тогда можно найти:

$$K_{\alpha}^{1/2}K_{R_1}\mu_n=\frac{\beta}{b}\mu_n=n\pi, \qquad \mu_n=\frac{bn\pi}{\beta}=bm\pi, \quad (m=1,2,\ldots).$$

Поскольку измеренные K_{α} и K_{R_1} всегда известны с некоторой погрешностью, этот «резонанс» невозможен, т.е. «дополнительные» решения – «монстры» [28] – формальные результаты паразитного характера, не имеющие физического смысла. Короче говоря – артефакты, требующие устранения, которое осуществляется простым отбрасыванием «паразитных» корней (3.15).

Рассмотрим далее подробнее важное, но содержащее артефакты, так называемое телеграфное (гиперболическое) уравнение переноса.

§8. Телеграфные (гиперболические) уравнения

Телеграфное уравнение, именуемое в теплофизике гиперболическим уравнением теплопроводности (отличающееся от параболического второй производной по времени в левой части, прибавляемой к $\partial T/\partial t$) возникло в электромагнетизме [45,95]. Затем использовалось при моделировании акустических, аэродинамических, фильтрационных процессов, в задачах диффузии и теплопроводности, сушки и пропитки пористых сред, проводимости нервных волокон и т.п. [30,56,57,96–98]. Изначально этому уравнению приписывалась «конечная скорость распространения» тепла, массы и т.п. [51]: «... появился ряд работ, в которых обосновывается новое уравнение диффузии (теплопроводности), полученное с учетом конечной скорости диффузии вещества или носителя энергии. Это ... работы В.А. Фока по одномерной диффузии светового луча, Б.И. Давыдова, Е.С. Ляпина, А.С. Монина по турбулентной диффузии, Крамера и Чандрасекара, ..., Гольдштейна, ..., Дэвиса, Вернотта, Каттанео и др.». Практически те же работы упоминаются в обзоре А.В. Лыкова [52], где, как и в других публикациях, утверждается, что уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \tag{3.16}$$

имеет финитные решения основных краевых задач вида $T(x,t) = u(x,t)\theta(\vartheta_ф t - x)$, где $u(x,t)$ – функция, определяемая конкретной краевой задачей, а $\theta(z)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z \geq 0$. В указанных публикациях делается вывод о том, что уравнение (3.16), в отличие от уравнения (1.5), описывает процессы, протекающие с конечной скоростью $\vartheta_ф = (a/\tau_r)^{1/2}$ – скоростью движения фронта (теперь – без кавычек). Для задач теплопроводности в твердых телах, характерные значения величин таковы: $\vartheta_ф \sim C$ (скорость звука в среде), $\tau_r = 10^{-11} - 10^{-9}$ сек [52].

Уравнение (3.16) и его многомерные и нелинейные обобщения [43,45,51, 53,56,57,81,86,99] выводятся методами статистической физики и неравновесной термодинамики [51–53,57,71,100,101], используются в приложениях и входят в базис термодинамической парадигмы. Тем не менее, их главное отличие (и преимущество!) от параболических уравнений – конечная скорость распространения – артефакт. Приведем одно из возможных доказательств этого.

Найдем формулу для априорной оценки локализации $T(x,t)$ – решения задачи Коши для (3.16). Имеем с учетом того, что $M_0(t)$ в этом случае постоянен ($M_0 = \text{const}$):

$$\langle x^2 \rangle = \delta^2(t) = \frac{M_2(t)}{M_0(t)} = \frac{1}{M_0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 T(x,t)\, \mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Полагая, что условия (2.67) соблюдаются, применим к обеим частям (3.17) оператор $\partial/\partial t + \tau_r\, \partial^2/\partial t^2$. После простых преобразований получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\langle x^2 \rangle}{\mathrm{d}t} + \tau_r \frac{\mathrm{d}^2 \langle x^2 \rangle}{\mathrm{d}t^2} = 2a. \tag{3.18}$$

Решение (3.18), удовлетворяющее однородным начальным условиям:

$$\delta^2(t) = 2at\left[1 - \left(\frac{t}{\tau_r}\right)^{-1}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)\right)\right]. \quad (3.19)$$

При $(t/\tau_r) << 1$, разложив экспоненту в (3.19) в ряд и ограничившись его первыми тремя членами, получим:

$$\delta^2(t) = \vartheta_{\text{ф}}^2 t^2, \quad \delta(t) = \vartheta_{\text{ф}} t, \quad \vartheta_{\text{ф}} = (a/\tau_r)^{1/2}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,\delta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \vartheta_{\text{ф}} < \infty. \quad (3.20)$$

Таким образом, фронт, движущийся со скоростью $\vartheta_{\text{ф}}$, существует, но в приближении $(t/\tau_r) << 1$. При $t \to \infty$ из (3.19) следует асимптотическая формула

$$\delta^2(t) = 2at, \quad (3.21)$$

характерная для инфинитных «параболических» полей. При временах $\tau_r < t < \infty$, формула (3.19) дает оценку локализации меньшую, чем (3.21), однако с ростом t это различие быстро исчезает. Пусть в (3.19) $t = t_* = 10\tau_r$.Тогда

$$\delta(t_*) = \sqrt{2at_*}\,[1 - 0{,}1(1 - \exp(-10))]^{1/2} \cong 0{,}95\sqrt{2at_*}\,, \quad (3.22)$$

т.е. с точностью в 5% при $t_* = 10\tau_r$ «фронты» параболический и гиперболический совпадают. Практическое совпадение решений первых краевых задач на полупрямой для уравнений (3.16) и (1.5) для $t \geq 8\tau_r$ было отмечено в [52]. Формула (3.19) устраняет артефакт бесконечной начальной скорости распространения «фронта», характерный для (3.21).

Представление об уравнении (3.16) как о принципиально отличающемся от (1.5) наличием финитного («фронтового») решения приводит иногда к странным выводам. Осуществив переход к подвижной системе координат (движущейся относительно неподвижной со скоростью ϑ) – $\xi = x - \vartheta t$, автор [86] представил (3.16) в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \vartheta\frac{\partial T}{\partial \xi} - 2\tau_r\vartheta\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = a\left[1 - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_{\text{ф}}}\right)^2\right]\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}. \quad (3.23)$$

Затем делается замечание: так как при $\vartheta = \vartheta_{\text{ф}}$ правая часть, содержащая параметр a, исчезает, то полученное уравнение описывает поле, не зависящее от теплопроводности среды (т.е. чисто «волновое»). Автор забывает, что в левой части (3.23) также надо положить $\vartheta = \vartheta_{\text{ф}} = (a/\tau_r)^{1/2}$.

«Волновые» предрассудки в термодинамике, когда забывают, что диссипативные процессы эволюционные, а не волновые, возникают под влиянием других разделов физики (механики, акустики, электромагнетизма) где уравнения часто исследуют, подставляя в них $\exp\left[i(kr-\omega t)\right]$ и получая дисперсионные уравнения [95,102,103]. Решение телеграфного уравнения для электрического поля в среде было получено в виде [95]:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp(-qx)\exp\left[i(\omega t-kx)\right], \tag{3.24}$$

где $\mathbf{E}_0, q, k, \omega$ – константы. О начальных и граничных условиях для (3.24) речь не идет, т.е. наблюдается **не термодинамическая парадигма** (в последней основная модель – краевая задача). Сопоставление специфики волновых и тепловых явлений дает Дж. Карери [104]: «... звук распространяется в твердом теле в виде волны именно потому, что при низкой энергии для него справедлив принцип суперпозиции, в то время как для тепла подобная картина отсутствует, поскольку соответствующие упругие смещения обладают гораздо большей энергией. Тепло может распространяться в виде волны только в пределах нескольких элементарных ячеек кристаллической решетки, а звуковые волны – по всему телу».

Начальные условия для (3.16) состоят из двух соотношений [43,45,48,51, 52,56,57]:

$$T(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=\Psi(x),\qquad x\in\Omega. \tag{3.25}$$

Как математики, так и теплофизики полагают, что функции $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ могут задаваться произвольно и независимо друг от друга. Рассмотрим два возможных варианта. В первом в области Ω в период времени $t\in(0,t_s)$ протекает процесс теплопроводности, описываемый полем $T(x,t)=T\_(x,t)$. С момента времени $t_0=t_s$ этот процесс «берется под наблюдение» и моделируется краевой задачей с начальными и граничными условиями. Начальное условие есть результат «мгновенного» измерения поля $T\_(x,t)$ в Ω при $t_0=t_s$. Для решения задачи используют (3.25), полагая $t_0=0$. Во втором варианте система при $t<t_0$ не существует, ее «приготавливают и включают» при $t=t_0$, измеряя условия (3.25). При этом, если первое из них может быть «измерено», то второе – нет, так как функция $\Psi(x)$ определяется интенсивностью процесса в начальный момент времени и зависит от $\varphi(x)$ и параметров уравнения (3.16).

В первом варианте, в силу непрерывности процесса при $t=t_s$:

$$\left.\begin{aligned} &T\_(x,t)\big|_{t=t_s}=T(x,t)\big|_{t=t_0}=T(x,0)=\varphi(x),\\ &\left.\frac{\partial T\_}{\partial t}\right|_{t=t_s}=\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=\Psi(x)\end{aligned}\right\}. \tag{3.26}$$

Обе функции, $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$, выражаются через $T\_(x,t)$ и поэтому связаны между собой. Во втором варианте для получения информации о $\Psi(x)$ есть одна возможность:

$$\Psi(x) = \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t \to 0} = \lim_{\tau_0 \to 0}\left[\frac{T(x,\tau_0) - \varphi(x)}{\tau_0}\right]. \tag{3.27}$$

В (3.27) обязательно брать «правый» предел, поскольку в «левый» входит $T(x,-\tau_0)$ – ненаблюдаемая величина. Из (3.27) также вытекает связь между $\Psi(x)$ и $\varphi(x)$.

Граничные условия для (3.16) встречаются иногда с «отклонениями». Определяя функцию Грина (3.16) для полупространства $x > 0$, автор [105] использовал «обобщенное» условие:

$$\left[\left(-h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial t} + h_3\right)G\right]_{x=0} = f(t), \tag{3.28}$$

математически, вероятно, допустимое, но не имеющее физического смысла.

При построении слоистых моделей переноса на основе (3.16) [106,107], условия сопряжения на границах слоев (граничные условия IV-го рода) были записаны в виде

$$T_i\big|_{x=l_i} - T_{i+1}\big|_{x=l_i} = \alpha_i(t),$$

$$\lambda_i\left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_{x=l_i} - \lambda_{i+1}\left.\frac{\partial T_{i+1}}{\partial x}\right|_{x=l_i} = \beta_i(t). \tag{3.29}$$

Это неоднородные условия IV-го рода, применяемые в слоистых моделях переноса, описываемого параболическим уравнением (1.5) [42,43]. Для уравнения (3.16) второе из уравнений (3.29) должно быть изменено с учетом модификации закона Фурье при «гиперболической» теплопроводности [52]

$$q + \tau_r\frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{3.30}$$

Условия (3.29), таким образом, ошибочны (представляют собой артефакт).

Большинство известных решений краевых задач для (3.16) получены преобразованием Лапласа по времени [30,43,52,56,81,106,107,]. Применяются также методы функций Грина [50,51,56,105], вариационные [86,99], характеристических функций [98] и другие. Решения, которые бы явно демонстрировали свой финитный («фронтовой») характер, нам неизвестны. Таким образом, гиперболическое уравнение переноса (3.16) является источником ряда артефактов, подлежащих устранению.

§9. Нелинейные уравнения

Нелинейные модели процессов переноса весьма многочисленны; условно их можно разбить на три группы: прикладные модели (ПМ), математической физики модели (МФМ), синергетические модели (СМ). Главную роль в базисе парадигмы играют, на наш взгляд, ПМ [13,30,50,53,55–57,62,71,77,82–86,99, 109–117]. В МФМ, квазилинейных и нелинейных, с точки зрения парадигмы термодинамики [8,13,68,71,75,118], общефизических методологических принципов [33–36,119], идеологии прикладной математики [28,61] можно обнаружить ряд аномалий. Обширные обзоры МФМ содержатся в [90,120].

Рассмотрим, начиная с классических [17], характерные МФМ. Комментируя эффект бесконечной скорости теплопередачи в линейных моделях, авторы [17, с. 239] пишут: «Это свойство сохраняется и для среды с зависящей от температуры теплопроводностью a, если только эта зависимость не приводит к обращению a в нуль в какой-либо области пространства. Если же a есть функция температуры, убывающая и обращающаяся в нуль вместе с нею, то это приводит к такому замедлению процесса распространения тепла, в результате которого влияние любого теплового возмущения будет простираться в каждый момент времени лишь на некоторую конечную область пространства; речь идет о распространении тепла в среду, температуру в которой (вне области влияния) можно считать равной нулю». Далее рассмотрены задачи (Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец, 1950), в которых нелинейные уравнения теплопроводности (с зависящими от температуры теплоемкостью и теплопроводностью) решаются при нулевых начальных условиях. Квазилинейные уравнения с помощью интегральной подстановки приводятся к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(W^n \frac{\partial W}{\partial x}\right), \tag{3.31}$$

а затем решаются введением автомодельных переменных. В одной из задач решение ищется в виде плоской волны, движущейся с конечной скоростью, в другой – в виде степенной функции автомодельной переменной. Эти две задачи породили огромный поток публикаций с различного рода «обобщениями», авторы которых преимущественно математики.

В [90] подчеркивается привлекательность этого направления для математиков: «... с позиций конструктивного исследования, каждая нелинейная параболическая задача обладает своей индивидуальностью ..., не может быть решена на основе единого подхода. Как правило, для подобного анализа даже отдельных и весьма частных свойств решений требуется целый спектр методов качественного исследования. Этот факт подчеркивает глубокую содержательность даже простейших модельных параболических задач ...». По мнению авторов [90], особое место принадлежит задачам с неограниченно растущими решениями (т.е. с обращающейся в бесконечность температурой! – И.В.). Они называют такие модели (ссылаясь на неких «физиков») «режимами с обострением», вводя граничную температуру, обращающуюся в ∞ на конечном интервале времени. Физическими реализациями таких сингулярных решений авторы полагают процессы теплового взрыва, кумуляции ударных волн и т.п. Подчеркивается революционный, апарадигмальный характер развиваемой теории: «... конструктивное описание неограниченных решений требует принципиально новых подходов и фактически переориентации взглядов и теоретических представлений» [90, с. 9].

Рассмотрим характерные модели из [90], чтобы подробнее понять суть «переориентации».

Модель 1. Распространение тепла в нелинейной среде с конечной скоростью. Уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad u=u(x,t),\quad x\in R,\quad t>0. \tag{3.32}$$

Автомодельное решение «бегущая волна» ищется в виде

$$u_A(x,t)=f_A(\xi),\quad \xi=x-ct, \tag{3.33}$$

где $c>0$ – скорость тепловой волны. Подстановка (3.33) в (3.32) дает

$$\frac{K(f_A)}{f_A}\frac{\mathrm{d}f_A}{\mathrm{d}\xi}=-c.$$

Предположив соблюдение условия, играющего определяющую роль

$$\int_0^1\frac{K(\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta<\infty, \tag{3.34}$$

авторы получают:

$$f_A(\xi)=\Phi^{-1}(-c\xi),\quad \xi\le 0,\quad \Phi(u)=\int_0^u\frac{K(\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta,\quad u\ge 0.$$

Окончательный вид автомодельного решения

$$u_A(x,t)=\Phi^{-1}\left[c(ct-x)_+\right],\quad (ct-x)_+=\begin{cases}ct-x, x\le ct,\\ 0, \qquad x>ct.\end{cases} \tag{3.35}$$

Этому решению при $T_0=\Phi(\infty)/c^2\le\infty$ **придается** (выделено мной – И.В.) смысл решения первой краевой задачи для (3.32) при краевых условиях:

$$u(x,0)=0, x>0;\quad u(0,t)=\Phi^{-1}\left(c^2t\right),\quad t\in(0,T_0). \tag{3.36}$$

Решение финитно по x, так как $u_A(x,t)=0$ при $x\ge ct$. При

$$K(u) = u^{\sigma}, \quad \sigma = \mathrm{const} > 0 \tag{3.37}$$

следует

$$\Phi(u) = \frac{u^{\sigma}}{\sigma}, \quad \Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma}, \quad T_0 = \infty,$$

$$u_A(x,t) = \left[\sigma c(ct - x)_+\right]^{1/\sigma}, \quad t \geq 0, \quad x > 0. \tag{3.38}$$

Анализируя решение (3.38) для случая степенной нелинейности (3.37), авторы убеждаются в том, что при $\sigma \geq 1$ и $x = x_ф = ct$ не существуют u_t, u_x, u_{xx}. В случае $\sigma \in [0{,}5;1{,}0]$ не определена $u_{xx}\left(x_ф(t),t\right)$. При $K(u) = u\exp(-u), u \geq 0$ решение (3.35) приводятся к виду

$$u_A(x,t) = \begin{cases} -\ln\left[1 - c(ct - x)\right], \; 0 \leq x \leq ct, \\ 0, \; x > ct. \end{cases} \tag{3.39}$$

Оно определено на интервале $t \in [0, T_0)$, где $T_0 = 1/c^2$. **Соответствующее (3.39) краевое условие** (выделено мной – И.В.) при $x = 0$ имеет вид:

$$u_A(0,t) = u_1(t) = -\ln\left(1 - c^2 t\right), \quad t \in (0, T_0) \tag{3.40}$$

и поэтому $u_1(t) \to \infty$ при $t \to T_0$.

Модель 2. Локализация тепла при степенном граничном режиме с обострением. Для уравнения (3.32) задано граничное условие «режима с обострением»:

$$u(0,t) = u_1(t) = (T_0 - t)^{-1/\sigma}, \quad t \in (0, T_0), \quad T_0 < \infty. \tag{3.41}$$

При $t \to T_0$ $u_1(t) \to \infty$. Автомодельное решение в этом случае – «остановившаяся тепловая волна»:

$$u_A(x,t) = (T_0 - t)^{-1/\sigma}\left[(1 - x/x_0)_+\right]^{2/\sigma}, \tag{3.42}$$

где

$$x_0 = \left[2(\sigma + 2)/\sigma\right]^{1/2} = x_ф(t) = \mathrm{const}. \tag{3.43}$$

В области $x \in (0, x_0)$ температура неограниченно возрастает при $t \to T_0$, а в области $x > x_0$ температура равна нулю. Для граничного режима вида (HS-режима [90]):

$$u_1(t) = (T_0 - t)^n, \quad t \in (0, T_0), \quad n < -1/\sigma \tag{3.44}$$

локализация отсутствует, а фронт волны движется по закону

$$x_ф(t) = \xi_ф (T_0 - t)^{(1+n\sigma)/2}, \quad \xi_ф = \mathrm{const}. \tag{3.45}$$

При $n \in \left(-1/\sigma, 0\right)$ в (3.44) (LS-режиме [90]) температура возрастает неограниченно только в точке $x = 0$, а в области в целом она локализована.

Модель 3. Задача Коши для полулинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + u \ln u, \quad x \in R^N, \quad t > 0.$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N, \quad \sup u_0 < \infty. \tag{3.46}$$

Автомодельное решение (3.46), именуемое «основным», авторы находят в виде:

$$u_A^*(x,t) = \exp\left[B_0 e^t + N/2\right] \exp\left[-|x^2|/4\right], \tag{3.47}$$

где B_0 – произвольная постоянная. Этому решению «отвечает начальное возмущение»:

$$u_0(x) = u_A^*(x,t) = \exp\left[B_0 + N/2 - |x^2|/4\right], \quad x \in R^N \qquad (3.48).$$

«Основные» решения (3.47) имеют свойства: а) при $B_0 < 0$, $u_A^*(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$; б) при $B_0 = 0$ имеется стационарное решение u_s. Все эти решения реализуются при выполнении (3.48); стационарное решение u_s неустойчиво по отношению к столь угодно малым начальным возмущениям.

Рассмотрим кратко СМ. Основным термином здесь является не «тепловые структуры» и «локализованные решения», как в [90], а «диссипативная структура» [121–123], близкие по значению. Авторы [90] в ряде публикаций позиционируют свое направление как «базисный компонент синергетики» [124–126]. Часто к синергетике относят и исследования по нелинейным колебаниям, автоволнам и автосолитонам [98,103,127], поскольку моделируются локализованные структуры; для некоторых из последних предложен термин «синергеты» [120].

Полагая базой для исследования модельных задач процессы распространения пламени, роста кристаллов, эволюции рощи и др., авторы [120] предлагают конструктивный подход к изучению эволюции диссипативных структур, основанный на построении асимптотических (при $\varepsilon \to 0$, где ε – малый параметр задачи) решений нелинейных параболических (квазилинейных и полулинейных) уравнений. Рассматриваемый класс задач характеризуется локализацией и конечной скоростью распространения возмущений. Типичная краевая задача (обезразмеренная) имеет вид [120]:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} - \gamma(x,t)\left(1 - u^{k-1}\right)u = 0, \quad x \in R. \tag{3.49}$$

Здесь: $\varepsilon \in (0,1)$ – малый параметр; $k > 1$; $t \in R_+$; $\gamma(x,t) \neq 0$. Из «физических соображений» задаются условия:

$$u(x,t)\Big|_{x\to\infty}=1;\;\; u(x,t)\Big|_{x\to-\infty}=0; \qquad K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{u\to+0}=0; \qquad K(u)=ku^{k-1}. \tag{3.50}$$

При $\gamma(x,t)=1$ «одно из точных неотрицательных решений» задачи (3.49), (3.50) имеет вид:

$$u(x,t,\varepsilon)= \; W(\tau)\Big|_{\tau=S(x,t)/\varepsilon}, \qquad W(\tau)=\begin{cases}\left(1-e^{-\tau/a}\right)^{\alpha}, \; \tau\ge 0,\\ 0, \tau<0,\end{cases} \tag{3.51}$$

где$\alpha=1/(k-1)$,$a=\alpha\cdot K,\; S(x,t)=x+t$. Это решение называется «простой волной». При $\tau\to 0 \quad W(\tau)=0(\tau^{\alpha})$, а при $\tau\to\infty \quad W(\tau)\to 1$. Если $\gamma(x,t)\ne \mathrm{const}$, то решение принимает более сложный вид.

Рассматривая гиперболические нелинейные уравнения теплопроводности (диффузии) авторы замечают [120, с. 112]: «Нелинейные математические модели процессов переноса, построенные на основе квазилинейных параболических уравнений ... подвергаются обоснованной критике ... Это вызвано тем, что не всегда удается ввести безразмерную функцию $u(x,t)$, изменяющуюся от нуля до константы. В ряде моделей приходится пренебрегать величиной фона (т.е. начальной температурой – И.В.), чтобы использовать преимущество нелинейных моделей – конечную скорость распространения возмущений и локализацию ... в пространстве» Далее авторы [120] вполне в духе известного стереотипа (артефакта) заключают: «мы получаем гиперболическое уравнение тепломассопереноса, для которого известен эффект конечной скорости возмущения (в том числе и по ненулевому фону)». Решения этого гиперболического, как ранее и параболических уравнений методом авторов весьма громоздко и необозримо.

Об аномалиях, характерных для задач типа Стефана , уже говорилось в §4.

К СМ относят также многочисленные модели нелинейной физики, неравновесной термодинамики, гидродинамики, биологии, экологии, социологии и др. [9,90,91,98,103,121–134]. Выявление артефактов в столь обширной области не входит в нашу задачу, однако кратко остановимся на декларируемых многими авторами условиях формирования диссипативных структур (ДС). По И.Р. Пригожину , ДС – это стационарные, неоднородные по пространству решения (задач переноса), возникающие в моделях процессов в открытых системах. Условия формирования ДС [20,121,122,124]: Система термодинамически открыта; 2) система нелинейна (уравнения переноса нелинейные); 3) Отклонение от равновесия системы не является малым) 4) Процессы протекают согласовано (кооперативно); 5) ДС не «помнит» свое начальное состояние. Эти условия имеют парадигмальный статус, хотя некоторые из них – артефакты.

§10. Нестационарные системы

К нестационарным относим системы, в которых один (или несколько) параметр меняется со временем, например: размеры области Ω, в которой протекает процесс $\Omega = \Omega(t)$, удельная объемная теплоемкость ($c_V = c_V(t)$); коэффициент теплопроводности ($\lambda = \lambda(t)$); скорость движения среды ($V = V(t)$); коэффициент линейного поглощения ($\gamma = \gamma(t)$); коэффициент теплообмена в граничных условиях III-го рода ($\alpha = \alpha(t)$) [30]. Задачи типа Стефана, также относящиеся к моделям переноса в нестационарных системах ранее отнесены нами к нелинейным и здесь не рассматриваются.

Моделей с переменными теплофизпараметрами немного [30], так как в тривиальных случаях, когда $c_V = c_V(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $a = a(t) = \lambda(t)/c_V(t)$ – интегрируемая функция, простая подстановка переводит уравнения с переменными параметрами относительно функции $T = T(x,t)$ в уравнение с постоянными параметрами относительно функции $T = T(x,\theta)$, где $\theta = \theta(t)$ – интегральная подстановка. В других случаях, когда уравнения (или граничные условия) содержат и другие переменные параметры ($V(t), \gamma(t), \alpha(t)$ и др.), решения задач весьма громоздки, однако аномалий (потенциальных артефактов) нами не обнаружено.

Модели с переменным коэффициентом теплообмена ($\alpha = \alpha(t)$) сложны для получения аналитических решений [30,50]. «Точные» методы обычно сводят задачу к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений или к интегральному уравнению (метод тепловых потенциалов). Приближенные и численные методы также сложны и громоздки [30]. Здесь речь идет не об артефактах, а о лакуне в парадигме – отсутствии простых, но эффективных методов решения задач этого класса.

Краевые задачи для областей с подвижными границами весьма трудны, даже в одномерной постанове [50]. Известны некоторые математические результаты (доказаны теоремы существования и единственности решений) [44,50], однако применяемые методы построения аналитических решений весьма громоздки, за исключением случаев, когда удается эффективно ввести подвижную систему координат [50,72]. Основной интерес представляют два подкласса задач: 1) для растягиваемых (сжимаемых) тел; 2) для областей, границы которых двигаются по заданному закону.

В задачах первого класса источником деформаций области могут служить температурные и механические воздействия. При малых деформациях используются методы теории термоупругости [50,135], при больших – в эластичных телах – формулируются различные модели. В частности, в модели саморазогревания вязкого цилиндра при его растяжении [136] использовалось уравнение теплопроводности вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vartheta_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + c_V^{-1}\Phi(r,z), \quad r \in \left(0, r^*(t)\right), \quad t > 0, \qquad (3.52)$$

где ϑ_r – радиальная скорость деформации цилиндра, $\Phi(r,z)$ – диссипативная функция [52]. Уравнение (3.52) решается совместно с уравнением непрерывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\vartheta_r\right)+\frac{\partial\vartheta_z}{\partial z}=0. \tag{3.53}$$

Изменение со временем радиуса цилиндра: $r^*(t)=r_0\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{\partial\vartheta_z}{\partial z}\mathrm{d}t'\right)$.

Краевые условия стандартные, параметр, описывающий деформацию – ее скорость – ϑ_r входит в само уравнение. Данная модель двумерна; одномерная упрощенная модель теплопроводности в движущемся и одновременно растягиваемом стержне [137] базируется на уравнении

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\vartheta_0+\alpha x}{1+\alpha t}\right)\frac{\partial T}{\partial x}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{3.54}$$

где ϑ_0 – скорость поступательного движения; α – скорость растяжения. Здесь, как и в (3.52), нестационарность системы описывается «эффективной скоростью» в уравнении теплопроводности (выражение в скобках в (3.54)). Общим («по умолчанию») для этих двух моделей [136,137] является также постоянство теплофизических параметров деформируемых (нестационарных) систем, с чем трудно согласиться. Корректность постановки этих задач (по Адамару) сомнений не вызывает.

Рассмотрим типичные формулировки краевых задач второго подкласса. В [50] одна из таких задач приведена в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad x_1(t)<x<x_2(t),\quad t>0, \tag{3.55}$$

$$T(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad x_1(0)\le x\le x_2(0), \tag{3.56}$$

$$\left[\beta_{i1}\frac{\partial T}{\partial x}+\beta_{i2}T(x,t)\right]_{x=x_i(t)}=\mu_i(t),\quad t>0,\quad (i=1{,}2). \tag{3.57}$$

Здесь β_{ij} $(i,j=1{,}2)$ – постоянные, $\varphi_0(x)$, $\mu_1(t),\mu_2(t)$ – заданные функции. В [138,139] рассматривались случаи линейного изменения во времени координат границ области (движение границ с постоянной скоростью). Уравнение теплопроводности в [138] имеет обычный вид (1.5) а краевые условия таковы:

$$T(x,t)\Big|_{t=-\infty}=0,\quad l_1+\vartheta t\le x\le l_2+\vartheta t,\quad l_2-l_1=l>0, \tag{3.58}$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x}+\alpha T(x,t)\right]_{x=l_1+\vartheta t}=h_1(t), \qquad T(x,t)\Big|_{x=l_2+\vartheta t}=h_2(t) \qquad (3.59)$$

где $\vartheta, l_1, l_2, \alpha = \mathrm{const}, t\in(-\infty,\infty)$. Аналогична постановка задачи в [139].

Рассмотрим (3.55)–(3.59). Уравнение теплопроводности обычное, информации о нестационарности системы не содержит. Эта информация содержится в описании области решения и в граничных условиях. Если начальное условие (3.56) сомнительно в случае $x_1(0)=x_2(0)$, когда задается температура в точке, которая в следующий момент времени окажется, возможно, за пределами области решения, то условие (3.58) явно аномально (см. §7). Обратимся к граничным условиям (3.57) и (3.59). Оба первых имеют вид граничных условий III-го рода, вторые – смешанные. В (3.57) движение границ $x_i = x_i(t)$ не сопряжено с деформацией области, поэтому должно интерпретироваться как «доращивание» или (и) «обрезание» области. В (3.59) обе границы двигаются синхронно, с одинаковой скоростью ϑ, что можно истолковать как движение целого стержня длиной $l = l_2 - l_1$. Если же предположить, что существует первоначально область $x\in R$, а границы $x_i(t)$ при $t\le 0$ «вырезают» из нее исследуемую подобласть переменной длины – $|x_2(t)-x_1(t)|$ – в первой задаче и постоянной – l – во второй, то должны задаваться другие граничные условия либо точечные подвижные источники тепла в точках $x = x_i(t)$. Задачи такого вида – с подвижными источниками тепла [13] не относятся к классу моделей переноса в нестационарных системах. Таким образом, рассмотренные граничные условия аномальны.

В [50], где задачам с подвижными границами уделено много места, о их корректности сказана одна фраза, отсылающая к некоей математической диссертации. На наш взгляд, задачи с движущимися границами по типу «доращивание»–«обрезание» (а других типов, если исключить задачи для деформируемых сред и с конвективным переносом – нет) не удовлетворяют условиям корректности по Адамару [49]. Рассмотрим область $x\in(x(t),\infty)$. Пусть на ее подвижной границе $x(t)=\vartheta t$ задана температура $T_1 > T_0$ (где T_0 – начальная температура в области $x\in(x(0),\infty)$) Пусть $x(0)=0$. Корректность задачи требует, чтобы при малом возмущении граничного условия в любой точке $x\in\Omega$ при $t>0$ температура $T^{(1)}(x,t)$ мало отличалась от температуры $T^{(0)}(x,t)$, соответствующей отсутствию возмущения. Для задач с подвижными границами в число параметров, определяющих граничные условия, входит скорость движения границы – ϑ. Пусть при $\vartheta=\vartheta^{(0)}$ в точке $x = x_0$ температура будет $T^{(0)}(x_0,t)$. Пусть x_0 и t таковы, что расстояние $|x_0 - x(t)|$ достаточно велико, так что влияние T_1 на $T^{(0)}(x_0,t)$практически отсутствует и последняя температура в основном определяется начальной температурой в Ω и (или) источником тепла в области Ω. При малом возмущении скорости движения границы $\Delta\vartheta = \vartheta^{(1)} - \vartheta^{(0)}$, расстояние $x_0 - x(t)$ либо уменьшится на $\Delta\vartheta\cdot t$, либо обратится в нуль, либо станет отрицательным в зависимости от величины t. Ясно, что выбрав t так , чтобы $\Delta\vartheta \cdot t \approx x_0 - x(t)$ можно получить в точке $x = x_0$ температуру $T^{(1)}(x_0, t)$, близкую к T_1. Изменение температуры в этой точке по сравнению с невозмущенным случаем не будет малым, если T_1 сильно отличается от T_0. При дальнейшем увеличении t точка x_0 вообще выходит из области решения задачи и вопрос о влиянии малого возмущения скорости на температуру в ней теряет смысл. Таким образом, задачи с подвижными границами не корректны по Адамару, т.е. представляют собой аномалии базиса парадигмы.

Суммируя изложенное в настоящей главе, заключаем:

1) Уравнения теплопроводности с зависящими от времени или (и) температуры удельными теплоемкостями часто записывают в аномальном виде (3.7), что является артефактом. Устранение его достигается использованием (3.8);

2) Начальные условия к параболическим уравнения теплопроводности часто записывают с нарушением условия (3.10) и при отнесении начального момента времени на «–∞»: $t = t_0 = -\infty$, что является аномалией, так как нарушает требования ограниченности и монотонности решения. Выбор $t_0 = -\infty$ порождает «начальную воронку» – сохранение начального состояния в любом конечном промежутке времени, отсчитываемом от начального момента и часто приводит к абсурдным результатам (мнимая температура).

3) Начальные условия к гиперболическим уравнения теплопроводности формулируются некорректно – заданием произвольных начальных функций $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$, которые фактически связаны друг с другом;

4) В решениях слоистых задач «параболической» теплопроводности встречаются паразитные, нефизические («резонансные») решения;

5) Гиперболическое уравнение теплопроводности считается имеющим «фронтовые» решения (описывающими теплопередачу с конечной скоростью), что является артефактом;

6) Для гиперболических и параболических нелинейных уравнений часто ищут «волновые» решения, для чего в последнем случае используют нефизические гипотезы: нулевого фона (нулевой начальной температуры) и обращения в нуль коэффициента теплопроводности;

7) Нелинейные уравнения записывают в виде (3.32) – «приведенном» с помощью интегральной подстановки, а краевые условия оставляют прежними, сформулированными для другого – первоначального уравнения (с нелинейностью и в левой части);

8) Нелинейные уравнения решают для «модельных» – упрощенных задач, используя автомодельные переменные (которых имеется 64 типа [124]), краевые условия, к которым **затем подбираются**. Используемые асимптотические методы решения весьма громоздки, полученные результаты – либо малоинформативны («простые волны»), либо необозримы;

9) При исследованиях нелинейных моделей получают «классы решений», чувствительные к малым изменениям параметров, что нарушает парадигмальные требования единственности и корректности решений;

10) Рассматриваются «режимы с обострением» – с растущей до бесконечности температурой при сохраняющемся виде модели, что нефизично;

11) Используемые для нелинейных задач граничные условия при $|x| \to \infty$ аномальны, как и начальные условия при $t_0 = -\infty$ они порождают «воронки» – трансляцию этих условий на конечное расстояние от «границ». Третье из условий (3.50) не является граничным, а служит некоей гипотезой, внешней к краевой задаче;

12) Условия формирования диссипативных структур в открытых системах содержат артефакты;

13) В моделях переноса в нестационарных системах существуют аномалии в граничных условиях задач с подвижными границами;

14) Эти задачи либо сводятся к другим задачам (для деформируемых тел и конвективно-кондуктивного переноса) либо не удовлетворяют условиям корректности по Адамару.

ГЛАВА 4. АРТЕФАКТЫ ЯДРА ПАРАДИГМЫ

– Артефакт! – вполголоса произнес Максвелл.
– Артефакт. Величайшая загадка. Единственный предмет в мире, ставящий всех в тупик...
К Саймак, «Заповедник гоблинов».

... мы больше не можем разбивать рамок, мы должны стремиться их прогнуть. Но они не всегда этому поддаются
А. Пуанкаре

§11. Структура парадигмального ядра

Содержанием ядра парадигмы термодинамики являются основополагающие принципы, понятия и модели, вариационные принципы и аппарат, с помощью которого выводятся уравнения переноса и их краевые условия, т.е. формулируются краевые задачи переноса – модели базиса парадигмы. Из истории термодинамики известно [2,11,68,113,118,140–143], что основой ее развития была термостатика, сформулировавшая основные понятия и установившая связи между термодинамическими параметрами. Однако уравнение теплопроводности было получено математиком – Ж.-Б. Фурье (1822) и последующее развитие теории теплопроводности (в течение почти 100 лет) осуществлялось математиками, механиками и инженерами.

В 30-х годах XX века физики, наконец, занялись термодинамикой(как теорией тепломассопереноса), сосредоточив свои усилия на обосновании и обобщении уравнений, ранее выводившихся из простых дифференциальных балансов сохраняющихся величин (массы, энергии, импульса, заряда). Выделились два направления: одно – развитие идей Л. Больцмана (физическая кинетика), другое – чисто феноменологическое (термодинамика неравновесных процессов). В физической кинетике уравнения макроскопического переноса выводились как «гидродинамическое приближение» [3,5,9,19,20,23,60,100,132,133, 144–150]. В термодинамике неравновесных процессов исследовались свои, чисто феноменологические принципы и подходы, которые также позволяли получать различные уравнения переноса [2,6,8,9,17,43,50,52,55,56,71,75–77,83, 85,99,110–113,122].

Ядро парадигмы термодинамики образуют: 1) Классическая термодинамика (термостатика). 2) Математические методы теории поля. 3) Постулаты термодинамики. В первую группу входят понятия о термостатических параметрах, уравнения состояния и начала термостатики. Важнейшая роль принадлежит соотношению Гиббса – синтезу первого и второго начал. Вторая группа – методы полевого (континуального) описания – содержит локальные балансовые уравнения (полученные из законов сохранения и гипотез модели сплошной среды – сплошности, причинности, локальности взаимодействий, детерминизма) и вариационные принципы (ВП). Ключевым понятием является «физически бесконечно малый объем» (ФБМО). Третья группа содержит дополнительные по отношению к термостатике (специфические именно для термодинамики) гипотезы, вводимые на эмпирико-логической основе. Это: градиентные законы переноса (Фурье, Фика, Ома и др.); принцип локального квазиравновесия (ПЛКР); уравнение баланса энтропии (УБЭ); конститутивные уравнения (КУ).

Первая группа до сих пор дает поводы для дискуссий [2,9,21], однако ее рассматривать мы не будем. Из второй группы «подозрительны на артефакты» ФБМО и ВП, поскольку эти понятия продолжают активно обсуждаться в литературе (чем менее вопрос ясен – тем больше о нем говорят). Третья группа представляет интерес целиком. Последующий порядок изложения обусловлен структурой связей между рассматриваемыми вопросами.

§12. Эмпирические законы переноса

Эмпирические законы переноса различных субстанций имеют одинаковую – «градиентную» форму, на чем основаны различные аналогии (в теории и в аналоговом моделировании) [11,56,68]. Закон Фурье теплопроводности устанавливает связь между плотностью потока тепла q и температурой T, который обычно записывается одним из способов:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \ (a); \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T \ (b); \quad q = \frac{\Delta T}{R} \ (c) \tag{4.1}$$

Здесь: x – координата точки среды; λ – коэффициент теплопроводности; ΔT – конечный перепад температур между точками тела, расстояние между которыми также конечно – δ; $R = \delta/\lambda$ – термическое сопротивление; ∇T – градиент температурного поля. Первые два соотношения ((*a*), (*b*)) используют для вывода одно- и многомерных уравнений теплопроводности. Соотношение (c) – конечное и используется при расчетах стационарных температурных полей и в численных расчетах нестационарных.

Подстановка в уравнение баланса тепла (*a*) из (4.1) дает уравнение (1.5), с которым связаны многочисленные аномалии (гл. 2). К аналогичным аномалиям ведет и (*b*) – в многомерных уравнениях. Использование (c) характерно для конечно-разностных уравнений, аномалии для которых (если отвлечься от чисто вычислительных эффектов) неизвестны.

В нелинейных моделях использовались формулы вида:

$$\lambda = \lambda(T) = \lambda_0 T^{\sigma}, \qquad \lambda_0, \sigma = \text{const}. \tag{4.2}$$

Они обосновываются обычно тем, что полученные методами физической кинетики формулы для $\lambda = \lambda(T)$ носят, как правило, степенной характер. Для газов, плазмы, металлов, диэлектриков, полу- и сверхпроводников и проч. приводятся зависимости [69,70,147,151,152], которые можно представить в виде:

$$\lambda(T) \sim T^{-2};\ T^{-1};\ T^{-1/2};\ T^{0};\ T^{1/2};\ T;\ T^{2};\ T^{5/2};\ T^{3}. \tag{4.3}$$

Тем не менее, обоснование (4.2) на основе (4.3) является неверным (т.е. артефактом). Это связано с тем, что формулы (4.3): а) теоретические (не все они в согласии с экспериментом); б) получены приближенно для ограниченных диапазонов изменения T (при выходе за рамки которых σ изменяется); в) носят не эффективный (макроскопический) характер, а выведены для «электронной подсистемы» ($\lambda \sim T^{3/2}$), «решеточной подсистемы» ($\lambda \sim T^{2}$) и др. При экспериментальном определении λ осуществляется статистическая обработка данных и аппроксимация $\lambda(T)$ простыми функциями (кусочно-линейными, экспоненциальными и проч.) [13,81,83,153]. Поэтому вместо (4.2) предпочтительнее функции $\lambda(T)$ вида

$$\lambda(T) = \lambda(T_1) + \left[\lambda(T_2) - \lambda(T_1)\right]\left(\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}\right)^{n}, \qquad n \in [0, \infty). \tag{4.4}$$

Здесь T_1, T_2 – границы температурного диапазона, в котором справедливо (4.4), $T_1 < T_2$. Для узких диапазонов ($T_2 - T_1 \cong 10K$) в большинстве случаев можно полагать $n = 0$ или $n = 1{,}0$. В отличие от (4.2), (4.4) не содержит нефизических $\lambda(0) = 0$, вызывающих «локализацию» температурного поля ([17], §9).

Использование законов типа (b) в (4.1) и аналогов его при других переносимых субстанциях приводит к уравнениям балансов (тепла, массы, импульса, заряда) простейшего вида (типа гидродинамического уравнения неразрывности) [113]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div} J_a = \sigma_a, \tag{4.5}$$

где a – плотность субстанции, J_a – плотность ее потока, σ_a – плотность источников (стоков). Такой же вид (согласно одному из постулатов третьей группы) имеет и УБЭ (где $a = \rho S$) [2,6,71]. Уравнение (4.5) соответствует парадигме термодинамики, так как является локальным (не содержащим параметров с размерностями времени или (и) длины, интегральных операторов) [6,71,112]. Известны и нелокальные формы уравнений (среды с «дальнодействием» или (и) «памятью») [9,19,51,53,54,57,145], однако в приложениях они не встречаются, что не позволяет считать их парадигмальными.

Уравнения (4.5) могут содержать нелинейность двух видов: при зависимости коэффициентов уравнения от потенциала переноса (квазилинейные уравнения); при нелинейности в правой части уравнения (полулинейные уравнения). Нелинейности, связанные с учетом в эмпирических законах переноса (Фурье, Фика и др.) членов более высокого порядка по градиентам, чем линейные, не встречаются; теоретические и экспериментальные обоснования таких моделей отсутствуют [68,75,77,113,147].

§13. Физически бесконечно малый объем и принцип локального квазиравновесия

Рассмотрение этих элементов ядра парадигмы совместно обусловлено тесной связью между ФБМО и ПЛКР. Последний, постулируя кинетические свойства ФБМО, именуется в литературе по-разному: локального квазиравновесия [6,9,19]; локального равновесия [7,8,20,99,145]; целлюлярного равновесия [85,113].

Классическое, наиболее частое определение ФБМО таково [17]: «... объем, достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными (межатомными) расстояниями». Малость ФБМО позволяет считать его «точкой», т.е. использовать полевое описание процессов переноса [9,77,113]. В то же время требование быть «большим по сравнению ...» является необходимым условием определения термодинамических параметров (температуры, концентрации, давления и т.д.). Такого рода определению соответствует весьма широкий спектр размеров (объема V_0 и линейного размера $d_0 \approx V_0^{1/3}$) ФБМО [111]: в кубике с ребром $d_0 = 10^{-3}$ см воздуха (при $T = 0°$ С и атмосферном давлении) будет находиться $\approx 27 \cdot 10^9$ молекул (частиц), а в межзвездной среде в $V_0 = 1$ км^3 будет 10^{16} частиц. При моделировании процессов переноса в воздухе можно считать характерный объем $V_c \sim 1$ см^3. Тогда $V_c/V_0 = 1$ см^3/10^{-9} см^3 = 10^9 >> 1. Объем V_0 содержит ~ 10^{10} частиц, поэтому, будучи макроскопическим, он в то же время много меньше характерного объема среды V_c, т.е. удовлетворяет определению ФБМО. Поскольку для межзвездной среды $V_c \sim L^3$ = (1 световой год)^3 ≈ (10^{13} км)^3 ≈ 10^{39} км^3, а V_0 = = 1 км^3 << V_c, но содержит ≈ 10^{16} частиц, то и объем V_0 = 1 км^3 является ФБМО.

Попытки уточнить определение ФБМО иногда приводят к странным формулировкам, например в [113, с. 40–41]: «С точки зрения корпускулярных теорий, элемент объема $\mathrm{d}V$ есть так называемый «макродифференциал», т.е. эта область бесконечно мала по порядку по сравнению с V, но в то же самое время она содержит достаточно большое количество частиц ... основную трудность создает противоречие между теорией поля и корпускулярными моделями. Это выражается в том, что поле бесконечно делимо, а частица нет». В [154], работе явно апарадигмальной, автор исходит из «соотношения неопределенностей» $\Delta E \Delta t = \hbar/2$ и приходит к «макроячейке» с объемом $V_0 = (\pi/6) d_0^3$ (где $d_0 = c\hbar/kT \sim 10^{-3}$ см при $T = 300K$), трактуемым как максимальный микроскопический объем, к которому «в принципе применимы положения квантовой механики», с одной стороны, а с другой – V_0 – это «минимальный макроскопический объем». Для характерного времени процессов переноса в «макроячейке» получено $t \sim 10^{-14}$ сек, что на порядок меньше «времени столкновения» [144]. Называя V_0 фундаментальным объемом, автор [154] полагает, что включение его в классическую термодинамику «... позволяет перейти от «дифференциально малых» к «физически предельно малым» величинам». Автор [77] считает, что в формулировках типа приведенной (из [17]) «мало смысла», однако выход видит не в их уточнении, а в отбрасывании с последующим принятием полевой аксиоматики.

Другие авторы пытаются [6,9] все же уточнить качественно и оценить количественно понятие ФБМО. В [6] вводится гидродинамическая (т.е. термодинамическая) система координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ и время t, которые «представляют» ФБМО, что позволяет использовать непрерывные поля ($T = T(\mathbf{r}, t), \rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ и т.д.). Полевые величины считаются усредненными по ФБМО и Δt («крупнозернистое огрубление» пространства и времени). Авторы [9], считая «гидродинамическое» описание тождественным усредненному, дают оценку:

$$t_m << \Delta t << t_M, \qquad (4.6)$$

где t_m, t_M – соответственно микро- и макроскопические времена. Левая часть (4.6) исключает микроинформацию (отфильтровывание мелкомасштабных флуктуаций), а правая – «позволяет использовать производные по времени». Для $d_0 = V_0^{1/3}$ (V_0 –ФМБО) предложено:

$$\vartheta_0^{1/3} << d_0 << \left| u^{-1} \nabla u \right|^{-1}, \qquad (4.7)$$

где $u = u(\mathbf{r}, t)$ – полевая величина, а ϑ_0 – элементарный объем (на одну частицу). Близкие оценки приводятся и в [8,19,20,144].

С позиций кинетической теории рассматривается иерархия масштабов длины и времени в [144]. Приводятся следующие оценки. Для воздуха ($T = 300\,\mathrm{K}$) время релаксации, равное среднему времени свободного пробега молекул – $\tau_r \sim 10^{-10}$ сек. Кинетическая стадия процессе переноса характеризуется временем $t >> 2\pi\hbar / kT \sim 5 \cdot 10^{-11} T^{-1}$ сек, что для $T = 300\,\mathrm{K}$ дает: $t >> 10^{-13}$ сек, т.е. кинетическое уравнение справедливо для времен порядка τ_r и больше. Переход к гидродинамической (макроскопической, термодинамической) фазе эволюции системы, описываемой уравнениями переноса, осуществляется усреднением одночастичной функции распределения Н.Н. Боголюбова F_1 по пространственному объему, много большему, чем r_0^3 (где r_0 – радиус действия сил межмолекулярного взаимодействия) и по интервалу времени, много большему, чем $r_0 / u_{\text{ср}}$ (где $u_{\text{ср}}$ – средняя скорость молекул). Таким образом, ФБМО фиксируется оценками:

$$u_{\text{ср}} \Delta t_{\text{ср}} << d_0 << L, \quad \Delta t_{\text{ср}} >> r_0 / u_{\text{ср}}, \qquad (4.8)$$

где $d_0 \sim V_0^{1/3}$, L – характерный размер макроскопической системы. Примечательно замечание в [8] о том, что гидродинамический временной интервал

$\Delta t_r >> t_{\text{с.п}}$. (времени свободного пробега), «даже если он обозначается как $\mathrm{d}t$».

С малыми ячейками («кубиками») среды, в которой протекает диссипативный процесс, на которые разбивается система при численных расчетах, ассоциируется ФБМО в [33,85].

Завершая рассмотрение ФБМО, приводим точку зрения на полевое (континуальное) описание авторов [28]: «... такой (предельный) переход невозможен уже из-за квантовых и молекулярных свойств, в силу которых рассматривать физические величины, уменьшенные сверх некоторых границ, лишено смысла. Поэтому физики вводят «физически бесконечно малые» величины, не давая этим понятиям определения ...».

Принцип локального квазиравновесия (ПЛКР), играющий в парадигме ключевую роль, описывает кинетическое поведение ФБМО на основе следующей гипотезы [145]. В любой системе существуют два различных масштаба для времен релаксации – установления равновесного состояния системы в целом – τ_L и релаксации в ФБМО – τ_r, причем $\tau_r << \tau_L$. Локально-равновесное состояние системы вначале устанавливается за время τ_r в ФБМО, а затем система стремится к равновесию в целом, что определяется временем τ_L. Таким образом, согласно ПЛКР, временная эволюция в ФБМО представляет собой последовательность квазиравновесных состояний, для которых обосновано существование термостатических параметров. В первый период развития неравновесной термодинамики часто подчеркивалось, что система слабонеравновесна, т.е. градиенты параметров и потоки в них малы (квазистационарны). Сейчас считают [113], что ПЛКР справедлив и для далеких от равновесия систем, вплоть до градиентов $\leq 10^5$ (К/см).

Следствием из ПЛКР является центральное положение ядра термодинамической парадигмы: соотношение Гиббса из термостатики справедливо и в термодинамике, т.е. применимо к необратимым нестационарным процессам переноса. Предполагается, что справедлива для ФБМО и эргодическая гипотеза – возможность замены усреднения по времени усреднением по фазовому пространству. При этом время скачкообразного изменения термодинамических параметров в ФБМО должно быть много меньше интервала времени между переходом из одного квазиравновесного состояния в последующее [6]. Эти «скачки» в макроскопических уравнениях переноса не учитываются. Входящие в уравнения параметры зависят от координат и времени: $T = T(\mathbf{r}, t)$, $P = P(\mathbf{r}, t)$, $C = C(\mathbf{r}, t)$ и т.д. Удельная энтропия, выражающаяся через эти параметры соотношением Гиббса, зависит от $\mathbf{r}$ и t опосредованно [6,7,20]:

$$S = S[T(\mathbf{r},t), P(\mathbf{r},t), C(\mathbf{r},t), ...]. \tag{4.9}$$

В физической кинетике аналог ПЛКР – принцип детального равновесия – формулируют в виде условия равенства вероятностей прямых и обратных переходов [8,147]:

$$w(\Gamma', \Gamma'_1 ; \Gamma, \Gamma_1) = w(\Gamma^{\text{т}}, \Gamma_1^{\text{т}}; \Gamma'^{\text{т}}, \Gamma_1'^{\text{т}}), \tag{4.10}$$

где $\Gamma^{\text{т}}$ – значение параметров Γ при замене $t \to -t$. Иначе говоря, каждый микроскопический процесс (столкновений) сопровождается противоположным ему. Равенство (4.10) не может служить обоснованием ПЛКР, так как получено из условия стационарности функции распределения (левая часть в уравнении кинетического баланса Паули равна нулю [8]). Строгий анализ [6,9] показывает следующее. Во-первых, реальное неравновесное состояние принципиально отлично от квазиравновесного состояния ФБМО, описываемого в «гидродинамической» пространственно-временной шкале, так как характеризуется конечными скоростями изменения параметров (наблюдаемых величин), сопровождающимися макроскопическими потоками (энергии, вещества, импульса). Во-вторых, при строгой интерпретации ПЛКР каждый переход из одного локально-квазиравновесного состояния в другое необходимо рассматривать как дискретную операцию и **строить теорию на конечно-разностных уравнениях** (с дискретными температурами, координатами и временем). При этом эволюция энтропии в каждом ФБМО (где она, согласно ПЛКР, сохраняет постоянное значение на интервале времени $(t, t+\Delta t)$) состоит в ее скачкообразном изменении $S \to S + \Delta S$ за интервал времени $\tau_m << \Delta t$. В-третьих, после «огрубления» пространства и времени (т.е. введения «гидродинамической» шкалы $\mathbf{r}$ и t) из анализа выпадает быстрый процесс смены состояний в ФБМО («скачок»). Таким образом, «гидродинамическая» скорость энтропогенеза $\Delta S / \Delta t = \sigma_S$, а так как всякий переход есть переход к квазиравновесному состоянию, то $\sigma_S \geq 0$.

Для получения УБЭ – «главного» уравнения термодинамики на основе изложенных представлений о ФМБО и ПЛКР с учетом (4.9), используется соотношение Гиббса термостатики

$$T \,\mathrm{d} S = \mathrm{d} u + P \,\mathrm{d} \vartheta - \sum_k \mu_k \,\mathrm{d} C_k , \tag{4.11}$$

которое заменяется термодинамическим

$$T \frac{\mathrm{d} S}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} t} + P \frac{\mathrm{d} \vartheta}{\mathrm{d} t} - \sum_k \mu_k \frac{\mathrm{d} C_k}{\mathrm{d} t}. \tag{4.12}$$

Переход от (4.11) к (4.12) – обязательный элемент изложения в любом учебнике или монографии по термодинамике. Между тем, ясности в его обосновании нет. Анализ источников показывает, что встречается четыре подхода к аргументации «снабжения временем» соотношения Гиббса. В первом – «по умолчанию» – пишут; «... отсюда получаем (4.12)» – никак не объясняя «получение» [2,6,7,9,17,110,151]. Во втором – «дифференцирование по t» – утверждается, что если взять производную по t от обеих частей (4.11), то получаем (4.12) [56,71,113]. В третьем используется «обходной путь» – функция S из (4.9) дифференцируется как сложная, вначале – по термодинамическим параметрам, а затем последние – по времени [20,77,122]. В четвертом приводятся «квазиобоснования» – аргументы скорее «контра-», чем «про-» [3,6,8,9].

Два первых подхода по понятным причинам не комментируются. Третий подход выглядит корректным, однако возникает вопрос: откуда у параметров **термостатики** зависимость от времени (да еще и непрерывная)? Ведь время **вводится** в термостатику (и тем самым осуществляется переход к термодинамике) именно в соотношении (4.11)? В балансовых уравнениях типа (4.5) время присутствует на априорной основе – оно «дано» при балансовых выводах этих уравнений, которые были известны со времен Фурье, однако считались чем-то «посторонним» для термостатики. Неравновесная термодинамика как раз и была призвана «легализовать» эти уравнения, обосновав их переходом (4.11)→(4.12) на основе ПЛКР. Поэтому в третьем подходе имеем логический круг: время вводится в формулу термостатики (4.11) для получения формулы термодинамики (4.12), которая содержит время только потому, что его содержит балансовое уравнение (4.5), наличие времени в котором не обосновывается, а постулируется, для чего ПЛКР не используется.

При четвертом подходе имеем, по сути, квази- или, вернее, антиобоснования. Начнем с классиков [3]: «Следует в особенности обратить внимание на роль времени в определении энтропии. Энтропия есть величина, характеризующая средние свойства тела за некоторый отличный от нуля промежуток времени Δt. Задав Δt, мы должны для определения S мысленно разделить тело на части, настолько малые, чтобы их собственные времена релаксации были малы по сравнению с Δt. Поскольку в то же время эти части и сами должны быть макроскопическими, то ясно, что для слишком малых интервалов Δt понятие энтропии вообще потеряет смысл; в частности, нельзя говорить о мгновенном ее значении». Точка зрения К.П. Гурова [6]: «... переход от одного физического элементарного объема (т.е. – ФБМО – И.В.) к соседнему ... или переход от одного интервала времени гидродинамического масштаба к следующему есть дискретная операция, и соответствующие уравнения должны быть, строго говоря, записаны как уравнения в конечных разностях». Сомнения в дифференцируемости (непрерывности) энтропии разделяет и К.Б. Толпыго [60]: «... в процессе передачи тепла энтропия может не иметь смысла, если, например, теплопроводность происходит очень быстро, так как энтропия есть характеристика системы на некотором интервале времени, в течение которого макроскопические характеристики системы, например энергия (т.е. температура – И.В.), предполагаются неизменными». И.А. Квасников, касаясь конкретно соотношения Гиббса, заключает [8]: «Первое и второе начала для квазистатических процессов

$$T\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}u + P\,\mathrm{d}\vartheta - \mu\,\mathrm{d}N + A\,\mathrm{d}a,$$

в котором знак дифференциала $\mathrm{d}F$ у фигурирующих величин понимается как макроскопическое «бесконечно малое», т.е. фиксируемое с помощью макроскопических приборов изменение этой величины F при переходе системы из равновесного состояния 1 в «близлежащее» равновесное состояние 2: $\mathrm{d}\,F \equiv F_2 - F_1$». К этому добавим следующее. Во-первых, последнее равенство означает, что $F_2 - F_1 = \Delta F$ – конечное приращение. Во-вторых, запись (4.12) противоречит природе термостатических функций, для которых в термостатике обоснованы понятия дифференциала и производных, но не по времени, а по другим параметрам (дифференциальные уравнения термостатики – уравнения Максвелла [155]).

Изложенные (и известные аналогичные [9]) точки зрения на ФБМО, ПЛКР, переход к термодинамическому соотношению Гиббса заставляют «заподозрить» эти элементы ядра парадигмы в аномальности (артефактности).

§14. Уравнение баланса энтропии, конститутивные уравнения, вариационные принципы

Уравнение баланса энтропии (УБЭ) выводится из термодинамического соотношения Гиббса (4.12). В [17] для случая теплопроводности в жидкости в (4.12) подставляются выражения для производных по времени от термодинамических параметров из уравнений неразрывности, сохранения энергии и Навье–Стокса. В итоге полученное уравнение принимает вид:

$$\rho T\left(\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla S)\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_k} + \mathrm{div}(\lambda \nabla T), \tag{4.13}$$

где $\mathbf{V}, \vartheta_i$ – вектор и компоненты скорости жидкости, σ'_{ik} – «вязкий» тензор напряжений. В (4.13) левая часть (после деления на ρT) есть полная (субстанциональная) производная удельной энтропии по времени; правой части может быть придан вид суммы дивергенции потока энтропии (с обратным знаком) и функции плотности источников энтропии, так что (4.13) примет вид (4.5). В [17] из уравнения (4.13) далее получено уравнение теплопереноса в несжимаемой жидкости (Фурье-Кирхгофа). Совпадение УБЭ с уравнением теплопереноса обнаруживается и для бездиссипативной сверхтекучей жидкости [17]:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho S \mathbf{V}_n) = 0, \tag{4.14}$$

где $\mathbf{V}_n$ – скорость «нормального» течения.

В физической кинетике [145] известна система уравнений переноса: (1) – энергии (тепла); (2) – импульса (уравнение Навье–Стокса); (3) – УБЭ. Подчеркивается, что (3) есть следствие (1) и (2) в силу закона сохранения массы, т.е. УБЭ эквивалентно, фактически, уравнению теплопереноса [145, (22.69)].

«Канонический» вывод [71,112,151] УБЭ в термодинамике базируется на аксиоматически принимаемом уравнении (4.5) при $a = \rho S$:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I}_S = \sigma_S . \tag{4.15}$$

Затем в (4.12) подставляются частные балансы типа (4.5) и осуществляется сравнение левых и правых частей этих двух уравнений относительно энтропии. В результате получают:

$$\mathbf{I}_S = \frac{1}{T}\left(\mathbf{I}_q - \sum_k \mu_k \mathbf{I}_k + ...\right), \qquad \sigma_S = -\frac{1}{T^2}\mathbf{I}_q \nabla T + \dots . \tag{4.16}$$

Однозначность представлений (4.16) обеспечивается их инвариантностью относительно группы Галилея и равенством $\sigma_S = 0$ в состоянии равновесия. Уравнение (4.15) с членами (4.16) содержит потоки различной природы, в общем случае – взаимосвязанные. Поэтому для решения (4.15) необходима дополнительная информация о виде связей потоков с обусловливающими их термодинамическими силами. Согласно теории Л. Онзагера, эта связь постулируется в виде конститутивных уравнений (КУ):

$$\mathbf{I}_i = \sum_k L_{ik} \mathbf{X}_k \, , \tag{4.17}$$

обобщающих частные эмпирические законы переноса (Фурье, Фика, Ома и др.). В (4.17): $\mathbf{I}_i$ – плотность потоков (далее – «потоки»); $\mathbf{X}_k$ – термодинамические силы , пропорциональные градиентам соответствующих термодинамических функций – потенциалов ($\mathbf{X}_q \sim \nabla T$); L_{ik} – кинетические коэффициенты. С учетом (4.17) для скорости энтропогенеза найдено:

$$\sigma_S = \sum_i \mathbf{I}_i \mathbf{X}_i = \sum_{i,k} L_{ik} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_k \geq 0 \, . \tag{4.18}$$

На основе положения об инвариантности уравнений механики относительно «обращения» времени (т.е. замены $t \to -t$), Л. Онзагером было получено соотношение взаимности, уменьшающее количество независимых кинетических коэффициентов:

$$L_{ik} = L_{ki} . \tag{4.19}$$

В литературе отмечалось, что соотношение (4.19) получено вне рамок термодинамики, в которой этот результат отсутствует [113].

Как же далее, при построении и исследовании моделей переноса (т.е. на уровне базиса парадигмы), используется УБЭ – (4.15)? И. Дьярмати полагает [113], что «идеология неравновесной термодинамики состоит в определении УБЭ для конкретных моделей систем» Но, как мы видели ранее, для конкретных моделей УБЭ эквивалентно уравнению теплопереноса, т.е. не является независимым уравнением в общей системе уравнений «гидродинамического» описания. Влияние же всей совокупности термодинамических сил (в линейном приближении) на любой из потоков – так называемые «перекрестные эффекты» (4.17) вовсе не есть следствие (4.15), а является независимым постулатом термодинамики, который может быть использован при решении системы балансовых уравнений (4.5) и вне (4.15).

Вариационные принципы (ВП) появились на определенном этапе развития механики. Они позволяли выводить уравнения движения из экстремальных свойств некоторых функционалов. В парадигме термодинамики впервые такой принцип – принцип наименьшего рассеяния энергии – был сформулирован Л. Онзагером [113]. В 1954 г. И.Р. Пригожин предложил принцип наименьшего производства энтропии, после чего «принципы» стали быстро «размножаться». В настоящее время наиболее из них известны ВП: Онзагера, Пригожина–Гленсдорфа, Циглера, Био, Дьярмати, Бахаревой, Вуяновича, Бейтмена, Хейса, Чемберса, Михайлова–Глазунова, Зарубина, Выродова [2,6,7,9,85,86,99,110,112, 113,122,143,145]. И.Ф. Бахарева проанализировала [110] основные ВП термодинамики и их механические аналоги и показала, что все они эквивалентны принципу максимальной работы диссипации (максимального производства энтропии) Г. Циглера, который отличают наглядность и универсальность (применим и в нелинейном случае).

Изобилие ВП, приводящих практически к одним и тем же уравнениям переноса, которые могут быть получены и другими способами, само по себе является аномалией – артефактом, устранение которого состоит в отказе от ВП, либо использовании одного-двух из них. Такая попытка – определения «главного», наиболее универсального ВП – была предпринята И. Дьярмати [113].

Локальная форма предложенного ВП имеет вид [113]:

$$\delta O_M = \delta[\sigma - (\Psi + \Phi)] = 0. \tag{4.20}$$

где: σ соответствует (4.18); δ – символ вариации по потокам и силам; O_M – функция Онзагера–Махлупа; $\Psi \geq 0$ и $\Phi \geq 0$ – локальные потенциалы рассеяния, определяемые формулами

$$\Psi(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_k\,; \qquad \Phi(\mathbf{I},\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} R_{ik}\mathbf{I}_i\mathbf{I}_k\,. \tag{4.21}$$

Матрица $\|R_{ik}\|$ является обратной по отношению к матрице $\|L_{ik}\|$:

$$\sum_m R_{im}L_{mk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases} \tag{4.22}$$

Условие локального экстремума (4.20) эквивалентно равенству [113, с. 153]:

$$\sigma - (\Psi + \Phi) = \max. \tag{4.23}$$

Далее из (4.20) и (4.23) автором выводятся КУ, уравнение теплопроводности и проч. Это обстоятельство весьма интригующе, поскольку из (4.17)–(4.19) и (4.21), (4.22) следует:

$$\Psi = \frac{1}{2}\sigma; \quad \Phi = \frac{1}{2}\sigma; \quad O_M = \sigma - (\Psi + \Phi) = \sigma - \sigma = 0. \qquad (4.24)$$

Как известно, ВП появляются в дисциплине только на той фазе ее развития, когда основные факты теории (уравнения, соотношения) уже установлены другими методами. Основная ценность ВП, по М. Борну [33, с. 139–142] математико-эстетическая: «... Истинное положение вариационного принципа: он находится в конце длинной цепи обоснований как удовлетворительная и красивая конденсация результатов ... Но он мало имеет отношения к образованию новых фундаментальных понятий».

Основные выводы, к которым приходим на основании изложенного в настоящей главе, таковы.

1. Эмпирические законы переноса ((*a*), (*b*) из (4.1)) ведут к параболическим уравнениям, содержащим многочисленные артефакты (см. гл. 2). Конечно-разностная форма ((*c*) из (4.1)) законов переноса ведет к конечно-разностным уравнениям, таких аномалий не имеющим.

2. Используемая при моделировании нелинейных процессов переноса степенная зависимость для коэффициентов переноса, обращающие их в нуль вместе с потенциалом переноса ведет к артефакту – «локализации» поля, распространяющегося по «нулевому фону». Более физична аппроксимация вида (4.4).

3. Уравнения балансов типа (4.5) содержат производные по времени от параметров термостатики, выводятся они независимо от ПЛКР и неравновесного соотношения Гиббса, которые **первично** вводят время в термостатику, осуществляя переход к термодинамике.

4. ФБМО является понятием, имеющим только квазиопределения, не являющиеся строгими. Некоторые из таких «определений» ((4.7), в частности) содержат апостериорные оценки – по полевым функциям и их градиентам, которые могут быть найдены **после** решения соответствующей краевой задачи. Между тем, само уравнение переноса обосновывается указанной апостериорной оценкой – логический круг. Понятие ФМБО является артефактом, требующим устранения.

5. Полевое описание процессов переноса («гидродинамическое приближение» кинетической теории), согласно парадигме, содержит пространственные координаты и время, подвергнутые «крупнозернистому огрублению» – усреднению по ФМБО и некоторому Δt. Фактически этого нет, так как «длина» ФМБО подменяется элементом $\mathrm{d}\,x$ с мерой нуль, а $\Delta t - \mathrm{d}\,t$, т.е. усреднение элиминируется.

6. ПЛКР, постулирующий временную эволюцию в ФМБО как чередование квазиравновесных состояний (в течение промежутка времени Δt) и скачков (совершаемых за время $\tau_m << \Delta t$), не соответствует физике процесса переноса в ФМБО, где термодинамические параметры флуктуируют, одновременно «дрейфуя» (трэнд). Игнорируется положение о принципиальной дискретности энтропии [17]. Отсутствует четкое определение неравновесной температуры, которое всюду подменяется термостатической, принимающей непрерывные (континуальные) значения.

7. Принцип детального равновесия (кинетический аналог ПЛКР) выводится из условия микроскопической обратимости – обратимости уравнений классической или квантовой механики. Последнее, как будет показано, является артефактом.

8. Переход от термостатического к термодинамическому соотношению Гиббса (от (4.11) к (4.12)), т.е. **введение времени** в термостатику, некорректен, так как базируется на использовании балансовых уравнений типа (4.5), содержащих время изначально. Способ введения времени в уравнения балансов **термостатических** параметров неизвестен.

9. Существует, на уровне ядра парадигмы, понимание необходимости применения в термодинамике конечно-разностных уравнений, которое на уровне базиса полностью игнорируется, так как повсеместно используются уравнения в частных производных.

10. УБЭ является лишь следствием других уравнений переноса и в приложениях всегда сводится к уравнению теплопереноса. Постулирование его в виде «уравнения неразрывности» есть следствие аддитивности энтропии, определенной как термостатический параметр.

11. Из ВП, многочисленных и дублирующих друг друга, следуют КУ, которые в качестве независимо вводимого постулата **уже** использовались при выводе формулы для плотности источников энтропии, и балансовые (частные) уравнения переноса, которые также **уже** использовались при получении термодинамического соотношения Гиббса. ВП не содержат новой информации.

12. КУ содержат кинетические коэффициенты L_{ik}, для которых доказано соотношение взаимности: $L_{ik} = L_{ki}$. Доказательство это находится вне термодинамики и основано на механической обратимости времени – артефакте.

13. Существует «структурный артефакт», являющийся следствием всех артефактов ядра парадигмы. Таким образом, сама структура ядра парадигмы – артефакт, все ядро парадигмы требует модернизации.

14. Существует, следующий из всего изложенного в настоящей части I, «фундаментальный хроноартефакт» – ошибочность парадигмальных (как в термодинамике, так и в механике) представлений о времени как о физической величине, всегда одной и той же (вне рамок релятивистской механики), непрерывной и «обратимой» (т.е. могущей принимать отрицательные значения).

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ АРТЕФАКТОВ

И только тут он полностью осознал смысл случившегося: Артефакта больше не существовало ...

К. Саймак, «Заповедник гоблинов»

Чтобы решить вопрос, касающийся чисел или абстрактных отношений величин, надо лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический.

И. Ньютон

§15. Квазиартефакты

Примеры квазиартефактов – ошибок, не часто встречающихся, приводились в §3. Бесконечная скорость «разбегания» броуновских частиц при $x \to \infty$, как трактовалась в [62] формула (1.11), есть следствие определения «скорости диффузии» $V_D = -D\nabla\rho/\rho$. Величина V_D действительно имеет размерность скорости, но это, согласно (1.11), не «скорость диффузии», а скорость некоего конвективного массопереноса, поток которого $q_k = \rho V_D$. А так как никакой конвекции фактически нет, то V_D не имеет физического смысла, а есть просто отношение величин. Сами же эти величины, если обратиться к задаче Коши для уравнения диффузии, при $|x| \to \infty$ быстро убывают, так что $\lim\limits_{|x|\to\infty} q_D = \lim\limits_{|x|\to\infty} (-D\nabla\rho) \to 0$.

Несколько более сложно устраняется квазиартефакт из [61] – бесконечная скорость частицы при $h \to 0$ (где h – величина «скачка» частицы в схеме случайных блужданий на прямой). В [61] $\vartheta = h/\tau \to \infty$ при $\tau \sim h^2$ и $h \to 0$. Однако это же можно записать и иначе: $\vartheta \sim h/\tau \sim \sqrt{\tau}/\tau \sim 1/\sqrt{\tau}$. При любом $\tau > 0$, $\vartheta < \infty$. Чтобы получить $\vartheta \to \infty$, необходимо положить $\tau \to 0$, но если продолжительность любого «скачка» равна нулю, то и продолжительность **любого** конечного числа «скачков» равна нулю, т.е. частица попросту не движется. Отсюда следует ошибочность вывода о том, что $\vartheta \to \infty$ в [61].

Ошибку допускают и авторы, которые для броунова движения пишут:

$$\delta^2 = 2Dt, \quad \delta = \sqrt{2Dt}, \quad \vartheta_D = \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{D}{2t}\right)^{1/2}, \quad \lim_{t\to 0} \vartheta_D = \infty. \tag{5.1}$$

Здесь есть внешняя аналогия с формулой априорной оценки локализации поля (1.10), для которой было получено $\vartheta_n \to \infty$ при $\tau \to 0$. Различие между ϑ_n и ϑ_D состоит в том, что $\vartheta_n \to \infty$ есть артефакт, а $\vartheta_D \to \infty$ – квазиартефакт (очевидная ошибка). Из элементарной теории броунова движения следует, что расстояние δ, пройденное частицей за n «скачков»:

$$\delta^2 = 2Dt = 2Dn\tau = 2Dn \cdot \frac{h^2}{2D} = nh^2, \qquad (5.2)$$

т.е. случаю $t = 0$ отвечает $n = 0$, т.е. «скачков» нет вообще, а скорость не определена. Известные строгие результаты теории броунова движения [8,146] показывают, что первая из формул (5.1) является приближенной, верной лишь при $t >> \tau$, так что предел ϑ_D при $t \to 0$ не имеет смысла.

§16. Природа артефактов

Определяя в §2 артефакт как аномалию, возникшую в ходе исследований, т.е. **привнесенную**, мы использовали символическую запись $y' = F'x'$ (1.4), обозначающую: ошибки в исходных предпосылках (x') или (и) в «операторе перехода» (F') влекут, как следствие, аномалию (y' вместо верного y). В главах 2–4 перечислены аномалии, представляющиеся нам артефактами, причем большинство из них – хроноартефакты (т.е. связанные со временем). Сгруппируем их, представив укрупненными блоками и попытаемся идентифицировать соответствующие x' и F', чем будем характеризовать природу этих артефактов (табл. 2).

Устранение артефактов, как уже говорилось, требует определения «правильных» x и F и замену ими x' и F', что должно привести к переходу от аномалии y' к «правильному» y. Такого рода задачи решались, по существу, постоянно в процессе развития физики, о чем свидетельствуют высказывания крупных ученых, цитируемых нами далее.

А. Эйнштейн [33, с. 185–186]: «Понятия, которые оказались полезными в упорядочивании вещей, легко приобретают над нами такую власть, что мы забываем о их человеческом происхождении и принимаем их за неизменно данное (определение артефакта! – И.В.) ... Такими заблуждениями путь научного прогресса часто преграждается на долгое время. Поэтому если мы настаиваем на необходимости проанализировать давно установленные понятия и указать, от каких условий их оправданность и возможность употребления, как они, в частности, возникают из данных опыта, то это не праздная забава. Этим самым разбивается их преувеличенная власть. Их устраняют, если они не могут должным образом себя узаконить» (здесь кратко изложена программа настоящей работы – И.В.).

Таблица 2

Характеристика природы артефактов

Структурный уровень парадигмы	NN п/п	Аномальный результат (артефакт) (y')	Предположительно неверные исходные предпосылки (x')	Предположительно ошибочный «оператор перехода» от предпосылки к результату (F')
1	2	3	4	5
Оболочка	1	Поведение функций при $t \to 0$ в граничных точках	Использование класса непрерывных функций	Линейное параболическое уравнение теплопроводности
	2	Некоммутативность двойных поочередных пределов при $t \to 0$	Несогласованность начальных условий с граничными, разрывы в начальных условиях	–″–
	3	Зависимость двойных одновременных пределов от вида функции $x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$ при $t \to 0$	–″–	–″–
	4	Бесконечное время любого переходного процесса в конечной системе	Предположение о непрерывности (континуальности) температуры и количества тепла	–″–
	5	Отсутствие стационарного решения в задаче с циклическим граничным условием	Постановка задачи как стационарной, без учета «предыстории»	Метод решения, не учитывающий информацию о начальном состоянии
	6	Бесконечная скорость теплопередачи и неэффективность оценок для локализации поля	Использование полевого (континуального) описания	Метод вывода априорных оценок локализации полей
	7	Обращение в бесконечность производных по времени при $t \to 0$	Предположения о справедливости уравнения теплопроводности при $t \to 0$	Вычисление производных по t при $t \to 0$ от функций, при $t \to 0$ не определенных

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
Базис	8	Вид левой части уравнения теплопроводности с переменной теплоемкостью	Использование ошибочного выражения для внутренней энергии – $u = c_V T$	Метод вывода уравнения теплопроводности
	9	Задачи с начальными условиями при $t = t_0 = -\infty$	Ошибочные представления о временной шкале; нефизичность постановки задачи	Ошибочный метод решения
	10	Нелинейные уравнения 1 (их вид, волновые решения, диссипативные структуры)	Использование абстрактной «математической» модели; «волновая идеология»	– ″ –
	11	Нелинейные уравнения 2. (Автомодельные, асимптотические «резонансные» решения; решения с «обострением»; граничные условия для $\left\|x\right\| \to \infty$	– ″ – Некорректность граничных условий для задач Коши	– ″ –
	12	«Резонансные» решения для слоистых моделей	Использование математически возможных, но физически не корректных величин и их отношений	– ″ –
	13	Системы с подвижными границами и некорректность краевых задач	Ошибка в формулировании краевых задач	– ″ –
	14	Гиперболические уравнения переноса (краевые условия, методы решения)	Формальная постановка задач, предположение о конечности скорости теплопередачи	– ″ –
Ядро	15	ФМБО, ПЛКР и неравновесная температура	Отсутствие четких определений используемых понятий	—
	16	Термодинамическое соотношение Гиббса	«Включение» времени в термостатику на основе балансовых уравнений, уже содержащих время	Использование производных по времени от параметров термостатики

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4	5
Ядро	17	Уравнение баланса энтропии	Предположение о большей информативности энтропии по сравнению с величинами, через которые она определена	—
	18	Нестационарные балансовые уравнения в частных производных	Априорная зависимость параметров термостатики от времени	—
	19	Конститутивные уравнения	Использование микрообратимости времени для доказательства симметрии кинетических коэффициентов	—
	20	Вариационные принципы	Переоценка информативности ВП, их большое число	—

М. Борн [33, с. 289]: «Утверждения, подобные следующему: величина x имеет полностью определенное значение (выраженное действительным числом и представляемое точкой в математическом континууме) кажутся мне не имеющими физического смысла («резонансные» решения! – И.В.). Современная физика достигла величайших успехов с помощью методологического принципа, заключающегося в том, что понятия, применение которых требует принципиально ненаблюдаемых различений, являются бессмысленными и должны быть устранены .... Проблема непрерывности требует принятия того же самого принципа ...».

Р. Фейнман [35, с. 183–184]: «... Мы вновь получаем бесконечно большие значения ... наше объяснение оказывается неполным – чего-то не достает. Иногда это значит, что нам нужно расстаться с какой-то идеей ... В прошлом всегда оказывалось, что для того, чтобы выйти из аналогичного затруднения, приходится пожертвовать каким-то глубоко укоренившимся представлением ... Теория, согласно которой пространство непрерывно, мне кажется неверной, потому что она приводит к бесконечно большим величинам и другим трудностям ... Истину всегда можно узнать по простоте и изяществу ... чаще всего приходится не столько добавлять, сколько отбрасывать».

Из выводов по главам 2–4 и табл. 2 следует, что ключевую роль во многих артефактах играет непрерывность (температур, координат, времени), т.е. полевое построение термодинамики, которое, на наш взгляд, и есть «главный» x', подлежащий устранению. В этом случае его заменой – x – будет дискретность. Рассмотрим далее кратко взаимосвязи между дискретными и континуальными моделями.

§ 17. Дискретные и континуальные модели

Теория процессов переноса (термодинамика) является полевой теорией, в которой координаты, время, термодинамические параметры непрерывны (континуальны) [6,50,71,75–77,99,112,113]. Основные математические модели переноса базируются на уравнениях в частных производных параболического типа. Такие модели (для простоты – одномерные) будем называть $K_x K_t$-моделями (или K-моделями). Здесь «K» – обозначает континуум, а x и t – переменные, принимающие континуальные (непрерывные) значения. В последние десятилетия большое распространение получили методы численного решения уравнений в частных производных [114,115,156–159], уравнений переноса в частности [13,57,62,86,116,117,151,160]. Они основываются на различного вида конечно-разностных аппроксимациях исходных уравнений, т.е. осуществляют их дискретизацию (алгебраизацию). Такие модели будем называть $D_x D_t$-моделями (или D-моделями). Обратная дискретизации операция – континуализация – т.е. переход от конечно-разностных моделей к непрерывным ($D_x D_t \to K_x K_t$) часто встречается при выводах различных уравнений путем предельных переходов от D-моделей (таких, как схема случайных блужданий типа «сетка», «решетка», «цепочка» и др.) к K-моделям [25,51,61,63,64,72,86, 89,102,103,110,113,146,149,161]. Встречаются и «смешанные» $D_x K_t$- и $K_x D_t$-модели. Последние соответствуют методу Ротэ [28,49,80] и являются, как правило, результатом частичной (по времени) дискретизации K-модели. Модели $D_x K_t$, напротив, чаще возникают в результате частичной (по времени) континуализации D-моделей.

Рассмотрим ряд $D_x K_t$-моделей и способы их трансформации в K-модели. Обычно рассматривается некоторая фиксированная пространственная дискретная структура: «ячейки» кубической формы, температура (или концентрация) в которых совпадает со значением в геометрическом центре ячейки [85,88,121]; «цепочки» из отрезков конечной длины [86,110]; одномерные «решетки» [61,72,89]; многомерные «сетки» [161,162] и др. Встречаются два основных вида моделей: локальные (при взаимодействии N-й ячейки только с $N-1$-й и с $N+1$-й) и нелокальные (когда с N-й ячейкой взаимодействуют не только ближайшие «соседи»).

Примером первого вида является модель одномерной диффузии частиц в решетке с периодом a [72]:

$$\frac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{a^2}\left(N_{n-1} - 2N_n + N_{n+1}\right), \tag{5.3}$$

где N_n – число частиц в n-м узле решетки; D – коэффициент диффузии. Начальные условия к (5.3):

$$N_n = \begin{cases} N_0, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \tag{5.4}$$

Задача (5.3), (5.4) имеет решение [163]:

$$N_n = N_0 \exp(-kt) I_{n-m}(kt), \tag{5.5}$$

где I_{n-m} – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $n-m$; $k = 2D/a^2$; $n, m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \ldots$. Сравнение результатов расчетов по (5.5) (т.е. по $D_x K_t$-модели) с результатами расчетов по соответствующей $K_x K_t$-модели показало, что [72]: 1) при очень малых временах ($t = 0{,}1 t_0, t_0 = a^2/2D$) расхождение между значениями N_n/N_0 по $D_x K_t$- и $K_x K_t$-моделям для $n = m$ составляет 0,35 и сильно увеличивается для $n - m \geq 1$; 2) при малых временах ($t = t_0$) это расхождение для $n = m$ составляет 0,07, а для $n - m = 1$ – 0,03, далее убывая; 3) при $t = 10\, t_0$ для $n = m$ расхождение 0,002 и при $n - m \geq 1$ убывает. Таким образом, максимальной различие результатов для полудискретной и континуальной моделей характерно для малых моментов времени и на малых расстояниях от начальной неоднородности.

Нелокальная модель, описывающая случайный процесс блуждания частиц с дискретными состояниями, в n-м из которых концентрация равна $C_n(t)$, сформулирована на основе вероятностного подхода в виде уравнения [89]:

$$\frac{\mathrm{d}\, C_n(t)}{\mathrm{d}\, t} = \sum_j P_{nj} C_j - \sum_j P_{jn} C_n, \tag{5.6}$$

где P_{nj} – вероятность перехода за единицу времени из состояния «n» в состояние «j». Аналогичные (5.6) уравнения получены в [61], где показано, что при различных предположениях из них следуют интегро-дифференциальные уравнения, уравнение Фоккер–Планка, диффузионные. Если считать в (5.6) отличными от нуля только $P_{n-1,n} = P_{n,n+1} = P_n$ (локальное приближение), то получим

$$\frac{\mathrm{d}\, C_n(t)}{\mathrm{d}\, t} = P_n \left(C_{n-1} - 2C_n + C_{n+1} \right), \tag{5.7}$$

т.е. случай (5.3). Переход от (5.7) к K-модели осуществлен типичным способом – разложением в ряд по степеням $\Delta x = \lambda$; x – непрерывная переменная, заменяющая дискретный набор состояний. Полагая $x = x_n = n\lambda$, $C_{n-1} = C_n(x - \lambda)$, $C_{n+1} = C_n(x + \lambda)$, получают:

$$C_{n-1} = C_n - \frac{\partial C_n}{\partial x} \lambda + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2} \lambda^2 + \ldots,$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{\partial C_n}{\partial x}\lambda + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2}\lambda^2 + \ldots \tag{5.8}$$

Подстановка (5.8) в (5.7) дает, после отбрасывания членов $O(\lambda^3)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,C_n}{\mathrm{d}\,t} = P_n\lambda^2\frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2} \to \frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \tag{5.9}$$

Иногда переход от D-модели к K-модели осуществляется соотношениями:

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{l_0} \to \frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,x}, \qquad \sum_{n=1}^{N}(\ldots)_n l_0 \to \int_a^b(\ldots)\,\mathrm{d}\,x, \tag{5.10}$$

где диаметр «ячейки» l_0 заменяется на $\mathrm{d}\,x$, а конечное приращение $T_{n+1} - T_n$ – на $\mathrm{d}\,T$.

Переходы (5.9), (5.10) являются локальными; известны нелокальные K-модели, следующие из D-моделей при сохранении в разложениях в ряды величин $\Delta u = u_{n+1} - u_n$ производных всех порядков (что эквивалентно некоторому интегральному оператору [23,30,61]). При решении сложных задач переноса, когда аналитическое решение затруднено, переходят к $D_x K_t$-, $K_x D_t$- и $D_x D_t$-моделям. Дискретное и континуальное описания процессов переноса дополняют друг друга и полезны оба. Вообще же в физике многими крупными учеными высказывались неоднократно суждения в пользу дискретного описания как более соответствующего эксперименту, всегда дающему дискретную информацию. Некоторые из таких суждений мы приводим далее.

А. Эйнштейн [34, с. 56–57]: «... введение пространственно-временного континуума может считаться противоестественным, если иметь в виду молекулярную структуру всего происходящего в микромире. Утверждают, что успех метода Гейзенберга может быть приведен к чисто алгебраическому описанию природы, т.е. исключению из физики непрерывных функций. Но тогда нужно будет отказаться от пространственно-временного континуума. Можно думать, что человеческая изобретательность в конце концов найдет методы, которые позволят следовать по этому пути».

М. Борн [33, с. 289, 290, 434]: «Утверждения, подобные $x = \pi$ см, имело бы физический смысл только в том случае, если можно было бы его отличить от $x = \pi_n$ см для любого n, где π_n есть приближение π с помощью первых n десятичных знаков... физическая ситуация должна описываться посредством действительных чисел таким образом, чтобы во всех наблюдениях естественная неточность принималась во внимание. ... отождествление физического пространства и физического времени с математическим континуумом ... заходит слишком далеко, ибо оно содержит в себе не подтвержденные эмпирические утверждения».

Р. Фейнман [35, с. 57,184]: «Меня всегда беспокоило, что согласно физическим законам, как мы понимаем их сегодня, требуется бесчисленное число логических операций ... чтобы определить, какие процессы происходят в сколь угодно малой области пространства за сколь угодно малый промежуток времени ... Теория, согласно которой пространство непрерывно, мне кажется неверной, потому что она приводит к бесконечно большим величинам и другим трудностям».

Х. Юкава [119, с. 81]: «... проблема пространства–времени состоит в том, нельзя ли как-то ввести дискретность ...».

В части II настоящей работы будет предпринята попытка «как-то ввести дискретность» – излагаются элементы дискретной термодинамики или Боргартоники (в память о моем Учителе, замечательном Ученом и Человеке – профессоре Боргардте Александре Александровиче). На основе полученных результатов, далее в Части III осуществляется устранение выявленных артефактов на всех структурных уровнях парадигмы, а в заключительной, 12-й главе работы формулируется и устраняется фундаментальный хроноартефакт – ошибочность парадигмы времени в физике.

ЧАСТЬ II

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ (ВВЕДЕНИЕ В БОРГАРТОНИКУ)

Я не знаю, получится ли у меня что-нибудь новое по существу или нет, но буду доволен, если мне удастся ... получить простейший взгляд на предмет... Здесь уже не может быть ошибки с точки зрения согласия гипотез с фактами природы, ибо в этом отношении ничего и не предполагается.

Д.В. Гиббс

Никакая теория не является чем-то объективным и тождественным природе; теория – это только образ или картина реальных физических явлений.

Л. Больцман

... трактовка в конечных разностях является единственной, имеющей смысл, если иметь в виду физическое содержание всякого исследования.

П.С. Эренфест,
Т.А. Афанасьева–Эренфест

ГЛАВА 6. ДИССИПАТОРЫ

Первые понятия, с которых начинается какая-либо наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу ...

Н.И. Лобачевский

Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность была внушена нам внешним миром. Она, без сомнения, изобретена нами ...

А. Пуанкаре

§ 18. Боргартон, макроточка, диссипатор

В термостатике широко используется понятие «термостат». Оно обозначает систему достаточно больших размеров, в которую помещается изучаемая система (системы). Термостат поддерживает внутри себя постоянную температуру, не изменяющуюся при нагреве или охлаждении тела (системы), помещенного в термостат. Кроме термина «термостат», для устройства с такими же свойствами используют и другие названия. В литературе встречаются: тепловая «баня», тепловой резервуар, управляющий резервуар, «ящик» (для процессов диффузии), резервуар энергии и частиц, «вселенная» [2,8,9,145,165,166]. Мы будем рассматривать «метатермостат», отличающийся от термостата универсальными свойствами: 1) В «метатермостат» можно помещать тела и их системы произвольных размеров; 2) В нем можно поддерживать любые, наперед заданные значения всех термодинамических параметров – температуры, давления, концентрации и т.д.; 3) Все параметры также могут изменяться произвольным образом во времени и в пространстве. Далее такое устройство для мысленных экспериментов будем называть Боргартоном – в память о профессоре Александре Александровиче Боргардте, замечательном ученом и человеке.

Макроточкой будем называть малое сплошное тело, обладающее всеми макроскопическими свойствами соответствующего «массива» и не допускающее уменьшения своих размеров без потери «представительских» функций. Иначе говоря, макроточка есть тело минимальных размеров, обладающее макроскопическими свойствами (температурой, теплоемкостью, теплопроводностью и т.д.). Не ограничивая общности, будем далее диссипативный процесс взаимодействия макроточки с Боргартоном считать процессом теплопроводности, приписывая Боргартону некоторую температуру T_S (постоянную или переменную), а макроточке – переменную температуру $T_M(\tau)$. Поскольку внутри макроточки температура одинакова (не зависит от пространственных координат), а сама макроточка есть минимальная, «элементарная» макросистема, ясно, что она является в нашем анализе аналогом ФБМО (имеющим конечные размеры). Рассмотрим возможные подходы к оценке размеров макроточек для различных сред и характерных времен релаксационных процессов в них.

Эксперименты с быстротекущими процессами теплопередачи в тонких пленках и слоях жидкости обрабатываются зачастую на основе параболического уравнения теплопроводности, из которого получают оценки для «глубины проникновения» температурного поля как функции времени [167–170]. В связи с этим указываются предельно малые (но все еще – макроскопические) интервалы длины и времени, для которых справедлива и анализируемая модель. Для слоев толщиной $\delta_0 \sim 10^{-5}$ см, характерное время теплопередачи составило [167] $\tau_0 \sim 10^{-6}$ сек. По данным [168] (оценка времени прогрева нагреваемой лазерным лучом полупроводниковой пленки), время нагрева составило $\tau_0 \sim$ $\sim 10^{-10}$ сек при толщине пленки $\delta_0 \sim 10^{-5}$ см. Тонкая проводящая пленка (напыляемый резистивный элемент) с толщиной $\delta_0 \sim 10^{-6}$ см обеспечивала измерение температуры за $\tau_0 \sim 10^{-6}$ сек [169]. Уточняя понятие «температура поверхности тела», автор [170] воспользовался формулой Эйнштейна для относительной флуктуации температуры. Для температуры T_0 = 300 К частицы тела на его поверхности и флуктуации ее $\delta T \sim 10^{-3}$ К, было найдено значение размера частицы $d_0 \sim 10^{-4}$–10^{-3} см. Автор предполагает, что приповерхностный слой толщиной $\sim d_0$ имеет температуру T_0 с точностью $\delta T \sim 10^{-3}$ К, чем и определяется «температура поверхности».

Масштабный эффект – зависимость коэффициента теплопроводности λ тонких пленок и волокон от их толщины или диаметра δ, анализировался в работах [68–70,151]. Было показано теоретически и подтверждено экспериментально, что λ растет с δ, достигая значения в «массиве» при $\delta = 10^{-5}$–10^{-4} см.

Оценка размеров малого объема, в котором флуктуации плотности или температуры маловероятны, что позволяет приписать такому объему среды вполне определенные макроскопические параметры, осуществлялась в [118,140,146]. Для воздушной среды с радиусом R_0 (см) подсчет вероятности поднятия концентрации кислорода на 1% выше нормальной был сведен к определению времени ожидания (периода) такой флуктуации [140]. Для R_0 (см): 10^{-5}; $2{,}5 \cdot 10^{-5}$; $3 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-5}$ были найдены (соответственно) времена ожидания: 10^{-11} сек; 1,0 сек; 10^6 сек; 10^{68} сек, что подтверждает макроскопичность частицы с диаметром ~ 10^{-4} см. В [118] для времен ожидания относительных вариаций числа частиц $2 \cdot 10^{-10}$; $3 \cdot 10^{-10}$; $4 \cdot 10^{-10}$; $5 \cdot 10^{-10}$ были получены, соответственно, значения (сек): $4 \cdot 10^{-3}$; 1,0; $1{,}3 \cdot 10^3$; $1{,}3 \cdot 10^7$. Автором, на основе формулы для вероятностей флуктуаций [118], были проделаны расчеты вероятностей отклонения от температуры T_0 = 310 К кубика воды с ребрами l_0 = = 10^{-4}–10^{-1} см. Для l_0 (см) = 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1} были получены вероятности флуктуации δT = 10^{-4} К: 97%; 23%; 0%; 0%. Для δT = 10^{-3} К соответствующие вероятности оказались равными: 69%; 0%; 0%; 0%. Для δT = 10^{-2} К: $6{\cdot}10^{-3}$%; 0%; 0%; 0%. Здесь вероятность, обозначенная «0%» была менее 10^{-4}%. Эти расчеты также демонстрируют, что для $l_0 \geq 10^{-4}$ см вероятность флуктуаций мала.

Для относительных флуктуаций $\varepsilon = \overline{\delta T}/T_0$ = 10^{-5}; 10^{-7}; 10^{-9} по формуле Эйнштейна [3]:

$$\varepsilon^2 = \frac{\overline{(\delta T)^2}}{T_0^2} = \frac{k_B}{V_0 c_V} \tag{6.1}$$

были найдены параметры макроточек. В (6.1): k_B – постоянная Больцмана; $V_0 = l_0^3$ – объем макроточки; c_V – объемная теплоемкость. Теплофизические характеристики материалов заимствованы в [42]. Для $l_0 = V_0^{1/3}$ и $\tau_r = l_0^2/2a$ найденные значения приводятся в табл. 3.

Таблица 3

Параметры макроточек

Материал		Вода	Сталь (0,1% С)	Медь	Алюминий	Грунт	Воздух
$\varepsilon = 10^{-5}$	$l_0 \cdot 10^5$ см	3,2	3,3	3,4	3,9	4,0	48,0
	$\tau_r \cdot 10^7$ сек	3,7	$45{\cdot}10^{-3}$	$5{\cdot}10^{-3}$	$9{\cdot}10^{-3}$	1,7	6,2
$\varepsilon = 10^{-7}$	$l_0 \cdot 10^3$ см	0,69	0,71	0,73	0,84	0,86	10,34
	$\tau_r \cdot 10^5$ сек	17,17	0,21	0,02	0,04	7,89	28,77
$\varepsilon = 10^{-9}$	l_0 мм	0,15	0,15	0,16	0,18	0,19	2,23
	$\tau_r \cdot 10^3$ сек	79,65	0,97	0,11	0,19	36,60	133,47

При T_0 = 300 К $\varepsilon = 10^{-5}$ соответствует $\delta T \cong 0{,}3{\cdot}10^{-2}$ К, $\varepsilon = 10^{-7}$ – $\delta T \cong 0{,}3\times$ $\times 10^{-4}$ К, $\varepsilon = 10^{-9}$ – $\delta T \cong 0{,}3{\cdot}10^{-6}$ К. Поскольку в большинстве практических случаев погрешность $\delta T = 0{,}3{\cdot}10^{-2}$ К вполне приемлема, характерными параметрами можно считать приведенные в двух верхних строках табл. 3 ($\varepsilon = 10^{-5}$)· Видно, что l_0 = $3{,}2{\cdot}10^{-5}$–$0{,}48{\cdot}10^{-3}$ (см), что удовлетворительно согласуется с оценками, приведенными ранее. Характерные времена $\tau_r = 5\cdot10^{-10}$–$6{,}2\cdot10^{-7}$ (сек) также соответствуют данным других авторов.

Следующим важным понятием развиваемой теории является **диссипатор** – модель, столь же фундаментальная для термодинамики, как осциллятор для механики, электродинамики, квантовой механики. Как известно, осциллятор – это модель периодического (колебательного) процесса, в простейшем случае – маятника, совершающего гармонические колебания с периодом T. Осциллятор любого вида является часами, т.е. устройством, вырабатывающим (генерирующим) время. Хроношкала, порождаемая осциллятором, является механическим временем – непрерывным и однородным. В отличие от осциллятора, диссипатор генерирует термодинамическое (диссипативное) время, порождая иную хроношкалу – дискретную, состоящую из временных интервалов различной протяженности – D-периодов. Диссипатором является макроточка, помещенная в Боргартон, в которой происходит диссипативный процесс. Далее будем этот процесс считать теплопроводностью, а взаимодействие диссипатора с Боргартоном – теплообменом. Не ограничивая общности, конкретизируем процесс теплообмена – считаем, что макроточка (диссипатор) нагревается от своей начальной температуры T_0 до температуры Боргартона T_S. Процесс такого нагрева – эволюционный, монотонный (непериодический) процесс, в ходе которого осуществляется непериодический термодинамический хроногенез, так что можно считать диссипатор термодинамическими часами.

Основное «уравнение движения» диссипатора – это первое начало термодинамики, устанавливающее равенство количества подведенного к макроточке тепла с приращением ее внутренней энергии (диссипатор есть система «при постоянном объеме»). Таким образом, имеем балансовое соотношение

$$\Delta Q_0 = \Delta Q_0^{(+)}, \quad \Delta Q_0 = V_M c_V \Delta T_0, \quad \Delta Q_0^{(+)} = S_M \, \overline{q}_S^{(+)} \tau_0, \tag{6.2}$$

где ΔQ_0 – приращение внутренней энергии диссипатора (аккумулируемое тепло); $\Delta Q_0^{(+)}$ – тепло, переданное диссипатору Боргартоном (потоковое тепло); V_M, S_M – объем и площадь поверхности (теплообмена) диссипатора; c_V – удельная объемная теплоемкость макроточки; ΔT_0 – приращение температуры диссипатора за время τ_0; $\overline{q}_S^{(+)}$ – плотность потока тепла от Боргартона к диссипатору, усредненная по периоду времени $t \in [0, \tau_0]$ – D-периоду. Если $T_S - T_0 = \Delta T_0$, то в диссипаторе за время τ_0 осуществляется релаксация слабого температурного возмущения («слабый» диссипатор). При $T_S - T_0 = N\Delta T_0,\ \ N >> 1$ будем говорить о релаксации сильного температурного возмущения («сильном» диссипаторе). Традиционная схема расчетов в термодинамике (как и в механике и в физике вообще) заключается в том, что температура некоторой точки A, $T_A(\tau)$ определяется формулой – функцией $T_A = T_A(\tau)$. Различные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_j, \ldots$ **задаются**, т.е. считаются известными. Для них вычисляются величины $T_A(\tau_1), T_A(\tau_2), ...,$ $T_A(\tau_j), ...$ Говорят о динамике температуры, и функциональная зависимость $T_A(\tau)$ есть конечная цель – решение задачи. В Боргартонике дело обстоит иначе. Независимой переменной, «ведущей» процесс, является температура. В сильном диссипаторе она меняется ступенчато: на первом этапе осуществляется переход $T_0 \to T_1 = T_0 + \Delta T_0$, на втором – переход $T_1 \to T_2 = T_1 + \Delta T_0$, на k-м шаге – $T_{k-1} \to T_k = T_0 + k\Delta T_0$. Вычисляемыми величинами являются интервалы времени $\{\tau_k\}$ $(k = 1,2,..., N)$, необходимые для совершения этих температурных переходов – D-периоды. Процесс полной релаксации сильного диссипатора, т.е. изменение его температуры от T_0 до T_S совершается за N шагов (D-периодов) различной длительности (возрастающей). Этот процесс есть процесс хроногенерации сильного диссипатора – построения временной шкалы $\{\tau_k\}$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$. Температурный интервал ΔT_0 мал ($\Delta T_0 / (T_S - T_0) = = N^{-1} << 1$), но конечен. Его величина определяется точностью измерения температуры. Таким образом, температура в Боргартонике изменяется дискретно, с шагом ΔT_0. Понятие дифференциала температуры $\mathrm{d}T$ отсутствует.

Мы пока воспользовались первым началом термодинамики (первая формула (6.2)), определением объемной теплоемкости (вторая формула ((6.2)) и постулируемой факторизацией потокового тепла на площадь, плотность потока тепла, среднюю по интервалу, и интервал времени (третья формула (6.2)). Последнее соотношение фактически есть **определение термодинамического времени**, которое **вводится** в термостатику одновременно с плотностью теплового потока, что, собственно, и есть переход к термодинамике, который, как ранее было показано, в парадигме является артефактом, так как содержит логический круг (время вводится соотношением Гиббса, в которое подставляется балансы термодинамических параметров **уже** содержащие время). Для конкретизации выражения $\Delta Q_0^{(+)}$ нам понадобится второе начало термодинамики, однако не в форме $\mathrm{d}S \geq 0$. Воспользуемся формулировкой II-го начала [141, с. 21]: «... переход теплоты от тела , менее нагретого, к телу, более нагретому, не сопровождающийся каким-либо другим процессом, невозможен». Поскольку рассматривается только теплопроводность, в отсутствие «других процессов», то эквивалентным приведенному будет утверждение «В процессе теплопроводности тепло всегда переходит от более нагретого тела к менее нагретому». Мера интенсивности перехода тепла – плотность его потока q – пропорциональна (что неоднократно подтверждалось экспериментально [2,68,118]) разнице температур горячего (T_1) и холодного (T_2) тел, или разнице температур между двумя точками одного тела:

$$q \sim (T_1 - T_2), \quad q = K(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R}, \quad K = \frac{1}{R}. \tag{6.3}$$

Здесь коэффициент пропорциональности K выражен через R – «термическое сопротивление» вводимое по аналогии с законом Ома. Для R было эмпирически найдено

$$R \sim \delta, \qquad R = K_1 \delta, \qquad K_1 = \frac{1}{\lambda}, \qquad R = \frac{\delta}{\lambda}. \tag{6.4}$$

В (6.4) δ обозначает расстояние между точками с температурами T_1 и T_2, параметр λ, обратный коэффициенту пропорциональности K_1, называется коэффициентом теплопроводности. Комбинируя (6.3) и (6.4) получаем последнюю из формул (4.1) – конечно-разностную форму закона Фурье. Если следовать эмпирическому развитию термодинамики, то следует признать, что формула (*c*) (4.1) является **первичной**, обоснованной экспериментально, а формулы (*a*), (*b*) (4.1) – вторичны, так как являются ее континуумной идеализацией – теоретической «надстройкой».

Рассмотрим простейший, одномерный диссипатор – макроточку в форме фрагмента бруска постоянного произвольного сечения S_0; через торцевые сечения фрагмента бруска к нему подводится (отводится) тепло от Боргартона. Длина фрагмента – l_0, боковая поверхность идеально теплоизолирована. Диссипатор имеет начальную температуру T_0 и помещается в Боргартон с температурой $T_S > T_0$. Рассмотрим слабый диссипатор, для которого $T_S = T_0 + \Delta T_0$. Температура макроточки $\widetilde{T}_M(\tau)$ одинаковая по всей ее длине l_0 и изменяется со временем. Обозначив чертой сверху усреднение величины по периоду времени $t \in [0, \tau_0]$, получаем, согласно (4.1) (*c*):

$$\overline{q}_S^{(+)} = \frac{\lambda}{l_0/2}\left(T_S - \overline{T}_M\right), \tag{6.5}$$

где $\overline{q}_S^{(+)}$ – плотность (средняя) потока тепла от Боргартона к диссипатору, а λ – коэффициент теплопроводности макроточки. В качестве расстояния между двумя точками с температурами T_1 и T_2 – δ из (6.4) здесь стоит $l_0/2$ – «полудлина» макроточки, так как точка, «представляющая» температуру диссипатора, находится в его центре. Эта температура (отнесенная к центру макроточки и в то же время одинаковая во всех геометрических точках внутри ее), усредненная за период времени τ_0, равна:

$$\overline{T}_M = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} \widetilde{T}_M(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6.6}$$

Поскольку принято, что температура макроточки (диссипатора) изменяется дискретно, т.е. наблюдаемы только температуры T_0, $T_S = T_0 + \Delta T_0$, температура $\widetilde{T}_M(\tau)$ является «виртуальной», ненаблюдаемой (флуктуирующей) температурой, об «истинном» законе изменения которой при $t \in [0, \tau_0]$ говорить нельзя, так как эта «микродинамика» лежит вне термодинамики. Соответственно время, изменяющееся от 0 до τ_0, есть виртуальное время, играющее вспомогательную роль, тогда как в Боргартонике имеют смысл лишь конечные интервалы (D-периоды) $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$.

Для вычисления $\overline{T}_M$ по (6.6) и $\overline{q}_S^{(+)}$ по (6.5) необходимо задаться «пробными» функциями $\widetilde{T}_M(\tau)$ и $\widetilde{q}_S^{(+)}(\tau)$ таким образом, чтобы $\widetilde{T}_M(0) = T_0$ и $\widetilde{T}_M(\tau_0) = T_S = T_0 + \Delta T_0$. Простейший вид такой функции:

$$\widetilde{T}_M(\tau) = T_0 + \Delta T_0 \varphi_n(\tau/\tau_0), \quad \varphi_n(\tau/\tau_0) = (\tau/\tau_0)^n, \quad n \in [0, \infty). \tag{6.7}$$

При $n \in [0, \infty)$ «микрофункция перехода» $\varphi_n(\tau/\tau_0) = \varphi_n(\eta)$ $(\eta = \tau/\tau_0)$ описывает монотонное возрастание $\widetilde{T}_M(\tau)$ от T_0 до T_S (для описания убывания температуры $T_0 \to T_S$, $T_0 > T_S$ функция $\varphi_n(\eta)$ легко модифицируется). Случаям $n = 0$ и $n = \infty$ соответствуют скачки $T_0 \to T_S$ соответственно в моменты $t = 0$ и $t = \tau_0$. При $n = 1{,}0$ $\varphi_1(\eta) = \tau/\tau_0$ и $\widetilde{T}_M(\tau)$ – линейная функция времени, а $\overline{T}_M = (T_0 + T_S)/2$. Семейство функций $\varphi_n(\eta)$ образует два подкласса: 1) «запаздывающие» функции $\varphi_n(\eta)$ при $n \in (1, \infty)$ (в интервале $\eta \in (0,1)$ все $\varphi_n(\eta) < \varphi_1(\eta)$); 2) «опережающие» функции $\varphi_n(\eta)$ при $n \in [0,1]$ (все $\varphi_n(\eta) \geq \varphi_1(\eta)$. Таким образом, $\varphi_1(\eta)$ является верхней гранью для запаздывающих и нижней точной гранью для опережающих микрофункций перехода. С учетом (6.5)–(6.7) получаем:

$$\overline{q}_S^{(+)} = \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\lambda}{l_0/2}\right)\int_0^{\tau_0} \Delta T_0 \left(1 - \varphi_n(\tau/\tau_0)\right) \mathrm{d}\tau = \frac{\lambda}{l_0/2} \Delta T_0 \Psi_n^{-1}, \quad \Psi_n = \frac{n+1}{n}. \tag{6.8}$$

Из (6.2), где $V_M = S_0 l_0$, а $S_M = 2S_0$ и (6.8) получаем решение «уравнения диссипатора» (УД) – первого из соотношений (6.2):

$$\tau_0 = \tau_{0,n} = \Psi_n t_0, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}, \quad a = \frac{\lambda}{c_V}. \tag{6.9}$$

При $n = 1$ $\Psi_n = \Psi_1 = 2$. Из (6.9) следует

$$\tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r, \qquad \tau_r = \frac{l_0^2}{2a}. \tag{6.10}$$

Интервалы $\tau_{0,\infty} = \Psi_\infty t_0 = t_0 = l_0^2/4a$, $\tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r = l_0^2/2a$, $\tau_{0,n} = \Psi_n t_0$ ($n \neq 1$) будем называть, соответственно, нулевым, первым и n-м D-периодами. Интервал $\tau_{0,1}$ будем также называть собственным временем слабого диссипатора; приведенные в табл. 3 для макроточек параметры τ_r имеют именно такой смысл. Индекс «n» у функции $\varphi_n(\eta)$ и параметра Ψ_n будем называть «индексом хрононелинейности».

Рассмотренный элементарный диссипативный процесс релаксации слабого температурного возмущения, когда температура диссипатора совершает переход $T_0 \to T_S$, $T_S > T_0$, симметричен, по отношению к решению УД – (6.9), процессу перехода $T_0 \to T_S$ при $T_0 > T_S$, т.е. понижения температуры. Поэтому далее будем рассматривать (для определенности) процессы с повышением температуры диссипатора, когда $T_0 < T_S$, имея в виду, что понижение её (при тех же по модулю переходах) приводит к такому же хроногенезу, т.е. тем же значениям D-интервалов. Рассмотрим далее свойства диссипаторов, формулируя ряд задач.

Задача 1. Факторы хроногенерации. Пусть макроточка имеет форму куба с ребром l_0 и объемом $V_M = l_0^3$. Площадь каждой из шести граней, через которые к кубу идет поток тепла от Боргартона – l_0^2. УД (6.2) принимает вид:

$$\Delta Q_0 = \Delta Q_0^{(+)}; \quad \Delta Q_0 = l_0^3 c_V \Delta T_0;$$

$$\Delta Q_0^{(+)} = 2\, l_0^2 \left(\bar{q}_x^{(+)} + \bar{q}_y^{(+)} + \bar{q}_z^{(+)}\right)\tau_{0,n}. \tag{6.11}$$

Для изотропного диссипатора (макроточка имеет единый коэффициент λ) из (6.11) получаем:

$$\tau_{0,n} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{12a}\right), \quad \tau_{0,1} = \frac{l_0^2}{6a} = \frac{1}{3}\tau_r. \tag{6.12}$$

В случае анизотропного (ортотропного) диссипатора ($\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$) получаем:

$$\tau_{0,n}^{(a)} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{12\bar{a}}\right), \quad \tau_{0,1}^{(a)} = \frac{l_0^2}{6\bar{a}} = \frac{1}{3}\tau_r^{(a)}, \quad \tau_r^{(a)} = \frac{l_0^2}{2\bar{a}},$$
$$\bar{a} = \frac{\bar{\lambda}}{c_V}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{3}\left(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z\right). \tag{6.13}$$

При $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ из (6.13) следует (6.12). Если две противоположные грани куба теплоизолировать, то получим «квадратную» макроточку с четырьмя тепловоспринимающими поверхностями. Для этого двумерного диссипатора получаем

$$\tau_{0,n} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{8a}\right), \quad \tau_{0,1} = \left(\frac{l_0^2}{4a}\right) = t_0 = \frac{\tau_r}{2}. \tag{6.14}$$

В случае анизотропии ($\lambda_x \neq \lambda_y$), формула (6.14) принимает вид:

$$\tau_{0,n}^{(a)} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{8\overline{a}}\right), \quad \tau_{0,1}^{(a)} = \frac{l_0^2}{4\overline{a}} = \frac{\tau_r^{(a)}}{2}, \quad \overline{a} = \frac{\overline{\lambda}}{c_V}, \quad \overline{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\lambda_x + \lambda_y\right). \tag{6.15}$$

При теплоизоляции четырех граней куба получаем уже рассмотренный случай одномерной макроточки с площадями торцевых поверхностей $S_0 = l_0^2$.

Для макроточки в форме шара с диаметром l_0, в (6.2) надо подставить:

$$V_M = \frac{\pi}{6} l_0^3; \quad S_M = \pi l_0^2; \quad \overline{q}_S^{(+)} = \frac{\lambda}{l_0/2} \Delta T_0 \, \Psi_n^{-1}. \tag{6.16}$$

В итоге получим

$$\tau_{0,n} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{12a}\right), \quad \tau_{0,1} = \frac{l_0^2}{6a} = \frac{1}{3}\tau_r. \tag{6.17}$$

Для двумерной макроточки – отрезка круглого бруска единичной длины с диаметром l_0 и теплоизолированными торцевыми (круговыми) поверхностями:

$$V_M = \frac{1}{4}\pi l_0^2 \cdot 1, \quad S_M = \pi l_0 \cdot 1, \quad \overline{q}_S^{(+)} = \frac{\lambda}{l_0/2} \Delta T_0 \, \Psi_n^{-1}. \tag{6.18}$$

Подстановка в (6.2) дает:

$$\tau_{0,n} = \Psi_n\left(\frac{l_0^2}{8a}\right), \qquad \tau_{0,1} = \frac{l_0^2}{4a} = \frac{\tau_r}{2}. \tag{6.19}$$

Таким образом, при изотропии λ, D-периоды кубических и сферических диссипаторов совпадают, как и для квадратных и круглых диссипаторов. Формулы, связывающие характерный размер и собственное время диссипаторов для одно-, дву- и трехмерных макроточек

$$\tau_{0,1}^{(1)} = \tau_r = \frac{l_0^2}{2a}, \quad \tau_{0,1}^{(2)} = \frac{\tau_r}{2} = \frac{l_0^2}{4a}, \quad \tau_{0,1}^{(3)} = \frac{\tau_r}{3} = \frac{l_0^2}{6a} \tag{6.20}$$

совпадают с формулами «локализации полей» для $\left\langle x^2 \right\rangle, \left\langle \rho^2 \right\rangle, \left\langle R^2 \right\rangle$ в случаях одно-, дву- и трехмерных полей [61,72,146]. Этот факт – первый из аргументов в пользу «выделенности» (особости) случая $n = 1{,}0$ ($\Psi_n = 2{,}0$).

Таким образом, хроногенерация слабых диссипаторов определяется их теплофизическими параметрами, размерностью и формой и не зависит от температурного параметра ΔT_0.

Задача 2. Энтропогенерация диссипатора. Для приращения термостатической энтропии диссипатора $\Delta\sigma_0$ при переходе $T_0 \to T_S$ имеем

$$\Delta\sigma_0 = \int_{T_0}^{T_S} \frac{\mathrm{d}Q_0}{\widetilde{T}_M} = V_M c_V \int_{T_0}^{T_S} \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_M}{\widetilde{T}_M} = V_M c_V \ln\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right). \tag{6.21}$$

Величина $\Delta\sigma_0$ определяется только начальной (T_0) и конечной ($T_S = T_0 + \Delta T_0$) температурами и от хода процесса не зависит. Последний описывается микрофункцией перехода $\varphi_n(\tau/\tau_0)$. В (6.21) использовано первое начало (6.2), позволившее вычислить $\Delta\sigma_0$ не по теплопритоку $\mathrm{d}Q^{(+)}$ (что, вообще говоря, только и соответствует термостатике), а по приращению внутренней энергии диссипатора $\mathrm{d}Q_0 = \mathrm{d}u$. Такое изменение энтропии будем называть аккумулируемым, обозначая $\Delta\sigma_0 = \Delta\sigma_A$. Величина $\Delta\sigma_A$ не зависит от вида функции $\widetilde{T}_M(\tau)$, т.е. от индекса хрононелинейности n. Изменение энтропии, найденное по $\mathrm{d}Q^{(+)}$, будем называть потоковым и обозначать $\Delta\sigma_q$:

$$\Delta\sigma_q = \int_{T_0}^{T_S} \frac{\mathrm{d}Q^{(+)}}{\widetilde{T}_M} = 2S_0 \int_0^{\tau_0} \frac{q_S^{(+)}}{\widetilde{T}_M(\tau)} \mathrm{d}\tau. \tag{6.22}$$

Подставив в (6.22) $\widetilde{q}_S^{(+)}$, получим:

$$\Delta\sigma_q = \frac{4\lambda S_0}{l_0} \int_0^{\tau_0} \left[\frac{\Delta T_0(1 - \varphi_n(\tau/\tau_0))}{T_0 + \Delta T_0 \varphi_n(\tau/\tau_0)}\right] \mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0, n = 0, \\ V_M c_V \dfrac{\Delta T_0}{T_0}\left(1 - \dfrac{\Delta T_0}{3T_0} + \ldots\right), n = 1, \\ V_M c_V \dfrac{\Delta T_0}{T_0}, n = \infty. \end{cases} \tag{6.23}$$

Таким образом, $\Delta\sigma_q = \Delta\sigma_q(n)$, т.е. потоковая энтропия зависит от хода процесса, что противоречит термостатическому определению энтропии. Потоковая энтропия, определяемая через непрерывно изменяющуюся температуру диссипатора $\widetilde{T}_M = \widetilde{T}_M(\tau)$ не существует, что создает дилемму: либо потоковой (т.е. существенно термодинамической) энтропии, в отличие от термостатической (аккумулируемой) не существует, либо она существует, но **только при дискретном изменении температуры**.

Принимая вторую точку зрения, рассмотрим возможность согласования $\Delta\sigma_A$ и $\Delta\sigma_q$. Предполагаем, что температура диссипатора изменяется дискретно, т.е. при $\tau = \tau_c$ происходит скачок $T_0 \to T_S$ ($\tau_c \in [0, \tau_0]$). Имеем:

$$\widetilde{T}_M(\tau) = \begin{cases} T_0, \ \tau \in [0, \tau_c), \\ T_S, \ \tau \in [\tau_c, \tau_0]. \end{cases} \tag{6.24}$$

Тогда из (6.21) и (6.22) следует:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\sigma_A &= V_M c_V \int_{T_0}^{T_S} \frac{\mathrm{d}\,T}{T_0} = S_0 l_0 c_V \left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right), \\ \Delta\sigma_q &= \frac{4S_0\lambda}{l_0} \int_0^{\tau_c} \left(\frac{T_S - T_0}{T_0}\right) \mathrm{d}\,\tau = \left(\frac{4S_0\lambda}{l_0}\right)\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)\tau_c. \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

Приравнивая $\Delta\sigma_A = \Delta\sigma_q$, получаем

$$\tau_c = \tau_{0,\infty} = \Psi_\infty t_0 = \frac{l_0^2}{4a}, \qquad n = \infty. \tag{6.26}$$

Время скачка τ_c оказывается равным наименьшему D-периоду диссипатора. В случае скачка в начальный момент времени, т.е. при $\tau_c = 0$, имеем $\Delta\sigma_A = \Delta\sigma_q = 0$. Согласование аккумулируемой и потоковой энтропий получено, однако ценой перехода от собственного времени диссипатора $\tau_{0,1} = \tau_r$ (при линейном изменении $\widetilde{T}_M(\tau)$) к $\tau_{0,\infty} = \tau_r/2$. Дискретное (скачкообразное) изменение температуры диссипатора позволяет «легитимизировать» термодинамическую энтропию, однако изменяет его хроногенез.

§19. Хроно- и энтропогенерация диссипаторов

Продолжим начатое в предыдущем параграфе исследование хроно- и энтропогенерации диссипаторами, вначале слабыми, а затем и сильными.

А. Слабый диссипатор

Задача 3. K-модель диссипатора. Рассмотрим предельный переход к непрерывной модели диссипатора, когда $\Delta Q_0 \to \mathrm{d}\,Q_0$, $\Delta Q^{(+)} \to \mathrm{d}\,Q^{(+)}$. Имеем:

$$\mathrm{d}\,Q_0 = S_0 l_0 c_V \,\mathrm{d}\,\widetilde{T}_M, \qquad \Delta Q^{(+)} = 2S_0\, q_S^{(+)}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau.$$

Приравнивая дифференциалы полученного ($\mathrm{d}\,Q_0$) и переданного ($\mathrm{d}\,Q^{(+)}$) тепла, получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\,\widetilde{T}_M}{T_S - \widetilde{T}_M(\tau)} = \frac{\mathrm{d}\,\tau}{t_0}, \qquad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}. \tag{6.27}$$

Интегрируя (6.27), находим

$$\widetilde{T}_M(\tau) = T_0 + (T_S - T_0)[1 - \exp(-\tau/t_0)],$$

$$\widetilde{T}_M(0) = T_0, \quad \lim_{\tau\to\infty} \widetilde{T}_M(\tau) = T_S. \tag{6.28}$$

Континуальное решение (6.28) обладает очевидной аномалией: для перехода $T_0 \to T_S$, согласно (6.28), требуется бесконечное время, в то время как из D-модели мы ранее получили для продолжительности этого перехода $\tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r = l_0^2/2a$. Чтобы переход $T_0 \to T_S$ в (6.28) «финитизировать», введем $T'_S = T_S - \delta T$, где δT – малая погрешность замены T_S на T'_S. Из (6.28) имеем:

$$\widetilde{T}_M(\tau_\infty) = T_0 + (T_S - T_0)\left[1 - \exp(-\tau_\infty/t_0)\right] = T'_S = T_S - \delta T. \tag{6.29}$$

Из (6.29) следует

$$\tau_\infty = t_0 \ln\left(\frac{\Delta T_0}{\delta t}\right). \tag{6.30}$$

Полагаем, что τ_∞ соответствует D-периоду $\tau_{0,n} = \Psi_n t_0$ диссипатора; определим значения $\Psi_n = \tau_{0,n}/t_0$ для ряда $(\Delta T_0/\delta T)$. Из (6.3) находим

$\Delta T_0/\delta T$	e	e^2	10	10^2	10^3
$\Psi_n = \tau_\infty/t_0$	1,0	2,0	2,303	4,606	6,909
n	∞	1,0	0,7675	0,2773	0,1692

При $\delta T = e^{-2}\Delta T_0 = 0{,}1354\Delta T_0$ имеем: $\tau_\infty = \tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r$, т.е. совпадение собственного времени слабого диссипатора с «финитизированным» временем τ_∞, соответствующим переходу $T_0 \to T'_S = T_S - \delta T = T_S - 0{,}1354\Delta T_0$ в K-модели. Увеличение точности «финитизации» на два порядка, т.е. уменьшение погрешности $\delta T = T_S - T'_S$ до весьма малого значения $\delta T = 10^{-3}\Delta T_0$ соответствует D-периоду $\tau_{0,1/6} \cong 6{,}91 t_0$. Поскольку погрешность $\delta T = e^{-2}\Delta T_0$ мала (так как мало и ΔT_0), можно считать, что $\tau_\infty = \tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r$ дает удовлетворительное согласование D- и K-моделей. В этом заключается второй аргумент в пользу введения собственного времени диссипатора $\tau_{0,1} = \tau_r$, т.е. D-периода, определяемого при $\Psi_n = 2{,}0$, $n = 1{,}0$.

Задача 4. Нестационарный диссипатор. Таковым будем называть одномерный диссипатор, все параметры которого (l_0, c_V, λ)изменяется со временем – виртуальным временем $t \in [0, \tau_0]$. Это изменение описываем аналогично изменению $\widetilde{T}_M(\tau)$, но с некоторыми другими значениями индекса хрононелинейности:

$$\left.\begin{aligned} l_0 = l_0(\tau) = l_{00} + (l_{0S} - l_{00})\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha \in [0, \infty), \\ c_V = c_V(\tau) = c_{V0} + (c_{VS} - c_{V0})\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\beta}, \beta \in [0, \infty), \\ \lambda = \lambda(\tau) = \lambda_0 + (\lambda_S - \lambda_0)\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma}, \quad \gamma \in [0, \infty). \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

Введем обозначения:

$$l_{0S} - l_{00} = \Delta l_0; \quad c_{VS} - c_{V0} = \Delta c_V; \quad \lambda_S - \lambda_0 = \Delta\lambda;$$

$$\frac{\Delta l_0}{l_{00}} = \varepsilon_l; \quad \frac{\Delta c_V}{c_{V0}} = \varepsilon_c; \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \varepsilon_\lambda. \tag{6.32}$$

В силу малости τ_0 будем считать, что $\varepsilon_\lambda << 1$, $\varepsilon_c << 1$, $\varepsilon_\lambda << 1$. Подставляя (6.31) в выражение для ΔQ_0, получим:

$$\Delta Q_0 = \Delta Q(\tau_0) = S_0 \int\limits_0^{\tau_0} l_0(\tau) c_V(\tau)\, \mathrm{d}\widetilde{T}_M, \tag{6.33}$$

где $\widetilde{T}_M(\tau)$ задано согласно (6.7). Опуская несложные преобразования, находим:

$$\Delta Q(\tau_0) = S_0 l_0 c_V \Delta T_0 \cdot \Phi_1(\alpha, \beta, \gamma);$$

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \mu(\alpha, n)\varepsilon_l + \mu(\beta, n)\varepsilon_c, \tag{6.34}$$

где $\mu(\alpha, n) = n/(\alpha + n)$, $\mu(\beta, n) = n/(\beta + n)$. Теплоприток из Боргартона к диссипатору:

$$\Delta Q^{(+)}(\tau_0) = 2S_0\, \overline{q}_S^{(+)} \tau_0; \qquad \overline{q}_S^{(+)} = \frac{1}{\tau_0} \int\limits_0^{\tau_0} q_S^{(+)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau;$$

$$q_S^{(+)}(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{l_0(\tau)/2}\left[T_S - \widetilde{T}_M(\tau)\right]. \tag{6.35}$$

После несколько громоздких преобразований находим

$$\overline{q}_S^{(+)}(\tau) = \frac{2\lambda}{l_{00}} \Delta T_0\, \Psi_n^{-1} \cdot \Phi_2(\alpha, \gamma, n);$$

$$\Phi_2(\alpha, \gamma, n) = 1 + \nu(\gamma, n)\varepsilon_\lambda - \nu(\alpha, n)\varepsilon_l, \tag{6.36}$$

где

$$\nu(\gamma,n)=\frac{n+1}{(\gamma+1)(\gamma+1+n)},\qquad \nu(\alpha,n)=\frac{n+1}{(\alpha+1)(\alpha+1+n)}.$$

Из уравнения диссипатора $\Delta Q(\tau_0)=\Delta Q^{(+)}(\tau_0)$, с учетом (6.34)–(6.36) получаем:

$$\tau_0=\tilde{\tau}_{0,n}=\Psi_n t_{00}\Phi_{00}(\alpha,\beta,\gamma,n),\quad t_{00}=\frac{l_{00}^2}{4a_0},$$

$$\Phi_0(\alpha,\beta,\gamma,n)=\frac{\Phi_1(\alpha,\beta,\gamma)}{\Phi_2(\alpha,\beta,\gamma)}. \tag{6.37}$$

Для перехода в (6.37) к случаю стационарных параметров, достаточно в формулах для Φ_i $(i=1{,}2)$ положить $\varepsilon_l=\varepsilon_c=\varepsilon_\lambda=0$. Тогда $\Phi_0=\Phi_1/\Phi_2=1{,}0$ и (6.37) дает ранее полученное выражение для $\tau_{0,n}$.

Наибольший интерес представляют следующие частные случаи: а) начальный скачок параметров, когда их конечное (с индексом «S») значение устанавливается сразу же, при $\tau=0$; б) скачок параметров от начальных значений до конечных в конце D-периода, при $\tau=\tau_0$; в) линейное по времени изменение параметров. Используя полученные формулы, находим:

Случай а) $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\mu(\alpha,n)=\mu(\beta,n)=1{,}0$, $\nu(\gamma,n)=\nu(\alpha,n)=1{,}0$ и

$$\Phi_1=1+\varepsilon_l+\varepsilon_c;\ \ \Phi_2=1+\varepsilon_\lambda-\varepsilon_l;\ \ \Phi_0=\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=\frac{1+\varepsilon_l+\varepsilon_c}{1+\varepsilon_\lambda-\varepsilon_l}.$$

Случай б) $\alpha=\beta=\gamma=\infty$, $\mu(\alpha,n)=\mu(\beta,n)=\nu(\gamma,n)=\nu(\alpha,n)=0$ и

$$\Phi_1=\Phi_2=1{,}0;\ \ \Phi_0=\frac{\Phi_2}{\Phi_1}=1{,}0;\quad \tilde{\tau}_{0,n}=\tau_{0,n}=\Psi_n t_{00}. \tag{6.38}$$

Случай в) $\alpha=\beta=\gamma=1{,}0$, $\mu(\alpha,n)=\mu(\beta,n)=\Psi_n^{-1}$, $\nu(\gamma,n)=\nu(\alpha,n)=$ $=\Psi_n/2(2\Psi_n-1)$ и

$$\Phi_0=\left[1+\Psi_n^{-1}(\varepsilon_l+\varepsilon_c)\right]\left[1+\frac{\Psi_n(\varepsilon_\lambda-\varepsilon_l)}{2(2\Psi_n-1)}\right]^{-1}. \tag{6.39}$$

При $\Psi_n=2{,}0$ $(n=1{,}0)$ из (6.39) следует:

$$\Phi_0==\left(1+\frac{\varepsilon_l+\varepsilon_c}{2}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_\lambda-\varepsilon_l}{3}\right)^{-1}. \tag{6.40}$$

Для произвольного сочетания параметров α,β,γ:

$$\mu(\alpha,n)\in[0,1];\ \ \mu(\beta,n)\in[0,1];\ \ \nu(\gamma,n)\in[0,1];\ \ \nu(\alpha,n)\in[0,1];$$

$$\Phi_1\in[\Phi_{11},\Phi_{12}];\ \Phi_2\in[\Phi_{21},\Phi_{22}];\ \ \Phi_{11}=1{,}0,\ \ \Phi_{12}=1+\varepsilon_l+\varepsilon_c;$$

$$\Phi_{21}=1-\varepsilon_l,\ \ \Phi_{22}=1+\varepsilon_\lambda;\ \ \Phi_0\in[1-\tilde{\varepsilon},1+\tilde{\varepsilon}],\ \ \tilde{\varepsilon}=|\varepsilon_\lambda|+2|\varepsilon_l|+|\varepsilon_c|. \quad (6.41)$$

Задача 5. Нелинейный диссипатор. Таковым назовем диссипатор, параметры которого зависят от температуры: $l_0=l_0(T)$, $c_V=c_V(T)$, $\lambda=\lambda(T)$. Эти зависимости описываем формулами:

$$l_0(T)=l_0+\Delta l_0\,\theta^{\alpha'},\quad c_V(T)=c_{V0}+\Delta c_{V0}\,\theta^{\beta'},\quad \lambda(T)=\lambda_0+\Delta\lambda_0\,\theta^{\gamma'}, \quad (6.42)$$

Здесь α',β',γ' – произвольные положительные постоянные, а $\theta=\theta(\tau)$ – безразмерная температура диссипатора:

$$\theta(\tau)=\frac{\tilde{T}_M(\tau)-T_0}{T_S-T_0},\qquad \theta(\tau)\in[0,1]. \quad (6.43)$$

Из (6.7) следует, что

$$\theta(\tau)=\varphi_n(\eta)=\eta^n,\qquad \eta=\frac{\tau}{\tau_0}. \quad (6.44)$$

Подставив (6.44) в (6.42), находим

$$l_0(T)=l_0+\Delta l_0\eta^{\alpha},\quad c_V(T)=c_{V0}+\Delta c_{V0}\eta^{\beta},\quad \lambda(T)=\lambda_0+\Delta\lambda_0\,\eta^{\gamma}, \quad (6.45)$$

где $\alpha=n\alpha'$, $\beta=n\beta'$, $\gamma=n\gamma'$. Таким образом, задача 5 сведена к задаче 4, что позволяет сразу выписать решение – формулу для D-периода нелинейного диссипатора:

$$\tau_0=\tau_{0,n}^{(n)}=\Psi_n t_{00}\Phi_0(\alpha',\beta',\gamma',n),\quad \Phi_0(\alpha',\beta',\gamma',n)=\frac{\Phi_1(\alpha',\beta',n)}{\Phi_2(\alpha',\gamma',n)}, \quad (6.46)$$

где Φ_i $(i=1,2)$ определены по (6.34) и (6.36). При $n=1{,}0$: $\alpha'=\alpha,\beta'=$ $=\beta,\gamma'=\gamma$ и решения задач 5 и 4 полностью совпадают, т.е. хроногенерация нелинейного диссипатора тождественна таковой для нестационарного диссипатора. Это является третьим аргументом выделенности случая $n=1{,}0$.

Задача 6. Энтропогенерация двух невзаимодействующих диссипаторов. Поместим в Боргартон два одинаковых диссипатора с различными температурами: $T_{01}=T_S-\Delta T_0$, $T_{02}=T_S+\Delta T_0$. Рассмотрим переходы $T_{01}\to T_S$ и $T_{02}\to T_S$ в диссипаторах M_1 и M_2. Энтропия M_1 будет возрастать

($\Delta\sigma^{(1)} > 0$), а M_2 – уменьшаться ($\Delta\sigma^{(2)} < 0$). Нас интересует полное изменение энтропии в системе «Боргартон–диссипатор». Определяем термостатическую (аккумулируемую) энтропию:

$$\Delta\sigma_A^{(1)} = S_0 l_0 c_V \int_{T_{01}}^{T_S} \frac{\mathrm{d}T}{T} = S_0 l_0 c_V \ln\left(\frac{T_S}{T_{01}}\right),$$

$$\Delta\sigma_A^{(2)} = S_0 l_0 c_V \int_{T_{02}}^{T_S} \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\, S_0 l_0 c_V \ln\left(\frac{T_{02}}{T_S}\right)$$

Поскольку изменение энтропии Боргартона равно нулю по определению, полная энтропия системы будет:

$$\Delta\sigma_A^{(\Sigma)} = \Delta\sigma_A^{(1)} + \Delta\sigma_A^{(2)} = S_0 l_0 c_V \ln\left(\frac{T_S^2}{T_{01} T_{02}}\right). \tag{6.47}$$

Условие $\Delta\sigma_A^{(\Sigma)} \ge 0$ будет соблюдено, если $\left(T_S^2 / T_{01} T_{02}\right) \ge 1$. Проверим последнее неравенство.

$$\frac{T_S^2}{T_{01} T_{02}} = \frac{T_S^2}{(T_S - \Delta T_0)(T_S + \Delta T_0)} = \frac{T_S^2}{T_S^2 - (\Delta T_0)^2} > 1{,}0, \qquad \Delta\sigma_A^{(\Sigma)} > 0. \tag{6.48}$$

Повторяем расчет для дискретной потоковой (термодинамической) энтропии.

$$\Delta\sigma_A^{(1)} = S_0 l_0 c_V \left(\frac{\Delta T_0}{T_{01}}\right), \qquad \Delta\sigma_A^{(2)} = S_0 l_0 c_V \left(\frac{-\Delta T_0}{T_{02}}\right),$$

$$\Delta\sigma_A^{(\Sigma)} = \Delta\sigma_A^{(1)} + \Delta\sigma_A^{(2)} = S_0 l_0 c_V \Delta T_0 \left(\frac{1}{T_{01}} - \frac{1}{T_{02}}\right) > 0, \tag{6.49}$$

поскольку $T_{01} = T_S - \Delta T_0 = T_{02} - 2\Delta T_0 < T_{02}$, $\Delta T_0 > 0$. Таким образом, оба метода расчета приводят к одному результату: общее изменение энтропии системы «Боргартон–диссипаторы» – положительно, что является, фактически, выводом второго начала термодинамики в классической формулировке на основе ранее принятой эквивалентной ей.

B. Сильный диссипатор

Задача 7. Хроногенерация диссипатора. Пусть в Боргартон с температурой $T_S >> T_0$ помещен диссипатор с начальной температурой T_0, которая затем поднимается: $T_0 \to T_S$. Определим D-периоды для каждого цикла поднятия температуры диссипатора на ΔT_0, т.е. интервалы времени τ_k, необходимые для перехода $T_{k-1} \to T_k$ ($k = \overline{1, N}$). Имеем:

$$T_1 = T_0 + \Delta T_0, \quad T_2 = T_1 + \Delta T_0 = T_0 + 2\Delta T_0, ...,$$

$$T_k = T_0 + k\Delta T_0, ..., T_N = T_0 + N\Delta T_0 = T_S. \tag{6.50}$$

$$\widetilde{T}_k(\tau) = T_{k-1} + \Delta T_0 \varphi_n(\tau/\tau_k), \quad \varphi_n(\tau/\tau_k) = \varphi_n(\eta) = \eta^n. \tag{6.51}$$

Левая часть УД (см. (6.2)) совпадает с таковой для слабого диссипатора

$$\Delta Q_k = Sl_0 c_V \Delta T_0 = \Delta Q_0. \tag{6.52}$$

Правая часть записывается аналогично

$$\Delta Q_k^{(+)} = 2S_0 \,\overline{q}_k^{(+)} \tau_k, \tag{6.53}$$

где

$$\overline{q}_k^{(+)} = \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} \widetilde{q}_k^{(+)}(\tau) \mathrm{d}\tau, \qquad \widetilde{q}_k^{(+)}(\tau) = \frac{\lambda}{l_0/2} \left[T_S - \widetilde{T}_k(\tau) \right]. \tag{6.54}$$

Подставив (6.51) в (6.54), находим:

$$\overline{q}_k^{(+)} = \left(\frac{\lambda}{l_0/2} \Delta T_0 \right) \int_0^1 \left[(N-k) + \left(1 - \eta^n\right) \right] \mathrm{d}\eta = \frac{\lambda \Delta T_0}{l_0/2} \left[(N-k) + \Psi_n^{-1} \right],$$

$$\Psi_n = \frac{n+1}{n}. \tag{6.55}$$

Приравнивая (6.52) и (6.53) с учетом (6.55), получим:

$$\tau_{k,n} = \frac{\Psi_n t_0}{\left[(N-k)\Psi_n + 1 \right]}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}, \qquad \tau_{N,n} = \Psi_n t_0 = \tau_{0,n}. \tag{6.56}$$

Формула (6.56) описывает хроногенерацию сильного диссипатора, причем параметры Ψ_n и t_0 те же, что и у слабого, а последний, N-й D-период совпадает с D-периодом слабого диссипатора, равном при $n = 1$ его собственному времени $\tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r$.

Задача 8. Сравнение *D*- и *K*-моделей диссипатора. В решении (6.28) для K-модели слабого диссипатора $\Delta T_0 = T_S - T_0$ малая величина, однако вид решения этим не определяется. Поэтому для K-модели сильного диссипатора можно воспользоваться также (6.28), не забывая при этом, что теперь $T_S - T_0 = N\Delta T_0$. Введем суммарное время, прошедшее от начала процесса до завершения перехода $T_{k-1} \to T_k$:

$$\tau_{k,\Sigma}^{(K)} = \tau_{k-1,\Sigma}^{(K)} + \tau_k^{(K)}, \qquad k = \overline{1, N}. \tag{6.57}$$

Здесь верхний индекс «K» обозначает K-модель, для которой, согласно (6.28):

$$T_k = T_0 + (T_S - T_0)\left[1 - \exp\left(-\tau_{k,\Sigma}^{(K)}/t_0\right)\right], \qquad \tau_k^{(K)} = t_0 \ln\left(1 + \frac{1}{N-k}\right). \quad (6.58)$$

Для D-модели, преобразуя (6.56), получаем, обозначая тип модели верхним индексом:

$$\tau_k^{(D)} = \frac{\Psi_n t_0}{(N-k)\Psi_n + 1} = \frac{t_0}{N-k}\left[1 - \frac{\Psi_n^{-1}}{N-k} + \left(\frac{\Psi_n^{-1}}{N-k}\right)^2 - \ldots\right]. \quad (6.59)$$

Условием разложения в (6.59) является требование $\left(\Psi_n^{-1}/(N-k)\right) < 1$, т.е. $\Psi_n > 1/(N-k)$, что исключает значения $k = N-1$ и $k = N$ (так как $\min\Psi_n = \Psi_\infty = 1{,}0$). Разложение в ряд в (6.58) дает:

$$\tau_k^{(K)} = \frac{t_0}{N-k}\left[1 - \frac{1}{2(N-k)} + \frac{1}{3(N-k)^2} - \ldots\right]. \quad (6.60)$$

Для приближенного равенства времен k-го периода в D- и K-моделях, т.е. для выполнения условия $\tau_k^{(K)} \cong \tau_k^{(D)}$ необходимо: 1) в рядах (6.59) и (6.60) удержать только первые два члена; 2) положить $\Psi_n = 2{,}0$ (т.е. $n = 1$). Первое условие будет соблюдено, если $\left(1/\left(3(N-k)^2\right)\right) << 1$ (что конкретизируем в виде $\left(1/\left(3(N-k)^2\right)\right) \le 10^{-3}$). Это дает $(N-k) \ge$ 18,3 ≈ 19,0. Итак, для всех $k \le N - 19$ и $n = 1{,}0$ $\tau_k^{(K)} \cong \tau_k^{(D)}$, что дает четвертый аргумент в пользу выбора значения $n = 1{,}0$.

Обратный переход от D-модели и K-модели элементарен: в (6.56) делаются замены: $\tau_k \to \mathrm{d}\,\tau$, $\Delta T_0 \to \mathrm{d}\,\tilde{T}$, $(N-k) \to \left(T_S - \tilde{T}(\tau)\right)/\mathrm{d}\,T$, $T_k \to \tilde{T}(\tau)$, что дает

$$\frac{\mathrm{d}\,\tau}{t_0} = \frac{\mathrm{d}\,\tilde{T}}{T_S - \tilde{T}(\tau)} \quad (6.61)$$

в соответствии с (6.27). Определим полные времена релаксации (заполнения «ямы» $T_S - T_0$) в D-моделях и K-моделях. Такое время перехода $T_0 \to T_S$ в K-модели, как и в случае слабого диссипатора, равно ∞. Воспользуемся вновь процедурой «финитизации», положив $T_S \to T'_S = T_S - \delta T = T_S - \Delta T_0 / e^2$. Тогда из (6.30) получим:

$$\tau_\infty = \tau_\Sigma^{(K)} = t_0 \ln Ne^2 = 2t_0\left(1 + \ln\sqrt{N}\right). \quad (6.62)$$

При $N = 10^2$ $\tau_\Sigma^{(K)} \cong 6{,}61 t_0$. Полное время перехода $T_0 \to T_S$ в D-модели можно найти суммированием по k в (6.56), но это достаточно громоздко. Поэтому ограничимся суммированием $\tau_k^{(D)}$ (при $\Psi_n = 2{,}0$) только для $k > N - 19$, когда соответствия моделей нет. Для $k \le N - 19$ это соответствие приближенно есть, поэтому воспользуемся (6.61), что дает:

$$\tau_{\Sigma'}^{(D)} = t_0 \ln\left(\frac{N}{19}\right), \qquad (k = \overline{1, N-19}). \tag{6.63}$$

При $N = 10^2$ из (6.63) следует $\tau_{\Sigma'}^{(D)} = 1{,}66t_0$. Полное время $\tau_{\Sigma}^{(D)} = \tau_{\Sigma'}^{(D)} + \tau_{\Sigma''}^{(D)}$, где

$$\tau_{\Sigma''}^{(D)} = \sum_{k=N-18}^{N} \tau_k^{(D)} = 2t_0\left(\frac{1}{37} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{2}{3} + 1{,}0\right) \cong 4{,}91t_0.$$

Окончательно получим:

$$\tau_{\Sigma}^{(D)} = 6{,}57t_0 = \tau_{\Sigma}^{(K)} - 0{,}04t_0. \tag{6.64}$$

Учитывая, что «невязка» $0{,}04t_0$ мала, можно считать, что суммарные времена процесса в D- и K-моделях приблизительно совпадают при $n = 1{,}0$, т.е. получаем пятый аргумент в пользу «выделенности» случая $n = 1{,}0$ ($\Psi_n = 2{,}0$).

Задача 9. Двухтемпературный Боргартон. Рассмотрим одномерный диссипатор в Боргартоне, поддерживающем в одном теплообменном сечении его температуру T_{S1}, а в другом – T_{S2}. Начальная температура диссипатора T_0, причем $T_{S2} < T_0 < T_{S1}$, $T_{S1} - T_{S2} = N\Delta T_0$ и :

$$T_{S1} - T_0 = N_1 \Delta T_0; \quad T_0 - T_{S2} = N_2 \Delta T_0;$$

$$T_0 < T_S^* = \frac{T_{S1} + T_{S2}}{2}; \quad N_1 + N_2 = N. \tag{6.65}$$

Температура диссипатора $\widetilde{T}(\tau)$ будет возрастать от T_0 до T_S^*, после чего стабилизируется, так как приток тепла к диссипатору от Боргартона через поверхность с температурой T_{S1} сравняется с оттоком тепла от диссипатора через поверхность с температурой T_{S2}. Аналогично предыдущему, получаем:

$$\overline{q}_k^{(+)} = \frac{\lambda \Delta T_0}{l_0/2}\left[(N_1 - k) + \Psi_n^{-1}\right], \qquad \overline{q}_k^{(-)} = \frac{\lambda \Delta T_0}{l_0/2}\left[(N_2 + k) - \Psi_n^{-1}\right],$$

$$\tau_k' = t_0\left[(N' - k) + \Psi_n^{-1}\right]^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, N', \quad N' = \frac{1}{2}(N_1 - N_2). \tag{6.66}$$

Переход к K-модели для (6.66) очевиден: она совпадает с ранее рассмотренной, с заменой $T_S \to T_S^*$. Последний D-период τ_k' при $k = N'$ совпадает с $\tau_{0,n}$ для слабого диссипатора. Рассмотрим соотношения между соответствующими (k-ми) D-периодами для двух- и однотемпературного Боргартонов. Из (6.56) и (6.66) при $\Psi_n = 2{,}0$ следует, что

$$\frac{\tau_k'}{\tau_k}=\frac{N-(k-1/2)}{N'-(k-1/2)}=1+\frac{N_1+3N_2}{N_1-N_2-2k+1}. \quad (6.67)$$

Из (6.67) видно, что хроногенерация диссипатора в двухтемпературном Боргартоне превышает таковую для однотемпературного, т.е. процесс протекает более медленно и тем в большей степени, чем ближе температура диссипатора к стационарной:

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1}=1+\frac{N_1+3N_2}{N_1-N_2-1}, \qquad \frac{\tau_k'}{\tau_k}>\frac{\tau_{k-1}'}{\tau_{k-1}}, \qquad \frac{\tau_{N'}'}{\tau_{N'}}=1+N_1+3N_2. \quad (6.68)$$

Задача 10. Диссипатор с переменными параметрами. Рассмотрим переход $T_{k-1}\to T_k$ в сильном диссипаторе. Имеем:

$$\widetilde{T}_k(\tau)=T_{k-1}+\Delta T_0\left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^n=T_0+(k-1)\Delta T_0+\Delta T_0\eta^n, \quad \eta=\frac{\tau}{\tau_k}. \quad (6.69)$$

Изменение параметров со временем описывается формулами:

$$l_{0,k}(\tau)=l_{0,k-1}\left(1+\varepsilon_{l,k}\eta^{\alpha}\right), \qquad c_{V,k}(\tau)=c_{V,k-1}\left(1+\varepsilon_{c,k}\eta^{\beta}\right),$$

$$\lambda_k(\tau)=\lambda_{k-1}\left(1+\varepsilon_{\lambda,k}\eta^{\gamma}\right). \quad (6.70)$$

Левая и правая части УД соответственно:

$$\Delta Q_{0,k}=S_0\int_0^{\tau_k} l_{0,k}(\tau)c_{V,k}(N-k)\,\mathrm{d}\,\widetilde{T}_k(N-k); \quad \Delta Q_k^{(+)}=2S_0\,\overline{q}_k^{(+)}\cdot\tau_k, \quad (6.71)$$

где

$$q_k^{(+)}=\frac{\lambda_k(N-k)}{l_{0,k}(N-k)/2}\left[T_S-\widetilde{T}_k(\tau)\right]=$$

$$=\frac{2\lambda_{k-1}}{l_{0,k-1}}\left(1+\varepsilon_{\lambda,k}\eta^{\gamma}\right)\left(1-\varepsilon_{l,k}\eta^{\alpha}\right)\left(T_S-\widetilde{T}_k(N-k)\right). \quad (6.72)$$

Подставив в формулы (6.71), которые приравниваем друг другу, (6.69)–(6.72) после несколько громоздких выкладок находим:

$$\widetilde{\tau}_k=\frac{\Psi_n t_{0,k-1}}{\left[(N-k)\Psi_n+1\right]}\Phi_{0,k}, \quad t_{0,k-1}=\frac{l_{0,k-1}^2}{4a_{k-1}}, \quad \Phi_{0,k}=\frac{\Phi_{1,k}}{\Phi_{2,k}} \quad (6.73)$$

$$\Phi_{1,k}(\alpha,\beta,n)=1+\mu(\alpha,n)\varepsilon_{l,k}+\mu(\beta,n)\varepsilon_{l,k},$$

$$\Phi_{2,k}(\alpha,\gamma,n)=1+\nu_k(\gamma,n)\varepsilon_{\lambda,k}+\nu_k(\alpha,n)\varepsilon_{l,k},$$

$$\mu(\alpha,n)=\frac{n}{\alpha+n}, \qquad \nu_k(\gamma,n)=\frac{(N-k)n+n(\gamma+1+n)^{-1}}{\left[(N-k)+\Psi_n^{-1}\right](\gamma+1)}. \quad (6.74)$$

Налицо аналогия со слабым диссипатором; при $k = N$ все формулы переходят в соответствующие им формулы для слабого диссипатора. Рассмотрим важные частные случаи: 1) скачок всех параметров при $\tau = 0$; 2) скачок параметров при $\tau = \tilde{\tau}_k$; 3) линейное по времени изменение (рост) параметров. Имеем:

1) $\alpha = \beta = \gamma = 0$; $\mu(\alpha, n) = \mu(\beta, n) = 1{,}0$; $\nu_k(\gamma, n) = \nu_k(\alpha, n) =$ $= n + \dfrac{1-n}{(N-k)\Psi_n + 1} \le 0$ (так как $n \le 1{,}0$).

2) $\alpha = \beta = \gamma = \infty$; $\mu(\alpha, n) = \mu(\beta, n) = 0$; $\nu_k(\gamma, n) = \nu_k(\alpha, n) = 0$; $\Phi_{1,k} = \Phi_{2,k} = \Phi_{0,k} = 1{,}0$.

3) $\alpha = \beta = \gamma = 1{,}0$; $\Psi_n^{-1}\mu(\alpha, n) = \mu(\beta, n) = \Psi_n^{-1}$; $\nu_k(\gamma, n) = \nu_k(\alpha, n) =$

$$= \frac{n}{2} \frac{\left[(N-k) + 2(2+n)\right]^{-1}}{\left[(N-k) + \Psi_n^{-1}\right]} = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \dfrac{N-k+2/3}{2(N-k)+1}, & n = 1{,}0. \end{cases}$$

Параметры $\nu_k(\gamma, n)$ и $\nu_k(\alpha, n)$ при $n = 1{,}0$ изменяется в пределах $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right]$. Во всех случаях, аналогично слабому диссипатору, параметр $\Phi_{0,k}$ принимает значения, близкие к 1,0.

Задача 11. Диссипатор с нелинейными параметрами. Здесь также имеется аналогия с нелинейным слабым диссипатором. При $n = 1{,}0$ имеется полная эквивалентность нестационарному диссипатору. Рассмотрим частные случаи: 1) линейный рост параметров с температурой; 2) скачок параметров в конце цикла, на протяжении которого они «заморожены». Имеем:

1) $\alpha = \beta = \gamma = 1{,}0$; $n = 1{,}0$; $\Psi_n = 2{,}0$; $\mu(\alpha, n) = \mu(\beta, n) = \Psi_n^{-1} = 0{,}5$; $\nu_k(\gamma, n) = \nu_k(\alpha, n) = \nu_{N-k} = \dfrac{(N-k) + 2/3}{2(N-k)+1}$, $\nu_{N-k} \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right]$.

$$\Phi_{1,k} = 1 + 0{,}5\left(\varepsilon_{l,k} + \varepsilon_{c,k}\right); \quad \Phi_{2,k} = 1 + \left(\varepsilon_{\lambda,k} - \varepsilon_{l,k}\right)\nu_{N-k}; \quad \Phi_{0,k} = \frac{\Phi_{1,k}}{\Phi_{2,k}};$$

$$\Phi_{0,k} \in \left[1 - \tilde{\varepsilon}_k, 1 + \tilde{\varepsilon}_k\right]; \qquad \tilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{6}\left(4\left|\varepsilon_{\lambda,k}\right| + 7\left|\varepsilon_{l,k}\right| + 3\left|\varepsilon_{c,k}\right|\right). \tag{6.75}$$

2) $\alpha = \beta = \gamma = \infty$; $\mu(\alpha, n) = \mu(\beta, n) = 0$; $\nu_k(\gamma, n) = \nu_k(\alpha, n) = 0$; $\Psi_n = 2{,}0$; $n = 1{,}0$; $\Phi_{1,k} = \Phi_{2,k} = \Phi_{0,k} = 1{,}0$.

Таким образом, случай 2) – скачкообразного изменения параметров диссипатора в конце цикла $\tau \in \left[0, \tilde{\tau}_k\right]$ при $n = 1{,}0$ приводит к совпадению D-периодов нелинейного и линейного диссипаторов. Это дает шестой аргумент «выделенности» случая $n = 1{,}0$.

Задача 12. Условие аддитивности хроношкалы. Процесс перехода $T_0 \to T_S$ в сильном диссипаторе порождает две шкалы: температур – $Ш_T = \{T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots, T_S\}$ и временных интервалов $Ш_\tau = \{\tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \ldots, \tau_{k,n}, \ldots, \tau_{N,n}\}$. Соответствие между этими двумя шкалами устанавливается формулами хроногенерации. Из общей теории шкал и измерений [40,171] следует, что всякая шкала интервалов единственна с точностью до группы линейных преобразований вида $\Gamma_{\alpha,\beta}$: $x \to \alpha x + \beta$. Поскольку между $Ш_T$ и $Ш_\tau$ имеется однозначное соответствие, аддитивности одной из них должна соответствовать аддитивность другой. Иначе говоря, если есть два сдвига по шкале $Ш_T$, $T_{k-1} \to T_k$ и $T_k \to T_{k+1}$, эквивалентные сдвигу $T_{k-1} \to T_{k+1}$, то интервалам $\tau_{k,n}$ и $\tau_{k+1,n}$, соответствующим этим сдвигам, должен соответствовать интервал $\tau_{k,k+1}^{(n)}$, им эквивалентный:

$$\tau_{k,n} + \tau_{k+1,n} = \tau_{k,k+1}^{(n)}, \qquad (k = \overline{1,N}). \tag{6.76}$$

Соотношение (6.76) допускает и иную интерпретацию. Каждый из D-периодов описывается микрофункцией перехода $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ (см. (6.51)), а величина $\tau_{k,n}$ определяется индексом хрононелинейности n, который «отбирает» одну из возможных «траекторий» – $\varphi_n(\eta)$. Микрофункция перехода $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ задается в «виртуальной» временной шкале $\tau \in [0, \tau_k]$, которую обозначим $Ш_B$. Для согласования шкал $Ш_B$ и $Ш_\tau$ (т.е. виртуального непрерывного времени и дискретного термодинамического), необходимо, чтобы $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ обеспечивала соответствие времен двух последовательных переходов $T_{k-1} \to T_k$ и $T_k \to T_{k+1}$ и эквивалентного им суммарного перехода $T_{k-1} \to T_{k+1}$ одновременно для обеих шкал – $Ш_B$ и $Ш_\tau$. Эти требования (ограничения) на $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ и отражает (6.76).

С точки зрения обобщенного принципа Гюйгенса–Адамара [61,158], решения эволюционных задач математической физики (задач переноса) выражаются операторами, ставящими в соответствие некоторой функции $u(t)$, заданной при $t = t_0$, ее значения в момент $t = t_1 - u(t_1)$. Эти операторы $\hat{S}$ образуют полугруппу:

$$u(t_1) = \hat{S}(t_1, t_0)u(t_0), \quad u(t_2) = \hat{S}(t_2, t_1)u(t_1) = \hat{S}(t_2, t_1)\hat{S}(t_1, t_0)u(t_0) =$$

$$= \hat{S}(t_2, t_0)u(t_0), \quad \hat{S}(t_2, t_0) = \hat{S}(t_2, t_1)\hat{S}(t_1, t_0). \tag{6.77}$$

Поскольку диссипатор осуществляет отображение сдвигов по шкале $Ш_T$ (также образующих полугруппу) на шкалу $Ш_\tau$ (хроногенерация), то аналогичное (6.77) полугрупповое свойство имеет вид (6.76).

Это свойство характеризует аддитивность хроношкалы – равенство суммы величин двух смежных D-периодов D-периоду описывающему эквивалентный суммарный переход $T_{k-1} \to T_{k+1}$. Если для шкалы $Ш_T$ ее аддитивность следует из аддитивности внутренней энергии диссипатора, то для шкалы $Ш_\tau$ аддитивности в общем случае может и не быть (микрофункция перехода $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ нелинейная). Если же аддитивность хроношкалы «потребовать», введя некоторое правило отбора для n, то параметр Ψ_n, соответствующий «отобранному» n и являющийся множителем при t_0, определяющим величину $\tau_{k,n}$, будет таковым для всех k. Иначе говоря, все D-периоды увеличиваются (или уменьшаются) в одинаковом отношении, что эквивалентно изменению масштаба (цены деления) хроношкалы, допустимому для всех шкал интервалов.

В отличие от (6.77), в своей области всегда справедливой, формула (6.76) носит более частный характер: она вводит ограничение (осуществляет «отбор») на $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ и служит уравнением относительно n. Найдем явный вид этого уравнения. Левая часть (6.76) может быть записана согласно (6.56). В правой части стоит $\tau_{k,k+1}^{(n)}$ – n-й D-период «спаренного» (на $2\Delta T_0$) перехода $T_{k-1} \to T_{k+1}$. Совершенно аналогично выводу (6.56) можно найти:

$$\tau_{k,k+1}^{(n)} = t_0\left[\frac{N-k-1}{2} + \Psi_n^{-1}\right]^{-1}, \qquad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}. \tag{6.78}$$

Подставляя в (6.76) формулу (6.78), с учетом (6.56), получаем:

$$\left[(N-k) + \Psi_n^{-1}\right]^{-1} + \left[(N-k-1) + \Psi_n^{-1}\right]^{-1} = \left[\frac{N-k-1}{2} + \Psi_n^{-1}\right]^{-1},$$

что после очевидных преобразований дает:

$$\Psi_n^2 - 2\Psi_n - \left(\frac{2}{N-k-1}\right) = 0. \tag{6.79}$$

Решение (6.79):

$$\Psi_n^{(1,2)} = 1{,}0 \pm \sqrt{1{,}0 + 2(N-k-1)^{-1}}. \tag{6.80}$$

Корень $\Psi_n^{(2)} < 0$, что противоречит определению этого параметра, отбрасываем, окончательно получая искомое «правило отбора»

$$\Psi_n = 1{,}0 + \sqrt{1{,}0 + 2(N-k-1)^{-1}}. \tag{6.81}$$

При k – конечном, а $N \to \infty$, $\Psi_n \to 2{,}0$, а $n \to 1{,}0$. При конечных $N < \infty$ $\Psi_n > 2{,}0$, т.е. $n < 1{,}0$. Тем самым из всевозможных $\varphi_n(\eta)$ отбирается подкласс «опережающих» микрофункций перехода.

При $k = N-1$ из (6.81) следует $\Psi_n = \infty$, т.е. $n = 0$, что соответствует скачку температуры в начальный момент времени. Это связано с тем, что применение (6.76) для $k = N-1$ (т.е. объединение предпоследнего и последнего циклов, соответствующее слабому диссипатору) требует, поскольку и последний скачок $T_{N-1} \to T_S$ и объединенный скачок $T_{N-2} \to T_S$ генерируют один и тот же интервал – $\tau_{0,n}$, обращения в ноль времени скачка $T_{N-2} \to T_{N-1}$, что и следует из (6.81). Ограничение $k \neq N-1$, $k \neq N$ уже встречалось ранее, в задаче 8 (см. (6.59)). Далее будем считать, что в (6.76) $k = \overline{1, N-2}$. Из (6.81) видно, что с ростом $T_S - T_0 = N\Delta T_0$, $\Psi_n \to 2{,}0$, а $n \to 1{,}0$. Оценим погрешность определения n при достаточно больших $N-k$. Имеем из (6.81):

$$\Psi_n \cong 2 + (N-k-1)^{-1}. \tag{6.82}$$

Формула (6.82) справедлива, если $(N-k-1)^{-2} << 1{,}0$, или, более конкретно:

$$(N-k-1)^{-2} \le 10^{-2}; \quad N-k-1 \le 10{,}0; \quad k \le N-11. \tag{6.83}$$

Итак, для всех переходов, кроме десяти последних, (6.82) справедливо. При этом, в силу (6.83):

$$2{,}0 \le \Psi_n \le 2{,}1 \qquad 0{,}91 \le n \le 1{,}0.$$

Получен седьмой (и последний!) аргумент в пользу «выделенности» случая $n = 1{,}0$. Заметим, что собственное время сильного диссипатора для k-го цикла

$$\tau_{k,1} = t_0\left[(N-k) + 1/2\right]^{-1}, \qquad k = \overline{1, N} \tag{6.84}$$

является наименьшим D-периодом из всех возможных при $n \in [0{,}1]$.

Задача 13. Энтропогенерация диссипатора. По аналогии с задачей 2 (§18) имеем:

$$\Delta\sigma_{A,k} = V_M c_V \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_M(\tau)}{\widetilde{T}_M(\tau)} = V_M c_V \ln\left(\frac{T_k}{T_{k-1}}\right) =,$$

$$= V_M c_V \ln\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_{k-1}}\right), \qquad k = \overline{1, N}. \tag{6.85}$$

Полное изменение аккумулируемой (термостатической) энтропии

$$\Delta S_A = \sum_{k=1}^{N} \Delta\sigma_{A,k} = V_M c_V \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{T_k}{T_{k-1}}\right) = S_0 l_0 c_V \ln\left(\frac{T_S}{T_0}\right) \tag{6.86}$$

совпадает с таковым для слабого диссипатора. Изменение потоковой энтропии на k-м цикле:

$$\Delta\sigma_{q,k} = \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{\mathrm{d}Q_k^{(+)}}{\widetilde{T}_k} = \tau_k \left(\frac{4S_0\lambda}{l_0}\right) \int\limits_0^1 \frac{\Delta T_0\left[(N-k) + \left(1-\eta^n\right)\right]}{T_0 + \Delta T_0(k-1+\eta^n)} \mathrm{d}\eta =$$

$$= \tau_{k,n}^{(q)} \cdot J(k,n). \tag{6.87}$$

Явный вид функции $J(k,n)$ для дальнейшего не существенен, важно лишь, что она зависит от n («траектории» перехода). Согласование (6.87) с (6.85), а также суммы по всем k в (6.87) и (6.86) невозможно. Рассмотрим возможность согласования $\Delta\sigma_{A,k}$ с $\Delta\sigma_{q,k}$ (и, одновременно, получение правильной хроно-генерации) путем дискретного изменения температуры диссипатора:

$$\widetilde{T}_k(\tau) = \begin{cases} T_{k-1}, \tau \in [0, \tau_{c,k}), \\ T_k, \quad \tau \in [\tau_{c,k}, \tau_{k,n}] \end{cases} \tag{6.88}$$

Получаем из (6.85) и (6.87):

$$\Delta\sigma_{A,k}^{(D)} = V_M c_V \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{\mathrm{d}\,\widetilde{T}_k}{\widetilde{T}_k} = S_0 l_0 c_V \left(\frac{\Delta T_0}{T_{k-1}}\right), \tag{6.89}$$

$$\Delta\sigma_{q,k}^{(D)} = \frac{4S_0\lambda}{l_0}\left\{\int\limits_0^{\tau_{c,k}}\left(\frac{T_S - T_{k-1}}{T_{k-1}}\right)\mathrm{d}\,\tau + \int\limits_{\tau_{c,k}}^{\tau_{k,n}}\left(\frac{T_S - T_k}{T_k}\right)\mathrm{d}\,\tau\right\}. \tag{6.90}$$

Из условия $\Delta\sigma_{A,k}^{(D)} = \Delta\sigma_{q,k}^{(D)}$, учитывая (6.56), находим:

$$\tau_{c,k} = \tau_{k,n}^{(D)} = t_0[N-k+1]^{-1} = \tau_{k,\infty} = \Psi_\infty t_0[(N-k)\Psi_\infty + 1]^{-1}, \tag{6.91}$$

так как при $n = \infty$ $\Psi_\infty = 1{,}0$. Отсюда следует (как и в задаче 2), что обе энтропии согласуются при дискретном (скачкообразном) изменении температуры $T_{k-1} \to T_k$ в момент времени $\tau_{c,k} = \tau_{k,n}^{(D)} = \tau_{k,\infty}$, т.е. в конце k-го цикла. Полное изменение дискретной энтропии:

$$\Delta S_q^{(D)} = \Delta S_A^{(D)} = \sum_{k=1}^{N}\Delta\sigma_{A,k}^{(D)} = V_M c_V \Delta T_0 \sum_{k=1}^{N}(T_{k-1})^{-1}. \tag{6.92}$$

Если в (6.92) перейти к континууму, положив

$$\Delta T_0 \to \mathrm{d}\,T, \qquad N\Delta T_0 = T_S - T_0\ (N\to\infty), \qquad \sum_{k=1}^{N}\frac{\Delta T_0}{T_{k-1}} \to \int\limits_{T_0}^{T_S}\frac{\mathrm{d}\,T}{T},$$

то получим

$$\lim_{N\to\infty}\Delta S_q^{(D)} = \Delta S_A = V_M c_V \ln\left(\frac{T_S}{T_0}\right), \tag{6.93}$$

т.е. совпадение дискретной энтропии в пределе $N \to \infty$ с непрерывной. Если рассматривать не энтропии, а балансы тепла в макроточке (УД) при выполнении (6.88), то получим соотношение $\tau_{c,k} = \Psi_n^{-1}\tau_{k,n}$. Поскольку баланс тепла будет нарушен при скачке температуры в любой момент времени, меньший, чем D-период, из этого соотношения следует $\Psi_n^{-1} = 1{,}0,\ \Psi_n = 1{,}0,\ n = \infty$.

Оба вида энтропии согласуются друг с другом как локально (на k-м цикле), так и глобально (на переходе $T_0 \to T_S$), если отказавшись от непрерывной энтропии (термостатической) иметь дело только с дискретной (термодинамической). Это, однако, ведет к изменению хроногенерации диссипатора, поскольку вместо $\tau_{k,n}$, определенного по (6.56) при $\Psi_n = 2{,}0$ и $n = 1{,}0$, имеем $\tau_{k,n}^{(D)}$, определяемое (6.91). Отношение этих времен (при $n = 1{,}0$):

$$\frac{\tau_{k,1}}{\tau_{k,1}^{(D)}} = \frac{N - k + 1}{M - k + 1/2} = 1 + \left[2(N - k) + 1\right]^{-1}. \qquad (6.94)$$

При $(N - k) >> 1$ это отличие не существенно (т.е. в начальной, наиболее интенсивной фазе процесса). Однако с ростом k (приближением к равновесию) отношение (6.94) возрастает, достигая максимального значения $\tau_{k,1} \big/ \tau_{k,1}^{(D)} = 2{,}0$ при $k = N$.

§20. Взаимодействие диссипаторов

Далее везде будем считать, что $\Psi_n = 2{,}0$ и $n = 1{,}0$, что было ранее обосновано. Анализ взаимодействия диссипаторов, помещенных в Боргартон, осуществляем, рассматривая последующие задачи, нумерация которых продолжает предыдущую.

Задача 14. Система двух диссипаторов. Симметричную систему из четырех состыкованных одинаковых диссипаторов $\{M_{-1}, M_{-2}, M_2, M_1\}$, на внешних поверхностях которых (левой – у M_{-1} и правой – у M_1) поддерживается температура Боргартона T_S, можно представить как две невзаимодействующие (поток тепла на границе между диссипаторами M_{-2} и M_2 равен нулю в силу симметрии начального ($T = T_0$) и граничных условий) системы: $\{M_{-1}, M_{-2}\}$ и $\{M_2, M_1\}$. Далее рассматриваем систему двух взаимодействующих диссипаторов $\{M_2, M_1\}$ с адиабатической левой (у M_2) границей и правой (у M_1), на которой поддерживается температура T_S.

На первом цикле (D-периоде – τ_1) температура диссипатора M_1, получающего тепло от Боргартона, поднимается от T_0 до $T_1 = T_0 + \Delta T_0$. В диссипатор M_2 при этом тепло не поступает, так что его температура остается равной T_0. УД для M_1:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_1^{(+)}, \quad \Delta Q_1 = S_0 l_0 c_V \Delta T_0, \quad \Delta Q_1^{(+)} = S_0\, \bar{q}_1^{(+)} \cdot \tau_1, \qquad (6.95)$$

где

$$\bar{q}_1^{(+)} = \frac{1}{\tau_1}\int_0^{\tau_1} \tilde{q}_1^{(+)}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau, \qquad \tilde{q}_1^{(+)}(\tau) = \frac{\lambda}{l_0/2}\left[T_S - \tilde{T}_{1,1}(\tau)\right],$$

$$\tilde{T}_{1,1}(\tau) = T_{1,0} + \left(T_{1,1} - T_{1,0}\right)\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right). \tag{6.96}$$

Из (6.95), (6.96) следует:

$$\tau_1 = 2t_0\left(N - 1/2\right)^{-1}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}, \qquad N = \frac{T_S - T_0}{\Delta T_0}, \tag{6.97}$$

Полагая $N = 10^2$, находим $\tau_1 \cong 0{,}02 t_0$. На втором цикле (τ_2) тепло из диссипатора M_1 уже может переходить в диссипатор M_2, так как перепад температур между ними становится $\geq \Delta T_0$. Температура M_2 в конце цикла будет $T_{2,2} = T_0 + \Delta T_0$, а M_1 – $T_{1,2}$ ($T_{1,2} \neq T_{1,1} + \Delta T_0$!). УД второго цикла для M_1:

$$l_0 c_V \left(T_{1,2} - T_{1,1}\right) = \tau_2\left(\bar{q}_{S-1,2} - \bar{q}_{1-2,2}\right), \tag{6.98}$$

где: $T_{i,j}$ – температура i-го диссипатора M_i в конце j-го цикла; $\bar{q}_{S-1,2}$ – плотность потока тепла от Боргартона по к M_1, усредненная по 2-му циклу; $\bar{q}_{1-2,2}$ – плотность потока тепла от M_1 к M_2, усредненная по 2-му циклу. Эти величины выражаются следующим образом:

$$\bar{q}_{S-1,2} = \frac{\lambda}{l_0/2}\left[T_S - \bar{T}_{1,2}\right]; \qquad \bar{q}_{1-2,2} = \frac{\lambda}{l_0}\left(\bar{T}_{1,2} - \bar{T}_{2,2}\right);$$

$$\bar{T}_{1,2} = T_{1,1} + \frac{\Delta T_{1,2}}{2}; \qquad \Delta T_{1,2} = T_{1,2} - T_{1,1}; \qquad \bar{T}_{2,2} = T_0 + \frac{\Delta T_0}{2}. \tag{6.99}$$

Подстановка (6.99) в (6.98) дает:

$$4t_0\,\mathrm{X}_{1,2} = \tau_2\left(2N - 2{,}5 - 1{,}5\,\mathrm{X}_{1,2}\right), \qquad \mathrm{X}_{1,2} = \frac{\Delta T_{1,2}}{\Delta T_0}. \tag{6.100}$$

УД (уравнение баланса тепла) в M_2:

$$l_0 c_V \Delta T_0 = \bar{q}_{1-2,2}\cdot\tau_2 = \tau_2\frac{\lambda}{l_0}\left(\bar{T}_{1,2} - \bar{T}_{2,2}\right) \tag{6.101}$$

после простых преобразований приобретает вид:

$$8t_0 = \tau_2\left(1 + \mathrm{X}_{1,2}\right), \qquad \mathrm{X}_{2,2} = \frac{\Delta T_{2,2}}{\Delta T_0} = 1{,}0. \tag{6.102}$$

Получена система двух уравнений (6.100) и (6.102) относительно двух неизвестных – $\mathrm{X}_{1,2}$ и τ_2. Исключая τ_2, находим уравнение

$$\text{X}_{1,2}^2 + 4\,\text{X}_{1,2} - (4N-5) = 0. \qquad (6.103)$$

Решение (6.103), имеющее смысл:

$$\text{X}_{1,2}^{(1)} = -2 + \sqrt{4N-1} \cong 2(\sqrt{N}-1) = 18{,}0. \qquad (6.104)$$

Затем находим

$$\tau_2 = \frac{8t_0}{1+\text{X}_{1,2}} = \frac{4t_0}{\sqrt{N}-1/2} \cong 0{,}42t_0. \qquad (6.105)$$

На третьем цикле ($j=3$) температура M_2 вновь поднимается на ΔT_0, а M_1 – на $\Delta T_{1,3} = \text{X}_{1,3}\,\Delta T_0$. УД для M_1 и M_2:

$$\left.\begin{aligned} &8t_0\,\text{X}_{1,3} = \tau_3\left[4N-6-3\left(\text{X}_{1,2}+\text{X}_{1,3}-1\right)\right] \\ &8t_0 = \tau_3\left(\text{X}_{1,2}+\text{X}_{1,3}-1\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (6.106)$$

Решение системы (6.106), полученное исключением τ_3:

$$\text{X}_{1,3} = 11{,}05; \qquad \tau_3 = 0{,}285t_0. \qquad (6.107)$$

Полученные для трех первых циклов ($j = 1,2,3$) результаты красноречивы: оказывается, что время, необходимое для начального повышения на ΔT_0 температуры «внутреннего» диссипатора M_2 в 21 раз превышает время, необходимое для такого же подъема температуры M_1 ($\tau_2/\tau_1 = 0{,}42t_0/0{,}02t_0 = 21{,}0$). На третьем цикле, когда между M_1 и M_2 уже есть большой перепад температур ($\text{X}_{1,2} = 18{,}0, \text{X}_{2,2} = 1{,}0$) это время уменьшается ($\tau_3 = 0{,}285t_0$). Приведенные результаты описывают хроногенерацию в системе из двух диссипаторов в начальный период времени $\tau_{\text{н}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0{,}725t_0$. Для анализа хроногенерации при дальнейшем ходе процесса целесообразно использовать более общую модель.

Задача 15. Система двух диссипаторов. Общий метод. Пусть на систему диссипаторов $\{M_1, M_2\}$ в Боргартоне оказывается сильное температурное воздействие: $T_S - T_0 = N\Delta T_0$, $N >> 1$. Рассматриваем D-периоды $\{\tau_j\}$ ($j = \overline{1,N}$), или циклы, на каждом из которых температуры диссипаторов $\widetilde{T}_{i,j}(\tau)$ ($i = 1{,}2$) изменяются по закону:

$$\widetilde{T}_{i,j}(\tau) = T_{i,j-1} + \Delta T_{i,j}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right), \quad \Delta T_{i,j} = T_{i,j} - T_{i,j-1}. \qquad (6.108)$$

Баланс тепла (УД) на j-м цикле для диссипатора M_1:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta Q_{1,j}=\Delta Q_{1,j}^{(+)}-\Delta Q_{1,j}^{(-)}; \quad \Delta Q_{1,j}=S_0 l_0 c_V \Delta T_{1,j};\\ &\Delta Q_{1,j}^{(+)}=S_0\tau_j\,\bar q_{S-1,j}; \qquad \Delta Q_{1,j}^{(-)}=S_0\tau_j\,\bar q_{1-2}\end{aligned}\right\}. \tag{6.109}$$

где

$$\bar q_{S-1,j}=\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\tilde q_{S-1,j}(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\lambda}{l_0/2}\left[T_S-\bar T_{1,j}\right];$$

$$\bar q_{1-2,j}=\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\tilde q_{1-2,j}(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{\lambda}{l_0}\left(\bar T_{1,j}-\bar T_{2,j}\right), \quad \bar T_{i,j}=T_{i,j-1}+\frac{\Delta T_{i,j}}{2}. \tag{6.110}$$

$$T_{i,j}=T_{i,j-1}+\Delta T_{i,j}=T_{i,j-2}+\Delta T_{i,j-1}+\Delta T_{i,j}=\ldots T_{i,0}+\sum_{\nu=1}^{j}\Delta T_{i,\nu}=$$

$$=T_0+\Delta T_0\,\sigma_j^{(i)}, \qquad \sigma_j^{(i)}=\sum_{\nu=1}^{j}\mathrm{X}_{i,\nu}, \qquad \mathrm{X}_{i,\nu}=\frac{\Delta T_{i,\nu}}{\Delta T_0}. \tag{6.111}$$

Окончательно уравнение для M_1 принимает вид:

$$8t_0\,\mathrm{X}_{1,j}=\tau_j\left[4N+\left(2\sigma_{j-1}^{(2)}-6\,\sigma_{j-1}^{(1)}\right)-3\,\mathrm{X}_{1,j}+\mathrm{X}_{2,j}\right]. \tag{6.112}$$

Баланс тепла на j-м цикле для диссипатора M_2:

$$\Delta Q_{2,j}=\Delta Q_{2,j}^{(+)}; \quad \Delta Q_{2,j}=S_0 l_0 c_V \Delta T_{2,j}; \quad \Delta Q_{2,j}^{(+)}=S_0\tau_j\,\bar q_{1-2,j} \tag{6.113}$$

приводится аналогичным образом к виду:

$$8t_0\,\mathrm{X}_{2,j}=\tau_j\left[2\left(2\sigma_{j-1}^{(1)}-6\,\sigma_{j-1}^{(2)}\right)+\mathrm{X}_{1,j}-\mathrm{X}_{2,j}\right]. \tag{6.114}$$

Полученная система двух уравнений (6.112) и (6.114) содержит три неизвестные величины $\left\{\mathrm{X}_{1,j};\mathrm{X}_{2,j};\tau_j\right\}$, поэтому требуется одну из них задать. Это можно сделать различными способами.

Способ 1. Задаются величины $\tau_j=\tau_{j,0}$ ($j=\overline{1,J}$) (в частности, все τ_j могут быть одинаковы: $\tau_j=\tau_0=8R_0t_0, \quad R_0=\mathrm{const}$). Пусть все τ_j различны: $\tau_j=\tau_{j0}=R_j\cdot 8t_0$. Тогда система уравнений (6.112), (6.114) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}&\left(3R_j+1\right)\mathrm{X}_{1,j}-R_j\,\mathrm{X}_{2,j}=F_{1,j},\\ &-R_j\,\mathrm{X}_{1,j}+\left(R_j+1\right)\mathrm{X}_{2,j}\,F_{2,j}.\end{aligned}\right\} \tag{6.115}$$

Здесь

$$F_{1,j} = R_j\left[4N + \left(2\sigma_{j-1}^{(2)} - 6\sigma_{j-1}^{(1)}\right)\right], \quad F_{2,j} = 2R_j\left(\sigma_{j-1}^{(1)} - 6\sigma_{j-1}^{(2)}\right). \quad (6.116)$$

Определитель системы (6.115) всегда при $R_j > 0$ положителен, т.е. ее решение существует и единственно.

Способ 2. На каждом шаге (цикле) задается $X_{1,j} = \hat{x}_{1,j}$ и система решается относительно $X_{2,j}$ и τ_j. Исключением τ_j получаем:

$$X_{2,j}^2 + \left(4N + A_{j-1} - 2\hat{x}_{1,j}\right)X_{2,j} - \left(B_{j-1} + \hat{x}_{1,j}\right)\hat{x}_{1,j} = 0, \quad (6.117)$$

где

$$A_{j-1} = 2\sigma_{j-1}^{(2)} - 6\sigma_{j-1}^{(1)}, \qquad B_{j-1} = 2\left(\sigma_{j-1}^{(1)} - \sigma_{j-1}^{(2)}\right).$$

Второй корень (6.117) отбрасывается (он отрицательный), а первый дает $X_{2,j}^{(1)}$. Затем легко находится τ_j:

$$\tau_j = \frac{8t_0\hat{x}_{1,j}}{\left(4N + A_{j-1} - 3\hat{x}_{1,j}\right) + X_{2,j}^{(1)}}. \quad (6.118)$$

Способ 3. Пошагово задается $X_{2,j} = \hat{x}_{2,j}$, и система уравнений решается относительно $X_{1,j}$ и τ_j. Аналогично предыдущему получаем:

$$\tau_j = \frac{8t_0\hat{x}_{2,j}}{\left(B_{j-1} - \hat{x}_{2,j}\right) + X_{1,j}^{(1)}}, \quad (6.119)$$

где $X_{1,j}^{(1)}$ – положительный корень уравнения

$$X_{1,j}^2 + \left(B_{j-1} + 2\hat{x}_{1,j}\right)X_{1,j} - \left(4N + A_{j-1} + \hat{x}_{2,j}\right)\hat{x}_{2,j} = 0. \quad (6.120)$$

Способ 4. На j-м шаге пользуются каким-либо из первых трех способов, а на ($j+1$)-м – каким-либо другим. Способы 2-й и 3-й являются более последовательными в рамках Боргартоники, так как в них задаются приращения температуры в диссипаторах и по ним находятся соответствующая хроногенерация (τ_j). При этих способах финитность температурного поля (т.е. устранение артефакта «бесконечной скорости теплопередачи») обеспечивается автоматически. Способы 2-й и 3-й имеют, однако, существенный недостаток: они требуют решения квадратного уравнения для системы двух диссипаторов, кубического – для системы трех и т.д.

Задача 16. Сравнение D- и K-моделей. Для сравнения результатов расчетов по (6.115) (D-модель системы двух диссипаторов) и по соответствующей K-модели был осуществлен расчет по 2-му способу с десятью «шагами» $X_{1,1} = X_{1,2} = \ldots = X_{1,10} = 10{,}0$ и проведено сравнение с аналитическим реше нием этой же задачи [43]. Расчеты показали, что при $j = 1 - 8$ – относительные погрешности определения безразмерных температур диссипаторов (невязки D- и K-моделей, отнесенные к данным K-моделей) изменяются от 36,3% до 1,7% для M_1 и от 75,5% до 2,5% для M_2, убывая и далее. Суммарное время первых восьми «шагов» $\tau_8^{(\Sigma)}$, по прошествии которого различиями D- и K-моделей можно пренебречь, составляет

$$\tau_8^{(\Sigma)} = 6{,}22t_0 = 3{,}11\tau_r, \qquad \tau_r = \frac{l_0^2}{2a}. \tag{6.121}$$

Полагая $\tau_{D-K} = 4{,}0\tau_r$ (с некоторым запасом), где τ_{D-K} – время нивелировки различий между D- и K-моделями, получим условие приближенного совпадения D- и K-моделей системы четырех диссипаторов и непрерывной одномерной системы (длиной $L = 4l_0$). Аналогичные результаты были получены и при сравнении потоков тепла на границах между M_1 и M_2 и на внешних границах системы, рассчитанных по D- и K-моделям. Сходимость потоков тепла (убыль погрешности до 1–2%) достигалась при $j = 7$, т.е. $\tau_7^{(\Sigma)} = 3{,}84t_0 = 1{,}92\tau_r$. K-модель настоящей задачи соответствует краевой задаче Модели 6 гл. 2 (где $T_c = T_S > T_0$). Далее рассмотрим аналог Модели 2 (гл. 2) – «расплывание теплового импульса».

Задача 17. Сравнение *D*- и *K*-моделей системы из 14 диссипаторов. Рассматривается симметричная система $\{M_{-7}, M_{-6}, ..., M_{-1}, M_1, M_2, ..., M_7\}$. В начальный момент времени температуры всех диссипаторов, кроме M_{-1} и M_1, одинаковы и равны T_0. M_{-1} и M_1 имеют температуру $T_S = T_0 + N\Delta T_0$ – «тепловой импульс». В процессе «расплывания» теплового импульса температуры M_{-1} и M_1 будут уменьшаться, а M_i ($i = \pm(2-7)$) – возрастать. Граница между M_{-1} и M_1 ввиду симметрии системы является адиабатической, так что рассматриваем теплоперенос в системе $\{M_1, M_2, \ldots, M_7\}$. На внешней границе системы (и диссипатора M_7) полагаем температуру равной T_0, приписывая ее фиктивному диссипатору M_8: $T_0 = \overline{T}_{8,j}$. УД для M_2:

$$\Delta Q_{2,j} = S_0 l_0 c_V \Delta T_{2,j} = Q_{2,j}^{(+)} = S_0 \tau_j \left[\overline{q}_{1-2,j} - \overline{q}_{2-3,j}\right] \tag{6.122}$$

преобразуется в уравнение общего вида

$$-\overline{T}_{k-1,j} + R_j \overline{T}_{k,j} - \overline{T}_{k+1,j} = B_{k,j}, \tag{6.123}$$

где

$$R_j = 2\left(\frac{l_0^2}{a\tau_j} + 1\right), \qquad B_{k,j} = \left(R_j - 2\right)T_{k,j-1},$$

$$\overline{T}_{k,j} = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} \widetilde{T}_{k,j}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad k = 2. \qquad (6.124)$$

Уравнения баланса для M_k $(k = \overline{1,7})$ аналогичны (6.123), где $\overline{T}_{0,j} = \overline{T}_{1,j}$, $\overline{T}_{8,j} = T_0$. Имеем систему из семи уравнений относительно 8-и неизвестных: $\overline{T}_{k,j}$ $(k = \overline{1,7})$ и R_j. Используя 1-й способ решения, величины τ_j (и тем самым, R_j – см. (6.124)) задаем:

$$\tau_j = \tau_r = \frac{l_0^2}{2a}, \qquad R_j = 6{,}0, \qquad k = \overline{1, J}.$$

Систему уравнений решаем исключением неизвестных $\overline{T}_{k,j}$, начиная с $k = 7$.

Сравнение полученных результатов с K-моделью – задачей Коши [43] осуществляем следующим образом. Безразмерные температуры диссипаторов в моменты времени $\tau_j^{(\Sigma)} = j\tau_r$ сопоставляем вычисленным для тех же моментов времени безразмерным температурам в точках $x_\nu = l_0/2$; $(3/2)l_0$; ... , $(13/2)l_0$. Невязка двух моделей оказалась убывающей со временем и по мере удаления от оси симметрии системы. Для трех первых диссипаторов M_k $(k = \overline{1,3})$ и моментов времени $j\tau_r$ $(j = \overline{2,6})$ безразмерные температуры диссипаторов $\theta_{k,j}$, и соответствующими, найденными по K-модели, $\widetilde{\theta}_{k,j}$ приведены в табл.4.

Таблица 4

Сравнение D- и K-моделей

k	$\theta_{k,j}$ / $\widetilde{\theta}_{k,j}$	$\tau_j^{(\Sigma)} = j\tau_r$				
		$2\tau_r$	$3\tau_r$	$4\tau_r$	$5\tau_r$	$6\tau_r$
1	$\theta_{k,j}$	51,50	43,54	38,34	34,62	31,80
	$\widetilde{\theta}_{k,j}$	53,16	44,29	38,70	34,80	31,90
2	$\theta_{k,j}$	31,94	31,27	29,82	28,28	26,86
	$\widetilde{\theta}_{k,j}$	32,22	31,34	30,16	28,55	26,94
3	$\theta_{k,j}$	12,46	16,27	18,44	18,96	19,25
	$\widetilde{\theta}_{k,j}$	11,85	16,27	18,27	19,20	19,35

Из табл. 4 следует, что при $\tau \geq 4\tau_r$ погрешность замены D-модели K-моделью несущественна, т.е. для времен, равных учетверенному собственному времени слабого диссипатора, влияние дискретности несущественно и можно использовать K-модель. Сравнение по тепловым потокам было проведено для точек $x_1 = l_0$ (контакт M_1, и M_2) и $x_2 = 3l_0$ (контакт M_3 и M_4) и тех же моментов времени. Практическое совпадение потоков, рассчитанных по D- и K-моделям, было получено (с $\varepsilon = 3 - 4\%$) также уже для $\tau \geq 4\tau_r$.

ГЛАВА 7. ЦЕПОЧКИ ДИССИПАТОРОВ

Мы не наблюдаем непосредственно дифференциальных уравнений; мы наблюдаем лишь конечные уравнения, которые являются непосредственным выражением наблюдаемых явлений.

А. Пуанкаре

Утверждают, что успех метода Гейзенберга может быть приведен к чисто алгебраическому методу описания природы, т.е. исключению из физики непрерывных функций. Но тогда нужно будет в принципе отказаться от пространственно-временного континуума.

А. Энштейн

§21. Линейные однородные цепочки

В настоящей главе рассматриваются системы взаимодействующих диссипаторов – цепочки из N_1 одномерных, плотно контактирующих друг с другом однородных диссипаторов M_k $(k = \overline{1, N_1})$. Граничные диссипаторы M_1 и M_{N_1} имеют температуру Боргартона – T_S. В настоящем параграфе рассматриваются однородные линейные (с постоянными и одинаковыми параметрами) цепочки диссипаторов, а далее – их обобщения: неоднородные цепочки (§22), нестационарные (§23) и нелинейные цепочки (§24).

Для вывода уравнения диссипаторной цепочки (УДЦ) выделим в ней три произвольных последовательных диссипатора $\{M_{k-1}, M_k, M_{k+1}\}$. Выпишем балансовое уравнение для M_k (УД) с учетом взаимодействия с M_{k-1} и M_{k+1} для j-го цикла (D-периода), когда $\tau \in (0, \tau_j)$. Прирост (убыль) количества тепла в M_k:

$$\Delta Q_{k,j} = S_0 l_0 c_V \Delta T_{k,j}, \qquad \Delta T_{k,j} = T_{k,j} - T_{k,j-1}. \tag{7.1}$$

Плотность потока тепла из M_{k-1} и M_k (или в обратном направлении) в j-м цикле:

$$q^{(j)}_{(k-1)-k}(\tau) = \frac{\lambda}{l_0}\left[\widetilde{T}_{k-1,j}(\tau) - \widetilde{T}_{k,j}(\tau)\right], \qquad k = \overline{2, N_1}. \tag{7.2}$$

Для граничных диссипаторов M_1 и M_{N_1}, обменивающихся теплом с Боргартоном:

$$q^{(j)}_{B-1}(\tau) = \frac{\lambda}{l_0/2}\left[T_{S_1} - \widetilde{T}_{1,j}(\tau)\right], \qquad q^{(j)}_{N_1-B}(\tau) = \frac{\lambda}{l_0/2}\left[T_{N_1,j}(\tau) - \widetilde{T}_{S_2}\right], \quad (7.3)$$

где «B» обозначает Боргартон; T_{S_i} – температуры, поддерживаемые Боргартоном на внешних границах цепочки, (i = 1,2). Температуры в M_k: в начале j-го цикла – $T_{k,j-1}$ ($k = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, J}, T_{k,0} = T_0$); в конце j-го цикла – $T_{k,j}$. Изменение температуры диссипатора M_k в ходе j-го цикла:

$$\widetilde{T}_{k,j}(\tau) = T_{k,j-1} + \Delta T_{k,j}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right). \quad (7.4)$$

Средняя за j-й цикл температура в M_k:

$$\overline{T}_{k,j} = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} \widetilde{T}_{k,j}(\tau)\mathrm{d}\tau = T_{k,j-1} + \frac{\Delta T_{k,j}}{2}. \quad (7.5)$$

Во всех формулах учтено и всюду предполагается далее, что $\Psi_n = 2{,}0$, $n = 1{,}0$, что было обосновано в предыдущей главе.

Усредненные по τ_j плотности потоков тепла:

$$\left\langle q^{(j)}_{B-1}\right\rangle_j = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} q^{(j)}_{B-1}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\lambda}{l_0/2}\left(T_{S_1} - \overline{T}_{1,j}\right), \quad (7.6)$$

$$\left\langle q^{(j)}_{(k-1)-k}\right\rangle_j = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} q^{(j)}_{(k-1)-k}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k-1,j} - \overline{T}_{k,j}\right) \quad k = \overline{2, N_1}, \quad (7.7)$$

$$\left\langle q^{(j)}_{k-(k+1)}\right\rangle_j = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} q^{(j)}_{k-(k+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k,j} - \overline{T}_{k+1,j}\right) \quad k = \overline{1, N_1 - 1} \quad (7.8)$$

$$\left\langle q^{(j)}_{N_1-B}\right\rangle_j = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} q^{(j)}_{N_1-B}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\lambda}{l_0/2}\left(\overline{T}_{N_1,j} - T_{S_2}\right). \quad (7.9)$$

Результирующий теплоприток в M_k:

$$\Delta Q^{(+)}_{k,j} = S_0\tau_j\left[\left\langle q^{(j)}_{(k-1)-k}\right\rangle_j - \left\langle q^{(j)}_{k-(k+1)}\right\rangle_j\right] =$$

$$= S_0 \tau_j \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k-1,j} - 2\overline{T}_{k,j} + \overline{T}_{k+1,j}\right), \quad k = \overline{2, N_1 - 1}. \qquad (7.10)$$

При $k = 1$ имеем:

$$\Delta Q_{1,j}^{(+)} = S_0 \tau_j \left[\left\langle q_{B-1}^{(j)} \right\rangle_j - \left\langle q_{1-2}^{(j)} \right\rangle_j\right] =$$

$$= S_0 \tau_j \frac{\lambda}{l_0}\left[2\left(T_{S_1} - \overline{T}_{1,j}\right) - \left(\overline{T}_{1,j} - \overline{T}_{2,j}\right)\right]. \qquad (7.11)$$

При $k = N_1$:

$$\Delta Q_{N_1,j}^{(+)} = S_0 \tau_j \left[\left\langle q_{(N_1-1)-N_1}^{(j)} \right\rangle_j - \left\langle q_{N_1-S}^{(j)} \right\rangle_j\right] =$$

$$= S_0 \tau_j \frac{\lambda}{l_0}\left[2\left(T_{S_2} - \overline{T}_{N_1,j}\right) - \left(\overline{T}_{N_1,j} - \overline{T}_{N_1-1,j}\right)\right]. \qquad (7.12)$$

Из условия теплового баланса и с учетом (7.1) и (7.10) получаем:

$$\frac{\Delta T_{k,j}}{\tau_j} = \frac{a}{l_0^2}\left(\overline{T}_{k-1,j} - 2\overline{T}_{k,j} + \overline{T}_{k+1,j}\right), \quad k = \overline{2, N_1 - 1}. \qquad (7.13)$$

Полученное уравнение (7.13) отличается от встречающихся в литературе конечно-разностных аппроксимаций уравнения теплопроводности тем, что величины $\overline{T}_{\nu,j}$ ($\nu = k-1, k, k+1$) в нем – усредненные по j-му временному циклу, а не отнесенные к j-му моменту времени. Это играет решающую роль, так как позволяет из (7.13) получить целый класс уравнений, в частности и следующее из (7.13) при $\tau_j \to \mathrm{d}\,\tau$, $\Delta T_{k,j} \to \mathrm{d}\,T$, $l_0 \to \mathrm{d}\,x$ обычное уравнение Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (7.14)$$

Далее будет показано, что (7.14) – не более чем нулевое приближение K-моделей, следующих из D-модели (7.13).

Для практических расчетов уравнению (7.13) целесообразно придать иную, не содержащую средних температур, форму. Для этого, на основе (7.5) запишем:

$$\overline{T}_{k-1,j} = T_{k-1,j-1} + \frac{\Delta T_{k-1,j}}{2}; \qquad \overline{T}_{k,j} = T_{k,j-1} + \frac{\Delta T_{k,j}}{2},$$

$$\overline{T}_{k+1,j} = T_{k+1,j-1} + \frac{\Delta T_{k+1,j}}{2}. \qquad (7.15)$$

Подстановка (7.15) в (7.22) после простых преобразований дает УДЦ:

$$-\mathrm{X}_{k-1,j} + R_j\,\mathrm{X}_{k,j} - \mathrm{X}_{k+1,j} = b_{k,j}, \quad k = \overline{2, N_1 - 1}, \qquad (7.16)$$

где

$$\mathrm{X}_{k,j} = \frac{\Delta T_{k,j}}{\Delta T_0}, \quad R_j = 2\left(2\frac{\tau_r}{\tau_j} + 1\right), \quad b_{k,j} = \frac{2}{\Delta T_0} \underset{(k)^2}{\Delta}\left(T_{k,j-1}\right),$$

$$\underset{(k)^2}{\Delta}\left(T_{k,j-1}\right) \equiv T_{k-1,j-1} - 2T_{k,j-1} + T_{k+1,j-1}. \qquad (7.17)$$

Аналогичные (7.16) уравнения для граничных диссипаторов цепочки (M_1 и M_{N_1}) следуют из (7.6), (7.7), (7.9), (7.12):

$$\left(R_j + 1\right)\mathrm{X}_{1,j} - \mathrm{X}_{2,j} = b_{1,j}, \quad b_{1,j} = \frac{2}{\Delta T_0}\left(2T_{S_1} - 3T_{1,j-1} + T_{2,j-1}\right)$$

$$-\mathrm{X}_{N_1-1,j} + \left(R_j + 1\right)\mathrm{X}_{N_1,j} = b_{N_1,j},$$

$$b_{N_1,j} = \frac{2}{\Delta T_0}\left(2T_{S_2} - 3T_{N_1,j-1} + T_{N_1-1,j-1}\right). \qquad (7.19)$$

УДЦ (7.16) совместно с (7.18), (7.19) образуют систему из N_1+1 неизвестных: $\mathrm{X}_{k,j}$ $k = \overline{1, N_1}$ и R_j. Эту систему можно записать в матричном виде:

$$A_j \overline{\mathrm{X}}_j = \overline{B}_j, \qquad (7.20)$$

где $\overline{\mathrm{X}}_j = \left\{\mathrm{X}_{k,j}\right\}_{k=\overline{1,N_1}}$ вектор-столбец неизвестных; $\overline{B}_j = \left\{b_{k,j}\right\}_{k=\overline{1,N_1}}$ – вектор-столбец правых частей, определяемых согласно (7.17)–(7.19). Матрица A – трехдиагональная и симметричная:

$$A_j = \left\|a_{k,\nu}^{(j)}\right\|_{k=\overline{1,N_1}}, \qquad a_{k,\nu}^{(j)} = \begin{cases} -1, \ \nu = k-1, \ k+1, \\ \ \ 0, \ \nu < k-1, \ \nu > k+1, \\ R_j \delta_{k\nu}, \ k = \overline{2, N_1 - 1}, \\ \left(R_j + 1\right)\delta_{k\nu}, \ k = 1, N_1, \end{cases}$$

$$a_{k,\nu}^{(j)} = a_{\nu,k}^{(j)}, \qquad \delta_{k\nu} = \begin{cases} 1, \ k = \nu, \\ 0, \ k \neq \nu \end{cases}. \qquad (7.21)$$

Рассмотрим способы решения системы (7.20). Первый заключается в задании для каждого j-го цикла величины τ_j (а следовательно, и R_j). Число неизвестных тогда совпадает с числом уравнений. Решение (7.20) может быть найдено методом обратной матрицы:

$$\overline{\mathrm{X}}_j = A_j^{-1}\overline{B}_j, \qquad \mathrm{X}_{k,j} = \sum_{S=1}^{N_1}\left(a_{k,S}^{(j)}\right)^{-1} b_{S,j}, \qquad (7.22)$$

где $\left(a_{k,S}^{(j)}\right)^{-1}$ – элементы обратной матрицы A_j^{-1}. При втором способе задаются все величины $X_{N_1,j}$, что позволяет из последнего уравнения системы найти $X_{N_1-2,j}$ и т.д. Исключая так $\left\{X_{k,j}\right\}$, приходим к уравнениям степени N_1 относительно R_j. Пусть это уравнение решено. Тогда подстановкой R_j во все уравнения, начиная с последнего, находим все $\left\{X_{k,j}\right\}$. Третий способ заключается в отнесении R_j к неизвестным и в задании одного из «внутренних» $\left\{X_{k,j}\right\}$. Пусть задано $X_{S,j} = X_{S,j}^{(0)}$. Тогда система (7.20) распадается на две системы уравнений такого же вида; порядок одной из подсистем – $S-1$, а другой – $N_1-(S-1)$. Каждую из двух полученных «укороченных» систем можно решать вторым способом. Четвертый способ представляет собой второй, реализуемый «сверху вниз»: задается $X_{1,j}$ и далее аналогично.

Задача 18. Двумерные системы. Система (7.20) легко обобщается на случай двумерных квадратных диссипаторов («кубиков»), заполняющих прямоугольную область толщиной l_0. Произвольный внутренний диссипатор системы можно рассматривать как общий элемент двух пересекающихся цепочек, взаимодействующий с четырьмя «соседями». Пусть такой диссипатор – $M_{k,m}$ входит, в качестве k-го, в первую цепочку и в качестве m-го – во вторую, ей перпендикулярную ($k=\overline{1,N_1}$, $m=\overline{1,N_2}$). Его «соседями» будут: по первой цепочке – диссипаторы $M_{k-1,m}$ и $M_{k+1,m}$; по второй – $M_{k,m-1}$ и $M_{k,m+1}$. Количества тепла перешедшего в диссипатор $M_{k,m}$ от «соседей» на j-м цикле:

$$\Delta Q_{k,m,j} = l_0^3 c_V \Delta T_{k,m,j}, \Delta T_{k,m,j} = T_{k,m,j} - T_{k,m,j-1}. \qquad (7.23)$$

Теплопритоки в $M_{k,m}$ и теплооттоки из него, обусловленные взаимодействием с «соседями», можно представить в виде:

$$\Delta Q_{k,j}^{(+)} = l_0^2 \tau_j \,\overline{q}_{k,j}^{(+)}; \qquad \Delta Q_{m,j}^{(+)} = l_0^2 \tau_j \,\overline{q}_{m,j}^{(+)};$$

$$\Delta Q_{k,j}^{(-)} = l_0^2 \tau_j \,\overline{q}_{k,j}^{(-)}; \qquad \Delta Q_{m,j}^{(-)} = l_0^2 \tau_j \,\overline{q}_{m,j}^{(-)}, \qquad (7.24)$$

где

$$\overline{q}_{k,j}^{(+)} = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k+1,m,j} - \overline{T}_{k,m,j}\right); \quad \overline{q}_{m,j}^{(+)} = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k,m+1,j} - \overline{T}_{k,m,j}\right);$$

$$\overline{q}_{k,j}^{(-)} = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k,m,j} - \overline{T}_{k-1,m,j}\right); \quad \overline{q}_{m,j}^{(-)} = \frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{k,m,j} - \overline{T}_{k,m-1,j}\right). \quad (7.25)$$

Составляя баланс тепла в $M_{k,m}$ на j-м цикле на основе (7.23)–(7.25), получаем:

$$\frac{\Delta T_{k,m,j}}{\tau_j} = \frac{a}{l_0^2}\left[\underset{(k)^2}{\Delta}(\overline{T}_{k,m,j}) + \underset{(m)^2}{\Delta}(\overline{T}_{k,m,j})\right], \tag{7.26}$$

где

$$\underset{(k)^2}{\Delta}(\overline{T}_{k,m,j}) = \overline{T}_{k-1,m,j} - 2\overline{T}_{k,m,j} + \overline{T}_{k+1,m,j}$$

$$\underset{(m)^2}{\Delta}(\overline{T}_{k,m,j}) = \overline{T}_{k,m-1,j} - 2\overline{T}_{k,m,j} + \overline{T}_{k,m+1,j}. \tag{7.27}$$

Уравнение (7.26) является двумерным аналогом уравнения (7.13) и при упрощенном (редуцированном) предельном переходе $\tau_j \to \mathrm{d}\,\tau$, $l_0 \to \mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y$, $\Delta T_{k,m,j} \to \mathrm{d}\,T(x,y,\tau)$ дает двумерное уравнение Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{7.28}$$

которое также, как и (7.14) является только нулевым приближением полной K-модели, соответствующей (7.26). Преобразование (7.26) аналогично осуществленному с (7.13) и позволяет получить двумерный аналог уравнений (7.16):

$$-\mathrm{X}_{k-1,m,j} - \mathrm{X}_{k,m-1,j} + \left(R_j + 2\right)\mathrm{X}_{k,m,j} - \mathrm{X}_{k+1,m,j} - \mathrm{X}_{k,m+1,j} = b_{k,m,j}, \tag{7.29}$$

$$\mathrm{X}_{\alpha,\beta,j} = \frac{\Delta T_{\alpha,\beta,j}}{\Delta T_0}, \qquad b_{k,m,j} = \frac{2}{\Delta T_0}\left[\underset{(k)}{\Delta_2}\left(T_{k,m,j-1}\right) + \underset{(m)}{\Delta_2}\left(T_{k,m,j-1}\right)\right]. \tag{7.30}$$

Матрица $A_j^{(2)}$, отвечающая системе уравнений (7.29), пятидиагональная, порядка $N_1 \times N_2$. Обобщение на трехмерный случай очевидно, оно приводит к семидиагональной матрице $A_j^{(3)}$ с диагональными элементами $(R_j + 4)$. Порядок этой матрицы – $N_1 \times N_2 \times N_3$, где N_3 – число «диссипаторных плоскостей» ($N_1 \times N_2$).

§22. Неоднородные цепочки

Неоднородными называем цепочки диссипаторов, отличающихся друг от друга всеми параметрами: $l_{0,k} \neq l_{0,k+1}$, $c_{V,k} \neq c_{V,k+1}$, $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$, $\tau_{r,k} \neq \tau_{r,k+1}$, $k = \overline{1, N_1 - 1}$. Рассмотрим баланс тепла в диссипаторе M_k на j-м цикле (D-периоде). Опуская одинаковую для всех диссипаторов площадь теплопередающих поверхностей S_0, имеем:

$$\Delta Q_{k,j} = c_{V,k} l_{0,k} \Delta T_{k,j}, \qquad \Delta Q_{k,j}^{(+)} = \tau_j \left[\left\langle q_{(k-1)-k}^{(j)} \right\rangle - \left\langle q_{k-(k+1)}^{(j)} \right\rangle\right]; \tag{7.31}$$

$$\left\langle q_{(k-1)-k}^{(j)} \right\rangle = \frac{1}{\tau_j} \int_0^{\tau_j} \frac{\left[\widetilde{T}_{k-1,j}(\tau) - \widetilde{T}_{k,j}(\tau)\right]}{R_{k-1,k}} \mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{R_{k-1,k}} \left(\overline{T}_{k-1,j} - \overline{T}_{k,j}\right), \quad (7.32)$$

где

$$R_{k-1,k} = \frac{\rho_{k-1} + \rho_k}{2}, \qquad \rho_k = \frac{l_{0,k}}{\lambda_k}$$

Приравнивая аккумулируемое количество тепла ($\Delta Q_{k,j}$) потоковому ($\Delta Q_{k,j}^{(+)}$), после несложных преобразований находим:

$$\frac{\Delta T_{k,j}}{\tau_j} = \frac{a_k}{l_{0,k}^{(2)}}\Delta_{2\,(k)} \left(\gamma_k, \overline{T}_{k,j}\right), \quad (7.33)$$

$$a_k = \frac{\lambda_k}{c_{V,k}}, \quad \gamma_{k+1} = \frac{\rho_k}{R_{k,k+1}}, \quad \gamma_{k-1} = \frac{\rho_k}{R_{k-1,k}}, \quad 2\gamma_k = \gamma_k + \gamma_{k+1}.$$

Уравнение (7.33) является аналогом уравнения (7.13) и переходит в него при вырождении неоднородности: $a_k = a$, $l_{0,k} = l_0$, $\gamma_{k-1} = \gamma_k = \gamma_{k+1} = 1{,}0$. Переход в (7.33) от средних за цикл температур диссипаторов к начальным (для данного цикла) и к приращениям их приводит к УДЦ вида:

$$\overline{a}_{k-1,k}^{(j)} \mathrm{X}_{k-1,j} + \overline{a}_{k,k}^{(j)} \mathrm{X}_{k,j} + \overline{a}_{k,k+1}^{(j)} \mathrm{X}_{k+1,j} = \overline{b}_{k,j}, \quad (7.34)$$

$$\mathrm{X}_{k,j} = \frac{\Delta T_{k,j}}{\Delta T_0}, \quad \overline{a}_{k-1,k}^{(j)} = -\gamma_{k-1}, \quad \overline{a}_{k,k+1}^{(j)} = -\gamma_{k+1},$$

$$\overline{a}_{k,k}^{(j)} = 2\left(\frac{\tau_{rk}}{\tau_j} + \gamma_k\right). \quad (7.35)$$

Поскольку для граничных диссипаторов цепочки ($k = 1$, $k = N_1$) балансовые уравнения аналогичны (7.18) и (7.19), полная система из N_1-го уравнения в матричном виде аналогична (7.20), матрица $\widetilde{A}_j = \left\| \overline{a}_{k,\nu}^{(j)} \right\|$ трехдиагональная и переходит в матрицу A_j при вырождении неоднородности ($\gamma_{k-1} = \gamma_k = = \gamma_{k+1} = 1{,}0$). Методы решения (7.34) соответствуют таковым для (7.20).

§23. Нестационарные цепочки

Рассмотрим неоднородную цепочку диссипаторов $\{M_k\}$ ($k=\overline{1,N_1}-1$), параметры которых изменяются во времени. Для j-го цикла ($j=\overline{1,J}$) это изменение описывается формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&l_{0,k}(\tau)=l_{k,j}(\tau)=l_{k,j-1}\left[1+\varepsilon_{k,j}^{(l)}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right)\right], \varepsilon_{k,j}^{(l)}=\frac{l_{k,j}-l_{k,j-1}}{l_{k,j-1}};\\
&c_{V,k}(\tau)=c_{V,k,j}(\tau)=c_{V,k,j-1}(\tau)\left[1+\varepsilon_{k,j}^{(c)}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right)\right], \varepsilon_{k,j}^{(c)}=\frac{c_{V,k,j}-c_{V,k,j-1}}{c_{V,k,j-1}};\\
&\lambda_k(\tau)=\lambda_{k,j}(\tau)=\lambda_{k,j-1}\left[1+\varepsilon_{k,j}^{(\lambda)}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right)\right], \varepsilon_{k,j}^{(\lambda)}=\frac{\lambda_{k,j}-\lambda_{k,j-1}}{\lambda_{k,j-1}}.
\end{aligned}\right\} \quad (7.36)$$

Поскольку на небольших промежутках времени τ_j относительное изменение параметров мало, далее положим, что

$$\left(\varepsilon_{k,j}^{(\nu)}\right)^2 << 1, \qquad \left(\varepsilon_{k,j}^{(\nu)}\cdot\varepsilon_{k,j}^{(\mu)}\right) << 1, \qquad (\nu,\mu=l,c,\lambda).$$

Изменение во времени температуры диссипатора M_k:

$$\widetilde{T}_{k,j}(\tau)=T_{k,j-1}+\left(T_{k,j}-T_{k,j-1}\right)\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right)=T_{k,j-1}+\Delta T_{k,j}\left(\frac{\tau}{\tau_j}\right),$$

$$\mathrm{d}\,\widetilde{T}_{k,j}=\Delta T_{k,j}\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau_j}. \qquad (7.38)$$

Аккумулируемое (теряемое) M_k на j-м цикле тепло:

$$\Delta Q_{k,j}=S_0\int_0^{\tau_j} l_{k,j}(\tau)c_{V,k,j}(\tau)\,\mathrm{d}\,\widetilde{T}_{k,j}=\Delta Q_{k,j-1}^{(0)}\cdot\Phi_{1,k}^{(j)},$$

$$\Delta Q_{k,j-1}^{(0)}=S_0 l_{k,j-1}c_{V,k,j-1}\Delta T_{k,j}, \qquad \Phi_{1,k}^{(j)}=1+0{,}5\left(\varepsilon_{k,j}^{(l)}+\varepsilon_{k,j}^{(c)}\right). \quad (7.39)$$

Потоковое тепло:

$$\Delta Q_{k,j}^{(+)}=S_0\tau_j\left[\left\langle q_{k,j}^{(+)}\right\rangle-\left\langle q_{k,j}^{(-)}\right\rangle\right], \qquad (7.40)$$

где

$$\left\langle q_{k,j}^{(+)}\right\rangle=\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\frac{\left[\widetilde{T}_{k+1,j}(\tau)-\widetilde{T}_{k,j}(\tau)\right]}{R_{k,k+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau,$$

$$\left\langle q_{k,j}^{(-)}\right\rangle = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\frac{\left[\widetilde{T}_{k,j}(\tau)-\widetilde{T}_{k-1,j}(\tau)\right]}{R_{k-1,k}(\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau,$$

$$\widetilde{R}_{k-1,k}(\tau)=\frac{1}{2}\left(\widetilde{\rho}_{k-1,j}(\tau)+\widetilde{\rho}_{k,j}(\tau)\right), \qquad \widetilde{\rho}_{k,j}(\tau)=\frac{l_{k,j}(\tau)}{\lambda_{k,j}(\tau)}. \tag{7.41}$$

С учетом (7.37)–(7.41)

$$\left\langle q_{k,j}^{(+)}\right\rangle = \frac{\overline{T}_{k+1,j}-\overline{T}_{k,j}}{R_{k,k+1}^{(j-1)}}-\left(\frac{T_{k+1,j-1}-T_{k,j-1}}{2}+\frac{\Delta T_{k+1,j}-\Delta T_{k,j}}{3}\right)\Phi_{2,k+1}^{(j)},$$

$$\left\langle q_{k,j}^{(-)}\right\rangle = \frac{\overline{T}_{k,j}-\overline{T}_{k-1,j}}{R_{k-1,k}^{(j-1)}}-\left(\frac{T_{k,j-1}-T_{k-1,j-1}}{2}+\frac{\Delta T_{k,j}-\Delta T_{k-1,j}}{3}\right)\Phi_{2,k-1}^{(j)}, \tag{7.42}$$

где

$$\Phi_{2,k+1}^{(j)}=\frac{\rho_{k,j-1}\left(\varepsilon_{k,j}^{(l)}-\varepsilon_{k,j}^{(\lambda)}\right)+\rho_{k+1,j-1}\left(\varepsilon_{k+1,j}^{(l)}-\varepsilon_{k+1,j}^{(\lambda)}\right)}{2\left(R_{k,k+1}^{(j-1)}\right)^2},$$

$$\Phi_{2,k-1}^{(j)}=\frac{\rho_{k-1,j-1}\left(\varepsilon_{k-1,j}^{(l)}-\varepsilon_{k-1,j}^{(\lambda)}\right)+\rho_{k,j-1}\left(\varepsilon_{k,j}^{(l)}-\varepsilon_{k,j}^{(\lambda)}\right)}{2\left(R_{k-1,k}^{(j-1)}\right)^2},$$

$$R_{k-1,k}^{(j-1)}=\frac{1}{2}\left(\rho_{k-1,j-1}+\rho_{k,j-1}\right). \tag{7.43}$$

Подставляя найденные выражения в уравнение баланса в M_k

$$\Delta Q_{k,j}=\Delta Q_{k,j}^{(+)},$$

получим:

$$\left(\frac{2\tau_{rk,j-1}}{\tau_j}\Phi_{1,k}^{(j)}\right)\Delta T_{k,j}=\underset{(k)}{\Delta_2}\left[\left(\gamma_k^{(j-1)}-E_k^{(j)}\right)\overline{T}_{k,j}\right]+\frac{1}{4}\underset{(k)}{\Delta_2}\left(E_k^{(j)}\,T_{k,j-1}\right). \tag{7.44}$$

Здесь обозначено:

$$\tau_{rk,j-1}=\frac{l_{k,j-1}^{(2)}}{2a_{k,j-1}}, \qquad \gamma_{k-1}^{(j-1)}=\frac{\rho_{k,j-1}}{R_{k-1,k}^{(j-1)}}, \qquad \gamma_{k+1}^{(j-1)}=\frac{\rho_{k,j-1}}{R_{k,k+1}^{(j-1)}},$$

$$2\,\gamma_k^{(j-1)}=\gamma_{k-1}^{(j-1)}+\gamma_{k+1}^{(j-1)}, \qquad E_k^{(j)}=\frac{2}{3}\rho_{k,j-1}\,\Phi_{2,k-1}^{(j)},$$

$$E_{k+1}^{(j)}=\frac{2}{3}\rho_{k,j-1}\,\Phi_{2,k+1}^{(j)}, \qquad 2\,E_{k+1}^{(j)}=E_{k-1}^{(j)}+E_{k+1}^{(j)}. \tag{7.45}$$

Если параметры диссипатора во время j-го цикла постоянны, но скачкообразно меняются при $\tau = \tau_j$, принимая значения $\nu_{k,j+1}$ ($\nu = l, c_V, \lambda$), то величины $\varepsilon_{k,j}^{(\nu)}$ обращаются в нули. Тогда, согласно (7.43) и (7.45) в нули обращаются и величины:

$$\Phi_{2,k+1}^{(j)} = \Phi_{2,k-1}^{(j)} = E_{k+1}^{(j)} = E_{k-1}^{(j)} = 0. \tag{7.46}$$

Как следует из (7.39), тогда $\Phi_{1,k}^{(j)} = 1{,}0$ и уравнение (7.44) переходят в уравнение (7.33), отличаясь лишь индексом «j» у параметров.

Если при $\tau = \tau_j$ параметры скачкообразно не изменяются, оставаясь постоянными, то индекс «j» может быть опущен и совпадение редуцированного уравнения (7.44) с уравнением для неоднородной цепочки (7.33) будет полным. Уравнение (7.44) может быть, как это уже было сделано ранее для однородных и неоднородных цепочек, приведено к виду, содержащему не средние температуры, а приращения температур на j-м цикле:

$$\tilde{a}_{k,k-1}^{(j)} \mathrm{X}_{k-1,j} + \tilde{a}_{k,k}^{(j)} \mathrm{X}_{k,j} + \tilde{a}_{k,k+1}^{(j)} \mathrm{X}_{k+1,j} = \tilde{b}_{k,j}, \tag{7.47}$$

где:

$$\tilde{a}_{k,k-1}^{(j)} = -\left(\gamma_{k-1}^{(j-1)} - E_{k-1}^{(j)}\right); \qquad \tilde{a}_{k,k+1}^{(j)} = -\left(\gamma_{k+1}^{(j-1)} - E_{k+1}^{(j)}\right);$$

$$\tilde{a}_{k,k}^{(j)} = 2\left[\left(\frac{\tau_{rk,j-1}}{\tau_j}\right)\Phi_{1,k}^{(j)} + \left(\gamma_k^{(j-1)} - E_k^{(j)}\right)\right];$$

$$\tilde{b}_{k,j} = \frac{2}{\Delta T_0} \underset{(k)}{\Delta_2} \left[\left(\gamma_k^{(j-1)} - \frac{3}{4} E_k^{(j)}\right) T_{k,j-1}\right]. \tag{7.48}$$

Соответствующая системе (7.47) матрица трехдиагональна, ее элементы при обнулении $\varepsilon_{k,j}^{(\nu)}$ переходят в элементы матрицы $\overline{A}_j$ системы (7.34).

Задача 19. Цепочка переменной длины. Кроме рассмотренной нестационарной цепочки, общая длина которой изменяется со временем за счет изменения параметров $l_{0,k}(\tau)$ (длин) диссипаторов, возможен случай цепочки переменной длины и при $l_{0,k} = \mathrm{const}$ $(k = \overline{1, N_1})$. Он реализуется, если один (или оба) из концов цепочки удлиняются (укорачиваются) при присоединении (или «отрезании») к цепочке еще одного (или более) диссипатора. Соответственно будем говорить об удлиняющейся и об укорачивающейся цепочке. Аналогом этих операций в K-модели служат краевые задачи типа Стефана, которыми моделируют процессы с подвижным фронтом фазового перехода, процессы напыления пленок на подложки, срезания микрослоев лазером, роста окисных пленок и т.п.

Рассмотрим цепочку $\{M_k\}$ ($k=\overline{1,N_1}$) после окончания ($j-1$)-го цикла. Цепочка однородна, $l_{0,k}=l_0=\text{const}$. Температуры, поддерживаемые Боргартоном на левой границе M_1 и правой M_{N_1} равны, соответственно, T_{S_1} и T_{S_2}. Диссипаторы имеют температуры $T_{k,j-1}$. Считаем левый конец цепочки неподвижным, т.е. к нему не присоединяются, в ходе дальнейшего процесса, другие диссипаторы, а сам M_1 – не «отрезается». Для правого конца цепочки рассмотрим случаи: 1) удлинение цепочки – присоединение к диссипатору M_{N_1} справа диссипатора M_{N_1+1}, затем – M_{N_1+2} и т.д.; 2) укорачивание цепочки – «отрезание» от нее M_{N_1}, затем M_{N_1-1} и т.д.

1) Удлинение цепочки. Осуществляется при мгновенном присоединении к ней в момент $\tau=0$ j-го цикла, справа диссипатора M_{N_1+1}, имеющего температуру $T_{S_2,j}$ (изменяющуюся на j-м цикле как $\widetilde{T}_{S_2}(\tau)$ при $\tau\in(0,\tau_j)$). На правой границе M_{N_1+1} при этом поддерживается температура $T_{S_2,j}$. Выпишем уравнения балансов в M_{N_1} и M_{N_1+1} на j-м цикле.

$$\Delta Q_{N_1,j}=S_0 l_0 c_V \Delta T_{N_1,j}=\Delta Q^{(+)}_{N_1,j}-\Delta Q^{(-)}_{N_1,j}=$$
$$=S_0\tau_j\left[\left\langle q^{(+)}_{(N_1+1)-N_1,j}\right\rangle-\left\langle q^{(-)}_{N_1-(N_1-1),j}\right\rangle\right]. \tag{7.49}$$

$$\Delta Q_{N_1+1,j}=S_0 l_0 c_V \Delta T_{N_1+1,j}=\Delta Q^{(+)}_{N_1+1,j}-\Delta Q^{(-)}_{N_1+1,j}=$$
$$=S_0\,\tau_j\left[\left\langle q^{(+)}_{S_2,j}\right\rangle-\left\langle q^{(-)}_{(N_1+1)-N_1,j}\right\rangle\right]. \tag{7.50}$$

Здесь обозначены:

$$\left\langle q^{(+)}_{(N_1+1)-N_1,j}\right\rangle=\frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{N_1+1,j}-\overline{T}_{N_1,j}\right);\quad \left\langle q^{(-)}_{N_1-(N_1-1),j}\right\rangle=\frac{\lambda}{l_0}\left(\overline{T}_{N_1,j}-\overline{T}_{N_1-1,j}\right);$$

$$\left\langle q^{(+)}_{S_2,j}\right\rangle=\frac{\lambda}{l_0/2}\left(\overline{T}_{S_2,j}-\overline{T}_{N_1+1,j}\right). \tag{7.51}$$

Из (7.19) при $k=N_1$, с учетом того, что $T_{N_1+1,j-1}=T_{S_2,j}$, следует (7.16). Балансовое уравнение (7.50) преобразуется к виду:

$$-\mathrm{X}_{N_1,j}+(R_j+1)\mathrm{X}_{N_1+1,j}=\widetilde{b}_{N_1+1,j}, \tag{7.52}$$

отличающемуся от (7.19) заменой $N_1 \to N_1 + 1$ и видом правой части:

$$\widetilde{b}_{N_1+1,j} = \frac{2}{\Delta T_0}\left(T_{N_1,j-1} - T_{S_2,j-1}\right). \tag{7.53}$$

Таким образом, на j-м цикле, при котором цепочка удлиняется за счет присоединения к ее правому концу диссипатора M_{N_1+1}, все уравнения цепочки (т.е. при $k = \overline{1, N_1 + 1}$) имеют обычный вид, кроме последнего, ($N_1 + 1$)-го уравнения, в котором видоизменяется правая часть, определенная теперь по (7.53). Пусть динамика удлинения цепочки, т.е. подсоединения диссипаторов M_{N_1+p} (p =1,2, ...) задана. Тогда величину τ_j можно выбрать так, чтобы подсоединение M_{N_1+2} к M_{N_1+1} произошло в момент времени $\tau = \tau_j$. При этом описание (j+1)-го цикла будет осуществляться системой уравнений того же вида, что и j-го цикла, но на единицу большего порядка. Пусть динамика присоединения диссипаторов задана в виде:

$$\vartheta_D = \vartheta_D^{(+)} = \vartheta_D^{(+)}(t). \tag{7.54}$$

Функция $\vartheta_D^{(+)}(t)$ изменяется ступенчато: $\vartheta_D^{(+)}(t_{j-1}) = \vartheta_j^{(+)} = \text{const}$, $\vartheta_j^{(+)} \neq \vartheta_{j+1}^{(+)}$. При этом и $\tau_{j+1} \neq \tau_j$ и т.д. Параметр τ_j определяем условием

$$\vartheta_j^{(+)} = \frac{l_0}{\tau_j}. \tag{7.55}$$

Если $\vartheta_j^{(+)} = \vartheta_0^{(+)} = \text{const}$ при всех j, то и все τ_j одинаковы:

$$\tau_j = \tau_0 = \frac{l_0}{\vartheta_0^{(+)}}, j = \overline{1, J}. \tag{7.56}$$

Подстановка (7.56) в выражение для R_j (7.17) дает:

$$a_{k,k}^{(j)} = \begin{cases} R_j, & k = \overline{2, N_1}, \\ R_{j+1}, & k = 1, \quad k = N_1 + 1, \end{cases} \qquad R_j = 2\left(\frac{l_0\,\vartheta_0^{(+)}}{a} + 1\right). \tag{7.57}$$

2) Укорачивание цепочки – «отрезание» от ее правого конца на каждом шаге одного диссипатора $M_{N_1}, M_{N_1-1}, M_{N_1-2}$ и т.д.) описывается аналогично. Уравнения имеют тот же вид, только вместо скорости удлинения цепочки $\vartheta_0^{(+)}$ вводится скорость укорачивания $\vartheta_0^{(-)}$, имеющая ту же величину ($\vartheta_0^{(-)} = l_0/\tau_0$), но противоположно направленная. Порядок системы уравнений на каждом цикле уменьшается на единицу.

§24. Нелинейные цепочки

Рассматриваем два вида нелинейностей: 1) зависимость от температуры параметров диссипатора – $l_0 = l_0(T)$, $c_V = c_V(T)$, $\lambda = \lambda(T)$; 2) нелинейность типа Стефана – при фазовом переходе, распространяющемся вдоль диссипаторной цепочки.

В первом случае нелинейная задача сводится к задаче с нестационарными параметрами (см. задачу 5 в §19), причем при n = 1,0 хроногенерации нелинейного и нестационарного диссипаторов совпадают (см. (6.46) и далее). В задаче 11 §19 было показано, что совпадение D-периодов нелинейного и линейного сильных диссипаторов достигается при скачкообразном изменении параметров диссипатора в конце каждого j-го цикла (т.е. при $\tau = \tau_j$). Из УДЦ (7.44) следует, что для расчета приращений температуры каждого из диссипаторов на j-м шаге, необходимо знать значения параметров данного диссипатора (и всех других!) в конце этого шага, т.е. величины $l_{0k}(\tau_j)$, $c_{Vk}(\tau_j)$, $\lambda_k(\tau_j)$ ($k = \overline{1, N_1}$). Если мы рассматриваем нестационарную цепочку, то эти функции предполагаются заданными (т.е. вычисленными для всех $\tau = \tau_j$ по заданным глобальным зависимостям $l_{0k}(\tau)$, $c_{Vk}(\tau)$, $\lambda_k(\tau)$). В случае же нелинейной цепочки значения параметров могут быть найдены только по значениям температур в конце цикла, но последние как раз и неизвестны и подлежат определению. Поэтому для нелинейных цепочек единственным практически реализуемым способом решения (7.44) является тот, при котором изменение параметров происходит скачкообразно в конце цикла. Тогда приращения температур в момент $\tau = \tau_j$ находятся по значениям параметров, найденных при $\tau = \tau_{j-1}$, т.е. в конце предыдущего цикла. Этот метод можно назвать методом локальной линеаризации (ЛЛ). Метод ЛЛ, практически **вынужденный**, в то же время и **обоснованный** – он обеспечивает совпадение хроногенераций нестационарного и нелинейного диссипаторов (и слабого, и сильного).

По методу ЛЛ в нелинейном случае УДЦ следует из (7.44), где надо положить $\nu_{k,j} = \nu_{k,j-1}$ ($\nu = l, c_V, \lambda$), что приводит к обнулению все $\varepsilon_{k,j}^{(\nu)}$ и выполнению равенств (7.46). В итоге получаем уравнение (7.33) с индексом «j–1». Расчеты по уравнению (7.34), эквивалентному (7.33), осуществляются пошагово, при значениях параметров, найденных по температурам в конце предыдущего цикла.

Во втором случае – стефановской цепочки (СЦ) – примем следующие предположения. СЦ состоит из диссипаторов $\{M_k\}$ ($k = \overline{1, N_1}$), из которых в момент времени $\tau = 0$ (в начале j-го шага) все M_i при $i < k$ ($i = \overline{1, k-1}$) находятся в фазе 1 с параметрами l_1, c_{V1}, λ_1, $a_1 = \lambda_1 / c_{V1}$. На внешней границе M_1 задана (поддерживается Боргартоном) температура T_{S1}. Все диссипаторы M_ν при $\nu > k$ ($\nu = \overline{k+1, N_1}$) находятся в фазе 2 с параметрами l_2, c_{V2}, λ_2,

$a_2 = \lambda_2 / c_{V2}$. Температура на внешней границе диссипатора M_{N_1} обеспечивается Боргартоном – $T_{S2} > T_{S1}$. Диссипатор M_k находится в «промежуточном» состоянии, его температура $T_{k,j-1} = T_ф$ ($T_ф$ – температура фазового перехода), а параметры соответствуют фазе 1. Температуры остальных диссипаторов – $T_{i,j-1}$ $(i \neq k)$, причем при $i = \overline{1, k-1}$ они меньше $T_ф$, а при $i = \overline{k+1, N_1}$ – больше $T_ф$.

За D-период $\tau \in (0, \tau_j)$ под действием теплопритоков, обусловленных разностью между поступившим $\left(\Delta Q_ф^{(+)} = S_0 \tau_j \left\langle q_ф^{(+)} \right\rangle\right)$ и отведенным $\left(\Delta Q_ф^{(-)} = S_0 \tau_j \left\langle q_ф^{(-)} \right\rangle\right)$ теплом в M_k фаза 1 превратится в фазу 2 при изменении параметров M_k ($l_1 \to l_2$, $c_{V1} \to c_{V2}$, $\lambda_1 \to \lambda_2$, $a_1 \to a_2$), причем $T_{k,j}(\tau) = T_{k,j-1} = T_ф = \text{const}$. При $\tau = 0$ СЦ можно представить как две цепочки: $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ $(\nu = \overline{1, k-1})$ и $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$ $(\nu = \overline{1, k+1})$, сопряженными между собой через «промежуточный диссипатор M_k. Пусть начальные и граничные условия были таковы, что на j-м шаге от диссипатора M_k отводится к цепочке $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ больше тепла, чем поступает его в M_k из цепочки $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$:

$$\Delta Q_ф^{(-)} - \Delta Q_ф^{(+)} = \Delta Q_L = S_0 \rho_1 L l_1. \tag{7.58}$$

Здесь: ΔQ_L – разница отведенного и подведенного количеств тепла; L – удельная скрытая теплота фазового перехода (затвердевание расплава); ρ_1 – плотность фазы 1. Условие (7.58) есть дискретный аналог известного условия Стефана – граничного условия, задаваемого на границе фазового перехода в соответствующей K-модели. В момент $\tau = \tau_j$ оказывается, что цепочка $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ увеличилась на один диссипатор – M_k – «подсоединившейся» к ней. Цепочка $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$, напротив, потеряла один диссипатор, который «отрезали». Таким образом, задача для СЦ сводится к двум задачам – об удлиняющейся цепочке $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ и укорачивающейся $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$. Однако есть отличие: в задачах «удлинения и укорачивания» интервал τ_j для j-го шага задавался по формуле (7.55) (или, при постоянной скорости трансформации цепочки, по формуле (7.56)), в которой $\vartheta_j^{(+)}$ считалась известной величиной. В задаче для СЦ скорость фазового перехода $\vartheta_ф^{(j)}$ заранее не известна, а определяется в ходе решения задачи. Поэтому в системах уравнений для обеих цепочек $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ и $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$ имеется на одну неизвестную величину больше, чем число уравнений в них. Эта неизвестная

$$R_j = 2\left(\frac{l_1\,\vartheta_{\text{ф}}^{(j)}}{a_1} + 1\right), \qquad \vartheta_{\text{ф}}^{(j)} = \frac{l_1}{\tau_j}, \tag{7.59}$$

где $\vartheta_{\text{ф}}^{(j)}$ – скорость присоединения («отрезания») диссипатора M_k на j-м шаге. В качестве дополнительного условия – уравнения, содержащего неизвестную $\vartheta_{\text{ф}}^{(j)}$ (или τ_j) используется (7.58). Цепочка $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ описывается системой из ($k-1$)-го уравнения, цепочка $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$ – системой из ($N_1 - k$) уравнений относительно неизвестных $\left\{X_{\nu,j}\right\}$ ($\nu = \overline{1, k-1}$, $\nu = \overline{k+1, N_1}$) и R_j, т.е. N_1 неизвестных. Из числа неизвестных выпадает $X_{k,j}$, так как температура диссипатора M_k – $T_{\text{ф}} = \text{const}$. N_1-м уравнением, замыкающим систему, позволяющим разрешить ее, является (7.58), явный вид которого:

$$\rho_1 L\,\vartheta_{\text{ф}}^{(j)} = T_{\text{ф}}\left(\frac{\lambda_1}{l_1} + \frac{\lambda_2}{l_2}\right) - \left(\frac{\lambda_1}{l_1}\overline{T}_{k-1,j} + \frac{\lambda_2}{l_2}\overline{T}_{k+1,j}\right). \tag{7.60}$$

Это уравнение содержит одну неизвестную – $\vartheta_{\text{ф}}^{(j)}$, так как $T_{\text{ф}}$ известно, а $\overline{T}_{k-1,j}$ и $\overline{T}_{k+1,j}$ выражается через $\vartheta_{\text{ф}}^{(j)}$ в ходе решения систем $\left\{M_\nu^{(1)}\right\}$ и $\left\{M_\nu^{(2)}\right\}$. Описанный алгоритм решения задачи для СЦ является схемой, конкретная реализация которой возможна лишь численно и требует дальнейшей конкретизации условий задачи.

ГЛАВА 8. КОНТИНУАЛИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Числа, которые физик измеряет в опыте, всегда бывают ему известны лишь приближенно; с другой стороны, произвольная функция всегда сколь угодно мало отличается от некоторой прерывной функции ... и от непрерывной функции ... Физик может по произволу предполагать ее прерывной или непрерывной

А. Пуанкаре

Оперирование с бесконечным может стать надежным только через конечное

Д. Гильберт

§25. Квазилокальные уравнения

При рассмотрении цепочек из диссипаторов были получены уравнения двух типов: разностные, содержащие средние за цикл температуры (7.13), (7.26), (7.33), (7.44) и разностные безразмерные, содержащие приращения температур за цикл (7.16), (7.29(, (7.34), (7.47). Эти уравнения эквивалентны в том смысле, что уравнения второго типа следуют из уравнений первого типа при выполнении справедливого при n = 1,0 соотношения:

$$\overline{T}_{k,j} = T_{k,j-1} + \frac{\Delta T_{k,j}}{2}.$$

Уравнения второго типа составляют основу Боргартоники, в рамках которой используются алгебраические уравнения и дискретные временные шаги τ_j. Однако в ряде случаев предпочтительнее иметь приближенные, но аналитические решения уравнений в частных производных – K-моделей исследуемых систем. Такие K-модели (различных приближений) могут быть получены из уравнений первого типа (7.13), (7.26), (7.33), (7.44).

K-модели могут быть локальными и нелокальными; первые содержат в уравнениях только дифференциальные операторы (целые), вторые – интегральные и интегро-дифференциальные. Поскольку интегральные операторы часто могут быть представлены бесконечными рядами, из производных возрастающих порядков, к «усеченным» (приближенным) нелокальным моделям относят те, которые в уравнениях содержат члены с производными более высокого порядка, чем в «родственных» локальных моделях (пример – гиперболическое уравнение теплопроводности, содержащее вторую производную по времени). Далее будет показано, что из разностных уравнений со средними температурами (первого типа) могут быть получены эквивалентные им полные K-модели – уравнения в частных производных бесконечного порядка и K-приближения нулевого, первого и последующих порядков дискретных уравнений. Последние будем называть квазилокальными уравнениями (вместо «усеченные» уравнения). Порядок квазилокального уравнения определяется максимальной степенью малого параметра – сомножителя производной по времени порядка выше первого, имеющего размерность времени. Этот параметр оказывается совпадающим с τ_r – собственным временем слабого диссипатора. Классическое (параболическое) уравнение Фурье при этом получено как нулевое приближение полной K-модели.

Задача 20. *K*-модель однородной цепочки. Получим полную K-модель и первые приближения ее для однородной цепочки на основе (7.13), которое запишем в виде:

$$\left(\frac{l_0^2}{a\tau_j}\right)\Delta T_{k,j} = \underset{(k)}{\Delta_2}\left(\overline{T}_{k,j}\right), \qquad \underset{(k)}{\Delta_2}\left(\overline{T}_{k,j}\right) = \overline{T}_{k-1,j} - 2\overline{T}_{k,j} + \overline{T}_{k+1,j}. \qquad (8.1)$$

Переход к K-модели осуществляем на основе соответствий:

$$T_{k,j-1} \to T(x,t), \quad T_{k,j} \to T(x,t+\tau_j), \quad T_{k+1,j-1} \to T(x+l_0,t). \qquad (8.2.)$$

Имеем:

$$\overline{T}_{k,j} = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} T(x,t+\tau)\mathrm{d}\tau = \left[1 + \frac{\tau_j}{2}\partial_t + \frac{\tau_j^2}{6}\partial_t^2 + \ldots\right]T(x,t) = D_t T(x,t). \quad (8.3)$$

$$\overline{T}_{k-1,j} = D_t T(x-l_0,t), \qquad \overline{T}_{k+1,j} = D_t T(x+l_0,t), \qquad (8.4)$$

$$\underset{(k)}{\Delta_2}\left(\overline{T}_{k,j}\right) = D_t\left(T(x-l_0,t) - 2T(x,t) + T(x+l_0,t)\right) = D_t D_x T(x,t), \quad (8.5)$$

$$D_x T(x,t) = 2a\tau_r\left(\partial_x^2 + \frac{l_0^2}{12}\partial_x^4 + \ldots\right)T(x,t). \qquad (8.6)$$

В приведенных формулах осуществлено разложение в ряды Тейлора по степеням τ_j и l_0 с последующей записью в операторном виде. Для $\Delta T_{k,j} = T_{k,j} - T_{k,j-1}$ имеем:

$$\Delta T_{k,j} \to T(x,t+\tau_j) - T(x,t) = \left[\tau_j\partial_t + \frac{\tau_j^2}{2}\partial_t^2 + \ldots\right]T(x,t). \qquad (8.7)$$

Положим $\tau_j = l_0^2/a = 2\tau_r$. Тогда левая и правая части (8.1) будут определяться (8.7) и (8.5) соответственно при $\tau_j = 2\tau_r$ в них. Полученное полное уравнение K-модели имеет вид:

$$\left[\left(\partial_t + \tau_r\,\partial_t^2 + \ldots\right) - a\left(\partial_x^2 + \frac{a}{6}\tau_r\,\partial_x^4 + \ldots\right)\left(1 + \tau_r\,\partial_t + \frac{2}{3}\tau_r^2\partial_t^2 + \ldots\right)\right]T(x,t) = 0. \quad (8.8)$$

При характерных временах процесса теплопереноса, меньших или одного порядка с τ_r, необходимо использовать уравнение (8.1) или его K-аналог (8.8). По мере возрастания этого характерного времени в (8.8) можно отбрасывать члены с высокими степенями τ_r, оставляя члены с низкими степенями. Для характерных времен порядка $\tau_1^* >> \tau_r$ можно отбросить члены с τ_r, τ_r^2, и т.д., что дает **нулевое приближение** – уравнение Фурье. При характерных временах порядка $\tau_2^* < \tau_1^*$ необходимо оставить члены с τ_r, при еще меньших – τ_r и τ_r^2 и т.д., т.е. получаем первое, второе и последующие K-приближения полной K-модели (8.8). Уравнение первого приближения следует из (8.8) при $\tau_r^m = 0\ (m \geq 2{,}0)$:

$$\left(1 + \tau_r\,\partial_t\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) - \frac{a^2}{6}\tau_r\,\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = 0. \quad (8.9)$$

Второе приближение, следующее из (8.8) при $\tau_r^s = 0\ (s \geq 3{,}0)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{a}{6}\tau_r\left[6\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + a\,\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right] +$$

$$+\frac{a}{6}\tau_r^2\left[a\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right) + 4\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\right]. \quad (8.10)$$

Оценка порядка величины членов (8.9), содержащих четвертую и вторую производные по координате, показывает, что первый из них на два порядка меньше второго. Это позволяет ввести «0,5-приближение», отбросив в (8.9) последний член, что дает:

$$\left(1 + \tau_r\,\partial_t\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) – второго порядка по t, поэтому начальные условия задачи Коши для него:

$$T(x,0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x). \quad (8.12)$$

Следовательно решение (8.11) не совпадает с решением уравнения во вторых скобках (т.е. с решением уравнения Фурье). Обозначим:

$$\frac{\partial T}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=F(x,t)\neq 0. \tag{8.13}$$

Тогда подстановка (8.13) в (8.11) и решение последнего дают:

$$F(x,t)=F(x,0)\exp(-t/\tau_r), \qquad F(x,0)=\Psi(x)-a\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}. \tag{8.14}$$

Функция $T(x,t)$ теперь легко находится из решения неоднородного уравнения (8.13), где правая часть дана (8.14). «Источник тепла» $F(x,t)$ обусловлен начальной неоднородностью температуры и скорости ее изменения; он имеет релаксационный характер и при $t=3\tau_r$ составляет менее 5% своей первоначальной величины, а при $t=6\tau_r$ – менее 0,25%.

Задача 21. Двумерное $\boldsymbol{K}$-приближение. Для дискретного уравнения двумерной цепочки (7.26) переход к K-модели осуществляется аналогично. Уравнение первого приближения имеет вид:

$$\left[(1+\tau_r\,\partial_t)(\partial_t-a\nabla^2)-\frac{a^2}{3}\tau_r(\partial_x^4+\partial_y^4)\right]T(x,t)=0, \tag{8.15}$$

а второго:

$$\left[\left(1+\tau_r\,\partial_t+\frac{2}{3}\tau_r^2\partial_t^2\right)(\partial_t-a\nabla^2)-\frac{a^2}{3}\tau_r(1+\tau_r\,\partial_t)(\partial_x^4+\partial_y^4)\right]T(x,t)=0. \tag{8.16}$$

Здесь $\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2$. Оценка членов с ∂_x^4 и ∂_y^4 в (8.15) показывает, что и в этом случае можно выписать уравнение «0,5-приближения»:

$$(1+\tau_r\,\partial_t)\left(\frac{\partial T}{\partial t}-a\nabla^2 T\right)=0, \tag{8.17}$$

решение которого аналогично решению (8.11). Нулевое приближение в (8.15) вновь дает уравнение Фурье (двумерное).

Задача 22. **$\boldsymbol{K}$-модель неоднородной задачи.** В случае неоднородной цепочки , когда континуализация осуществляется на основе уравнения (7.33), более сложного, чем (7.13), требуются дополнительные относительно (8.2) соответствия D- и K-моделей. Для формулировки их предполагаем: 1) диаметры всех диссипаторов одинаковы: $l_{0k}=l_0$, $k=\overline{1,N_1}$; 2) функции $c_V=c_V(x)$ и $\lambda=\lambda(x)$, которыми аппроксимируются параметры c_{Vk} и λ_k, являются достаточно гладкими, что возможно, если ν_{k-1}, ν_k, ν_{k+1} ($\nu=c_V,\lambda$) отличаются друг от друга умеренно; 3) функция $a = a(x) = \lambda(x)/c_V(x)$ является непрерывной. Перепишем (7.33) в виде (8.1), положив $l_{0k} = l_0$. Для параметров γ_ν ($\nu = k-1, k, k+1$) имеем:

$$\gamma_{k-1} = \frac{l_0}{\lambda_k}\frac{1}{R_{k-1,k}} = \frac{2}{1+\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}}; \quad \gamma_{k+1} = \frac{l_0}{\lambda_{k+1}}\frac{1}{R_{k,k+1}} = \frac{2}{1+\dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}}. \quad (8.18)$$

Формализуя второе предположение условием

$$\frac{1}{\lambda(x)}\frac{\mathrm{d}^2\lambda(x)}{\mathrm{d}x^2}\frac{l_0^2}{2} << 1,$$

указанные соответствия записываем в виде

$$\lambda_k \to \lambda(x), \qquad \lambda_{k-1} \to \lambda(x - l_0) \cong \lambda(x) - \frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\mathrm{d}x} l_0,$$

$$\lambda_{k+1} \to \lambda(x + l_0) \cong \lambda(x) + \frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\mathrm{d}x} l_0. \quad (8.19)$$

Подстановка (8.19) в (8.18) дает:

$$\gamma_{k-1} \to 1 - \gamma(x), \quad \gamma_{k+1} \to 1 + \gamma(x), \quad 2\gamma_k = \gamma_{k-1} + \gamma_{k+1} \to 2{,}0,$$

$$\gamma(x) = \frac{l_0}{2\lambda(x)}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}. \quad (8.20)$$

С учетом (8.1), (8.5) и (8.20) правую часть (7.33) получаем в виде

$$\underset{(k)}{\Delta_2}\left(\gamma_k \overline{T}_{k,j}\right) \to D_t\, D_x^{(\gamma)} T(x,t), \quad D_x^{(\gamma)} = 2\left(\mathrm{ch}\, l_0 \partial_x + \gamma(x)\, \mathrm{sh}\, l_0 \partial_x - 1\right). \quad (8.21)$$

Оператор $D_x^{(\gamma)}$ обобщает оператор D_x (8.6) для однородной цепочки и переходит в него при $\lambda = \mathrm{const}$ ($\gamma(x) = 0$):

$$D_x^{(\gamma)} \to D_x^{(0)} = D_x = 2(\mathrm{ch}\, l_0 \partial_x - 1) = 2a\,\tau_r\left(\partial_x^2 + \frac{l_0^2}{12}\partial_x^4 + \ldots\right)$$

Левая часть уравнения (7.33) преобразуется аналогично (8.7) и после несколько громоздких вычислений получаем уравнение первого приближения:

$$L^{(1)} T(x,t) = \left(1 + \tau_r\, \partial_t\right)\left[c_V(x)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$\tau_r = \tau_r(x) = \frac{l_0^2}{2a(x)}. \tag{8.22}$$

Уравнение второго приближения имеет вид:

$$\left\{L^{(1)} - \frac{\tau_r^2(x)}{3c_V(x)}\left[\partial_t \partial_x \left(\frac{\lambda^2}{2}\partial_x^3\right) + 2c_V(x)\partial_t^2 \partial_x(\lambda(x)\partial_x)\right]\right\}T(x,t) = 0, \tag{8.23}$$

где $L^{(1)}$ – оператор первого приближения согласно (8.22). Уравнение нулевого приближения следует из (8.22) при $\tau_r = 0$ и совпадает с уравнением Фурье для неоднородной среды:

$$c_V(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{8.24}$$

Задача 23. *K*-модель нестационарной цепочки. Континуализация уравнения для нестационарной неоднородной цепочки (7.44) (и одновременно, как показано в §24, для нелинейной) осуществляется уже продемонстрированными способами, но более громоздка. Поэтому сразу выписываем конечный вид полученного уравнения, ограничиваясь первым приближением:

$$\left(1+\tau_r\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\frac{\partial T}{\partial t} - a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]\right\} + \tau_r\left\{\left(\frac{1}{lc}\frac{\partial(lc)}{\partial t}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + a\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right]\right\} = 0, \tag{8.25}$$

где $l = l(x,t)$, $\lambda = \lambda(x,t)$, $c = c_V = c(x,t)$, $a = a(x,t) = \lambda(x,t)/c(x,t)$, $\tau_r = \tau_r(x,t) = l^2(x,t)/2a(x,t)$. При $\tau_r = 0$ из (8.25) следует нулевое приближение для неоднородной нестационарной цепочки:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right] = 0. \tag{8.26}$$

В случае $l = l_0 = \mathrm{const}$, $\lambda = \lambda_0 = \mathrm{const}$ из (8.26) следует (7.14).

Уравнение (8.25) содержит в себе 14 основных частных уравнений, соответствующих различным комбинациям зависимостей параметров l, c, λ от координат и времени. Классификация этих частных моделей (вариантов) приведена в табл. 5, а соответствующие этим вариантам квазилокальные уравнения теплопереноса, следующие из (8.25) – в табл. 6. Индекс «0» соответствует постоянным значениям параметров.

Таблица 5

Варианты моделей, обобщаемых (8.25)

№ варианта	Модели среды		
I. Неоднородная нестационарная среда, $\tau_r = \tau_r(x,t)$			
1	$l = l(x,t)$	$\lambda = \lambda(x,t)$	$c = c(x,t)$
2	$l = l(x,t)$	$\lambda = \lambda(x)$	$c = c(x)$
3	$l = l(x,t)$	$\lambda = \lambda(t)$	$c = c(t)$
4	$l = l(x,t)$	$\lambda = \lambda_0$	$c = c_0$
5	$l = l_0$	$\lambda = \lambda(x,t)$	$c = c(x,t)$
II. Неоднородная среда, $\tau_r = \tau_r(x)$			
6	$l = l(x)$	$\lambda = \lambda(x)$	$c = c(x)$
7	$l = l(x)$	$\lambda = \lambda(x)$	$c = c_0$
8	$l = l(x)$	$\lambda = \lambda_0$	$c = c(x)$
9	$l = l(x)$	$\lambda = \lambda_0$	$c = c_0$
10	$l = l_0$	$\lambda = \lambda(x)$	$c = c(x)$
III. Нестационарная среда, $\tau_r = \tau_r(t)$			
11	$l = l(t)$	$\lambda = \lambda(t)$	$c = c(t)$
12	$l = l(t)$	$\lambda = \lambda_0$	$c = c(t)$
13	$l = l(t)$	$\lambda = \lambda(t)$	$c = c_0$
14	$l = l(t)$	$\lambda = \lambda_0$	$c = c_0$
15	$l = l_0$	$\lambda = \lambda(t)$	$c = c(t)$

Таблица 6.

Квазифинитные уравнения (модели)

№ варианта по табл. 5	Вид уравнения
1	2
1	Уравнение (8.25)
2	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - \partial_x\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\partial_x T\right]\right\} + \tau_r l^{-1}\partial_t l \partial_t T = 0$
3	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - l^{-1}\partial_x l \partial_x T\right]\right\}+$ $+\tau_r\left[(lc)^{-1}\partial_t(lc)\partial_t T + a\left(\left(\partial_t \ln\frac{l}{\lambda}\right)\partial_x^2 T + (l\lambda)^{-1}\partial_t\lambda\partial_x l\partial_t T\right)\right] = 0$
4	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - l^{-1}\partial_x l \partial_x T\right]\right\}+$ $+\tau r\left[l^{-1}\partial_t l \partial_t T + a\partial_x\left(l^{-1}\partial_t l \partial_x T\right)\right] = 0$
5	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - l^{-1}\partial_x l \partial_x T\right]\right\}+$ $+\tau_r\left\{c^{-1}\partial_t c \partial_t T - a\left[\partial_x\left(\lambda^{-1}\partial_t\lambda\partial_x T\right) + \lambda^{-2}\partial_t\lambda\partial_x\lambda\partial_x T\right]\right\} = 0$
6	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - \partial_x\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\partial_x T\right]\right\} = 0$
7	Соответствует варианту 6 при $c = c_0$
8	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - l^{-1}\partial_x l \partial_x T\right]\right\} = 0$
9	Соответствует варианту 8 при $c = c_0$
10	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left\{\partial_t T - a\left[\partial_x^2 T - \lambda^{-1}\partial_x \lambda \partial_x T\right]\right\} = 0$

1	2
11	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left(\partial_t T - a\,\partial_x^2 T\right)+$ $+\tau_r\left[(lc)^{-1}\partial_t(lc)\partial_t T + a\partial_t\left(\ln\dfrac{l}{\lambda}\right)\partial_x^2 T\right]=0$
12	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left(\partial_t T - a\,\partial_x^2 T\right)+$ $+\tau_r\left[(lc)^{-1}\partial_t(lc)\partial_t T + al^{-1}\partial_t l\,\partial_x^2 T\right]=0$
13	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left(\partial_t T - a\,\partial_x^2 T\right)+$ $+\tau_r\left[l^{-1}\partial_t l\partial_t T + a\partial_t\left(\ln\dfrac{l}{\lambda}\right)\partial_x^2 T\right]=0$
14	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left(\partial_t T - a\,\partial_x^2 T\right)+$ $+\tau_r\left(l^{-1}\partial_t l\partial_t T + al^{-1}\partial_t l\,\partial_x^2 T\right)=0$
15	$\left(1+\tau_r\,\partial_t\right)\left(\partial_t T - a\,\partial_x^2 T\right)+$ $+\tau_r\left(c^{-1}\partial_t c\partial_t T - a\lambda^{-1}\partial_t\lambda\,\partial_x^2 T\right)=0$

Задача 24. *K*-модель нелинейной цепочки. Первое приближение K-модели нелинейной цепочки может быть получено из (7.44), где необходимо совершить переходы

$$l_{0,k}\to l(T),\qquad c_{Vk}\to c(T),\qquad \lambda_k\to\lambda(T).$$

Другие параметры также принимают вид

$$a_k\to a(T)=\frac{\lambda(T)}{c(T)},\qquad \tau_{rk}\to\tau_r(T)=\frac{l^2(T)}{2a(T)}.$$

Опуская громоздкие, но аналогичные уже приведенным преобразования, выписываем первое приближение нелинейной K-модели:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\tau_r(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\tau_r(T)\left(\frac{1}{cl}\frac{\partial(cl)}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2-a(T)\left[\left(1-\tau_r\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(T+\tau_r\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\tau_r(T)\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\ln\frac{l}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\frac{\partial T}{\partial t}\right]=0. \quad (8.27)$$

Если в (8.27) все параметры положить постоянными, то получим

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0, \quad (8.28)$$

т.е. гиперболическое уравнение теплопроводности. Нулевое приближение, следующее из (8.27) при $\tau_r=0$:

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad (8.29)$$

т.е. совпадает с нелинейным уравнением Фурье.

Задача 25. *K*-модель цепочки переменной длины. Переход к первому приближению K-модели цепочек переменной длины (для удлиняющихся и укорачивающихся цепочек) осуществляется аналогично. Рассмотрим удлиняющуюся цепочку на основе уравнения (8.11). Положим, согласно (7.56):

$$\tau_r=\tau_{r\vartheta}^{(+)}=\frac{l_0}{2\vartheta^{(+)}}. \quad (8.30)$$

Уравнение (8.11) с учетом (8.30) справедливо при постоянной скорости удлинения цепочки, когда $\vartheta^{(+)}=\vartheta_0^{(+)}=\mathrm{const}$. При переменной скорости удлинения, когда $\vartheta^{(+)}=\vartheta^{(+)}(t)$ воспользуемся уравнением варианта 14 табл. 6 ($l\to l(t)$, $\lambda=\mathrm{const}$, $c=\mathrm{const}$), в котором положим

$$\tau_r=\tau_{r\vartheta}^{(+)}(t)=\frac{l_0}{2\vartheta^{(+)}(t)}=\frac{l(t)}{2\vartheta_0^{(+)}}, \qquad l(t)=l_0\left(\frac{\vartheta_0^{(+)}}{\vartheta^{(+)}(t)}\right). \quad (8.31)$$

Теперь уравнение варианта 14 табл. 6 принимает вид:

$$\left(1+\tau_{r\vartheta}^{(+)}(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)+\frac{\mathrm{d}\tau_{r\vartheta}^{(+)}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)=0. \quad (8.32)$$

Для случая укорачивания цепочки в (8.32) достаточно положить $\tau_{r\vartheta}^{(+)}=\tau_{r\vartheta}^{(-)}$, т.е. перейти $\vartheta^{(+)}(t) \to \vartheta^{(-)}(t)$. При быстром удлинении, когда $\tau_{r\vartheta}^{(+)} << t_*$ (t_* – характерное время процесса теплопроводности) от (8.32) можно перейти к приближению $\tau_{r\vartheta}^{(+)} \to 0$ (но $\tau_{r\vartheta}^{(+)} / \mathrm{d}\, t \neq 0$):

$$\left(1 + \frac{\mathrm{d}\,\tau_{r\vartheta}^{(+)}}{\mathrm{d}\,t}\right)\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(1 - \frac{\mathrm{d}\,\tau_{r\vartheta}^{(+)}}{\mathrm{d}\,t}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (8.33)$$

Формулировка граничных условий для K-модели удлиняющейся цепочки требует отдельного анализа. Пусть при $\tau = 0$ (в начале j-го цикла) к цепочке диссипаторов $\{M_k\}$, $k = \overline{1, N_1}$ присоединяется $(N_1 + 1)$-й диссипатор M_{N_1+1}. Тепловой баланс в нем:

$$\Delta Q_{N_1+1} = \Delta Q_{N_1+1}^{(+)}, \qquad \Delta Q_{N_1+1} = S_0 l_0 c_V \Delta T_{N_1+1,j},$$

$$\Delta Q_{N_1+1}^{(+)} = S_0 \tau_j \left[\left\langle q_{B-(N_1+1),j}^{(+)} \right\rangle - \left\langle q_{(N_1+1)-N_1,j}^{(-)} \right\rangle\right]. \qquad (8.34)$$

Имеем:

$$\left\langle q_{B-(N_1+1),j}^{(+)} \right\rangle = \frac{\lambda}{l_0/2}\left(\overline{T}_{S_2} - \overline{T}_{(N_1+1),j}\right) \to \overline{q}_L^{(+)}(t) =$$

$$= \frac{\lambda}{l_0/2}\left[\overline{T}_L(t) - \left(\overline{T}_L(t) - \frac{\partial \overline{T}_L}{\partial x}\frac{l_0}{2}\right)\right] = \lambda \frac{\partial \overline{T}_L}{\partial x}. \qquad (8.35)$$

Здесь: индекс «L» обозначает подвижную координату конца цепочки (ее длину $L = L(t)$); разница температур Боргартона и M_{N_1+1} разложена в ряд Тейлора с удержанием двух первых членов разложения. Для величины $\overline{T}_L(t)$ получаем, положив $\tau_j = 2\tau_{r\vartheta}^{(+)}$:

$$\overline{T}_L(t) = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} T_L(t+\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \cong T_L(t) + \frac{\partial T_L}{\partial t}\tau_{r\vartheta}^{(+)}. \qquad (8.36)$$

Подстановка (8.36) в (8.35) дает:

$$\overline{q}_L^{(+)}(t) = \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L(t)} + \tau_{r\vartheta}^{(+)} \frac{\partial}{\partial t}\left.\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x=L(t)} = q_0(t) + \tau_{r\vartheta}^{(+)}\frac{\mathrm{d}\,q_0}{\mathrm{d}\,t}. \qquad (8.37)$$

При присоединении диссипатора M_{N_1+1} к диссипатору M_{N_1}, температура первого из них близка к T_{S_2}, поэтому поток тепла к M_{N_1+1} от Боргартона мал. Полагая его приближенно равным нулю, получаем

$$q_0(t)+\tau_{r\vartheta}^{(+)}\frac{\mathrm{d}\,q_0}{\mathrm{d}\,t}=q_L^{(+)}(t)\cong 0. \qquad (8.38)$$

Решая уравнение (8.38) для случаев $\tau_{r\vartheta}^{(+)}=\tau_{r\vartheta}^{(+)}(t)$ и $\tau_{r\vartheta}^{(+)}=\tau_{r0}^{(+)}=\mathrm{const}$, находим соответственно:

$$q_0^{(\vartheta)}(t)=q_0(0)\exp\left(-\int_0^t\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\tau_{r\vartheta}^{(+)}(\tau)}\right), \qquad q_0^{(0)}(t)=q_0(0)\exp\left(-t\big/\tau_{r0}^{(+)}\right). \qquad (8.39)$$

Во втором случае граничный поток тепла быстро релаксирует, становясь близким к нулю при $t\geq 8\,\tau_{r0}^{(+)}$, т.е. подвижная граница становится адиабатической, имеющей температуру T_{S_2}. Граничное условие при $x=L(t)$ становится граничным условием I-го рода.

Задача 26. *D*- и *K*-модели с источниками тепла. В рассмотренных ранее D- и K-моделях не учитывались источники (стоки) тепла различной природы, весьма распространенные в реальных процессах. Восполним этот пробел, установив вид функций плотности источников тепла вначале для отдельного диссипатора, а затем и для ***K***-моделей. Полученные выражения будет достаточно добавить к правым частям ранее полученных уравнений.

Приращение количества тепла в диссипаторе, обусловленное действием в нем источника тепла с удельной плотностью $f_w(\tau)$ за период τ_w составляет:

$$\Delta Q_w=S_0 l_0\overline{f}_w\tau_w. \qquad (8.40)$$

При составлении теплового баланса (8.40) входит в правую часть его, суммируясь с $\Delta Q^{(+)}$.

Рассмотрим слабый диссипатор: $\Delta T_0=T_S-T_0$. Имеем баланс:

$$\Delta Q=\Delta Q^{(+)}+\Delta Q_w, \qquad S_0 l_0 c_V\,\Delta T_0=2S_0\tau_w\overline{q}^{(+)}+S_0 l_0\overline{f}_w\tau_w. \qquad (8.41)$$

Здесь:

$$\overline{q}^{(+)}=\frac{1}{\tau_w}\int_0^{\tau_w}\frac{\lambda}{l_0/2}\left(T_S-\widetilde{T}(\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau=\frac{\lambda\Delta T_0}{l_0}.$$

Отсюда с учетом (8.41) следует

$$\tau_w=\frac{\tau_r}{1+\left(\dfrac{\overline{f}}{c_V\Delta T_0}\right)\tau_r}, \qquad \tau_r=\frac{l_0^2}{2a}. \qquad (8.42)$$

При наличии стока тепла (когда $\overline{f}_w < 0$) τ_w возрастает с ростом $\left|\overline{f}_w\right|$, тогда как при $\overline{f}_w > 0$, как видно из (8.42) – убывает. Хроногенерация диссипатора, как видно, определяется величиной и знаком $\overline{f}_w$. Это справедливо и для сильного диссипатора; в этом случае вместо (8.42) имеем

$$\tau_{wk} = \tau_r\left[2(N-k)+1+\left(\frac{\overline{f}_{wk}}{c_V \Delta T_0}\right)\tau_r\right]^{-1}, \qquad (k=\overline{1, N_1}).$$

Определим явный вид $\overline{f}_w$ для частных случаев: 1) интенсивность источника тепла постоянна; 2) интенсивность изменяется линейно со временем; 3) интенсивность источника пропорциональна температуре; 4) в предыдущем случае коэффициент пропорциональности переменный; 5) интенсивность источника зависит от температуры нелинейно. Для двух первых случаев получаем:

$$\overline{f}_w = \frac{1}{\tau_w}\int_0^{\tau_w} \widetilde{f}_w(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \begin{cases} f_{w0} = \mathrm{const} & \text{в первом случае,} \\ \overline{f}_{w0} = \frac{1}{2}\left(f_w^{(1)} + f_w^{(2)}\right) & \text{во втором случае.} \end{cases} \tag{8.43}$$

В третьем случае, когда $\widetilde{f}_w(\tau) = \gamma\widetilde{T}(\tau)$ $(\gamma = \mathrm{const})$, $\overline{f}_w = \gamma\overline{T}$, где $\overline{T}$ – среднее значение температуры за период τ_w. В четвертом случае, когда $\widetilde{f}_w(\tau) = \gamma(\tau)\overline{T}(\tau)$:

$$\overline{f}_w = \frac{1}{\tau_w}\int_0^{\tau_w}\left[\gamma_1 + \Delta\gamma\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)\right]\left[T_0 + \Delta T_0\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)\right]\mathrm{d}\,\tau \cong \gamma_1 T_0\left[1+0{,}5\left(\varepsilon_\gamma + \varepsilon_T\right)\right], \tag{8.44}$$

где $\gamma_1 = \gamma(0)$, $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$, $\gamma_2 = \gamma(\tau_w)$, $\varepsilon_\gamma = \Delta\gamma/\gamma_1$, $\varepsilon_T = \Delta T_0/T_0$. В пятом случае полагаем:

$$f_w = f_w(T) = f_{w1} + \left(f_{w2} - f_{w1}\right)\left(\frac{\widetilde{T}(\tau) - T_0}{T_S - T_0}\right)^m = f_{w1} + \Delta f_w\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^m. \tag{8.45}$$

Тогда

$$\overline{f}_w = \frac{1}{\tau_w}\int_0^{\tau_w}\left[f_{w1} + \Delta f_w\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^m\right]\mathrm{d}\,\tau = f_{w1} + \frac{\Delta f_w}{m+1}. \tag{8.46}$$

Пусть $\Delta f_w / f_{w1} \le 0{,}1$. В этом случае:

$$\overline{f}_w = f_{w1}\left(1+\varepsilon_m\right), \qquad \varepsilon_m \le \frac{0{,}1}{m+1}. \tag{8.47}$$

Параметр m принимает значения в интервале $m \in [0, \infty)$, однако случаи $m = 0$ и $m = 1$ уже рассмотрены. Оценим ε_m при $m \in [0,1)$ и при $m \in [1, \infty)$. В первом из этих интервалов максимальное ε_m получаем для $m = 0$: $(\varepsilon_m)_{\max} = 0{,}1$. Во втором интервале максимальному ε_m соответствует $m = 1{,}0$: $(\varepsilon_m)_{\max} = 0{,}05$. Отсюда следует, что при любом m погрешность формулы (8.47) с $m = 1{,}0$ не превышает 5%. Для сильного диссипатора, как очевидно, эта погрешность еще уменьшается.

Перейдем к однородной цепочке диссипаторов. Если в диссипаторе $\{M_k\}$ функция плотности источников тепла $\widetilde{f}_k(\tau)$, то

$$\overline{f}_{k,j} = \int_0^{\tau_j} \widetilde{f}_k(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau. \tag{8.48}$$

Баланс тепла в M_k с учетом слагаемого ΔQ_w по (8.40) приводит к модификации (7.13) – уравнению вида:

$$\left(\frac{l_0^2}{a\tau_j}\right)\Delta T_{k,j} = \underset{(k)}{\Delta_2}\left(\overline{T}_{k,j}\right) + \left(\frac{l_0^2}{ac_V}\right)\overline{f}_{k,j}. \tag{8.49}$$

Из уравнения (8.49) при конкретизации (8.48) легко получить аналог (7.16) – уравнение, содержащее приращения температуры. Для перехода к K-модели в (8.49) положим:

$$\overline{F}_{k,j} = \left(\frac{l_0^2}{ac_V}\right)\overline{f}_{k,j} \to \widetilde{F}(x,t). \tag{8.50}$$

Из (8.48) следует:

$$\overline{f}_{k,j} = \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} \widetilde{f}(x, t+\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = f(x,t) + \frac{\tau_j}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \ldots. \tag{8.51}$$

Ограничиваясь первым приближением и положив $\tau_j = 2\tau_r$, находим:

$$\widetilde{F}(x,t) = \frac{l_0^2}{ac_V}\left(f(x,t) + \tau_r\frac{\partial f}{\partial t}\right). \tag{8.52}$$

При выводе первого K-приближения для однородного уравнения мы ранее делили левую и правую (равную нулю) часть его на $2\tau_r$. Учет этого в (8.52) дает

$$F(x,t) = \frac{\widetilde{F}(x,t)}{2\tau_r} = \frac{1}{c_V}\left(f(x,t) + \tau_r\frac{\partial f}{\partial t}\right). \tag{8.53}$$

Легко показать, что функция плотности источников для первого K-приближения неоднородной цепочки также определяется (8.53), где достаточно, положить $c_V = c_V(x)$. В нулевом приближении, когда $\tau_r = 0$, из (8.53) следует $F(x,t) = c_V^{-1} f(x,t)$ – как и должно быть для неоднородного уравнения Фурье.

При пропорциональности функции плотности источников температуре (третий случай) легко показать, что в первом и нулевом приближениях соответственно:

$$F^{(1,0)}(x,t) = \frac{\gamma}{c_V}\left(T(x,t) + \tau_r \frac{\partial T}{\partial t}\right), \qquad F^{(0)}(x,t) = \frac{\gamma}{c_V} T(x,t). \quad (8.54)$$

Для четвертого случая аналоги формул (8.54) имеют вид:

$$F^{(1)}(x,t) = \frac{1}{c_V}\left[\gamma(t)T(x,t) + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\big(\gamma(t)T(x,t)\big)\right],$$

$$F^{(0)}(x,t) = \frac{\gamma(t)}{c_V} T(x,t). \quad (8.55)$$

Для пятого случая (нелинейные источники) из (8.46) при *m* = 1,0, следует :

$$F^{(1)}(x,t) = \frac{1}{c_V}\left(f(T,x,t) + \tau_r \frac{\partial f}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right), \qquad F^{(0)}(x,t) = \frac{f(T,x,t)}{c_V}. \quad (8.56)$$

Задача 27. Квазилокальное условие Стефана. К нелинейным источникам тепла можно также отнести и обусловленный фазовым переходом в задаче Стефана. Этот источник не входит в правую часть уравнения теплопроводности, а является «невязкой» граничных потоков тепла с разных сторон поверхности фазового перехода. Поэтому K-модель такого источника эквивалентна K-модели граничного условия на границе фазового перехода и в первом приближении следует из (7.58) с учетом соотношений для цепочки переменной длины (8.30), (8.34), (8.36):

$$\left(1 + \tau_{rS}\frac{\partial}{\partial t}\right)\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)+0} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)-0} = \rho_1 L \frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t}, \quad (8.57)$$

где: T_i $(i = 1{,}2)$ – температуры фаз; $\xi = \xi(t)$ – координата фронта фазового перехода; L – удельная скрытая теплота фазового перехода; $\tau_{rS} = l_1/2\vartheta_{\text{ф}}$; $\vartheta_{\text{ф}}$ – скорость, а l_1 – ширина зоны фазового перехода. В нулевом приближении, когда $\tau_{rS} = 0$, из (8.57) следует классическое (локальное) условие Стефана.

§26. Ступенчатые и обобщенные функции

Рассмотренные в гл. 7 различные D-модели сводились к двум эквивалентным видам конечно-разностных уравнений, которые **первичны**, так как были получены непосредственно из первых принципов. Этот подход составляет суть Боргартоники, в отличие от распространенных численных методов решения краевых задач, где конечно-разностные аппроксимации локальных уравнений в частных производных **вторичны**. Область применения этих D-моделей – системы малых размеров ($L \le 10 l_0$), в которых протекают «быстрые» процессы ($t^* \le 10\tau_r$). При увеличении масштабов расстояний (размеров) и времен, когда температурные поля становятся более «гладкими» и «медленными», возможен переход к различным приближениям K-моделей. При рассмотрении систем, для которых $L >> l_0$, $t^* >> \tau_r$ (что характерно для большинства прикладных моделей переноса) хорошим приближением K-моделей оказывается нулевое – различные модификации уравнения Фурье.

Моделям такого рода посвящена необозримая литература (только в [30]) – порядка 900 источников), однако вопросы методологического характера рассматриваются часто упрощенно [13,28,33–35,40,61,77,11,142,143,161,172–176]. Обобщая опыт математического моделирования в различных сферах, авторы [28,176] заключают, что важнейшими используемыми классами функций являются: аналитические, ступенчатые (простые) и обобщенные. Основной матаппарат, опирающийся на функции этих классов, его приложения к моделям процессов переноса хорошо излагаются во многих работах, в частности, в [42–45,48,50,52,61,75–79,109,172–192]. Основываясь на этих работах, сформулируем далее свойства ступенчатых и обобщенных функций, используемые при переходах от D-моделей к K-моделям (континуализация D-моделей) и от K-моделей к D-моделям (алгебраизация или дискретизация K-моделей), а также при определении функций Грина краевых задач и квазифинитных функций.

Важнейшим представителем ступенчатых функций являются характеристические функции. Пусть есть цепочка из N_1-го одномерного диссипатора общей длины $L = N_1 l_0$. Поместим начало оси Ox на левую границу первого диссипатора. Тогда координата правой границы последнего, N_1-го диссипатора будет $x = L$. Левой и правой границам k-го диссипатора M_k будут соответствовать координаты $x_{k-1} = (k-1)l_0$ и $x_k = kl_0$ $(k = \overline{1, N_1})$. Характеристической функцией области $\omega_k = \{x \in (x_{k-1}, x_k)\}$ будем называть функцию:

$$\chi_k = \chi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega_k, \\ 0, & x \notin \omega_k. \end{cases} \tag{8.58}$$

Характеристическая функция $\chi_k(x)$ может быть представлена в виде:

$$\chi_k(x) = \theta(x - x_{k-1}) - \theta(x - x_k), \tag{8.59}$$

где $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция О. Хэвисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{8.60}$$

Через функцию $\theta(x)$ выражается также простейшая из обобщенных – δ-функция Дирака:

$$\delta(x) = \frac{d\,\theta(x)}{d\,x}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,d\,x = [\theta(x)]_{-\infty}^{\infty} = 1{,}0. \tag{8.61}$$

В случаях, когда область интегрирования не прямая $R^{(1)} = \{x \in (-\infty, \infty)\}$, используются асимметричные функции: $\theta_{\pm}(x)$ и $\delta_{\pm}(x)$:

$$\theta_+(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad \theta_-(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\ge 0,\end{cases}\qquad \delta_+(x)=\frac{\mathrm{d}\,\theta_+}{\mathrm{d}\,x},\qquad \delta_-(x)=\frac{\mathrm{d}\,\theta_-}{\mathrm{d}\,x},\tag{8.62}$$

$$\int_0^{\infty}\delta_+(x)\,\mathrm{d}\,x=1{,}0,\qquad \int_{-\infty}^{0}\delta_-(x)\,\mathrm{d}\,x=1{,}0.\tag{8.63}$$

Для характеристических функций областей $\omega_k^{(\pm)}$ $\left(\omega_k^{(+)}=\{x\in(x_{k-1},x_k]\},\right.$ $\left.\omega_k^{(-)}=\{x\in[x_{k-1},x_k)\}\right)$ можно записать

$$\chi_k^{(\pm)}=\theta_\pm(x-x_{k-1})-\theta_\pm(x-x_k)=\begin{cases}1, & x\in\omega_k^{(\pm)},\\ 0, & x\notin\omega_k^{(\pm)}.\end{cases}\tag{8.64}$$

Рассмотрим свойства характеристических функций . Из (8.61) следует:

$$\chi_k(x)=\left\langle\delta(x-x'),1\right\rangle_{\omega_k}=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\delta(x-x')\,\mathrm{d}\,x'=\begin{cases}1, & x\in\omega_k,\\ 0, & x\notin\omega_k.\end{cases}\tag{8.65}$$

Из (8.60), (8.61) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}\,\chi_k}{\mathrm{d}\,x}=\delta(x-x_{k-1})-\delta(x-x_k).\tag{8.66}$$

Покажем, что сумма всех характеристических функций $\chi_k(x)$ ($k=\overline{1,N_1}$) есть характеристическая функция области $\Omega=\{x\in(0,L)\}$, составленной из областей ω_k. Из (8.65) получаем:

$$\sum_{k=1}^{N_1}\chi_k(x)=\sum_{k=1}^{N_1}\left\langle\delta(x-x'),1\right\rangle_{\omega_k}=\left\langle\delta(x-x'),1\right\rangle_{\Omega}=\chi_\Omega(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,L),\\ 0, & x\notin(0,L).\end{cases}\tag{8.67}$$

Характеристические функции $\{\chi_k(x)\}$ образуют в Ω ортогональную систему, что следует из (8.65) и теоремы Фубини:

$$\left\langle\chi_k(x),\chi_j(x)\right\rangle_\Omega=\left\langle\left\langle\delta(x-x'),1\right\rangle_{\omega_k},\left\langle\delta(x-x'),1\right\rangle_{\omega_j}\right\rangle_\Omega=$$
$$=\left\langle 1,\left\langle 1\left\langle\delta(x-x'),\delta(x-x'')\right\rangle_\Omega\right\rangle_{\omega_j}\right\rangle_{\omega_k}=\left\langle 1\left\langle\delta(x'-x''),1\right\rangle_{\omega_j}\right\rangle_{\omega_k}=$$
$$=\left\langle 1,\chi_j(x)\right\rangle_{\omega_k}=\delta_{kj}\left|\omega_j\right|=l_0\delta_{kj}.\tag{8.68}$$

Ортогональную систему функций $\{\chi_k(x)\}$ можно преобразовать в ортонормированную систему $\{\overline{\chi}_k(x)\}$, положив $\overline{\chi}_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l_0}}\chi_k(x)$. Специфическим свойством характеристических функций является их идемпотентность, или равенство любой целой степени функции ей самой. С учетом (8.68) имеем:

$$\left\langle \chi_k(x), \chi_j(x) \right\rangle_\Omega = \left\langle \chi_k \chi_j, 1 \right\rangle_\Omega = \delta_{kj} |\omega_j|, \qquad \left\langle \chi_k(x), 1 \right\rangle_\Omega = |\omega_k|,$$

$$\chi_k(x)\chi_j(x) = \delta_{kj}\chi_k(x), \qquad \chi_k^2(x) = \chi_k(x), \tag{8.69}$$

$$\chi_k^n(x) = \chi_k^{n-1}(x) = \ldots = \chi_k(x)$$

С помощью характеристических функций по известному температурному полю всей цепочки диссипаторов $T = T(x)$, $x \in \Omega$ можно определить температуры отдельных диссипаторов M_k, занимающих области ω_k. Введем оператор проектирования

$$\mathcal{P}_k\{T(x)\} = \widetilde{T}_k(x) = \chi_k(x)T(x) = \begin{cases} T(x), & x \in \omega_k, \\ 0, & x \notin \omega_k. \end{cases} \tag{8.70}$$

Как видно из (8.70), оператор проектирования $\mathcal{P}_k$, имеющий мультипликативное представление – характеристическую функцию $\chi_k(x)$, позволяет сопоставить глобальной функции $T = T(x)$ (где $x \in \Omega$) локальную функцию $\widetilde{T}_k(x)$, отличную от нуля лишь в области $x \in \omega_k$. Такая операция бывает необходимой при преобразовании K-моделей.

При переходе от K-модели к D-модели каждой глобальной функции $T(x)$ необходимо сопоставить ряд чисел – средних температур в областях ω_k (температуры диссипаторов $M_k, k = \overline{1, N_1}$). Это осуществляется применением оператора дискретизации $\hat{D}_k$:

$$\hat{D}_k\{\,T(x)\} = \int\limits_\Omega |\omega_k|^{-1}\chi_k(x)T(x)\,\mathrm{d}\,x = \left\langle T(x), \frac{1}{|\omega_k|} \right\rangle_{\omega_k} = T_k, \quad k = \overline{1, N_1}. \tag{8.71}$$

Из (8.69), (8.70) следует, что при переходе от глобального описания (вся цепочка, т.е. область Ω) к локальному (финитному):

$$\sum_k \chi_k^2(x)T(x) = \sum_k \chi_k(x)\widetilde{T}(x) = \chi_\Omega(x)T(x) = \widetilde{T}(x). \tag{8.72}$$

Из (8.71) получаем:

$$\hat{D}\{T(x)\} = \hat{T}(x) = \sum_k \hat{D}_k\{T(x)\} = \sum_k \chi_k(x) T_k, \tag{8.73}$$

где $\hat{T}(x)$ – ступенчатая функция, описывающая в D-модели температуру цепочки диссипаторов. Аналогично (8.73) могут быть представлены и параметры цепочки $\hat{c}_V(x)$, $\hat{\lambda}(x)$, $\hat{a}(x)$. Таким образом, характеристические функции позволяют строить ступенчатые функции (8.73), а с другой стороны, и обобщенные – (8.61).

Задача 28. Представление δ-функций. Для исследования в K-моделях бывают полезны представления δ-функций в аналитической форме, что в литературе осуществляется различными способами. Простым и универсальным, на наш взгляд, является предлагаемый нами способ. Рассматриваются конечные одномерные области $\omega_0^{(m)}$:

$$\omega_0^{(m)} = \{\eta \in (0, \eta_0)\}, \quad \eta = \begin{cases} x, m = 1 & \text{(прямая)}, \\ r, m = 2,\, 3 & \text{(круг, сфера)}, \end{cases} \quad \eta_0 = \begin{cases} l_0, m = 1, \\ r_0, m = 2{,}3. \end{cases} \tag{8.74}$$

Области $\omega_0^{(m)}$ называем центральными, рассматривая наряду с ними слоевые области $\omega_k^{(m)}$ и внешние области $\omega_+^{(m)}$:

$$\omega_k^{(m)} = \{\eta \in (\eta_{k-1}, \eta_k)\}, \qquad \eta_k = \begin{cases} x_k, & m = 1, \\ r_k, & m = 2,\, 3, \end{cases} \qquad k = \overline{1, N_1}. \tag{8.75}$$

$$\omega_+^{(m)} = \{\eta \in (\eta_0, \infty)\}, \qquad \eta_0 = \begin{cases} x_0, & m = 1, \\ r_0, & m = 2, 3. \end{cases} \tag{8.76}$$

В областях $\omega_0^{(m)}$, $\omega_k^{(m)}$, $\omega_+^{(m)}$ могут быть заданы различные системы ортогональных функций, поэтому и соответствующие представления δ-функций будут для этих областей различны. Центральные и осевые области можно объединить в класс внутренних областей $\omega_k^{(m)} = \left\{\eta \in \left(\eta_k^{(-)}, \eta_k^{(+)}\right)\right\}$, $\eta_k^{(-)} = \eta_{k-1}$, $\eta_k^{(+)} = \eta_k$, $k = \overline{0, N}$.

Для внутренних областей рассмотрим семейство функций $f(\eta) \in L_2\left(\overline{\omega}_k^{(m)}\right)$ и $g(\eta) \in D'\left(\overline{\omega}_k^{(m)}\right)$, где L_2 – класс функций, квадратично интегрируемых в $\overline{\omega}_k^{(m)}$, а D' – класс обобщенных функций с носителями в $\overline{\omega}_k^{(m)}$. Определим скалярное произведение:

$$\left\langle f,g\right\rangle_{\overline{\omega}_k^{(m)}} = 2\pi\widetilde{m}\int\limits_{\eta_k^{(-)}}^{\eta_k^{(+)}} \eta^{m-1} f(\eta) g(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \qquad \widetilde{m} = \begin{cases} (2\pi)^{-1}, m = 1, \\ m-1, m = 2,3. \end{cases} \tag{8.77}$$

Положим $f(\eta) = \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)$, где система функций $\left\{\overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – полная и ортонормированная в $\overline{\omega}_k^{(m)}$. Из (8.77) следует, что

$$g(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(m)} \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta), \qquad g_n^{(m)} = \left\langle g(\eta), \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)\right\rangle_{\overline{\omega}_n^{(m)}}. \tag{8.78}$$

Положив $g(\eta) = \delta_k^{(m)}(\eta - \eta')$, находим из (8.78):

$$g_n^{(m)} = \left\langle \delta_k^{(m)}(\eta - \eta'), \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)\right\rangle_{\overline{\omega}_n^{(m)}} = \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta'),$$

$$\delta_k^{(m)}(\eta - \eta') = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)\,\overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta'). \tag{8.79}$$

Последняя формула и дает искомое аналитическое выражение δ-функции. Конкретизация вида функций $\overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)$ осуществляется фиксацией формы области $\overline{\omega}_k^{(m)}$ (т.е. различна для $m = 1, 2, 3$).

Для внешних областей полной счетной системы функций $\left\{\overline{\Psi}_n^{(m)}(\eta)\right\}$ в общем случае не существует и получить представление вида (8.79) нельзя. Можно получить интегральное представление δ-функции – аналог (8.79) для внешних областей. Вводим прямое и обратное интегральные преобразования вида:

$$\overline{f}(\xi) = \left\langle K_m(\xi,\eta), f(\eta)\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}, \qquad f(\eta) = \left\langle K_m^{-1}(\xi,\eta), \overline{f}(\xi)\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}, \tag{8.80}$$

где: $K_m(\xi,\eta)$ и $K_m^{-1}(\xi,\eta)$ – соответственно ядра прямого и обратного преобразований, интегрируемые по ξ и по η в $\omega_+^{(m)}$; $f(\eta) \in L_1\left(\omega_+^{(m)}\right)$ – класс функций с интегрируемым в $\omega_+^{(m)}$ модулем. Выбирая для $m = 1, 2, 3$ различные K_m и K_m^{-1}, из (8.80) можно получить интегральные преобразования Фурье, Ханкеля и др. Подставим первое из выражений (8.80) во второе и воспользуемся теоремой Фубини:

$$f(\eta) = \left\langle K_m^{-1}(\xi,\eta), \left\langle K_m(\xi,\eta'), f(\eta')\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}\right\rangle_{\omega_+^{(m)}} =$$

$$=\left\langle f(\eta'),\left\langle K_m^{-1}(\xi,\eta),K_m(\xi,\eta')\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}. \qquad (8.81)$$

Из (8.81) следует искомое представление:

$$\left\langle K_m^{-1}(\xi,\eta),K_m(\xi,\eta')\right\rangle_{\omega_+^{(m)}}=\delta_+^{(m)}(\eta-\eta'). \qquad (8.82)$$

Конкретизация (8.82) обеспечивается выбором ядер K_m и K_m^{-1}.

Наряду с δ-функцией, далее используются ее производные, определяемые формулой [183]:

$$\left\langle \varphi(\eta),\delta^{(i)}(\eta-\eta')\right\rangle_{\Omega}=(-1)^i\left\langle \varphi^{(i)}(\eta-\eta'),\delta(\eta-\eta')\right\rangle_{\Omega}=(-1)^i\varphi^{(i)}(\eta'), \quad (8.83)$$

где $i=1,2,3,\ldots$ – порядок производной.

§27. Алгебраизация (дискретизация) K-моделей

В §25 были получены квазилокальные уравнения K-модели нулевого, первого и второго (в простых случаях) приближений. В сложных моделях переноса возможны ситуации, когда требуется (для части уравнений модели или для некоторого временного или температурного диапазона) осуществить переход от K-модели к D-модели, что, собственно, и будем называть алгебраизацией (дискретизацией). В отличие от используемой при численных методах решения краевых задач конечно-разностной аппроксимации, которая может быть осуществлена самыми разнообразными способами [62,114–117,156–159], предлагаемая алгебраизация K-моделей базируется на использовании ступенчатых функций. При этом ясен физический смысл этой процедуры – «восстановление» цепочки диссипаторов из непрерывной области, что обеспечивает единственность дискретного представления.

Поскольку объектом дискретизации являются различные уравнения, а также интегральные выражения (полученные при решении краевых задач методом функций Грина и тепловых потенциалов), рассмотрим процедуры алгебраизации не отдельных уравнений в целом, а типовых «блоков» K-моделей. К таковым относятся: функции (для простоты – одной переменной) и их линейные комбинации; произведения функций; их производные, свертки и интегральные выражения. Речь, таким образом, идет о развитии аппарата ступенчатых функций, введенных в предыдущем параграфе, позволяющем сопоставить непрерывным функциям и функционалам их алгебраические отображения – конечномерные векторы $\hat{f}(x)=\{f_1,f_2,\ldots,f_k,\ldots\}$ $\left(k=\overline{1,N}\right)$, где $\{f_k\}_{k=1}^{N}$ – компоненты ступенчатой функции.

Пусть задана $f(x) \in L_1(\Omega)$. Для области $\Omega = \{x \in (0, L)\}$ норму $\|f\|_{L_1(\Omega)}$ определим следующим образом:

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad |\Omega| = L. \tag{8.84}$$

Здесь модуль у $f(x)$ под интегралом опущен, так как считаем, что $f(x) > 0$ (что верно для температуры, плотности, концентрации и других термодинамических параметров). Соответствующая $f(x)$ ступенчатая функция $\hat{f}(x)$ определена (8.73):

$$\hat{f}(x) = \hat{D}\{f(x)\} = \sum_{k}^{N} \chi_k(x)\hat{D}\{f(x)\} = \sum_{k}^{N} \chi_k(x) f_k. \tag{8.85}$$

Определим норму $\|\hat{f}\|_{L_1(\Omega)}$:

$$\|\hat{f}(x)\|_{L_1(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \mathrm{d}\,x\left[\sum_{k}^{N}\left(\hat{D}\{f(x)\}\chi_k(x)\right)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N} f_k. \tag{8.86}$$

Функции $f(x)$ и $\hat{f}(x)$ будем называть эквивалентными по норме $L_1(\Omega)$ если

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \|\hat{f}\|_{L_1(\Omega)}, \qquad \frac{1}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N} f_k. \tag{8.87}$$

При f_k, определенных по (8.85) последнее равенство в (8.87) удовлетворяется тождественно. Можно также записать:

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \|\hat{f}\|_{L_1(\Omega)} = \frac{1}{\omega_k}\int\limits_{\omega_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x = f_k. \tag{8.88}$$

Условия (8.87) и (8.88) справедливы одновременно: из одного следует другое, т.е. глобальная эквивалентность влечет за собой локальную и наоборот. Поэтому в смысле эквивалентности по норме $L_1(\Omega)$ представление $f(x) \to \hat{f}(x)$ единственно. В явном виде это ясно из следующего примера. Пусть есть две функции $f_1(x) = f_2(x)$, для которых ступенчатые представления не совпадают:

$$\hat{f}_1(x) = \sum_{k=1}^{N} f_{1k}\chi_k(x), \quad \hat{f}_2(x) = \sum_{k=1}^{N} f_{2k}\chi_k(x), \quad f_{1k} \neq f_{2k}. \tag{8.89}$$

Образовав разность $\hat{W}(x) = \hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)$ имеем:

$$\hat{W}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(f_{1k} - f_{2k} \right) \chi_k(x),$$

$$\left\langle \hat{W}(x), \chi_j(x) \right\rangle_\Omega = \sum_{k=1}^{N} \left(f_{1k} - f_{2k} \right) \left\langle \chi_k(x), \chi_j(x) \right\rangle_\Omega =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |\omega_k| \delta_{jk} \left(f_{1k} - f_{2k} \right) = |\omega_j| \left(f_{1j} - f_{2j} \right), \quad j = \overline{1, N}. \qquad (8.90)$$

Так как $\hat{W}(x) = 0$, для любого $j = \overline{1, N}$ из (8.90) следует $f_{1j} = f_{2j}$, т.е. единственность представления (8.89).

Скалярное произведение двух ступенчатых функций является скаляром:

$$\left\langle \hat{f}(x), \hat{g}(x) \right\rangle_\Omega = \int_\Omega \mathrm{d}\, x \hat{f}(x) \hat{g}(x) = \int_\Omega \mathrm{d}\, x \Big(\sum_{k,j} \chi_k(x), \chi_j(x) f_k g_i \Big) = \sum_k |\omega_k| f_k g_k, \qquad (8.91)$$

в отличие от их алгебраического произведения, которое является ступенчатой функцией:

$$\hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x) = \left(\sum_k \chi_k(x) f_k \right) \left(\sum_j \chi_j(x) g_j \right) = \sum_k \left(f_k g_k \right) \chi_k(x). \qquad (8.92)$$

Произведение ступенчатых функций не равно ступенчатой функции от произведения непрерывных функций:

$$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad \hat{\Phi}(x) = \sum_k \chi_k(x) \Phi_k,$$

$$\Phi_k = \int_\Omega \Phi(x) \frac{\chi_k(x)}{|\omega_k|} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k} \mathrm{d}\, x\, f(x) g(x) \neq f_k g_k. \qquad (8.93)$$

Аналогичная «некоммутативность» операций перехода к ступенчатой функции и производной над непрерывной функцией, имеет место и в других случаях. Сравним производную от ступенчатой функции и ступенчатое представление производной от непрерывной функции. Имеем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x} \left(\hat{f}(x) \right) = \sum_k f_k \frac{\mathrm{d} \chi_k}{\mathrm{d}\, x} = \sum_k f_k \left(\delta(x - x_{k-1}) - \delta(x - x_k) \right). \qquad (8.94)$$

Определим функцию $\overset{\wedge}{f'}(x)$:

$$\hat{f'}(x) = \frac{\mathrm{d}\hat{f}(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_k f_k^{(1)} \chi_k(x), \qquad f_k^{(1)} = \frac{1}{|\omega_k|} \int_\Omega \chi_k(x) \hat{f'}(x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{l_0} \int_{\omega_k} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \frac{1}{l_0} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) = \frac{f_k - f_{k-1}}{l_0},$$

$$\hat{f'}(x) = \sum_k \left(\frac{f_k - f_{k-1}}{l_0} \right) \chi_k(x). \tag{8.95}$$

Ступенчатая функция $\hat{f'}(x)$, согласно (8.95), является «левой производной». Возможна и «правая производная», как и «левая» определяемая видом ω_k (8.64). При $\omega_k = \omega_k^{(+)}$, когда $x_{k-1} \notin \omega_k$, имеем, как и записано в (8.95), $f_k - f_{k-1}$. При $\omega_k = \omega_k^{(-)}$, когда $x_k \notin \omega_k^{(-)}$, вместо этой разности надо брать «правую»: $f_{k+1} - f_k$. Таким образом, представление первой производной неоднозначно, однако эта неоднозначность легко «снимается» выбором ω_k. Для второй производной получаем:

$$\hat{f''}(x) = \sum_k f_k^{(2)} \chi_k(x), \quad f_k^{(2)} = \frac{f_k^{(1)} - f_{k-1}^{(1)}}{l_0} = \frac{f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}}{l_0^2}. \tag{8.96}$$

Здесь также записана «левая» производная.

Найдем ступенчатое изображение констант, интегральных операторов и сверток, для чего рассмотрим функции:

$$u_0(x) = \mathrm{const}; \quad u_1(x) = \int_\Omega \mathrm{d}x' G(x, x') f(x'); \quad u_2(x) = \int_0^x \mathrm{d}x' G(x - x') f(x'). \tag{8.97}$$

Имеем:

$$u_1(x) = D\{u_1(x)\} = \sum_{k=1}^N u_{1k} \chi_k(x); \quad u_{1k} = \hat{D}_k\{u_1(x)\} = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k} u_1(x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k} \mathrm{d}x \int_\Omega \mathrm{d}x' G(x, x') f(x') = \int_\Omega \mathrm{d}x' f(x') \left[\frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k} \mathrm{d}x G(x, x') \right] =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{d}x' f(x') G_k(x'), \qquad G_k(x') = \frac{1}{|\omega_k|} \int_{\omega_k} \mathrm{d}x G(x, x'). \tag{8.98}$$

Аналогично (8.98) получаем:

$$\hat{u}_0 = \hat{D}\{u_0\} = \sum_{k=1}^{N}\chi_k(x)u_0 = \chi_\Omega(x)u_0 = \widetilde{u}_0 = \begin{cases} u_0, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases} \tag{8.99}$$

При определении ступенчатого изображения свертки $u_2(x)$ необходимо учитывать, что верхний предел интегрирования в $u_2(x)$ будет принимать дискретный ряд значений, т.е. $x \to x_j = jl_0$ ($j = \overline{1, N}$). При этом число компонент «k» функции $\hat{u}_2(x)$ не превышает j: $k \le j$. Имеем:

$$\hat{u}_2(x) = \hat{u}_2(jl_0) = \hat{D}\{u_2(jl_0)\} = \sum_{k=1}^{j}\chi_k(x)u_{2k}, \tag{8.100}$$

$$u_{2k} = \hat{D}_k\{u_2(jl_0)\} = \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k}\mathrm{d}\,x u_2(x) = \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k}\mathrm{d}\,x\int_0^{jl_0}\mathrm{d}\,x' G(x-x')f(x') =$$

$$= \int_0^{jl_0}\mathrm{d}\,x' f(x')\left[\frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k}\mathrm{d}\,x G(x-x')\right] = \int_0^{jl_0}\mathrm{d}\,x' f(x')\widetilde{G}_k(x'),$$

$$\widetilde{G}_k(x') = \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k}\mathrm{d}\,x G(x-x'). \tag{8.101}$$

Задача 29. Агрегирование ступенчатых функций. Важным элементом алгебраизации K-моделей является укрупнение (агрегирование) D-моделей, позволяющее уменьшить число неизвестных (т.е. порядок системы алгебраических уравнений, к которой сводится D-модель). Задачу агрегирования сформулируем следующим образом. Пусть есть $\hat{f}(x)$, где $x \in \Omega$:

$$\hat{f}(x) = \hat{D}\{f(x)\} = \sum_{k=1}^{N}\chi_k(x)f_k, \qquad f_k = \frac{1}{|\omega_k|}\int_{\omega_k} f(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{8.102}$$

Не ограничивая общности, $f(x)$ считаем монотонной функций, что влечет близость средних f_{k-1}, f_k, f_{k+1} в смежных областях ω_{k-1}, ω_k, ω_{k+1}. Тогда объединение некоторых ω_k в укрупненные подобласти Ω_S ($S = \overline{1, N_1}$, $N_1 < N$) и введение для них средних $\overline{f}_S^{(A)}$, позволяет записать:

$$\overset{\wedge}{f_A}(x) = A\{\hat{f}(x)\} = \sum_{S=1}^{N_1}\chi_S(x)\,\overline{f}_S^{(A)}, \qquad \chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_S, \\ 0, & x \notin \Omega_S. \end{cases} \tag{8.103}$$

Здесь A – оператор агрегирования, который необходимо найти. Имеем:

$$\hat{f}_A(x) = \hat{D}_A\{f(x)\} = \sum_{S=1}^{N_1} \chi_S(x)\,\overline{f}_S^{(A)}, \qquad \overline{f}_S^{(A)} = \frac{1}{|\Omega_S|}\int\limits_{\Omega_S} f(x)\,\mathrm{d}\,x. \quad (8.104)$$

Согласно (8.87):

$$\overline{f}_S^{(A)} = \|f\|_{L_1(\Omega_S)} = \frac{1}{n_S}\sum_{j=1}^{n_S} f_j, \quad (8.105)$$

где n_S – число областей ω_j, объединяемых в укрупненную область $\Omega_S = U\omega_j$ ($j = \overline{1, n_S}$). Если некоторым образом определено n_S, то по (8.105) определяется $\overline{f}_S^{(A)}$, подстановка которых в (8.104) исчерпывает решение, так как $\chi_S(x)$ при известном n_S находятся по (8.67):

$$\chi_S(x) = \sum_{j=1}^{n_S} \chi_j(x). \quad (8.106)$$

Поскольку в (8.105) уже использован принцип эквивалентности ступенчатых и непрерывных функций по норме в $L_1(\Omega_S)$, для определения n_S необходимо новое, независимое условие. В качестве такового используем требование ограничения максимального отклонения величин $\overline{f}_S^{(A)}$ и f_j:

$$\max_{(j=\overline{1,n_S})} \left|\overline{f}_S^{(A)} - f_j\right| = \left\|\overline{f}_S^{(A)} - f_j\right\|_{C(\Omega_S)} \le \delta f, \quad (8.107)$$

где δf – наперед заданная, допустимая ошибка операции агрегирования, определенная либо локально (для каждой $\Omega_S - \delta f_S$), либо глобально ($\delta f = \delta f_\Omega$ для Ω). Определение n_S согласно (8.107) трудно формализовать, естественнее всего выглядит пошаговое (с добавлением к $\Omega_{S0} = \omega_S$ по одной области ω_{S+1}, ω_{S+2} и т.д.), компьютерное «заметание» области Ω от $x = 0$ до $x = L$. Величина δf определяется спецификой задачи и смыслом $f(x)$ – физического параметра, всегда измеряемого с конечной погрешностью.

При монотонном росте (убывании) $f(x) > 0$, $x \in \Omega$, возможно также «крупношаговое» агрегирование – аппроксимация $f(x)$ кусочно-линейной функцией. Количество «шагов» – интервалов $x \in (L_i, L_{i+1})$ – на которых $f(x)$ аппроксимируется линейной функцией, также как и в предыдущем случае трудно задать априорно. Рассмотрим функцию $f(x)$ $\big(x \in (0, L)\big)$, убывающую монотонно:

$$f(0) = \max_{\Omega} f(x) = f_0, \quad f'(x) < 0, \quad f(L) = \min_{\Omega} f(x) = f_L,$$

$$x_0 = 0, \quad x_i - x_{i-1} = L_i - L_{i-1} = l_i, \quad f(x_i) = f_i \quad i = 0,1,2,\ldots \quad (8.108)$$

Вновь воспользуемся принципом эквивалентности заданной $\left(f(x)\right)$ и аппроксимирующей $\left(\widehat{f}(x)\right)$ функций:

$$\left\| f(x)\right\|_{L_1(\Omega)} = \left\| \widehat{f}(x)\right\|_{L_1(\Omega)}, \qquad \int\limits_0^L f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^L \hat{f}(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{8.109}$$

Из глобальной эквивалентности (8.109) следует и локальная:

$$\int\limits_{\omega_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\omega_i} \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad \omega_i = \left\{ x \in (x_{i-1}, x_i)\right\}, \quad i = \overline{1, N_2}. \tag{8.110}$$

Функция $\widehat{f}(x)$ имеет вид:

$$\widehat{f}(x) = \sum_{i=1}^{N_2} \chi_i(x)\widehat{f}_i(x), \quad \widehat{f}_i(x) = y_{i-1} + K_i(x - x_{i-1}), \quad y_0 = f_0. \tag{8.111}$$

Коэффициент K_i в (8.111) определяется подстановкой (8.111) в (8.110):

$$K_i = \frac{2}{l_i}\left(\overline{f}_i - y_{i-1}\right), \qquad \overline{f}_i = \frac{1}{l_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{8.112}$$

Таким образом, представление (8.111) принимает вид:

$$\widehat{f}_i(x) = y_{i-1} + \frac{2}{l_i}\left(\overline{f}_i - y_{i-1}\right)(x - x_{i-1}), \quad \widehat{f}_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \widehat{f}_i(x_i) = y_i. \tag{8.113}$$

Выразим величины y_i из (8.113):

$$y_i = \widehat{f}_i(x_i) = y_{i-1} + 2\overline{f}_i - 2y_{i-1} = 2\overline{f}_i - y_{i-1},$$

$$y_1 = 2\overline{f}_1 - y_0 = 2\overline{f}_1 - f_0, \quad y_2 = 2\overline{f}_2 - y_1 = 2\overline{f}_2 - 2\overline{f}_1 + f_0,$$

$$y_3 = 2\overline{f}_3 - y_2 = 2\overline{f}_3 - 2\overline{f}_2 + 2\overline{f}_1 - f_0, \ldots \tag{8.114}$$

Если обозначить $\overline{f}_0 = 0.5 f_0$, то (8.114) можно записать в виде

$$y_0 = 2\overline{f}_0, \quad y_1 = 2\overline{f}_2 - 2\overline{f}_0, \qquad y_2 = 2\overline{f}_2 - 2\overline{f}_1 + 2\bar{f}_0, \ldots,$$

$$y_i = 2\overline{f}_i - 2\overline{f}_{i-1} + 2\overline{f}_{i-2} - \ldots + (-1)^i \cdot 2\overline{f}_0 = 2\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\overline{f}_j. \tag{8.115}$$

Таким образом, задача определения величин $\left\{ y_i\right\}$, а по (8.113) и всех $\widehat{f}_i(x)$, сведена к определению по (8.112) величин $\overline{f}_i$ $(i = \overline{1, N_2})$.

Найдем максимальную погрешность аппроксимации на каждом из интервалов ω_i и для области Ω в целом. В точке $x = x_0 = 0$: $f(0) = f_0 = \widehat{f}_1(0)$.

Имеем:

$$\delta_1 = \max_{x\in\omega_1}\left(f(x)-\widehat{f}_1(x)\right)= f(x_1)-\widehat{f}_1(x_1) = f_1 - y_1 = f_1 - 2\overline{f}_1 + f_0 =$$

$$= 2\left(\frac{f_0+f_1}{2}-\overline{f}_1\right) = 2\left(f_{10}-\overline{f}_1\right) = 2\Delta_1,$$

$$\delta_2 = \max_{x\in\omega_2}\left(f(x)-\widehat{f}_2(x)\right) = f(x_2)-\widehat{f}_2(x_2) = f_2 - 2\overline{f}_2 + 2\overline{f}_1 - f_0 =$$

$$= 2\left(f_{20}-\overline{f}_2\right) - 2\left(f_{10}-\overline{f}_1\right) = 2(\Delta_1 - \Delta_2). \qquad (8.116)$$

Продолжая этот ряд, приходим к общей формуле:

$$\delta_n = \max_{x\in\omega_n}\left(f(x)-\widehat{f}_n(x)\right)= 2\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}\Delta_i\,,$$

$$\Delta_i = f_{i0}-\overline{f}_i, \qquad f_{i0} = \frac{f_{i-1}+f_i}{2}. \qquad (8.117)$$

Ряд в (8.117) – знакопеременный, так как все $\Delta_i > 0$ при $i = \overline{1, N_2}$ для убывающих $f(x)$, и сходящийся при $n \to \infty$ (что позволяет рассматривать вместо области Ω область $\Omega_+ = \{x > 0\}$). По свойству знакопеременных рядов для любого n:

$$|\delta_n| \le 2\Delta_1, \qquad \max_{x\in\Omega}\left(f(x)-\widehat{f}(x)\right) = \delta_1 = 2\Delta_1. \qquad (8.118)$$

Если воспользоваться (8.107): $2\Delta_1 \le \delta f$, то можно считать искомую аппроксимацию построенной. Максимальная ее ошибка относится к точке $x = x_1$, а далее, при $x > x_1$ ошибка аппроксимации монотонно убывает.

Алгебраизацию K-моделей можно осуществить также применением интегральных преобразований по координате и времени, что в общем случае достаточно громоздко. Промежуточный подход (рассматривался теплоперенос в слоисто-неоднородной среде) заключался [193] в применении преобразования Лапласа по времени. При этом в каждом слое решение выписывалось через функцию Грина и функции «склейки» – значения температур на границах слоев. Задача сводилась к системе алгебраических уравнений относительно Лаплас-трансформант функций склейки. Матрица системы уравнений имела трехдиагональный вид.

На основании изложенного в настоящей, второй части работы, т.е. элементов дискретной термодинамики (Боргартоники), в последующей, третьей части осуществляется устранение артефактов, выявленных в части I, включая и особый – фундаментальный хроноартефакт – ошибочность парадигмы времени в физике.

ЧАСТЬ III.

УСТРАНЕНИЕ АРТЕФАКТОВ

В одном случае из ста тот или иной вопрос усиленно обсуждается потому, что он действительно тёмен; в остальных девяноста девяти он становится тёмным, потому что усиленно обсуждается.

Э.А. По

Это именно те теории, которые наиболее близки физикам, потому что в них выражено стремление к простоте, ясности и устранению ... всего таинственного. Призвание ученых состоит в том, чтобы устранять все таинственное и тем самым продвигаться хотя бы немного вперед.

А. Пуанкаре

... чаще всего приходится не столько добавлять, сколько отбрасывать. Ваша догадка, в сущности, состоит в том, что нечто – очень простое ... Истина всегда оказывается проще, чем можно было бы предположить.

Р. Фейнман

ГЛАВА 9 ОБОЛОЧКА

Наш опыт убеждает нас, что природа – это реализация самых простых математических идей.
А. Эйнштейн

Практически все, что нас интересует во времени, находит себе параллель в тех отвлеченных математических свойствах, которые мы ему приписываем.
А.Н. Уайтхед

§28. Хроноартефакты «старта» ($t \to 0$)

К таковым, согласно табл. 2 (§ 16) относятся: 1) поведение температур, скоростей их изменения и потоков тепла в граничных точках; 2) некоммутативность двойных поочередных пределов; 3) зависимость двойных одновременных пределов от вида функции $x_\varepsilon = x_\varepsilon(t)$. Ряд артефактов уже фактически устранен в части I.

К хроноартефактам первой из указанных групп относятся разрывы (сингулярности) температур, их производных по времени и по координате при $t \to 0$ на границе $x = 0$ области $x \in R_+^{(1)}$ (в краевых задачах) и в точках разрыва начальной функции (в задачах Коши). Хроноартефакты второй и третьей групп имеют сходную структуру, слегка маскируемую необходимостью совершения двух предельных переходов.

На уровне оболочки устранение всех артефактов достигается изменением $\{x'\} \to \{x\}$ (в смысле § 16). Правильные предпосылки $\{x\}$ заключаются в исключении точек сингулярностей ($t = 0,\ x = 0$ для краевых и $t = 0,\ x = \widetilde{x}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ для задач Коши, где $\widetilde{x}_i$ – точки разрыва начальных условий) из областей изменений независимых переменных. Иначе говоря, накладывается запрет на случаи $t \to 0$, $x = 0$ и $x = \widetilde{x}_i$, поскольку области изменения переменных теперь определены так: $t \in [\tau_0, \infty)$, $x \in [x_0, \infty)$ и $x \in \widetilde{\Omega}\ (x_i \in \Omega)$. Параметры τ_0, $x_0 > 0$ могут быть выбраны либо произвольно, либо соответствовать параметрам диссипатора ($x_0 = l_0, \tau_0 = \tau_r = l_0^2/2a$).

Для устранения этих же артефактов на других уровнях парадигмы (где роль «оператора перехода» F' (§ 16) играют классические методы решения линейных параболических уравнений), необходимо, напротив, не изменяя предпосылки $\{x'\}$, видоизменить «оператор перехода»: $F' \to F$. Это можно сделать двумя способами: на уровне базиса парадигмы, не отказываясь от линейных параболических уравнений и на уровне ядра парадигмы – переходом к D-моделям или к их K-приближениям. В качестве первого способа используем обобщенную формулировку краевых задач и задач Коши [178,179] с последующим решением их методом функций Грина, а в качестве второго – гиперболическое (телеграфное) уравнение теплопроводности – нулевое приближение K-модели нелинейной цепочки (8.28).

Рассмотрим первый способ – обобщенную формулировку краевых задач теплопроводности [173, 178–181, 183, 189–191]. В качестве базовой модели используем первую краевую задачу для области $x \in (0, L)$ при $t \geq 0$. Классическая постановка этой задачи такова:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ T = T(x,t),\ x \in (0, L),\ t > 0; \tag{9.1}$$

$$T(x,0) = \varphi(x),\quad x \in (0, L);\quad T(0,t) = \mu_1(t),\quad T(L,t) = \mu_2(t),\quad t \geq 0. \tag{9.2}$$

Начальные и граничные условия (9.2) могут быть не согласованы [44]. Следуя §26, вводим функции:

$$\widetilde{T}(x,t) = \Theta_+(t)\chi(x)T(x,t),\ \ \Theta_+(t) = \begin{cases} 0,\ t \leq 0 \\ 1,\ t > 0 \end{cases},\ \ \chi(x) = \begin{cases} 1,\ x \in [0, L] \\ 0,\ x \notin [0, L] \end{cases}. \tag{9.3}$$

Для производных функций $\Theta_+(t)$ и $\chi(x)$ справедливы соотношения (8.62). Умножая (9.1) и (9.2) на $\Theta_+(t)\chi(x)$ и преобразуя, получаем

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} + \widetilde{\varphi}(x)\delta_+(t) - a\left[\widetilde{\mu}_1(t)\delta'(x) - \widetilde{\mu}_2(t)\delta'(x-L)\right] = a\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} + \widetilde{F}(x,t),$$

$$\widetilde{\mu}_i(t) = \Theta_+(t)\mu_i(t),\quad \widetilde{\varphi}(x) = \chi(x)\varphi(x),\quad i = 1,2. \tag{9.4}$$

Решение задачи (9.4) – обобщенной формулировки задачи (9.1), (9.2), записывается в виде [190]:

$$\widetilde{T}(x,t) = \int_0^t\int_0^L \widetilde{G}(x,\xi,t-\tau)\widetilde{F}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \tag{9.5}$$

где $\widetilde{G}(x,\xi,t)$ – функция Грина, а функция $F(x,t)$ соответствует (9.4). Функция Грина определяется краевой задачей

$$\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial x^2} + \delta_+(t)\delta(x-\xi),\ \ \widetilde{G}(x,\xi,t) = \Theta_+(t)G(x,\xi,t),\ \ x \in [0, L],\ t \geq 0,$$

$$\widetilde{G}(0,\xi,t)=\widetilde{G}(L,\xi,t)=0,\ t\ge 0 \tag{9.6}$$

Решение (9.6) имеет вид [193]:

$$\widetilde{G}(x,\xi,t)=\Theta_+(t)\exp\left(ta\,\partial_x^2\right)\left(\delta(x-\xi)\right)=$$

$$=\frac{2\Theta_+(t)}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 at\right]\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(n\pi\frac{\xi}{L}\right). \tag{9.7}$$

Решение краевой задачи (9.5) является обобщенной функцией, поскольку таковыми являются функции $\widetilde{G}$ и $\widetilde{F}$. Из (9.5) следует, что поведение функций $\partial\widetilde{T}/\partial t$, $\partial\widetilde{T}/\partial x$ в граничных точках при $t\to 0$ определяется производными от $\widetilde{G}(x,\xi,t)$ в соответствующих точках и последующим вычислением интеграла (9.5), в котором $\widetilde{F}(x,t)$ определена (9.4). При этом одни особенности сглаживаются, другие из разряда «расходимостей) (сингулярностей), каковыми они были в классической задаче, переходят в «статус» обобщенных функций, т.е. «легализуются» [183]. Таким образом, использование аппарата обобщенных функций при формулировке, решении и исследовании краевых задач (и задач Коши) либо устраняет особенности, либо «легализует» их.

Рассмотрим характерный пример. Плотность потока тепла в Модели 4 из §6 (первая краевая задача для полупространства) выражается формулой (2.84):

$$q_4(x,t)=-\lambda\frac{\partial T_4}{\partial x}=\frac{\lambda(T_c-T_0)}{\sqrt{\pi at}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

При классической постановке задачи плотность потока тепла на границе области $x=0$ в начальный момент времени $(t\to+0)$ имеет аномалию: $q_4(0{,}0)\to\infty$. При обобщенной постановке этой же задачи, используя известное представление δ-функции [183]:

$$\delta(x)=\lim_{t\to+0}\frac{\Theta(t)}{\sqrt{\pi at}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right),$$

получаем

$$\lim_{t\to+0}q_4(x,t)=\lambda\left(T_c-T_0\right)\delta(x),$$

т.е. обобщенную функцию, столь же «нормальную», как и само решение $\widetilde{T}(x,t)$ (хотя оно, как правило, не содержит δ-видных слагаемых).

Рассмотрим второй способ устранения артефактов «старта», замену $F'\to F$, т.е. параболического уравнения теплопереноса гиперболическим (телеграфным) уравнением. Последнее рядом авторов рассматривается как более реалистическая модель, чем уравнение Фурье, для которой характерна конечная скорость распространения «теплового фронта» (§ 8). Ранее было получено выражение для априорной оценки локализации поля в задаче Коши для гиперболического уравнения (3.19), из которого следовала конечная скорость «фронта» при $t \to 0$. Однако уже для $t \geq 10\tau_r$ эта оценка практически переходит в соответствующую параболическому уравнению.

На примере задачи Коши для уравнения (3.16) рассмотрим взаимосвязь «параболического» и «гиперболического» полей. Имеем:

$$\left(\tau_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_0\right) T = 0, \ L_0 = \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ x \in (-\infty, \infty), \ t > 0, \tag{9.8}$$

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x), \quad T\big|_{|x|\to\infty} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0. \tag{9.9}$$

Решение (9.8), (9.9) ищем в виде:

$$T(x,t) = T_0(x,t) + T_r(x,t). \tag{9.10}$$

Подстановка (9.10) в (9.8) и в (9.9) дает

$$\tau_r \frac{\partial^2 T_r}{\partial t^2} + L_0 T_r = -L_0 T_0 - \tau_r \frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}, \tag{9.11}$$

$$T_0(x,0) + T_r(x,0) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial T_0}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial T_r}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x). \tag{9.12}$$

В (9.11) и (9.12) положим

$$L_0 T_0 = 0, \qquad x \in (-\infty, \infty), \qquad t > 0, \qquad T_0(x,0) = \varphi(x). \tag{9.13}$$

Получена задача Коши для функции $T_0(x,t)$, удовлетворяющей параболическому уравнению и начальному условию и определяемой независимо от $T_r(x,t)$. Функция $T_r(x,t)$ удовлетворяет другой задаче Коши:

$$\tau_r \frac{\partial^2 T_r}{\partial t^2} + L_0 T_r = -\tau_r \frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}, \qquad T_r(x,0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial T_r}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x) - \left.\frac{\partial T_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \tilde{\Psi}(x). \tag{9.14}$$

Таким образом, задача Коши для гиперболического уравнения (9.8), решением которой является «гиперболическое» поле $T(x,t)$, редуцирована к двум задачам Коши – (9.13) и (9.14), решения которых «параболическое» поле

$T_0(x,t)$ и «гиперболическое» поле $T_r(x,t)$. Ясно, что разложение «гиперболического» поля на такое же и «параболическое» поле (9.10) может быть осуществлено и для краевых задач. Отсюда следует, что любое «гиперболическое» поле «содержит» в себе «параболическое» поле, а, следовательно, и все аномалии, ему присущие. Переход от параболического уравнения к гиперболическому артефакты не устраняет.

Таким образом хроноартефакты «старта» ($t \to 0$) устраняются: 1) На уровне оболочки парадигмы – «консолидацией» области (исключением из нее точек $x = 0$ и $x = \tilde{x}_i$); 2) На уровне базиса – путем перехода к обобщенным формулировкам краевых задач; 3) на уровне ядра – переходом к D-моделям (что кардинально устраняет все хроноартефакты).

§29. Хроноартефакты «финиша» ($t \to \infty$)

К ним, согласно табл. 2, относятся: 4) Бесконечное время термической релаксации в конечной системе; 5) Отсутствие стационарного решения ($t \to \infty$) двухслойной задачи с периодическими граничными условиями.

Первый из этих хроноартефактов рассматривался на Модели 6 (§6), где в табл. 1 приведены данные по динамике безразмерной температуры. Стационарное значение ее $\Theta_s = \Theta(x,\infty)$ равнялось нулю, а значение $\Theta_s' = \Theta(x,t_\infty) = 10^{-3}$ соответствовало моменту времени

$$t = t_\infty = 1{,}35\left(\frac{L_0^2}{2a}\right), \tag{9.15}$$

где L_0 – ширина пластины, a – ее температуропроводность. В задаче 3 (§19), при рассмотрении континуальной модели диссипатора, для перехода $T_0 \to T_s$ также требовалось бесконечное время ($T_s = \lim\limits_{t\to\infty} \tilde{T}(t)$). В D-модели диссипатора этот же переход осуществлялся за интервал времени $\tau_{0,1} = 2t_0 = \tau_r = l_0^2/2a$. Там же была предложена процедура «финитизации» процесса путем замены $T_s' \to T_s - \delta T$, где δT – малая величина. При $\delta T = e^{-2}\Delta T_0 = 0{,}1354\Delta T_0$ было получено

$$\tau_\infty = \tau_{0,1} = \tau_r = \frac{l_0^2}{2a}. \tag{9.16}$$

Этим определяется метод устранения данного хроноартефакта на уровне оболочки: финитизация процесса теплопроводности путем введения конечного времени его t_∞:

$$T(x,t_\infty) = T_s' = T_s - \delta T, \tag{9.17}$$

где T_s – стационарная температура, а δT – малая величина, определяемая спецификой задачи.

Для устранения второго хроноартефакта «финиша» обратимся к модели теплопроводности в составном кольце [74,193]. Тем самым мы переходим на уровень базиса парадигмы, поскольку на уровне оболочки данный хроноартефакт устранить нельзя. В литературе обычно рассматриваются два класса систем – изолированные (с адиабатическими границами) и открытые. В модели «кольца Зоммерфельда» [74,193] было введено понятие о полуоткрытых слоистых системах – содержащих источники (стоки) тепла в слоях, но имеющих адиабатические границы.

Соответствующее классической постановке задачи для двухслойной системы (Модель 7, §6) обобщенная постановка нестационарной задачи приведена в [74]. Решение для слоев выражены через функции Грина и подставлены в условия «склейки» (граничные условия IV-го рода) на границах слоев. Для функций «склейки» (температур на контактах слоев) $\mu_{i,s} = \lim\limits_{t\to\infty} \mu_i(t)$ получено:

$$\mu_{1,s} = \mu_{2,s} = \left(1 + K_\gamma\right)^{-1} \left\{ \left[\left\langle \bar{f}_1(0,\xi), \frac{1}{l_1} \right\rangle_{\Omega_1} + K_\gamma \left\langle \bar{f}_2(0,\xi), \frac{1}{l_2} \right\rangle_{\Omega_2} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left\langle \varphi_1(\xi), \frac{1}{l_1} \right\rangle_{\Omega_1} + K_\gamma \left\langle \varphi_2(\xi), \frac{1}{l_2} \right\rangle_{\Omega_2} \right] \right\}, \qquad (9.18)$$

где $\bar{f}_i(0,\xi)$ – Лаплас-трансформанты функций плотностей источников в слоях при $p \to 0$; $\varphi_i(\xi)$ – начальные распределения температур в слоях; l_i – ширины слоев Ω_i; $\langle \ldots \rangle_{\Omega_i}$ – интегралы по ξ от 0 до l_i; $K_\gamma = \gamma_2 / \gamma_1$; $\gamma_i = C_{vi} l_i$; C_{vi} – теплоемкости (на единицу длины) слоев; $i = 1,2$.

Стационарные решения в слоях определяются формулами:

$$T_{i,s}(x_i) = M_{i,s}(x_i) + t_{ri} \left[\left(1 - \frac{x_i}{l_i}\right) I_{1,s}^{(i)}(x_i) + \left(\frac{x_i}{l_i}\right) I_{2,s}^{(i)}(x_i) \right], \qquad (9.19)$$

$$M_{i,s}(x_i) = \mu_{1,s} + \left(\mu_{2,s} - \mu_{1,s}\right) \frac{x_i}{l_i}, \quad t_{ri} = \frac{l_i^2}{a_i}, \quad i = 1,2, \qquad (9.20)$$

$$I_{1,s}^{(i)}(x_i) = \int_0^{x_i} f_{i,s}(\xi) \left(\frac{\xi}{l_i}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{l_i}\right), \qquad (9.21)$$

$$I_{2,s}^{(i)}(x_i) = \int_{x_i}^{l_i} f_{i,s}(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{l_i}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\xi}{l_i}\right), \qquad (9.22)$$

$$f_{i,s}(\xi) = \lim_{p\to 0} p\bar{f}_{i,s}(p,\xi) = \lim_{t\to\infty} \bar{f}_{i,s}(\xi,t). \tag{9.23}$$

В зависимости от природы источников (стоков) поля в слоях Ω_i возможны случаи : 1) $f_{i,s}(\xi) = 0$ (финитный по времени источник); 2) $f_{i,s}(\xi) \neq 0$ – (инфинитный источник). В первом случае из приведенных формул следует, что $T_{i,s} = \mu_{1,s} = \text{const}$, т.е. температурное поле в слоях однородно. Однако, как следует из (9.18), поле это имеет интересную особенность: его стационарное значение (при $t \to \infty$) определяется через интегралы от начальных распределений температуры $\varphi_i(x_i)$. Как известно, такая «память» у открытых систем отсутствует.

Во втором случае интегралы в первой из квадратных скобок в (9.18) будут расходящимися, поэтому реализация этого случая возможна лишь при выполнении условия

$$\left\langle \bar{f}_1(0,\xi), \frac{1}{l_1} \right\rangle_{\Omega_1} + K_\gamma \left\langle \bar{f}_2(0,\xi), \frac{1}{l_2} \right\rangle_{\Omega_2} = 0. \tag{9.24}$$

Это предполагает различие знаков у функций $\bar{f}_i(0,\xi)$ (т.е. требуется наличие источника и стока тепла), между которыми должна быть количественная связь, определяемая (9.24). В этом случае «память» тоже сохраняется: $\mu_{1,s} = \mu_{2,s} = \mu_s$ и $T_{i,s}(x_i)$ зависят от начальных распределений $\varphi_i(x_i)$. Профили стационарных температур будут описываться в слое с источником тепла – выпуклой параболой, а в слое со стоком – вогнутой:

$$\Theta_{1,s} = -K_\lambda \, K_l^{-1} \Psi(x_1) \quad \Theta_{2,s} = \Psi(x_2), \quad \Theta_{i,s} = \frac{T_{i,s}(x_i) - \mu_s}{0{,}5 t_{ri} \, f_{i,s}^{(0)}}, \tag{9.25}$$

где

$$\Psi(x_i) = \left(2 - \frac{x_i}{l_i}\right)\frac{x_i}{l_i}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad K_l = \frac{l_2}{l_1}.$$

Таким образом, артефакт Модели 7 (§6) – отсутствие стационарного решения в системе $[\Omega_1, \Omega_2]$ – устранен: это решение найдено предельным переходом $t \to \infty$ из нестационарного решения данной задачи в обобщенной постановке. При этом найденное решение обладает свойствами, не встречающимися у линейных задач теплопроводности: 1) в стационаре существуют температурные профили «стоячие волны» – противоположно направленные параболы; 2) система обладает «интегральной памятью» – решение выражается через интегралы от начальных температурных распределений.

Рассмотренная модель может служить контрпримером, опровергающим необходимое условие существования диссипативных структур в синергетике (см. последний абзац в §9).

На уровне ядра парадигмы хроноартефакты «финиша» ($t \to \infty$), как и хроноартефакты «старта» ($t \to 0$), легко устраняются переходом к D-моделям.

§30. Локализация полей

Согласно табл. 2, соответствующие хроноартефакты: 6) Неэффективность оценок локализации полей и бесконечная скорость теплопередачи; 7) Обращение в бесконечность производных по времени от оценок локализации при $t \to 0$.

Априорные оценки локализации температурного поля типа (2.68), как следует из (2.70) и (2.72), дают для координаты «фронта» заниженные значения, которым соответствуют относительно слабое, по сравнению с максимальным, снижение температуры (т.е. оценки неэффективны). На уровне оболочки переход к эффективным оценкам достигается применением к оценкам (2.68) модификации «3σ» – (2.69). В §5 показано, что использование эффективных («3σ») оценок ведет к отношению «фронтовой» температуры к максимальной не превышающему 1% (а часто и существенно меньшему).

Апостериорные оценки эффективны по определению; локализация поля (координата «фронта»), ими определяемая, также как и у априорных оценок, пропорциональна $\sqrt{t}$: $\delta = k\sqrt{at}$. Для априорной эффективной оценки (2.69) k=4,24; для апостериорных оценок в различных задачах Коши (см. §5) значения k: 4,3 (2.75); 3,66 (2.78); 3,32 (2.79) 4,24 (2.80); 3,3 (2.81); 4,38 (2.82). В теории фильтрации подземных вод аналогичные оценки локализации параболических уравнений используются для определения «радиусов влияния» скважин и дрен [195]. Для различных задач приводятся значения k: 1,77; 3,47; 3,8; 3,16; 4,72.

В горной теплофизике аналогичные оценки позволяют определить «границы» геотемпературных полей. Анализ различных моделей, гидромоделирование, натурные наблюдения позволили рекомендовать [196,197] для k значения k = 2–4.

Изложенное позволяет предложить для априорной эффективной оценки локализации одномерных температурных полей, описываемых линейными параболическими уравнениями, формулу

$$\delta = R_f(t) = 4\sqrt{at}. \tag{9.26}$$

В (9.26) функцию $R_f(t)$ будем называть «радиусом финитности». В общем случае эта функция определяется не (9.26), а условием

$$T(x,t)\big|_{x \geq R_f(t)} \cong T_0,\ t > 0, \tag{9.27}$$

где T_0 – начальная (фоновая) температура системы, а x – координата, отсчитываемая от максимума начального тепловыделения или от границы системы.

Использование (9.26) устраняет, в принципе, неэффективность априорных оценок локализации, однако не позволяет определить влияние на $R_f(t)$ интенсивности теплообмена на границе системы (т.е. граничных условий). Определение этого влияния тесно связано с устранением другого хроноартефакта – «бесконечной скорости теплопередачи». Любая формула для $R_f(t)$, вытекающая из (9.27) (необязательно это (9.26)) фактически вводит конечную скорость эффективного распространения температурного поля $\mathrm{d}R_f(t)/\mathrm{d}t$, поскольку предполагает его локализованным в области $x \in \left[0, R_f(t)\right]$. Конечная скорость распространения поля при $t > 0$ следует и из (9.26), однако последняя, являясь общей (что, вообще говоря, хорошо) не позволяет учитывать специфику граничных режимов в краевых задачах (что плохо). Учет этой специфики на уровне оболочки парадигмы (т.е. не подвергая ревизии само линейное параболическое уравнение теплопроводности) осуществим путем введения понятия **квазифинитной функции**.

Квазифинитной функцией переменной $x \in \left[x_0, \infty\right)$ будем называть однопараметрическое семейство функций $\left\{\widetilde{f}_t(x)\right\}$, таких что:

$$\widetilde{f}_t(x) = \chi_t(x) f_t(x), \qquad \chi_t(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[x_0, R_f(t)\right], \\ 0, & x > R_f(t). \end{cases} \tag{9.28}$$

где параметр t (время) принимает непрерывный ряд значений $t > 0$. Функция $R_f(t)$ имеет смысл введенного (9.27) радиуса финитности, а «основная» функция $f_t(x)$ – непрерывная и дважды дифференцируемая по x и, по крайней мере, один раз по t. Для определения функции $R_f(t)$ по (9.28) (являющейся формализацией (9.27)), воспользуемся нулевым моментом $M_0(t)$ температурного поля $T(x,t)$ в области $x \in R_+$ с начальной температурой T_0. Положив $f_t(x) = C_V\left(T(x,t) - T_0\right)$, получаем

$$M_0(t) = \int_0^\infty f_t(x)\,\mathrm{d}x = C_V \int_0^\infty \left(T(x,t) - T_0\right)\mathrm{d}x\,. \tag{9.29}$$

Этот интеграл имеет смысл количества тепла, переданного в область R_+ через границу $x = 0$ к моменту времени t. Плотность потока тепла через эту границу

$$q_0(t) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{9.30}$$

Далее считаем функцию $q_0(t)$ известной, рассматривая II-ю краевую задачу. Для первой краевой задачи, в которой задается функция $\mu_0(t) = T(0,t)$, $q_0(t)$ можно выразить через $\mu_0(t)$ методом [177]. Определяемая функция $R_f(t)$ будет смешанной, априорно-апостериорной оценкой, поскольку мы ищем ее не решая краевую задачу, но вводя некоторые численные ограничения. Вводим квазифинитную функцию

$$\widetilde{T}(x,t) = T_0 + \chi_t(x) T_t(x,t), \tag{9.31}$$

где $\chi_t(x)$ определена (9.28). Находим $\widetilde{M}_0(t)$:

$$\widetilde{M}_0(t) = C_V \int_0^{\infty} \left(\widetilde{T}(x,t) - T_0\right) \mathrm{d}x = C_V \int_0^{R_f(t)} T_1(x,t)\, \mathrm{d}x. \tag{9.32}$$

Приравниваем (9.29) и (9.32) и вычисляем производную по времени от обеих частей равенства. С учетом (9.30) получаем

$$\frac{\mathrm{d}M_0}{\mathrm{d}t} = q_0(t) = \frac{\mathrm{d}\widetilde{M}_0}{\mathrm{d}t} = C_V \left\{ \left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right]_0^{R_f(t)} + T_1\left(R_f(t),t\right) \frac{\mathrm{d}R_f}{\mathrm{d}t} \right\}. \tag{9.33}$$

Поскольку при $x = R_f(t)$ $\chi_t(x) = 1$, $T_1\left(R_f(t),t\right) = \widetilde{T}\left(R_f(t),t\right) - T_0 = \delta T$. Плотность потока тепла при $x = R_f(t)$ обозначим δq:

$$\delta q(t) = -\lambda \left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x=R_f(t)} << q_0(t). \tag{9.34}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\delta T}{T_0} = \varepsilon_T, \quad \frac{\delta q(t)}{q_0(t)} = \varepsilon_q, \quad \varepsilon_T, \varepsilon_q << 1$$

Тогда получаем

$$\frac{\mathrm{d}R_f(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\varepsilon_q}{C_V T_0 \varepsilon_T} \right) q_0(t), \qquad R_f(t) = \frac{\varepsilon_q / \varepsilon_T}{C_V T_0} \int_0^t q_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{9.35}$$

Величины $\varepsilon_q, \varepsilon_T$ – малые одного порядка, поэтому положим $\varepsilon_q / \varepsilon_T \cong 1{,}0$. Как видно из (9,35), если $q_0(\tau)$ при $\tau > 0$ не меняет знака, то будь она возрастающей или убывающей функцией, функция $R_f(t)$ всегда возрастает. Если граничный поток тепла постоянен, т.е. $q(t) = q_0 = \mathrm{const}$, то из (9.35) следует:

$$\left. \frac{\mathrm{d}R_f(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} = \frac{q_0}{C_V T_0} = \mathrm{const} = B, \quad R_f(t) = Bt. \tag{9.36}$$

Для первой краевой задачи с постоянной температурой на границе $T(0,t)=T_c$ имеем (см. (2.8)):

$$q_0(t)=\frac{\lambda(T_c-T_0)}{\sqrt{\pi a t}}. \qquad (9.37)$$

Подставив (9.37) в (9.35), найдем:

$$R_f(t)=2A\sqrt{at}, \quad A=\frac{(T_c-T_0)}{\sqrt{\pi}T_0}. \qquad (9.38)$$

Оценки (9.26) и (9.35) и понятие квазифинитной функции устраняют хроноартефакт бесконечной скорости теплопередачи, поскольку квазифинитные поля распространяются со скоростью $\mathrm{d}R_f(t)/\mathrm{d}t$, при $t>0$ всегда конечной. При $t\to 0$ артефакт 7) (табл. 2) сохраняется, так как случай (9.36) является весьма частным. Устранение этого артефакта на уровне оболочки возможно по аналогии со случаями 1), 2), 3) – путем исключения точки $t\to 0$, т.е. постулирования существования $t_{\min}=\tau_0$. Параметр τ_0 либо постулируется, либо определяется как собственное время диссипатора $\tau_0=\tau_r=l_0^2/2a$.

На уровне базиса парадигмы этот артефакт устраняется переходом от параболического к гиперболическому уравнению теплопроводности, для которого (см. (3.19), (3.20)) скорость распространения $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}t=\mathrm{d}R_f(t)/\mathrm{d}t$ при $t\to 0$ конечна.

Устранение хроноартефакта бесконечной скорости теплопередачи на уровне базиса неосуществимо: гиперболическое уравнение теплопроводности редуцируется (см §28) на два – гиперболическое и параболическое, последнее опять содержит артефакт. Не решает проблему и переход к нелинейным уравнениям, так как конечная скорость распространения тепла характерна только для узкого класса нелинейностей (см. §9).

На уровне ядра парадигмы устранение артефакта бесконечной скорости теплопередачи переходом к D-моделям автоматически не достигается. В §20 приведены четыре способа расчета температур системы диссипаторов. При первом способе на каждом расчетном цикле задается шаг по времени τ_j, и полученная система уравнений разрешается. При втором и третьем способах задается приращение температуры одного из диссипаторов и система уравнений сводится к квадратному уравнению для τ_j. Четвертый способ – комбинация трех первых. Аналогичен расчет и цепочки диссипаторов (§21). Наиболее последовательным, отвечающим «духу Боргартоники», способом является задание на каждом временном шаге τ_j приращения $\mathrm{X}_{N_1 j}$ температуры на последнем в цепочке, N_1-м диссипаторе (в предположении направления потока тепла от 1-го к N_1-му диссипатору). Поскольку все X_{ij} – относительные величины (приращения температур, деленные на ΔT_0), то полагая минимальное (доступное измерению) значение изменения температуры равным ΔT_0, получаем X_{ij}=1,0. Подстановка этого значения в систему уравнений тепловых балансов всех диссипаторов и последовательное исключение $X_{ij}\left(i=\overline{1,N_1-1}\right)$ приводят к уравнению N_1-й степени относительно τ_j (см. (6.124)). Таким образом, финитность поля и конечность скорости его распространения обеспечиваются автоматически, на j-м временном шаге тепловое возмущение достигает N_1-й диссипатор цепочки, а N_1+1-й сохраняет начальную температуру. Однако при практических расчетах этот способ неудобен, так как требует решения уравнений высоких степеней. Поэтому приходится использовать способ, при котором на каждом шаге задается $\tau_j(R_j)$ и решается система N_1 уравнений относительно N_1 неизвестных – $X_{ij}\left(i=\overline{1,N_1-1}\right)$. При этом величины X_{ij} могут быть и не кратны ΔT_0 (быть произвольными). Если рассматривается бесконечная цепочка диссипаторов ($N_1 \to \infty$),то система (7.20) также бесконечная. На каком бы диссипаторе $N_s = N_1 + S$ мы не оборвали бы эту цепочку, решение соответствующей системы уравнений дает $X_{N_s j} \neq 0$. При этом $X_{N_s j}$ может оказаться любой величиной, большей нуля, а ΔT_{N_s} может быть меньше ΔT_0. Запрета $\Delta T_{N_s} \geq \Delta T_0$ теперь нет. Поэтому поле будет инфинитным, а скорость его распространения – бесконечной. Это означает, что практически устранить хроноартефакт бесконечной скорости теплопередачи на уровне ядра парадигмы одним лишь введением цепочки дискретных элементов среды – диссипаторов и дискретных временных промежутков (D-переходов) нельзя. Истинной причиной, сутью артефакта является гипотеза (x') о непрерывном (континуальном) изменении температуры – полевое описание. Если возможны сколь угодно малые $|\Delta T| > 0$, то скорость теплопередачи бесконечна. Если от x' перейти к x-гипотезе о дискретном (с шагом ΔT_0) изменении температуры, то артефакт в D-модели устраняется.

ГЛАВА 10. БАЗИС

... ни во что не следует слишком сильно верить; всегда надо быть готовым к тому, что убеждения, которых придерживался в течение долгого времени, могут оказаться ошибочными.

П.А.М. Дирак

... необходимым признаком хорошей теории является то, что она позволяет сделать предсказания, которые в принципе могут быть экспериментально опровергнуты.

К.Г. Поппер

§31. Артефакты в формулировках задач

Согласно табл. 2, артефакты 8, 9 обобщают пп. 1, 2, 7, 11 «Выводов» по гл. 3 и устраняются на уровне базиса способами, в основном уже изложенными в гл. 3. Артефакт 8 устраняется использованием (3.8) вместо (3.7) в уравнении теплопроводности. Артефакт 9 устраняется формулировкой краевых задач для $t > 0$ при задании начальных условий для $t = 0$. Задачи без начальных условий, встречающиеся при моделировании «температурных волн» являются весьма грубой идеализацией и к эволюционным задачам не относятся. Правильным подходом является обобщенная формулировка краевых задач как в линейном, так и в нелинейном случае.

На уровне ядра парадигмы все артефакты устраняются переходом к D-моделям. Формулировки задач соответствуют моделируемым диссипаторам или их цепочкам.

§32. Математическая и физическая некорректность

Артефакты 10–13 из табл. 2 характеризует наличие некорректности. Устранение на уровне базиса парадигмы артефактов 10 и 11 осуществляется формулировками краевых задач нелинейного переноса, в которых зависимости от температуры теплофизических параметров и правых частей уравнений соответствуют экспериментальным данным, а не носят некорректный физически «модельный характер». Решения таких «модельных задач» посредством «анзацев», «простых волн», «автомодельных приближений» являются «игрой ума». Для конкретных приложений (моделей процессов переноса) необходимы аналитические или численные методы [13,55–57,71,82,83,85,86,99,109,116,117, 160,198].

«Волновые» решения нелинейных уравнений приемлемы в качестве грубой идеализации для качественного анализа. Одно из условий существования пространственных диссипативных структур – нелинейность среды – артефакт, что демонстрируется построенным (см. §29) контрпримером – наличием стационарного температурного профиля в линейной полуоткрытой системе.

Граничные условия при $|x| \to \infty$, иногда используемые в краевых задачах, физически некорректны, поскольку бесконечность всегда должны быть адиабатической «границей». Задачи для сингулярных областей должны, вообще говоря, формулироваться не как краевые, а как задачи Коши, что соответствует и физической и математической корректности. Граничные условия с «обострением», когда температура на границе области за конечное время возрастает бесконечно, физически некорректны, поскольку: 1) экспериментально не реализуемы; 2) характер процесса теплопередачи на границе (предполагают, что это – теплопроводность) будет переменным. В последнем случае, с ростом температуры на границе области начнется фазовый переход с образованием жидкой фазы и конвекцией в ней (и возможным ее уносом), затем – фазовый переход с образованием газовой фазы. Существенную роль будет играть лучистый теплообмен, т.е. первоначальная модель (нелинейная теплопроводность) режим «обострения» не «переживет».

На уровне ядра парадигмы артефакты 10 и 11 устраняются переходом к D-моделям.

Артефакт 12 устраняется (см. §7) исключением из множества решений «резонансных», т.е. тех, которые обусловлены математически возможными, но физически не реализуемыми соотношениями между параметрами (см. цитату из М. Борна [33] в §16). На уровне ядра парадигмы, при переходе к D-моделям, артефакт 12 и его аналоги отсутствуют. Несмотря на очевидность артефактности «резонансных» решений, они продолжают использоваться [199].

Артефакт 13, заключающийся в некорректности по Адамару задач с подвижными границами (кроме задач типа Стефана, см §10) устраняется только на уровне ядра парадигмы – переходом к D-моделям («растущая» или «обрезаемая» цепочка) или их K-приближениям (см. §23, 25).

§33. Гиперболические уравнения

К артефактам, порожденным гиперболическим (телеграфным) уравнением теплопроводности, на уровне базиса парадигмы относятся (14 в табл. 2) краевые условия и методы решения. Артефакт «конечной скорости теплопередачи» ранее устранен, как на уровне оболочки и базиса (см. (3.22) в §8 и (9.12) в §28), так и на уровне ядра – переходом к D-моделям.

Далее будем различать два вида гиперболических уравнений: 1) термические ((3.16), (3.18)); 2) нетермические – для процессов переноса, отличных от теплопроводности (§8).

Одномерное нетермическое уравнение относительно полевой величины $u = u(x,t)$:

$$C_u\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \tau_{ru}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \lambda_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{10.1}$$

где индекс «u» у параметров означает их «нетермичность». Параметр τ_{ru} в (10.1), в отличие от параметра τ_r в (8.28), может быть и не малым. Уравнение (10.1) следует из баланса

$$C_u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_u}{\partial x} = 0, \tag{10.2}$$

в который подставляется «гиперболический» (релаксирующий) поток $q_u = q_u(x,t)$:

$$q_u(x,t) + \tau_{ru}\frac{\partial q_u}{\partial t} = q_{u0}(x,t) = -\lambda_u \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{10.3}$$

Решения (10.3) (или (3.30) при $\nabla T = \partial T/\partial x$) в литературе часто приводятся с неточностями и ошибками. В частности [30] пишут:

$$q_u(x,t) = \frac{\lambda_u}{\tau_{ru}}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_{ru}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau, \tag{10.4}$$

что справедливо лишь в частном случае нулевого начального условия $q_u(x,0) = 0$. В [81], напротив, начальное условие произвольно, но свертка в (10.4) ошибочно вычислена для случая $\partial u/\partial x = \mathrm{const}$:

$$q_u(x,t) = q_u(x,0)\exp(-t/\tau_{ru}) + \lambda_u\left(1 - \exp(-t/\tau_{ru})\right)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{10.5}$$

Нетермические уравнения, начиная с собственно «телеграфных», выводятся из других базисных уравнений (Д.К. Максвелла, в частности) вполне корректно. Термические уравнения были получены модификацией уравнений Онзагера [101] и внепарадигмальными методами [22,51,57,202]. Физический смысл параметра τ_r при этом не прояснялся.

Оценим порядок величин в левой части (10.1) методом, принятым в механике сплошной среды и в теории переноса [17,203].

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_*}{t_*}, \quad \tau_{ru}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim \tau_{ru}\frac{u_*}{t_*^2}, \qquad \frac{\tau_{ru}\,\partial^2 u/\partial t^2}{\partial u/\partial t} \sim \frac{\tau_{ru}}{t_*}. \tag{10.6}$$

Здесь $*$ обозначает характерное значение величины. В случае $\tau_{ru}/t_* << 1$ «гиперболический» член в (10.1) мал; отбросив его, получаем параболическое уравнение. В случае $\tau_{ru}/t_* >> 1$, напротив, член $\partial u/\partial t$ мал; его отбрасывание переводит (10.1) в чисто волновое уравнение. Обе эти оценки несостоятельны: первая сильно завышает t_* (обычно знак >> обозначает два и более порядка, так что фактически требуется выполнение условия $t_* \geq 10^2 \tau_{ru}$); вторая неверна по существу. Оценка [52] условия редукции гиперболического уравнения к параболическому: $t_* \geq 8\,\tau_{ru}$. Нами ранее получена оценка $t_* \geq 10\,\tau_{ru}$ (см. (3.22)).

Оценим величину $t_* = \beta\,\tau_{ru}$ (β = const), такую, что при $t \geq t_*$ уравнения (10.1) можно заменить параболическим. Для этого найдем решение (10.3), которое «жестко» (через (10.2)) связано с (10.1). Преобразованием Лапласа по t из (10.3) находим [181]:

$$q_u(x,t) = q_u(x,0)\exp(-t/\tau_{ru}) + \frac{1}{\tau_{ru}}\left(q_{u0}(x,t) \underset{(t)}{*} \exp(-t/\tau_{ru}) \right), \quad (10.7)$$

где $\underset{(t)}{*}$ обозначает операцию свертки двух функций времени. Представим эту свертку в виде:

$$\Delta q_u(x,t) = \tau_{ru}^{-1}\left(q_{u0}(x,t) \underset{(t)}{*} \exp(-t/\tau_{ru}) \right) =$$

$$= \tau_{ru}^{-1}\int_0^t q_{u0}(x,t-\tau)\exp(-t/\tau_{ru})\,\mathrm{d}\tau. \quad (10.8)$$

Разлагая $q_{u0}(x,t-\tau)$ в ряд Тейлора, находим:

$$\Delta q_u(x,t) = q_{u0}(x,t)\bigl(1-\exp(-t/\tau_{ru})\bigr) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\partial^n q_{u0}}{\partial t^n}\frac{t^n}{n!}M_n\bigl(t/\tau_{ru}\bigr), \quad (10.9)$$

где

$$M_n\bigl(t/\tau_{ru}\bigr) = \left(\frac{t}{\tau_{ru}}\right)^{-n} \cdot I_n(t/\tau_{ru}), \quad I_n(t/\tau_{ru}) = \int_0^{t/\tau_{ru}} \xi^n e^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi. \quad (10.10)$$

Из (10.7)–(10.10) следует, что $q_u(x,t) \to q_{u0}(x,t)$ при $t/\tau_{ru} \to \infty$, причем скорость сходимости определяется множителем $\exp(-t/\tau_{ru})$ в величинах $M_n\bigl(t/\tau_{ru}\bigr)$.

Используя таблицы [204], находим

t/τ_{ru}	6,0	6,9	7,5	8,0	10,0
$\exp(-t/\tau_{ru})$	$0{,}25\cdot 10^{-2}$	$\cong 10^{-3}$	$0{,}55\cdot 10^{-3}$	$0{,}34\cdot 10^{-3}$	$0{,}45\cdot 10^{-4}$

Отсюда следует, что в качестве параметра $\beta = t_*/\tau_{ru}$ пригодны значения $\beta =$ = 6–10. Выбираем значение β = 8,0 и получаем, что при $t \ge 8\ \tau_{ru}$

$$q_u(x,t) \cong q_{u0}(x,t) = -\lambda_u \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{10.11}$$

что эквивалентно замене (10.1) параболическим уравнением. Полученная верхняя временная граница адекватности гиперболического уравнения справедлива как для термического (8.28), так и для нетермического уравнения (10.1), однако в первом случае возникает противоречие. В задачах 15, 16 (§20) сравнивались расчеты по D-моделям и параболическому уравнению теплопроводности (для задачи Коши и первой краевой задачи). Оказалось, что уже при $t \ge 4\tau_r$ эти две модели дают практически совпадающие результаты. Разрешение этого противоречия заключается, по-видимому, в учете влияния погрешностей проведенных расчетов. Практический вывод, отсюда следующий (если не ставится цель – получение решения в аналитической форме): для интервала времени $t \in [0{,}6\tau_{ru}]$ целесообразно вести расчет по D-модели, а затем (при $t \ge 6\ \tau_{ru}$) – по параболическому уравнению.

Определим нижнюю временную границу адекватности (10.1), величину $\bar{t}$, такую, что (10.1) справедливо для всех $t \ge \bar{t} = \alpha\tau_{ru}$. Вообще говоря, при очень малых, «кинетических» ((10^{-12}–10^{-9}) сек [6,144]) временах, феноменологические (макроскопические) модели не адекватны, т.е. ни параболические, ни гиперболические, ни волновые уравнения не работают. Однако при приближенном, в рамках парадигм физики сплошной среды и математической физики, описании процессов переноса допустимы любые $t > 0$. В рамках традиционной постановки краевых задач и задач Коши, когда решение имеет смысл и при $t \to 0$, нижняя оценка $\bar{t}$ представляет интерес не столько для «обрезания» области $t > 0$ и замены ее областью $t \in [\bar{t}, \infty)$, сколько для определения области применимости для волнового уравнения, в которое, согласно (10.6), должно выродиться гиперболическое уравнение при очень малых временах ($t < \bar{t}$).

Вернемся к задаче 14 (§20). Это модель «термического удара» – интенсивной теплопередачи в начальной стадии процесса при скачкообразном возрастании температуры на внешней границе системы диссипаторов от T_0 до T_s $\left((T_s - T_0)/\Delta T_0 = N >> 1\right)$. Повышение температуры граничных диссипаторов от T_0 до $T_0 + \Delta T_0$ (первый D-период) происходит за время $\tau_1 = 10^{-2}\tau_r$ (см. (6.97)), т.е., если верна оценка (10.6), в тот период времени, когда должно работать чисто волновое уравнение теплопроводности. На втором D-периоде длительностью $\tau_2 = 0{,}21\tau_r$, приращения температуры внешних (граничных) диссипаторов составляет $18{,}0\Delta T_0$, а смежных с ними внутренних – на ΔT_0. Это означает, что при $t \le 0{,}1\tau_r$ взаимодействие диссипаторов выражено слабо и граничные диссипаторы системы можно рассматривать как отдельные сильные диссипаторы (задача 7 §19).

Хроногенерация сильного диссипатора описывается формулой (6.56) при $n = 1$, которую модифицируем множителем «2», учитывающим теплоприток к граничному диссипатору лишь с одной стороны:

$$\tilde{\tau}_k = \frac{2\tau_r}{2(N-k)+1}, \qquad k = \overline{1, N}. \tag{10.12}$$

Вместо (10.6) воспользуемся дискретными аналогами производных – (8.95), (8.96), где вместо l_0 используется $\tilde{\tau}_k$ согласно (10.12). Приращения температур сильного диссипатора в каждом D-периоде одинаковы ($\Delta T = \Delta T_0$). Поэтому первые и вторые производные вполне определяются значениями $\tilde{\tau}_k$.
Положив в (10.12) $k = 1$, найдем:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t\in[0,\tilde{\tau}_1]} \cong \frac{\Delta T_0}{\tilde{\tau}_1}, \qquad \tilde{\tau}_1 = \frac{2\tau_r}{2N-1} \cong 0{,}01\tau_r. \tag{10.13}$$

На интервале $t \in [0, \tilde{\tau}_1]$ температура изменяется линейно, первая производная от нее по времени постоянна, а вторая равна нулю. Поэтому переходя к пределу $t \to 0$ в (10.1), получим

$$C_u \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t\to 0+0} = \lambda \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t\to 0+0} \tag{10.14}$$

или, с учетом обозначений $u(x,0) = \varphi(x)$, $\left(\partial u/\partial t\right)_{t=0} = \Psi(x)$:

$$C_u \Psi(x) = \lambda_u \frac{\mathrm{d}^2 \varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}. \tag{10.15}$$

Получено соотношение для начальных функций гиперболического уравнения, причем (10.15) остается в силе для обоих возможных случаев: а) система «приготовлена», т.е. при $t < 0$ не существовала; б) система при $t < 0$ существовала, имеет «предысторию» – при $t < 0$ происходит процесс переноса, описываемый параболическим уравнением (в этом случае (10.15) следует также из условия непрерывности полей и производных от них при $t = 0$).

Для $t \in [\tilde{\tau}_2, \tau_j]$ ($\tau_j \le 0{,}1\tau_r$), т.е. периода квазиавтономной динамики каждого из диссипаторов, находим первую и вторую производные и их отношение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\Delta T_0}{\tilde{\tau}_k}, \qquad \tau_r \left|\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right| \sim \frac{\tau_r}{\tau_{k,k+1}}\left(\frac{\Delta T_0}{\tilde{\tau}_k} - \frac{\Delta T_0}{\tilde{\tau}_{k,k+1}}\right), \qquad k = \overline{2, j-1},$$

$$\frac{\tau_r\left|\partial^2 T/\partial t^2\right|}{\partial T/\partial t}\sim\left(\frac{1}{\tilde{\tau}_k}-\frac{1}{\tilde{\tau}_{k+1}}\right)\frac{\tau_r\tilde{\tau}_k}{\tilde{\tau}_{k,k+1}},\qquad \tilde{\tau}_{k,k+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tau}_k+\tilde{\tau}_{k+1}\right). \quad (10.16)$$

Подставляя в отношение производных (10.12), после простых преобразований получаем:

$$\frac{\tau_r\left|\partial^2 T/\partial t^2\right|}{\partial T/\partial t}\sim\frac{\tilde{\tau}_k}{\tilde{\tau}_{k,k+1}}=1-\frac{1}{2(N-k)},\qquad k=\overline{2,j-1}. \quad (10.17)$$

Из (10.17) следует что при малых временах вырождения гиперболического уравнения в волновое не происходит, «гиперболическое» слагаемое в уравнении не превышает «параболическое», убывая со временем. Таким образом, подтверждена несостоятельность оценки порядка величины членов гиперболического уравнения по (10.6) и устранен артефакт «волнового» переноса при $t \ll \tau_r$.

Решение краевых задач и задач Коши для нетермических гиперболических уравнений осуществляется различными методами [43,45,52,56,99,190,200], приводящими к весьма сложным выражениям. Использование этих же методов для решения термических гиперболических уравнений можно отнести к артефактам, поскольку малость параметра τ_r (в отличие от параметра τ_{ru}, который может быть сравним с характерным временем процесса, например, фильтрации) позволяет предложить более простые.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\qquad T=T(x,t),\quad x\in R^{(1)},\qquad t>0. \quad (10.18)$$

$$T(x,0)=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{t=0}=\Psi(x),\qquad x\in R^{(1)}. \quad (10.19)$$

С учетом (10.15) полагаем, что

$$\Psi(x)=a\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}. \quad (10.20)$$

В (10.18) перейдем к обобщенной постановке задачи Коши, учитывая (9.8):

$$\tilde{T}(x,t)=\Theta(t)T(x,t),\qquad \Theta(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t\le 0\end{cases},\qquad \delta(t)=\frac{\mathrm{d}\,\Theta(t)}{\mathrm{d}\,t}, \quad (10.21)$$

$$L_0\tilde{T}(x,t)+\tau_r\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial t^2}=\tilde{F}(x,t),\quad \tilde{F}(x,t)=\left[1+\tau_r\left(\partial_t+a\,d_x^2\right)\right]\varphi(x)\,\delta(t), \quad (10.22)$$

Решение (10.22) выразим с помощью функции Грина $\widetilde{G}(x,\xi,t)$:

$$\widetilde{T}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\,\xi \int\limits_0^t \mathrm{d}\,\tau \widetilde{G}(x,\xi,t-\tau)\widetilde{F}(\xi,\tau). \qquad (10.23)$$

Функция Грина удовлетворяет задаче

$$L_0\widetilde{G} + \tau_r \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial t^2} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \qquad (10.24)$$

Уравнение (10.24) решаем, представив $\widetilde{G}(x,\xi,t)$ в виде:

$$\widetilde{G}(x,\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_r^n \widetilde{G}_n(x,\xi,t). \qquad (10.25)$$

Подстановка (10.25) в (10.24) дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_r^n L_0 \widetilde{G}_n(x,\xi,t) = -\tau_r \sum_{n=0}^{\infty} \tau_r^n \frac{\partial^2 \widetilde{G}_n}{\partial t^2} + \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau). \qquad (10.26)$$

Приравнивая выражения при одинаковых степенях τ_r в (10.26), получаем:

$$L_0\widetilde{G}_0 = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau); \quad L_0\widetilde{G}_1 = -\frac{\partial^2 \widetilde{G}_0}{\partial t^2}, \quad L_0\widetilde{G}_2 = -\frac{\partial^2 \widetilde{G}_1}{\partial t^2}, \ldots$$

$$L_0\widetilde{G}_n = -\frac{\partial^2 \widetilde{G}_{n-1}}{\partial t^2}, \ldots \qquad (10.27)$$

Решение для $\widetilde{G}_0(x,\xi,t)$ известно (см. §5); для всех $\widetilde{G}_n(x,\xi,t)$ $(n = 1,2,\ldots)$ имеем однотипное уравнение, к которому применим преобразование Лапласа по t [181]:

$$\overline{G_n}(x,\xi,t) = L\left\{\widetilde{G}_n(x,\xi,t)\right\} = \int\limits_0^{\infty} \exp(-pt)\widetilde{G}_n(x,\xi,t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Получаем:

$$\overline{G_n}(x,\xi,t) = (-1)^n \left[\frac{p^{2n}}{\left(p - a\,d_x^2\right)^n}\right] \overline{G_0}(x,\xi,t). \qquad (10.29)$$

Осуществляя в (10.29) обратное преобразование Лапласа [187], получаем

$$\widetilde{G}_n(x,\xi,t) = \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} \int_0^t \widetilde{R}_n(x,\tau)\widetilde{G}_0(x,\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau, \tag{10.30}$$

где

$$\widetilde{R}_n(x,\tau) = \frac{(-1)^n \Theta(\tau)}{(n-1)!}\tau^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^j}{j!}\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Полученная функция Грина (10.30) пригодна как для термических, так и для нетермических гиперболических уравнений, так как малость параметра τ_r пока не использовалась. Для термических уравнений ряд (10.25) можно ограничить двумя первыми членами:

$$\widetilde{G}(x,\xi,t) = \widetilde{G}_0(x,\xi,t) + \tau_r \widetilde{G}_1(x,\xi,t), \tag{10.31}$$

где $\widetilde{G}_1(x,\xi,t)$ находится из (10.30) при $n = 1$.

ГЛАВА 11. ЯДРО

Продвигаясь вперед, наука непрестанно перечеркивает сама себя. Плодотворное зачеркивание ...

В. Гюго

Если ты хочешь достигнуть определенного эффекта ... ищи способ наиболее короткий. И не поступай как те, которые не умея назвать вещь своим собственным именем, идут по пути околичностей через смутные длинноты.

Л. да Винчи

§34. Физически бесконечно малый объем

Согласно №15 табл.2 (§16), артефактами ядра парадигмы являются ФБМО, ПЛКР и температура. Первые два базируются на априорных (экспериментально не обоснованных) четко не определенных предположениях (x'), служащих основой получения важного в термодинамике уравнения баланса энтропии (УБЭ) – F'. Устранение этих артефактов должно заключаться в определении «правильных» x и F ($x' \to x, F' \to F$), которые бы строго обосновали понятия ФМБО и ПЛКР или заменили их некоторыми другими.

Поскольку, следуя Оккаму, всякий артефакт стараемся устранить на том же структурном уровне, где он обнаружен, а на более высокий уровень переходим лишь при невозможности такого устранения, то устранение артефактов ядра, если оно окажется невозможным на уровне ядра, требует выхода за рамки парадигмы.

Понятием, предложенным нами вместо ФМБО (x'), является макроточка (x), введенная в §18. Моделью «работы» макроточки – описанием процесса переноса – является диссипатор, понятие столь же простое и фундаментальное для термодинамики, как осциллятор для механики и других дисциплин. Процессы в слабом и сильном диссипаторах служат источниками хроногенерации – построения шкалы термодинамического времени. ПЛКР при этом не используется. Параметры макроточек и диссипаторов приведены в табл. 3. Макроточка и диссипатор в парадигме термодинамики ранее не использовались, хотя «подсказки» в этом направлении в литературе присутствуют. Ранее, в части I-й, неоднократно цитировались источники, прямо указывающие на необходимость учета дискретного характера изменения термодинамических параметров (т.е. построения Боргартоники), расстояний, времен. При выводе «гидродинамического приближения» в физической кинетике – локальных (дифференциальных) уравнений переноса, все авторы говорят о «крупнозернистом усреднении», однако используют полевое (континуальное) описание. Это усреднение фактически и реализуется введением макроточки и диссипатора, которые хотя и внепарадигмальны, однако основаны на высказанных [6,9], но не использованных «подсказках».

Локальное термодинамическое квазиравновесие (т.е. «форма существования» ФБМО) постулируется обычно следующим образом [2]: «... время релаксации растет с увеличением размеров системы, так что отдельные макроскопически малые части системы приходят сами по себе в равновесное состояние значительно раньше, чем устанавливается равновесие между этими частями. Поэтому ... хотя в целом состояние системы неравновесно, отдельные ее малые части равновесны (точнее, квазиравновесны)». Здесь «малые части» – это ФБМО, в которых температура считается равновесной, поскольку релаксирует гораздо быстрее, чем в теле в целом. Однако еще М. Смолуховским было замечено, что «... термодинамическое равновесие в точном смысле слова вообще не существует, ... каждая представленная надолго самой себе система совершает беспорядочные колебания вокруг состояния идеального термодинамического равновесия» [34, с. 89]. Тем более нельзя говорить о равновесии, если ФМБО не «представлен надолго самому себе», а взаимодействует, обмениваясь энергией и частицами с другими. Равновесие любого из ФМБО, составляющих систему, может наступить только при установлении равновесия в системе в целом. В этой ситуации, описываемой термодинамикой, понятие температуры не может быть тождественным термостатическому, так как «... нельзя ввести понятие температуры для системы, которая не находится в состоянии термодинамического равновесия» [104].

При анализе ПЛКР, с которым тесно связано понятие температуры, необходимо попытаться понять, что именно понимается под температурой в парадигмах термостатики и термодинамики.

§35. Температура и локальное квазиравновесие

В термостатике (т.е. в классической термодинамике) развитие понятия температуры имеет длительную и противоречивую историю [2,11,68,141,205]. В отражающих сложившуюся картину источниках, температура есть нечто, определяющее внутреннюю энергию идеального газа и один из параметров опытного закона $PV = RT$ [141]. При изложении I-го начала появляется $\mathrm{d}T$ (наделение параметра непрерывностью (континуальностью)) и дается определение теплоемкости. При изложении II-го начала автор [141] мысленно располагает ряд тел снизу вверх, так что расположенное выше отдает тепло нижнему: «При этом говорят, что тело, помещенное выше, имеет более высокую температуру». При изложении материала о неравновесных состояниях и необратимых процессах [141, §36,37], температура не упоминается.

В [68] читаем: «Температура тела есть мера его нагретости». Далее подробно рассматриваются различные термометры и методы измерения температуры, термодинамические и абсолютные шкалы температур, однако к приведенному «определению» ничего не добавляется. Рассмотрев состояние термодинамического равновесия двух сопряженных гомогенных систем, на основании обосновываемого опытом свойства транзитивности этого состояния, авторы [10] вводят функцию состояния – температуру.

В [3] абсолютная температура $\Theta = kT$ (где k – константа Больцмана) вводится формулой

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E},$$

где σ, E – соответственно энтропия и энергия тела. Энтропия определяется как натуральный логарифм статистического веса макроскопического состояния [3]. Ясно, что величина Θ есть «статистическая температура», а не термодинамическая; последняя первична по отношению к энтропии, определяемой в термодинамике через ΔQ и T. Аналогичные определения «статистической температуры» имеются и в [4,5,8,9,20,145]. В термодинамике аналогичные определения используются в формальной теории термодинамических потенциалов [2,4,12,60,155,165].

Не давая строгого определения, авторы [206] говорят о состоянии с постоянной температурой как о таком, при котором температуры двух длительно контактирующих тел равны. Они полагают, что средняя кинетическая энергия молекул газа – это свойство только «температуры» и именно поэтому она «может служить определением температуры» [206, с. 20]. И далее: «Мы можем сами определить шкалу температуры так, что средняя энергия будет пропорциональна температуре. Лучше всего для этого назвать «температурой» саму среднюю энергию».

Как величину, позволяющую описывать тепловое равновесие между контактирующими телами, определяют температуру и другие авторы [2,118,165]; иногда формулируется «нулевое начало термодинамики» – постулат, утверждающий, что существует функция состояния, именуемая температурой [2,9,11,165].

Таким образом, имеется три типа определений температуры: 1) молекулярно-кинетическое; 2) термостатическое (через термодинамические потенциалы); 3) статистическое. Все эти температуры отождествляют между собой, хотя можно встретить и утверждение типа [4]: «абсолютную температуру мы должны с кинетической точки зрения трактовать как величину, характеризующую среднюю энергию движения молекул. В настоящее время такая трактовка является **единственно возможной**» (выделено мной – И.В.) А как быть, если нет свободно движущихся молекул (в твердых телах, вязких жидкостях, ионизованной плазме)? Для «негазовых» микро- и макросистем вводят всевозможные «температуры» – «отрицательные абсолютные», «спиновые», «релятивистские», «электронные», «ядерные» и др. [2,9,11,147,166,205] – внепарадигмальные (для термодинамики) понятия.

В литературе по термостатике температуре уделяется большое внимание, но рассматриваются различные температурные шкалы, термометры, способы измерений, при отсутствии ясных определений самого понятия [68,166,205]. В ряде работ температура трактуется в рамках претендующих на модернизацию парадигмы «продвинутых» теорий (Каратеодори, Афанасьева–Эренфест, Тисса, Гайле и др. [9]), ничего существенно нового не содержащих.

Рассмотрим определения температуры в термодинамике необратимых (неравновесных) процессов. В макроскопической термодинамике [2,6–9,71,110, 112,113,151] температуру вводят в связи с понятиями ФБМО и ПЛКР. В [7], в частности, термодинамические параметры (в том числе – температуру) трактуют как обобщение соответствующих термостатических параметров – принятием постулата о справедливости соотношения Гиббса для ФБМО, для которых предполагается верным ПЛКР. То же, по сути, делается и в [6], где термодинамические параметры, аналогичные термостатическим, приписываются макроскопическим подобъемам системы, по которым осуществляется их усреднение (т.е. вводятся ФБМО). Поскольку данный ФБМО не изолирован от «смежных», а взаимодействует с ними, то средние по выделенному ФБМО могут отличаться от средних по объему всей системы. Совпадение средних обеспечивается повторным усреднением – по некоторому интервалу времени (фильтрация высокочастотных флуктуаций). Таким образом и вводятся локальные температуры – квазиравновесные (ПЛКР). Введенные пространственные и временные усреднения называются «крупнозернистыми» [6]. В фундаментальном учебнике [2] вопрос о температуре при неравновесных процессах даже не затрагивается. Взамен – и стандартно – вводится ПЛКР. То же и в [9], несмотря на рассмотрение там различных «обобщенных термодинамик».

В физической кинетике [89,19,20,144,145,147] ничего нового по сравнению с изложенным не встречается. В [144] постулируется существование двух пропорциональных друг другу полевых функций – энергии $E = E(\bar{r}, t)$ и температуры $T = T(\bar{r}, t)$. В [19,145,147], содержащих большое число методом получения кинетических и гидродинамических уравнений, обоснование (введение) понятия неравновесной температуры сведено к «обоснованию» ПЛКР. Таким образом, в физической кинетике смысл неравновесной температуры не проясняется.

ПЛКР играет в термодинамике двоякую роль: обосновывает использование температуры, «заимствованной» в термостатике; обобщает соотношение Гиббса на неравновесные процессы, т.е. вводит время в теорию. Поэтому устранение артефакта ПЛКР требует: 1) независимого определения неравновесной температуры: 2) введение в термостатику времени без использования соотношения Гиббса (также являющегося артефактом).

Из изложенного выше следует, что основой для определения неравновесной температуры может служить равновесная (термостатическая) температура, которую надо считать величиной дискретной. Шкала температуры должна быть «крупнозернистой», т.е. дискретной, не содержащей значений $T \in (T, T + \Delta T_0)$; «шаг» ΔT_0 обусловлен макроскопической природой изучаемых систем, измерение всех параметров которых возможно лишь с конечной точностью. Мгновенные значения температуры (как и ее производных по времени и координатам) не наблюдаемы, так как определение любого термодинамического параметра содержит усреднение [3,60]. Любое измерение температуры дает ее «размазанное» в интервале $T \pm \delta T$ значение [207,208]. Измерение нестационарных температур всегда дает лишь их «прошлые» значения [169, 170,209].

При анализе хроногенерации сильным диссипатором (§19), температурная эволюция которого описывалась «шагами» ΔT_0, им соответствовали различные интервалы времени (D-периоды). Определение последних осуществлялось интегрированием уравнения диссипатора по времени с вычислением величин

$$\overline{T}_{M,k} = \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} \widetilde{T}_M(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Функция $\widetilde{T}_M(\tau)$ определялась с помощью «микрофункции перехода» $\varphi_n(\tau/\tau_k)$ (6.7) и трактовалась как «виртуальная температура». Далее было показано (семью различными способами), что можно полагать $n = 1{,}0$, т.е. считать $\widetilde{T}_M(\tau)$ линейной функцией времени. Этот подход позволил избежать использования аппарата случайных функций, «паталогических» – не имеющих нигде производных «зубчатых» функций [28,176], характерных для описания флуктуаций (при $\tau << \tau_k$). Зададимся вопросом: как связана «вычисленная» неравновесная температура диссипатора $\widetilde{T}_k(\tau)$ с равновесной, «измеренной» температурой $T_k^{(0)}$? Согласно ПЛКР, в момент времени $\tau = \tau_k$ в диссипаторе должна установиться квазиравновесная температура $T_k^{(0)} = \widetilde{T}_k(\tau_k)$. Но процесс изменения температуры в диссипаторе продолжается **все время**, пока идет переход $T_0 \to T_s$. Поэтому для такого соответствия необходима искусственная процедура, при $\tau = \tau_k$ теплообменная поверхность микроточки должна быть **мгновенно** теплоизолирована («адиабатизация» диссипатора). После этого, выждав некоторое время τ_{ky} (быть может большее, чем τ_k), необходимо измерить **установившуюся** температуру макроточки, т.е. найти $T_k^{(0)}$. Если учесть, что кроме «времени уравновешивания» τ_{ky} понадобиться еще некоторое «время измерения» τ_{ku}, то можно заключить, что температуре $T_k^{(0)}$ соответствует не время D-периода τ_k, а время $T_k^{(0)} = \tau_k + \tau_{ky} + \tau_{ku}$. Тогда получится, что термодинамическая (неравновесная) температура диссипатора $T_M(\tau)$ и квазиравновесная (вводимая ПЛКР) – термостатическая температура $T_k^{(0)}$ будучи приведены к одному и тому же моменту времени, окажутся различными.

Вытекающее из изложенного и результатов части II, **определение термодинамической температуры** (температуры в Боргартонике) таково.

Это величина, которая:

1. Является мерой внутренней энергии диссипатора, устанавливая изоморфизм шкал интервалов [40,171] внутренней энергии $Ш_U$ и $Ш_T$:

$$\Delta U_0 = V_M c_V \Delta T_0.$$

2. Измеряется дискретной шкалой $Ш_T$ с ценой деления ΔT_0, причем шкалы $Ш_T$ и $Ш_\tau$ (шкала времени) согласованы так, что значению $T_k = T_0 + k\Delta T_0$ первой шкалы соответствует значение $\tau_k^{(\Sigma)} = \sum_{j=1}^{k} \tau_j$ второй шкалы. Значение $T_k = \widetilde{T}_M(\tau_k)$ неравновесной температуры соответствует равновесной температуре $T_k^{(0)}$, определяемой «адиабатизацией» диссипатора при $\tau = \tau_k$.

3. Имеет «промежуточные» значения $T \in \left(T_{k-1}^{(0)}, T_k^{(0)}\right)$, именуемые виртуальной температурой, изменяющейся со временем линейно на интервале $\tau \in (0, \tau_k)$.

При определении неравновесной температуры таким образом отпадает необходимость в ПЛКР и в непрерывности шкалы $Ш_T$. П.1 определения, где V_M – объем макроточки, вводит объемную теплоемкость c_V как «переводной коэффициент» шкалы $Ш_T$ в шкалу $Ш_U$; п.п. 2,3 – следуют из определений макроточки и диссипатора и первого начала термостатики.

Таким образом, устранение артефактов ПКЛР и неравновесной температуры осуществлено заменой этих понятий на понятия Боргартоники: макроточка, диссипатор, определение неравновесной температуры.

§36. Производство энтропии

Термин «производство» в заголовке – дань традиции, далее будем говорить об энтропогенезе. Основное уравнение ядра парадигмы термодинамики – уравнение баланса энтропии (УБЭ) выводится из соотношения Гиббса. Эти элементы теории – артефакты (№№16,17 в табл. 2 §16).

Сформулируем устраняющие артефакты формулы Гиббса x и F: 1) Соотношение Гиббса (4.11) исключается из ядра парадигмы; 2) Введение времени в термостатику (т.е. переход к термодинамике) осуществляется моделью хроногенерации сильного диссипатора (§19) и определением температуры, приведенным в конце предыдущего §35; 3) Описание процессов переноса в сплошных средах осуществляется на основе моделей цепочек диссипаторов (гл. 7).

Следствием устранения артефакта соотношения Гиббса является устранение связанного с ним другого артефакта – УБЭ. В §14 было показано, что различные УБЭ – уравнения энтропогенеза в конечном счете всегда сводятся к уравнениям теплопереноса. Относительно значения УБЭ для анализа энтропогенеза, формулировки вариационных принципов, описания перекрестных эффектов, заметим следующее:

1) В формулах для энтропогенеза нет необходимости, так как они не содержат информации, дополнительной по отношению к D- и K-моделям теплопереноса;

2) Вариационные принципы термодинамики также в существенной степени являются артефактами (см §14);

3) Перекрестные эффекты успешно изучались и вне рамок теории Онзагера [11,17,68,152,211,212].

Из изложенного ясно, что УБЭ – уравнение энтропогенеза целесообразно исключить из ядра термодинамической парадигмы как артефакт.

§37. Структурный артефакт

Структурный артефакт ядра парадигмы заключается в аномальности, противоречивости самой структуры ядра, включающей уже рассмотренные артефакты и ряд других (№№18–20 табл.2 §16), рассматриваемых далее.

Нестационарные балансовые уравнения в частных производных (преимущественно – дивергентные) используются в УБЭ для вывода выражения для функции плотности источников энтропии, нужды в которой, как уже говорилось, нет. Артефактность балансовых уравнений заключается в зависимости входящих в них величин от времени, которое в парадигме **вводится** в термостатику **позднее**, соотношением Гиббса на основе ПЛКР. Кроме того, эти уравнения локальные и параболические, что служит основой многочисленных хроноартефактов на уровнях оболочки и базиса (гл. 2,3).

Устранение этого артефакта состоит в переходе к D-моделям диссипаторных цепочек или к их K-приближениям – квазилокальным уровням (см. §25).

Конститутивные уравнения (КУ) – уравнения Онзагера (4.16) достаточно очевидны и зачастую приводятся в учебниках и руководствах по неравновесной термодинамике лишь для того, чтобы перейти к «доказательству» симметрии кинетических коэффициентов L_{ik} (4.18). Последняя же используется для преобразования функции плотности источников энтропии (4.17) и изложении вариационных принципов. Заметим, что проще упомянутая симметрия демонстрируется не «микрообращением времени» (артефакт!), а свойствами квадратичных форм [66,67,213]. В силу того, что перекрестные эффекты часто весьма малы [81,212], можно строить упрощенные модели, учитывая «смежные» термодинамические силы в эффективных значениях коэффициентов основного уравнения. Далее будут предложены термодинамические выводы соотношений взаимности (4.18), что позволит исключить из парадигмы «метод микрообращения времени» как артефакт.

Вариационные принципы (ВП), заслуживающие рассмотрения (§14): 1) Принцип наименьшего действия – универсальный общефизический принцип; 2) Принцип максимальной скорости энтропогенерации Г. Циглера – эквивалентный нескольким «чисто термодинамическим» ВП [110].

Рассмотрим принцип наименьшего действия применительно к сильному диссипатору. В [110] приведена таблица аналогий механических и термодинамических величин, из которой следует, что аналогом функции Лагранжа в термодинамике является положительное приращение энтропии при переходе от некоторого неравновесного состояния к равновесному состоянию. Рассмотрим k-й D-период диссипатора, т.е. интервал времени $\tau \in (0, \tau_{kn})$, требующийся для перехода $T_{k-1} \to T_k$. Для этого перехода (см. задачу 13 в §19) можно найти приращения дискретных аккумулируемых $\left(\Delta\sigma_{A,k}^{(D)}\right.$ в (6.89)$\left.\right)$ и потоковой $\left(\Delta\sigma_{q,k}^{(D)}\right.$ в (6.90)$\left.\right)$ энтропий, равных друг другу:

$$\Delta\sigma_{A,k}^{(D)} = \Delta\sigma_{q,k}^{(D)} = \Delta\sigma_k^{(D)} = \int\limits_{T_{k-1}}^{T} \frac{\mathrm{d}Q_k}{T_{k-1}} = \frac{V_M c_V \Delta T_0}{T_{k-1}}. \qquad (11.1)$$

Аналогию [110] можно улучшить, так как аналогом функции Лагранжа (имеющей размерность энергии) можно взять вместо $\Delta\sigma$ величину $\Delta Q = T\Delta\sigma$ совпадающей размерности. Принцип наименьшего действия механики

$$S_M = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L(q, \dot{q}, \tau)\,\mathrm{d}\tau = \min, \qquad (11.2)$$

будучи «переведен» на диссипаторный язык, принимает вид:

$$S_T = \int\limits_{0}^{\tau_{k,n}} T_{k-1}\,\Delta\sigma_k^{(D)}\,\mathrm{d}\tau = \Delta U_0 \tau_{k,n} = \min. \qquad (11.3)$$

Поскольку изменение внутренней энергии диссипатора на любом D-периоде постоянно (ΔU_0 = const), из (11.3) вытекает условие

$$\tau_{k,n} = \min. \qquad (11.4)$$

Это условие равносильно требованию $\Psi_n = 1{,}0$ или $n = \infty$, так как по (6.91):

$$\min_{n\in[0,\infty)} \tau_{k,n} = \tau_{k,\infty} = \frac{t_0}{N-k+1}, \qquad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}. \qquad (11.5)$$

Таким образом, принцип наименьшего действия эквивалентен принципу минимальности D периода. Поскольку исходным пунктом было выражение для дискретной энтропии (11.1), при вычислении которой температура диссипатора при $\tau \in (0, \tau_k)$ оставалась постоянной и равной T_{k-1}, скачком увеличиваясь до T_k при $\tau = \tau_k$, то рассматриваемый случай соответствует нелинейному диссипатору, для которого условие аддитивности хроношкалы (или «правило отбора» (6.81)) не выполняется.

Для линейного диссипатора, согласно (6.81), $\Psi_{\min} = \Psi_1 = 2{,}0$, а $n = 1$ и (11.3), где энтропия является непрерывной (термостатической), приводит к конкретизации (11.4) в виде:

$$\tau_{k,n} = \min = \tau_{k,1} = \frac{2t_0}{2(N-k)+1} = \frac{\tau_r}{2(N-k)+1}. \qquad (11.6)$$

Покажем, что принцип Г. Циглера – максимальной скорости энтропогенерации – эквивалентен, применительно к диссипатору, принципу наименьшего действия. Скорость энтропогенерации на k-м D-периоде, в силу постоянства величины приращения энтропии (но различного для линейного и нелинейного диссипаторов), определяется отношением $\Delta\sigma_k / \tau_{k,n}$. Согласно принципа Г. Циглера:

$$\frac{\Delta\sigma_k}{\tau_{k,n}} = \max, \qquad \tau_{k,n} = \min. \qquad (11.7)$$

Таким образом, оба сравниваемых принципа эквивалентны, так как сводятся к принципу минимального хроногенеза – минимальности k-го D-периода, который устраняет артефакт – наличие многочисленных ВП термодинамики.

Минимум термодинамического действия S_T (11.3), аналогичный минимуму механического действия S_M (11.2), и эквивалентный ему принцип Г. Циглера в термодинамике неравновесных процессов **постулируются** [7,110]. В рамках Боргартоники эквивалентный им принцип – минимальной хроногенерации ((11.5), (11.6)) **выводится** (см. §19). Действительно, из (6.84) следует, что в линейном случае, при $n = 1{,}0$ (это значение n было обосновано семью различными способами):

$$\left[(N-k) + 1/2\right]\tau_{k,1} = t_0. \qquad (11.8)$$

В силу (6.50), (6.52) и (11.3), (11.8):

$$S_{T,k} = \Delta U_{N-k}\tau_{k,1} = S_{T_0} = \Delta U_0 t_0 = \min, \quad k = \overline{1,N}, \qquad (11.9),$$

где

$$\Delta U_{N-k} = V_M c_V\left[T_s - T_k + \frac{\Delta T_0}{2}\right], \qquad \Delta U_0 = V_M c_V \Delta T_0. \qquad (11.10)$$

Здесь ΔU_{N-k} имеет смысл «дефекта» (при $T_s > T_0$) или избытка ($T_s < T_0$) внутренней энергии диссипатора по отношению к Боргартону на k-м D-периоде, а ΔU_0 – минимально возможное изменение его внутренней энергии. Таким образом, соотношения (11.9) имеют смысл: термодинамическое действие на каждом k-м шаге ($k = \overline{1, N}$) одинаково и равно своему минимальному значению.

В нелинейном случае ($n = \infty, \Psi_n = \Psi_\infty = 1{,}0$) соотношение (11.9) принимает вид:

$$S_{T,k}^{(\text{н})} = \Delta U_{N-k}^{(\text{н})} \tau_{k,\infty} = S_{T,0}^{(\text{н})} = \Delta U_0^{(\text{н})} t_0 = \min, \qquad (11.11)$$

где индексом «н» вверху обозначен нелинейный случай, а

$$\Delta U_{N-k}^{(\text{н})} = V_M c_V \left[T_s - T_k + \Delta T_0\right], \qquad \Delta U_0^{(\text{н})} = \Delta U_0. \qquad (11.12)$$

В обоих случаях – линейном и нелинейном минимальные значения термодинамического действия совпадают, а отличия в левых частях (11.10) и (11.12) сказываются в отличии хроногенераций нелинейного и линейного диссипаторов. При этом D-периоды нелинейных диссипаторов меньше, чем у линейных ($\tau_{k,\infty} < \tau_{k,1}$), что свидетельствует о большей интенсивности протекания нелинейных процессов переноса.

Любопытна, на наш взгляд, следующая аналогия. В элементарной квантовой теории известна формула

$$E_n - E_m = h\nu_{nm} = \Delta E_{nm}, \qquad (11.13)$$

описывающая излучение кванта энергии при переходе электрона с уровня на более низкий уровень. Если, положив $\nu_{nm} = \Delta T_{nm}^{-1}$, где ΔT_{nm} – период излучаемой волны, переписать (11.13) в виде

$$\Delta E_{nm}\, \Delta T_{nm} = h = \min S_k, \qquad (11.14)$$

где S_k – «квантовое» действие, то видна аналогия между (11.14) и (11.9), в которой минимальному «квантовому» действию $S_k = h$ соответствие минимальное термодинамическое действие S_{T_0}.

Как известно, функция действия допускает представления – факторизации на энергию и время и на импульс и координату. Если частоте ν_{nm} мы сопоставили минимальное характерное время ΔT_{nm} (период колебаний), то длине волны λ естественно сопоставить минимальное расстояние Δx_λ. Тогда из формулы Л. Де Бройля следует:

$$\Delta x_\lambda \Delta p = h = \min S_k, \qquad (11.15)$$

т.е. формулы (11.13) и (11.15) есть следствия минимума квантового действия.

Соотношения взаимности рассмотрим на примере совместно протекающих процессов теплопроводности и диффузии [113]. Конститутивные уравнения имеют вид

$$I_q = L_{qq}\, \mathrm{X}_q + L_{qm}\, \mathrm{X}_m, \qquad I_m = L_{mq}\, \mathrm{X}_q + L_{mm}\, \mathrm{X}_m, \qquad (11.16)$$

где I, X – потоки и термодинамические силы соответственно, L_{ik} – кинетические коэффициенты. Умножим первое из уравнений (11.16) на X_q, а второе – на X_m и сложим их:

$$I_q X_q + I_m X_m = L_{qq} X_q^2 + L_{mm} X_m^2 + (L_{qm} + L_{mq}) X_q X_m. \qquad (11.17)$$

Здесь левая часть есть скорость энтропогенерации [113], которая, в силу принципа Г. Циглера, должна быть максимальна. Следовательно

$$L_{qq} X_q^2 + L_{mm} X_m^2 + (L_{qm} + L_{mq}) X_q X_m = \max. \qquad (11.18)$$

Пусть входящие в (11.18) коэффициенты L_{ik} могут принимать различные значения, среди которых есть максимальные – $L_{ik}^{\max}$. Поскольку X_q и X_m в общем случае произвольны, условие (11.18) требует выполнения условий

$$L_{qq} = L_{qq}^{(\max)}; \quad L_{mm} = L_{mm}^{(\max)}; \quad (L_{qm} + L_{mq})^{(\max)} = L_{qm}^{(\max)} + L_{mq}^{(\max)}. \qquad (11.19)$$

Последнее из соотношений (11.19) справедливо, если

$$L_{qm}^{(\max)} = L_{mq}^{(\max)}. \qquad (11.20)$$

Таким образом, из принципа Г. Циглера следует, что: а) кинетические коэффициенты принимают максимальные значения; б) «перекрестные» коэффициенты равны: $L_{qm} = L_{mq}$. Подтверждается гипотеза Трусделла: «Если соотношения взаимности верны, то должна существовать и возможность их чисто феноменологического вывода» (цит. по [113]). Экстремальность (max) кинетических коэффициентов была ранее показана путем применения аналога принципа Циглера к уравнению Больцмана [19,69,70].

Иной, независимый и феноменологический по существу, вывод соотношений взаимности получаем методами элементарной молекулярно-кинетической теории, использующей лишь сам факт существования частиц (носителей энергии и массы), совершающих одномерные случайные блуждания [61,63,206].

Рассмотрим диффузию частиц массой m_0 в одномерной температурно-неоднородной среде. Пусть в сечениях единичной площади S_0 среды – $x-h; x; x+h$ сосредоточены соответственно, $N_0(x-h)$, $N_0(x)$, $N_0(x+h)$ частиц. Тогда в элементарном объеме $V_0 = S_0 h$ будут находиться частицы с суммарной массой $M_0(x-h)$, $M_0(x)$, $M_0(x+h)$, где $M_0(\xi) = N_0(\xi) m_0$. Введем плотности частиц:

$$\rho(x-h) = \frac{M_0(x-h)}{V_0}, \quad \rho(x) = \frac{M_0(x)}{V_0}, \quad \rho(x+h) = \frac{M_0(x+h)}{V_0}. \qquad (11.21)$$

Эффективный поток частиц к сечению x определяется разницей потоков частиц от сечений $(x-h)$ и $(x+h)$:

$$q_N = \frac{1}{6}\left[\left(\vartheta_0 N_0\right)_- - \left(\vartheta_0 N_0\right)_+\right], \tag{11.22}$$

где индексы «–» и «+» соответствуют сечениям $(x-h)$ и $(x+h)$, а ϑ_0 – средние скорости «прыжков» частиц, определяемые температурами в соответствующих сечениях:

$$\varepsilon_0 = \frac{m_0\vartheta_0^2}{2} = \frac{1}{2}kT, \qquad \vartheta_0 = \left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2}\sqrt{T} = \vartheta_0(T) = \vartheta_0\left[T(x)\right], \tag{11.23}$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура. От потока частиц q_N перейдем к потоку массы q_ρ:

$$q_\rho = \frac{q_N m_0}{V_0} = \frac{1}{6}\left[\left(\vartheta_0\rho\right)_- - \left(\vartheta_0\rho\right)_+\right]. \tag{11.24}$$

Разлагая функции в ряды Тейлора по степеням h и ограничиваясь членами, линейными по h, получим:

$$q_\rho = -\frac{1}{3}h\vartheta_0(x)\left[\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\rho}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right]. \tag{11.25}$$

Из (11.23) следует, что

$$\frac{1}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_0}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\ln\left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\ln T\right] = \frac{1}{2T}. \tag{11.26}$$

Окончательно находим:

$$q_\rho = -D(T)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\rho}{2T}\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad D(T) = -\frac{1}{3}h\vartheta_0(T). \tag{11.27}$$

Получено уравнение для потока массы, одно из уравнений (11.16). Второе слагаемое в (11.27) описывает термодиффузию.

Определим плотность потока тепла q_k в среде, не содержащей частиц примеси. Используем предыдущую схему, в которой введем соответствия:

$$N_0 \to N_T, \quad \vartheta_0 \to \vartheta_T = \vartheta_T(T) = \mathrm{const}\sqrt{T}, \quad \rho \to \rho_x = \frac{\varepsilon_T N_T}{V_0},$$

где $\varepsilon_T = \varepsilon_0 = kT/2$ – средняя энергия носителей энергии. Получаем:

$$q_u = \frac{1}{6}\left[(\vartheta_T\rho_u)_- - (\vartheta_T\rho_u)_+\right] = \left(-\frac{1}{3}h\vartheta_T\right)\left[\frac{\partial\rho_u}{\partial x} + \frac{\rho_u}{\vartheta_T}\frac{\partial\vartheta_T}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right]. \tag{11.28}$$

Если в (11.28) совершить преобразование, аналогичное (11.26) и воспользоваться соотношением

$$\rho_u = \frac{\varepsilon_T N_T}{V_0} = \frac{U}{V_0} = c_V T,$$

то получим:

$$q_u = -\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \lambda(T) = \frac{1}{2} h \vartheta_T(T) c_V. \tag{11.29}$$

Чтобы учесть влияние на поток тепла одновременно идущего процесса диффузии, к q_u необходимо добавить составляющую, обусловленную массопереносом:

$$q_u^{(D)} = \frac{\varepsilon_0}{m_0} q_\rho. \tag{11.30}$$

Полный поток тепла будет:

$$q_u^{(\Sigma)} = q_u + q_u^{(D)}. \tag{11.31}$$

Из (11.27), (11.29)–(11.31) следует:

$$q_u^{(\Sigma)} = -\lambda_\Sigma(T)\frac{\partial T}{\partial x} - D_T(T)\frac{\partial \rho}{\partial x},. \tag{11.32}$$

$$\lambda_\Sigma(T) = \lambda(T) + \frac{\rho D_T(T)}{2T}, \qquad D_T(T) = \frac{\varepsilon_0 D(T)}{m_0}. \tag{11.33}$$

Формулой (11.32)дается второе конститутивное уравнение, определяющее плотность потока тепла, обусловленного совместно протекающими процессами теплопроводности и диффузии. Если сопоставить полученные уравнения (11.27) и (11.32) с их «каноническими» представлениями (11.16) и воспользоваться выражениями для термодинамических сил [211]:

$$X_q = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad X_m = \frac{kT}{\rho m_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{11.34}$$

то немедленно получим

$$L_{qm} = L_{mq}. \tag{11.35}$$

Таким образом, соотношение взаимности Онзагера получены двумя феноменологическими способами, что устраняет артефакт – вывод их на основе «микрообратимости времени». Устранение структурного артефакта в целом заключается в устранении его составляющих – артефактов ядра парадигмы, что нами и осуществлено. В качестве нового ядра парадигмы, лишенного структурного (и всех частных) артефактов предлагается развитие тех элементов дискретной термодинамики (Боргартоники), которые изложены в Части II.

В последней, 12-й главе рассматривается связанный со всем предыдущим, но имеющий и самостоятельное общефизическое значение вопрос о существовании и устранении **фундаментального хроноартефакта** – парадигмы времени в физике.

ГЛАВА 12.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ХРОНОАРТЕФАКТ

Дирак сказал как-то, что прогресс в теоретической физике часто бывает связан с преодолением предрассудков. Это в полной мере относится к настоящему случаю.

И. Пригожин, И. Стенгерс

Вопрос об асимметрии временного порядка (необратимости времени) до сих пор не имеет однозначных и окончательных решений

И.П. Базаров

В табл. 2 (§16) этот артефакт не включен, так как формулировка и устранение его шире рамок термодинамики. Последний, 14 вывод по гл. 4 сводится к постановке следующих вопросов: 1. Что понимают под временем в классической механике и чем, на самом деле, оно является? 2. Откуда берется время в термодинамике и совпадает ли оно с механическим? 3. Что такое время в физике? Последующие параграфы содержат ответы автора на эти вопросы.

§38. Время в механике

Вопрос, поднятый Лошмидтом, стоял очень остро: механические уравнения, которыми Больцман описывал поведение молекул, отображают только обратимые процессы.

Я.М. Гельфер

Время традиционно считается скорее философской категорией, нежели четко определенной физической величиной. И. Ньютон полагал, что «абсолютное, истинное, математическое время – само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью» [215]. Исаак Ньютон наделял «научное» время субстанциональностью, абсолютностью и непрерывностью, признавая существование и относительного, «кажущегося» или «обыденного» времени.

Оппонировавший ему Г. Лейбниц писал [215]: «Я ... считаю пространство, также как и время, чем-то чисто относительным: пространство – порядком сосуществований, а время – порядком последовательностей». Э. Мах вообще придерживался субъективистских взглядов на время [216].

В современных учебниках механики о времени либо ничего не говорится, либо указывается на его «обратимость» (кавычки у этого термина буду ставить везде по причине, которая далее прояснится – И.В.) Под этим понимается инвариантность законов механики по отношению к замене $t \to -t$. Если же и пытаются определить время, то либо повторяют И. Ньютона [218], либо ссылаются на энциклопедические издания, как в [219]: «В толковом словаре Вебстера «время» определяется как «период», а «период» как «время»»». В [16] читаем «**Время** (философ.) – форма последовательной смены явлений и состояний материи». См. «**Пространство и время**». Если посмотреть, то узнаем [1], что пространство и время – всеобщие формы существования материи, причем время – форма последовательной смены явлений и состояний материи (характеризует длительность их бытия). Время (согласно [1, с. 212]) характеризуется универсальными свойствами – длительностью, неповторяемостью, необратимостью. Последнее заставляет вернуться к с. 55 [1], где читаем: ««Обращение времени» (Т), операция замены знака времени в уравнениях движения, описывающих эволюцию физической системы»

Расплывчатость, «ускользаемость» понятия времени должна преодолеваться, по Р. Фейнману, так: «... Следует признать тот факт, что время – это одно из понятий, которые определить невозможно, и просто сказать, что это нечто известное нам: это то, что определяет два последовательных события! Дело не в том, как время **определить**, а в том, как его «**измерить**» [219]. Далее в [219] кратко излагаются некоторые методы измерения времени, подробно описываемые в [220], где при всей обширности представленного материала для определения времени места не нашлось.

Обратившись к одному из самых фундаментальных руководств по классической механике [218], узнаём, что «измерение времени основано на его арифметизации, то есть на установлении соответствия между последовательными моментами времени и множеством действительных чисел», и что «Арифметизированное время представляет собой непрерывную последовательность одного измерения и графически может быть изображено бесконечной прямой или осью времён»; последовательность точек на этой прямой соответствует последовательности моментов времени. Отсчет времени идет от некоторого начального момента ($t = 0$), или начала отсчета времени, о выборе которого каждый раз условливаются ... Отрицательные времена ($-t$) отвечают представлению «раньше» начального момента, а положительные ($+t$) – представлению «позже» начального момента».

Ясно, что изложенное определяет не «физическое время» (смысл величины), а лишь **шкалу** для его измерения (отсчета). Специальная теория относительности по существу не вносит ничего нового, кроме положения о разном ходе часов в разных инерциальных системах. Откуда **первично** берется, **как вводится время** в механику и другие разделы физики? Отсутствие ответа на этот вопрос свидетельствует о «принятой по умолчанию» следующей «парадигме времени»: 1. Время во всех разделах физики – одна и та же величина; 2. Это время – «механическое время», то есть то, которое «определено» [218] в механике.

Теперь можно сформулировать гипотезу: время не есть физическая величина, а является шкалой для измерения интенсивности физических процессов. Эта гипотеза «шкалы» (ГШ) порождает вопросы: ГШ-1 – Каковы реперные точки шкалы времени? ГШ-2 – Равномерна ли эта шкала? ГШ-3 – Эта шкала непрерывна или дискретна? Ответы на эти вопросы, которые содержатся в [218], таковы. Вопрос ГШ-1 – реперных точек нет; начало шкалы ($t = 0$) выбирается произвольно; шкала содержит как положительные значения ($t > 0$– будущее), так и отрицательные значения ($t < 0$– прошлое). Вопрос ГШ-2 – шкала равномерная, так как определяется часами (некоторым периодическим физическим процессом); единицы шкалы кратны ее наименьшему делению, определяемому эталоном времени, принимаемом на основе соглашения [220]. Вопрос ГШ-3 – шкала непрерывна (континуальна), поскольку «арифметизирована»; длительность «момента времени» равна нулю.

Далее будут получены альтернативные ответы на эти вопросы путем более тщательного анализа содержания таких характеристик времени, как обратимость, равномерность и непрерывность.

1. Обратимость времени

Ранее цитировался БЭС [1], где под обращением времени понималась замена $t \rightarrow -t$ в уравнениях движения. В [217] читаем: «Замена t на $-t$ оставляет функцию Лагранжа, а следовательно и уравнения движения, без изменений. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, то есть такое, при котором система проходит те же самые состояния в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы».

Имея в виду и механику, и электродинамику, Р. Пайерлс утверждает [27]: «Все законы обратимы во времени в том смысле, что для любого движения, являющегося решением этих уравнений, ... движение, полученное обращением времени, то есть заменой t на $-t$, является также возможным решением. При построении этого «обращенного» движения надо, конечно, изменить знак всех скоростей и одновременно знак магнитного поля. Другими словами, в законах механики и электродинамики не делается различия между «прошлым и будущим».

М. Кац пишет [24]: «... все уравнения механики обратимы по отношению ко времени. Это значит, что если мы совершим преобразование $t \rightarrow -t$, то данные уравнения не претерпят изменения. Это следствие того факта, что в механике все производные по времени – вторые. Нет средств отличить уравнения механики, написанные для возрастающего времени, от уравнений, написанных для убывающего времени».

Аналогичное определение «обратимости» времени в механике (путем дальнейшего цитирования) можно легко продолжить. Мы покажем далее, что эта «обратимость» – артефакт, существующий со времен Лапласа, считавшего, что «... при заданных положениях и начальных скоростях точечных частиц, из которых составлена материя, можно, зная законы механики, предсказать развитие Природы на вечные времена ... а заодно и описать все ее прошлое» (цит. по [238]). Однако далее в приведенных определениях легко усматривается их противоречивость.

Действительно, в [217] замена $t \to -t$ предполагается эквивалентной описанию прохождения системой всех **тех же** состояний в обратном порядке. Пусть материальная точка в момент времени $t^{(+)} = t_0^{(+)} = 0$ находилась в точке $x = 0$ оси Ox, вдоль которой и двигалась дальше вправо, то есть в сторону $x > 0$. В моменты времени $t_1^{(+)} = \tau_0$, $t_2^{(+)} = 2\tau_0$, $t_3^{(+)} = 3\tau_0$, $t_4^{(+)} = 4\tau_0$, (то есть при $t^{(+)} \in \left[0, t_4^{(+)}\right]$) точка оказывалась на расстояниях от начала $x = 0$ оси Ox, равных $x_1, x_2, x_3, x_4 = L$, то есть прошла путь $x(t_4^{(+)}) = x_4 = L$. Если это движение «обратить», то двигаясь в «обратном» времени $t^{(-)} \in [0, -t_4^{(+)}]$, при $t_1^{(-)} = -\tau_0$ материальная точка должна иметь координату $x = x_3$, при $t_2^{(-)} = -2\tau_0$ – координату $x = x_2$, при $t_3^{(-)} = -3\tau_0$ – координату $x = x_1$ и при $t_4^{(-)} = -4\tau_0$ – $x = x_0 = 0$. Казалось бы, «обратное» движение построено, точка возвращается от $x = L$ к $x = 0$, двигаясь в «обратном» времени $t^{(-)} \in [0, -4\tau_0]$. Проверим, однако, как связаны «прямое» и «обратное» время для каждой точки маршрута $x = 0 \to x = L$ (и обратно). Для $x = x_0 = 0$ $t^{(+)} = t_0^{(+)} = 0$, а $t^{(-)} = -t_4^{(+)} = -4\tau_0$. Для $x = x_1$, $t_1^{(+)} = \tau_0$, а $t^{(-)} = -3\tau_0$ и т.д. Связь прямого и обратного времён для любого $x = x_i$ $(i = \overline{0,4})$:

$$t_i^{(+)} + \left|t_i^{(-)}\right| = t_4^{(+)} = 4\tau_0 . \tag{12.1}$$

Что же тогда означает условие «обращенного» движения $t \to -t$? Из (12.1) следует, что $t_i^{(+)} = \left|t_i^{(-)}\right|$ только при $i = 2$, $x = x_2$, $t_2^{(+)} = 2\tau_0$, $t_2^{(-)} = -2\tau_0$. При других $i \neq 2$ этой симметрии $\left(t = \left|-t\right|\right)$ вовсе нет. И обратно, если в (12.1) положить $t_i^{(+)} = -t_i^{(-)}$, то получим, что $t_i^{(+)} = t_4^{(+)}/2 = 2\tau_0 = -t_i^{(-)}$, то есть $i = 2$.

Итак, две части одного определения в [217] противоречат друг другу: если обращение времени заключается в прохождении в обратном порядке состояний (точек), **уже пройденных** в прямом направлении, то вместо зеркального отображения $t \to -t$ имеем (12.1) (где можно отбросить индексы). Такое толкование «механической обратимости» широко распространено; в нем пытаются совместить требование инвариантности уравнения относительно $t \to -t$ и $\mathbf{V}_0\left(t_0^{(-)}\right) \to -\mathbf{V}_4\left(t_4^{(+)}\right)$ (обращение скорости) с наглядной картиной «процесса, идущего вспять» [5,128,206,222]. Такую обратимость будем называть последовательной (ОПО), поскольку она предполагает, что есть вначале прямое движение, которое **затем** переходит в обратное, то есть эти два процесса идут последовательно. Примеры, когда «обратимость» определяется как ОПО, многочисленны [3,11,19,32,33,60,206,217,224–227].

Иное определение «обратимости» дают другие (а подчас те же) авторы. Они требуют симметрии прошлого и будущего при изменении знака скоростей в начальный момент времени, то есть выполнения условий:

$$t \to -t;\ x_i(t) \to -x_i(-t);\ \mathbf{V}_i(0) \to -\mathbf{V}_i(0);\ \mathbf{V}_i(t) \to -\mathbf{V}_i(-t). \quad (12.2)$$

Здесь x_i и $\mathbf{V}_i$ – координаты и скорости частиц. Основное уравнение механики (II закон Ньютона) можно записать в виде

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i, \qquad i = \overline{1, N}, \quad (12.3)$$

или в эквивалентном виде

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i. \quad (12.4)$$

Действительно, при $t \to -t$, $\mathbf{V}_i \to -\mathbf{V}_i$ обе эти формы инвариантны. При этом в обоих уравнениях правая часть (сила $\mathbf{F}_i$) остается инвариантной:

$$\mathbf{F}_i(x_i, t) = \mathbf{F}_i(x_i, -t), \quad (12.5)$$

то есть **должна** быть по t четной функцией. Это сразу ограничивает гипотезу Лапласа об «обратимости» выбором фиксированного класса сил (четных функций времени). Далее мы покажем, что «обратимость» $t \to -t$ невозможна независимо от вида (и даже самого наличия) сил.

Поскольку эта, **вторая** формулировка «обратимости» как равноправного симметричного описания будущего ($t > 0$) и прошлого ($t < 0$) относительно «настоящего» ($t = 0$) рассматривает оба движения протекающими параллельно (одновременно, но в разных направлениях t); будем называть ее параллельной «обратимостью» (ОПА). Все определения ОПА эквивалентны приведенному и встречаются чаще, чем определения ОПО. Приводим лишь некоторые источники, содержащие ОПА [4,5,19,24,25,27,31-33,60,128,147,206,210,217, 221–225,227,228]. Довольно много источников содержат одновременно ОПО- и ОПА-определения; встречаются случаи, когда формулируется ОПА, затем приводится «конкретный пример», из которого видно, что речь идет об ОПО и наоборот. В [227], в частности, определение ОПО встречаются на стр. 5, 29, 139, 194, а ОПА – на стр. 4, 5, 105, 118.

Встречаются рассуждения об «обратимости» (в рамках ОПО), в которых неявно (или явно!) «обращенное» время, как и «прямое», положительно, то есть $t^{(-)} > 0$. В [217], рассматривая финитное периодическое движение частиц, авторы для получения формулы для периода T этого движения (формула (11.5) на стр. 38) удваивают время прямого движения, то есть используют симметрию (кинематическую) движения, ссылаясь при этом на «общее свойство обратимости». В [217] при анализе парадокса Лошмидта рассматривают случай ОПО. Обратное движение осуществляется при $t \in [t_0, 2t_0]$, $(t_0 > 0)$, на основе чего доказывается корректность этого парадокса. В [226] для оправдания использования положительного времени (при анализе «обратимости») автор, интуитивно чувствуя «неладное», вынужден прибегнуть к загадочной формулировке: «При этом надо, конечно, иметь в виду, что направленность времени – понятие более первичное, чем понятие обратимости или необратимости» [226, с. 290].

Таким образом, когда говорят об «обратимости» уравнений механики, имеют в виду ОПО или ОПА, переходя часто в ходе изложения от одной к другой. Поскольку определение ОПО, как показано ранее, противоречиво, сосредоточим основное внимание на ОПА. Рассмотрим ряд задач механики, ограничиваясь одномерным движением материальной точки под действием потенциальной силы.

Первый интеграл уравнения движения [217]:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \tag{12.6}$$

где m – масса, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \mathbf{V}$ – скорость, $U(x)$ – потенциальная, а E – полная энергия материальной точки. Уравнение (12.6) в [217] представлено в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}. \tag{12.7}$$

Мотивы выбора знака «+» перед корнем не указываются. Эта же формула в [218] записана несколько иначе ($U(x)$ выражена через силу $\mathbf{F}(x)$):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m}U(x)}, \qquad U(x) = \int\limits_{x_0}^{x} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12.8}$$

V_0 – начальная скорость частицы. Из (12.7) и (12.8) вытекает, что имеются два уравнения – (12.7) и уравнение, соответствующее знаку «–» перед корнем.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}. \tag{12.9}$$

Из (12.9) следует, что, при $t \to -t$, уравнение (12.7) в «обратном времени», позволяет определить «эволюцию назад», то есть решение вида $x^{(-)} = x(-t)$. При $t^{(-)} = t_0^{(-)} = 0$, $x(0) = x_0$. Из (12.9) следует

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)_{t^{(-)}=0} = V_0^{(-)} = -V_0^{(+)}, \quad V_0^{(+)} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x_0)\right)}. \tag{12.10}$$

Требование определения ОПА – обращение знака начальной скорости – выполняется автоматически, что следует из (12.6), а следовательно, из уравнения движения. Этим подтверждается вторично, что «верным» определением «обратимости» является ОПА (первое подтверждение – невыполнение для ОПО отображения $t \to -t$; вместо него имеет место (12.1)).

Для суждения о корректности определения ОПА (или ее отсутствия) этого, однако, недостаточно. Всякое конкретное движение материальной точки (частицы) описывается не только уравнением движения (которое само по себе дает бесконечное множество траекторий-решений), но требует задания условий однозначности – начальных условий:

$$x(0) = x_0, \quad V(0) = V_0. \tag{12.11}$$

Определим критерий корректности ОПА, невыполнение которого будет свидетельствовать о некорректности этого понятия. Согласно определению ОПА, обращение времени $t \to -t$ в уравнении движения совместно с изменением знака у V_0: $V_0 \to -V_0$, должно позволить получить «обратную» траекторию $x^{(-)} = x(-t)$. Пусть $x_0 = 0$ и при «прямом» движении $(t = t^{(+)} > 0,\ \ V_0 > 0)$ частица движется вправо, в сторону $x > 0$. При обратном движении $(t = t^{(-)} = -t^{(+)} < 0,\ \ V_0 < 0)$ частица движется влево, в сторону все больших $|\,x\,|$ $(x < 0)$. Если определение ОПА корректно, то должно выполняться соотношение:

$$x^{(-)}(-\,t) = -x^{(+)}(t), \quad x^{(+)}(t) > 0, \quad t > 0. \tag{12.12}$$

Можно ввести также условие

$$x^{(-)}(-\,t) < 0, \quad t > 0, \tag{12.13}$$

называя (12.12) сильным, а (12.13) – слабым критерием корректности ОПА. Сильный критерий (12.12) строго соответствует трактовке «обратимости» уравнений механики как симметричного описания «прошлого» и «будущего». Для суждения о корректности ОПА достаточно и слабого критерия (12.13); если (12.13) не выполняется, то (12.12) не выполняется и подавно.

Для материальной точки с массой m_0, движущейся вдоль оси Ox вправо (в сторону возрастающих $x > 0$ при прямом движении) или влево ($x < 0$ – при «обратном») под действием силы F_0, направление которой совпадает с положительным направлением оси Ox ($F_0 > 0$), уравнение движения (12.3) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = \frac{F_0}{m_0} = a_0, \qquad a_0 > 0. \tag{12.14}$$

Рассмотрим случаи: А. F_0 = const (a_0 = const); В. $F_0 = F_0(t)$ ($a_0 = a_0(t) = a_0(-t)$); С. $F_0 = F_0(x)$ ($a_0 = a_0(x)$); D. $F_0 = F_0(V^2)$.

В случае А двукратное интегрирование (12.14) дает (при условиях (12.11), где $x_0 = 0$)

$$x^{(+)}(t) = x(t^{(+)}) = V_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}. \tag{12.15}$$

Для «обращения» в (12.15) надо положить: $t \to -t$, $V_0 \to -V_0$. Это дает:

$$x^{(-)} = x(t^{(-)}) = x(-t) = (-V_0)(-t) + \frac{a_0 t^2}{2} = x^{(+)}(t) > 0. \tag{12.16}$$

Из (12.16) следует, что слабый критерий (12.13) не выполняется, то есть обратимости нет и определение ОПА некорректно.

В случае В (с теми же начальными условиями) двукратное интегрирование (12.14) дает:

$$x(t) = V_0 t + I_1(t), \quad I_1(t) = \int_0^t I_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad I_2(\tau) = \int_0^\tau a_0(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{12.17}$$

Заменой переменной интегрирования легко убедиться в том, что $I_2(t)$ является нечетной функцией, а интеграл $I_1(t)$ – четной, так что

$$x^{(-)} = x(-t) = (-V_0)(-t) + I_1(-t) = V_0 t + I_1(t) = x^{(+)}(t) > 0. \tag{12.18}$$

Вновь ОПА некорректна.

В случае С рассмотрим, используя (7), варианты, определяемые видом функции $U(x)$: С$_1$) $U(x)$ = 0; С$_2$) $U(x) = kx^2/2$; С$_3$) $U(x)$ = 0 при

$x \in (-L/2, L/2)$ и $U(x) = E$ при $|x| \geq L/2$; С$_4$) $U(x) = E - kx^2/2$.

Вариант С$_1$. Совпадает с частным случаем А, когда $F_0 = a_0 = 0$. Из (12.15) и (12.16) следует некорректность ОПА. **Вариант С$_2$**. Случай гармонического осциллятора. Из (12.7) получаем:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{V_0^2 - \omega^2 x^2}, \quad V(0) = V_0 = \left(\frac{2E}{m_0}\right)^{1/2}, \quad \omega = \left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2}. \quad (12.19)$$

Интегрируя (12.19) (при $x(0) = x_0 = 0$), находим:

$$x^{(+)} = x(t) = V_0 \frac{\sin \omega t}{\omega},$$

$$x^{(-)} = x(-t) = (-V_0)\frac{\sin[\omega(-t)]}{\omega} = x^{(+)}(t) > 0. \quad (12.20)$$

Вновь убеждаемся в некорректности ОПА. **Вариант С$_3$**. «Потенциальная яма». Точки $|x| = L/2$ являются точками остановки, скорость в них, согласно (12.7), обращается в нуль. Начальная скорость $V_0 = V(0)$:

$$V_0 = \left(\frac{2E}{m_0}\right)^{1/2}$$

при движении частицы в «яме» сохраняется, так как силы на нее не действуют. Интеграл (12.7):

$$x^{(+)} = x(t) = V_0 t, \quad t < L/2\,V_0. \quad (12.21)$$

«Обращение» (12.21) дает:

$$x^{(-)} = x(-t) = (-V_0)(-t) = V_0 t = x^{(+)}(t) > 0, \quad |t| < L/2\,V_0. \quad (12.22)$$

Определение ОПА вновь некорректно. **Вариант С$_4$**. Инфинитное движение частицы в области $x \geq x_0$ $(x_0 > 0)$. Из (12.7) находим:

$$V(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2} \cdot x(t), \qquad V_0 = \left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2} \cdot x_0. \quad (12.23)$$

Интеграл (12.23) имеет вид:

$$x^{(+)} = x(t) = x_0 \exp\left[\left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2} t\right]. \tag{12.24}$$

Из (12.24) следует, что при $t \in [0,\infty)$ частица движется в области $x \in [x_0,\infty)$ направо (инфинитное движение). «Обращенное» движение:

$$x^{(-)} = x(-t) = -x_0 \exp\left[\left(\frac{k}{m_0}\right)^{1/2} (-t)\right] \le 0 \tag{12.25}$$

описывает движение частицы в области $x \in [-x_0,0)$ в том же направлении, которое является финитным, так как $x = 0$ – точка остановки, где $V = 0$. ОПА вновь некорректна.

В случае D положим $F_0(V^2) = -\alpha V^2$ ($\alpha > 0$ – сила сопротивления при быстром движении частицы в «среде»). В этом случае воспользуемся уравнением (12.4)

$$m_0 \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\alpha V^2, \quad V(0) = V_0 > 0, \quad x(0) = x_0 = 0. \tag{12.26}$$

Интеграл (12.26):

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + \dfrac{\alpha}{m_0} V_0 t}, \quad x(t) = \frac{m_0}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{m_0} V_0 t\right) = x^{(+)}(t). \tag{12.27}$$

«Обращенное» движение:

$$x^{(-)} = x(-t) = \frac{m_0}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{m_0}(-V_0)(-t)\right) = x^{(+)}(t) > 0. \tag{12.28}$$

И в этом случае ОПА некорректна.

Проведенные расчеты показывают, что во всех случаях процедура «обращения» (в смысле ОПА) нарушает слабый, а тем более и сильный критерий (12.12). Во всех случаях, кроме варианта C_4, было получено

$$x^{(-)} = x(-t) = x^{(+)} = x(t) > 0,$$

то есть никакого «обратного» движения не было. Для определения ОПО (если забыть о его противоречивости) также можно ввести слабый

$$x^{(-)} = x(-t) < x^{(+)} = x(t) \tag{12.29}$$

и сильный критерий корректности

$$x^{(-)} = x(-t) = 0. \quad (12.30)$$

Результаты будут аналогичны полученным для ОПА. Рассмотрим, например, случаи А и В, где использование ОПО (то есть одновременная замена $t \to -t$ и $V_0^{(-)} \to -V^{(+)}(t)$) дает:

$$x_A^{(-)} = x_A^{(+)} + a_0 t^2 > x_A^{(+)}, \quad x_B^{(-)} = x_B^{(+)} + I_2(t)t > x_B^{(+)}, \quad (12.31)$$

то есть оба критерия (12.29) и (12.30) нарушены.

Итак, оба определения «обратимости» ОПА и ОПО некорректны, то есть так называемая «обратимость уравнений механики» – артефакт. Рожденный Лапласом миф о механической обратимости, переживший теплород, флогистон и эфир, загадочен вдвойне, поскольку известны многочисленные «подсказки», которыми, однако, никто не воспользовался. Еще И. Лошмидт (реанимировавший полузабытый миф в 1876 г. своим парадоксом) утверждал [11]: «Может быть только одно, либо механическая обратимость, либо термодинамическая необратимость». Отсюда, казалось бы, должен был немедленно последовать верный вывод, поскольку опровергнуть термодинамическую необратимость нельзя. Почти сто лет спустя Р. Фейнман приводит [206] пример механической «обратимости»: «Решая уравнение движения, мы можем получить некоторую функцию, скажем $x_1(t) = t + t^2 + t^3$. Мы утверждаем, что другим решением будет функция $x_2(t) = x_1(-t) = -t + t^2 - t^3$ ...» Поразительно! Этот, видимо абсолютно случайный пример, как раз и показывает ... необратимость. И. Пригожин и И. Стенгерс в посвященной «физике времени» книге [227] пишут: «... в компьютерном эксперименте, исходя из программы, составленной на основе классической динамики, мы получили эволюцию с нарушенной симметрией во времени. Как такое возможно?» Авторы вновь **поверили** мифу, вместо того, чтобы **проверить** подсказку компьютера.

Поскольку наше доказательство артефактности механической «обратимости» построено было на контрпримерах, рассмотрим еще одно, более общее, но, как ни странно, и более простое. Согласно [218], механика состоит из разделов: I. Кинематика; II. Кинетика. Последняя подразделяется на Статику и Динамику. В Кинематике используются основные понятия механики: траектория, расстояние, скорость, ускорение, время. Динамика добавляет к ним понятия массы и силы и позволяет из динамического уравнения (2-го закона Ньютона) получать формулы кинематики. Таким образом, в механике есть два уровня описания – «этажа». На первом, кинематическом, где ускорение считается известным, вычисляются основные наблюдаемые величины: скорость частицы, пройденный ею путь, форма траектории, время движения. На втором «этаже» – динамическом, решаются две основные задачи: по заданным массе и ускорению определяется сила; по заданной силе и массе определяется ускорение.

Артефакт «обратимости» обосновывают тем, что уравнение движения (динамическое) есть дифференциальное уравнение второго порядка по времени. Однако любое обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка есть результат композиции двух уравнений первого порядка, образующих систему. Если выделить «этажи», (12.3) можно записать в виде:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V, \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = a, \quad a = \frac{F}{m}. \tag{12.32}$$

Здесь первые два соотношения – 1-й «этаж» (кинематика), а последнее – 2-й «этаж» (динамика). Если «обратимость» присуща (12.3), а одному из «этажей» – нет, то значит она – артефакт. Проверим на «обратимость» кинематические «составляющие» в (12.32). Пусть силы не действуют ($F = 0$). Тогда $a = 0$, V = const, и имеем

$$x = x(t) = Vt, \qquad (x(0) = x_0 = 0). \tag{12.33}$$

Это уравнение является простейшим и наиболее фундаментальным в механике, поскольку: а) служит определением средней скорости движения; б) входит как частный случай в любые, самые сложные, траектории $x(t)$. Запишем (12.33) в векторном виде:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}t. \tag{12.34}$$

Вектор $\mathbf{x}$ есть смещение частицы вдоль оси Ox, а вектор $\mathbf{V}$ – ее скорость в том же направлении. По смыслу векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{V}$ они **всегда однонаправлены**, то есть имеют **всегда один знак** по отношению к оси Ox. Но отсюда следует, что значения $t < 0$ **невозможны**, так как ведут к движению направо ($x > 0$) частицы, скорость которой направлена влево ($\mathbf{V} < 0$) или наоборот. Таким образом, значения t в (12.34) всегда **положительны**, то есть временная шкала является **принципиально положительно определенной**. Формулу (12.34) будем называть фундаментальным кинематическим запретом (ФКЗ) «обратимости».

В случае $F = \text{const} = F_0$ из второго уравнения (12.32) при $V(0) = V_0 = 0$ следует:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} t = \mathbf{a}_0 t, \quad \mathbf{a}_0 = \text{const}. \tag{12.35}$$

В (12.35), как и в (12.34) подстановка $t < 0$ приводит к абсурду: при ускорении частицы, имеющем то или иное направление, ее скорость имеет другое направление. При этом случай (12.35) не является частным, так как при $V_0 \neq 0$ достаточно в (12.35) перейти к конечно-разностному виду:

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{a}_0 \Delta t,$$

откуда также следует невозможность $\Delta t < 0$ (так как тогда знаки у $\mathbf{a}_0$ и $\Delta\mathbf{V}$ будут противоположны, что противоречит понятию ускорения).

Итак, вновь показана невозможность «обращения» времени, то есть подтвержден ранее уже сделанный вывод: «обратимость» уравнений механики есть артефакт.

2. Равномерность и непрерывность времени

Временная шкала в механике считается равномерной, а поскольку она арифметизирована [218], то и непрерывной (континуальной). Эти свойства времени обсуждались философами [215,216,229–232], математиками [24,25,40, 41,210] и физиками [33,35,119,128,206,217–219, 221–223,227,233–240]. Вопросы обоснования, **введения времени** затрагиваются в немногих работах, где речь идет о построении временной шкалы [40,210,218,229].

Мы также далее попытаемся построить механическую хроношкалу, соответствующую шкале интервалов [40,171,176]. Воспользуемся приемом Р. Карнапа [229], поручившему такое построение «наивному физику» (НФ), начинающему с «нуля». Поскольку НФ озабочен построением хроношкалы [229], имея уже априорное (интуитивное) представление о времени, мы привлечем «сверхнаивного физика» (СНФ), ничего о времени вообще не знающего. Мы ставим перед СНФ задачу: **ввести время** путем разработки способа **различения** механических движений по их интенсивности (понимаемой вначале априорно, а затем формализуемой).

СНФ экспериментирует с «полигоном» − устройством, в котором шары одинакового размера, изготовленные из одного материала, скатываются с различных высот $h_i (i = \overline{1, N})$ по желобам, представляющим собой четверти окружностей (третий октант) с радиусами $R_i = h_i$. Далее шары продолжают движение по горизонтальным, хорошо отполированным желобам, неограниченным, так как трения нет. СНФ умеет измерять расстояния, пройденные шарами на горизонтальных участках пути, с помощью линеек, нанесенных на желоба, и мгновенно действующей системе фотографирования. Нулевые значения $x_i = 0$ всех линеек в желобах (шкал $\{x_i\}$) находятся на одной прямой, перпендикулярной желобам в горизонтальной плоскости. СНФ умеет скатывать шары Ш$_i$ с их стартовых высот h_i **таким образом**, чтобы первая из фотографий, на которой выделенный шар Ш$_3$ имеет координату $x_3 = x_3^{(0)} = 0$, показала, что и остальные шары находятся на нулевых отметках в своих желобах.

Далее шары Ш$_i$ (пусть $\left(i = \overline{1,5}\right)$ катятся, а следящее устройство фотографирует, фиксируя координаты всех шаров в те моменты, когда шар Ш$_3$ проходит отметки $x_3^{(1)} = 1$м, $x_3^{(2)} = 2$м, $x_3^{(3)} = 3$м и т.д. Вычислив (обработав фотографии) координаты всех шаров, СНФ получил таблицу значений $x_i^{(k)}$ $\left(i = \overline{1,5},\ k = 0,1,2,...\right)$, фрагмент которой имеет вид:

$$\left\{x_i^{(k)}\right\}$$

i	k			
	0	1	2	3
1	0	1/3	2/3	1,0
2	0	0,5	1,0	1,5
3	0	1,0	2,0	3,0
4	0	2,0	4,0	6,0
5	0	3,0	6,0	9,0

Изучив эту таблицу, СНФ решает назвать движение шаров **равномерным инфинитным**, то есть таким, при котором: 1) каждому из шаров присуща своя, постоянная и равная начальной некоторая мера интенсивности движения – квазискорость W_i; 2) если какому-либо из шаров (СНФ выбирает Ш_3) приписать квазискорость W_3 = 1,0, то все другие могут быть выражены через нее элементарными формулами. Эти формулы таковы

$$W_1 = \frac{x_1^{(1)}}{x_3^{(1)}} = \frac{x_1^{(2)}}{x_3^{(2)}} = \frac{x_1^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \cdots = \frac{1}{3}, \text{ или } x_1^{(k)} = W_1\, x_3^{(k)},$$

$$W_2 = \frac{x_2^{(1)}}{x_3^{(1)}} = \frac{x_2^{(2)}}{x_3^{(2)}} = \frac{x_2^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \cdots = \frac{1}{2}, \text{ или } x_2^{(k)} = W_2\, x_3^{(k)},$$

$$W_4 = \frac{x_4^{(1)}}{x_3^{(1)}} = \frac{x_4^{(2)}}{x_3^{(2)}} = \frac{x_4^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \cdots = 2{,}0, \text{ или } x_4^{(k)} = W_4\, x_3^{(k)},$$

$$W_5 = \frac{x_5^{(1)}}{x_3^{(1)}} = \frac{x_5^{(2)}}{x_3^{(2)}} = \frac{x_5^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \cdots = 3{,}0, \text{ или } x_5^{(k)} = W_5\, x_3^{(k)}. \quad (12.36)$$

Из формул «или» (12.36) СНФ заключает, что они устанавливают взаимно-однозначное соответствие между шкалами $\left\{x_i^{(k)}\right\}$, позволяя от шкалы $\left\{x_3^{(k)}\right\}$ переходить к любой шкале $\left\{x_j^{(k)}\right\}(j \neq 3)$. Для продолжения своих исследований СНФ, не желая зависеть от Ш_3, решает поискать некоторую другую шкалу, «внешнюю» относительно «полигона». Наблюдая, как катается то вверх, то вниз шар $Ш_0$ в вертикальном полукружном желобе радиусом R_0, он решает назвать это движение **финитным** или периодическим. Сравнивая движения шаров $Ш_3$ и $Ш_0$, СНФ заключает, что расстоянию $x_3^{(1)} = 1{,}0$ м, пройденному $Ш_3$, соответствует скатывание $Ш_0$ с высоты R_0 с последующим подъемом на ту же высоту. Расстоянию $x_3^{(2)} =$ 2,0 м, пройденному $Ш_3$, соответствуют скатывание и подъем $Ш_0$ в обратном направлении. Таким образом, каждому метру расстояния, пройденного $Ш_3$, соответствует пройденное шаром $Ш_0$ расстояние $x_0 = \pi R_0$. Ряду $\left\{x_3^{(k)}\right\} =$ 0, 1, 2, 3, ... , k, ... (м) соответствует ряд $\left\{x_0^{(j)}\right\} = 0, x_0, 2x_0, 3x_0, ..., kx_0, ...$(м).

Безразмерная квазискорость W_0 может быть введена по аналогии с (12.36)

$$W_0 = \frac{x_3^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{x_3^{(2)}}{x_0^{(2)}} = \frac{x_3^{(3)}}{x_0^{(3)}} = \cdots = \frac{k}{kx_0} = \frac{1}{x_0} \quad \left(\frac{\text{м}}{\text{м}}\right). \tag{12.37}$$

Шкалу $\left\{x_3^{(k)}\right\}$ теперь можно связать со шкалой $\left\{x_0^{(k)}\right\}$ формулой вида «или» (12.36).

Здесь СНФ замечает, что новую «эталонную» шкалу $\left\{x_0^{(k)}\right\}$ он выбрал по аналогии со шкалой $\left\{x_3^{(k)}\right\}$, имеющей ту же размерность – длины, и что этот выбор – не единственный. Вместо последовательности расстояний $\left\{x_0^{(k)}\right\} = 0, x_0, 2x_0, 3x_0 ...$, характеризующих финитное движение, его можно описать последовательностью углов: $\left\{\varphi^{(k)}\right\} = 0, \pi_0, 2\pi_0, 3\pi_0 ...$, последовательностью площадей, «обегаемых» $Ш_0$ $\left\{S^{(k)}\right\} = 0, \frac{\pi R_0^2}{2}, \pi R_0^2, \frac{3}{2}\pi R_0^2, ...$.

Возможны такие безразмерные шкалы: $\left\{N_p^{(k)}\right\}$ – из «разов» (то есть чисел 0, 1, 2, 3, ... или «циклов» $\left\{N_c^{(k)}\right\}$, каждый из которых соответствует $2x_0$ (число скатываний шара слева вниз с последующим подъемом направо и возвращением в исходную позицию).

Поразмыслив, СНФ изобретает два устройства: подвесной и пружинный маятники, движения которых носят также циклический (периодический) характер. Анализируя работу этих устройств, которые СНФ назвал часами, он приходит к выводу, что они также могут своими «циклами» (или «разами») образовывать эталонную шкалу. Назвав «цикл» периодом T, СНФ остановился на шкале периодов $\left\{N_T^{(k)}\right\} =$ 0, T, $2T$, $3T$, ... Величину T СНФ решил связать с некоторым финитным (периодическим) природным процессом, и в качестве такового выбрал нахождение Солнца в зените. Периоду между двумя смежными пребываниями Солнца в зените $T_С$ СНФ решил присвоить некоторую численную величину «времени» и впредь шкалу периодов $\left\{N_T^{(k)}\right\}$ называть шкалой времени или хроношкалой $\left\{t^{(k)}\right\}$. Величину T_C СНФ назвал «сутки» и ввел более мелкие единицы:

$$1 \text{ час} = \frac{1 \text{ сутки}}{24}; \quad 1 \text{ минута} = \frac{1 \text{ час}}{60}; \qquad 1 \text{ секунда} = \frac{1 \text{ минута}}{60}.$$

Квазискорость, отнесенную к этой новой шкале $\left\{t^{(k)}\right\}$ СНФ решил назвать скоростью, **определив ее** факторизацией вида:

$$\left\{x_3^{(k)}\right\} = V\left\{t^{(k)}\right\}. \tag{12.38}$$

Размерность скорости $V - 1$ м/сек, а величина, как экспериментально установил СНФ, сравнивая показания часов с движением Ш$_3$, оказалась равной 0,1 м/сек. Таким образом, СНФ получил возможность прогнозировать любое расстояние $\left\{x_3^{(k)}\right\}$, соответствующее значению $t^{(k)} = t$:

$$x_3^{(k)} \to x_3(t) = 0{,}1t \ (\text{м}). \tag{12.39}$$

В силу (12.36) оказывается, что и все движения других шаров могут быть описаны формулами:

$$x_1(t) = W_1 x_3(t) = \frac{1}{30}t; \quad x_2(t) = W_2 x_3(t) = \frac{1}{20}t;$$

$$x_4(t) = W_4 x_3(t) = 0{,}2t; \quad x_5(t) = W_5 x_3(t) = 0{,}3t.$$

Опираясь на эти формулы **равномерного прямолинейного движения**, СНФ далее, полагая параметры x и t непрерывными, изобрел понятие «мгновенной» скорости и «мгновенного» ускорения и построил всю кинематику прямолинейных и криволинейных движений. Встретившись с НФ и рассказав ему о своих изысканиях, СНФ узнает от него, что использовал три правила – аддитивности, единицы измерения и эквивалентности, то есть будучи «сверхнаивным» и не зная теории шкалирования [40,171,176,229], действовал в ее духе. На это СНФ замечает, что он не только не знал вначале об этих «ученых правилах», но и само понятие времени «ввел», то есть изобрел, наблюдая движение шаров в полигоне. Поэтому, считает СНФ, характеристика $\left\{t^{(k)}\right\}$ является:

а) понятием вторичным по отношению к движению, то есть без него смысла не имеет;

б) понятия «время» и «шкала времени» эквивалентны, то есть специфического «физического» смысла у времени нет;

в) интенсивность движения измеряется величиной «скорости», которая является частным случаем, одной из «квазискоростей», **соответствующей** шкале $\left\{t^{(k)}\right\}$.

Как следствие, СНФ умозаключил также, что всякая скорость конечна ($V = 0$ – нет движения, $V = \infty$ означает, что движение **уже** завершилось), а поэтому (с учетом (12.38)) непрерывность шкалы $\left\{t^{(k)}\right\}$ есть **всегда следствие** непрерывности шкалы $\left\{x_3^{(k)}\right\}$ (и любой шкалы расстояний). Если же шкала $\left\{x^{(k)}\right\}$ дискретна, то есть любое $x(t) \geq \Delta x_0$, то и шкала $\left\{t^{(k)}\right\}$ дискретна, причем $t \geq t_{\min} = \dfrac{\Delta x_0}{V_{\max}}$.

Итак, в отношении «гипотезы шкалы» (ГШ), ранее сформулированной, можно сказать следующее. В рамках механики ГШ подтверждается: время есть шкала для измерения интенсивности движения; мера интенсивности движения – его скорость есть величина, «сопряженная» с хроношкалой – вводятся они одновременно. Ответы на вопросы ГШ: 1) ГШ-1 – реперных точек никаких не имеет, нуль вводится произвольно; отрицательных значений с $t < 0$ хроношкала не имеет (ФКЗ); 2) ГШ-2 – хроношкала механики равномерна по ее построению и является наиболее удобной из возможных видов шкал; 3) ГШ-3 – хроношкала может быть дискретной или непрерывной, в зависимости от того, какова «порождающая» ее шкала – шкала расстояний $\{x\}$.

§39. Время в термодинамике

«... Чтобы установить различие между прошлым и будущим, мы должны обратиться не к хронометрам, а к термометрам»

П. Шамбадаль

В парадигме термодинамики время вводится противоречивым образом: вначале оно «возникает» в соотношении Гиббса, в которое затем подставляются балансовые уравнения, в которых оно **уже есть**, но не ясно, откуда взялось. Не обсуждается вопрос о том, является ли термодинамическое время механическим или каким-то другим. В статистической физике этот вопрос ясен: в термодинамику время «вносится» из механики. Вопрос термодинамического хроногенеза никем не ставился и не рассматривался, будучи подменен вопросом о «направлении» времени – хроноартефактом.

Направление времени рассматривалось в связи с термодинамической необратимостью (2-м началом термодинамики) [2,6,9,11,19,27,31,128,206,210, 222,227,]. Большое внимание уделялось парадоксу Лошмидта [8,11,31,128,210, 224,]. В §38 было показано, что обратимость уравнений механики – артефакт.

Следовательно, артефактом является и парадокс Лошмидта.

Приведем характерные для существующей парадигмы высказывания о направлении времени (необратимости). Я.М. Гельфер [11] полагает что «... один из важнейших вопросов – почему время имеет только одно определенное направление?» Он критикует позитивистов, поддерживающих статистическую концепцию Л. Больцмана, Г. Рейхенбаха в частности, считающего [11,с. 343], что «... односторонний ход времени нельзя вывести из элементарных процессов, так как время – чисто макроскопическое явление. Говорить об определенном направлении времени можно только для отдельных отрезков кривой полной энтропии, а то направление, в котором протекает большинство процессов в изолированных системах и есть направление времени ...».

И.П. Базаров также излагает [2] взгляды Л. Больцмана, согласно которым в наблюдаемой Вселенной время течет в положительном направлении ($t > 0$), поскольку энтропия возрастает. Там же, где протекают флуктуации (то есть имеет место локальное понижение энтропии) – время течет в обратную сторону. Критикуется причинная теория времени Н.А. Козырева, объясняющая временной порядок причинным порядком, как логически противоречивая.

«Правильные» объяснения обратимости в [2,11] даются на основе «диалектико-материалистического подхода» – определения «времени как формы бытия материи, выражающей процесс взаимопереходов между бытием и небытием» [2, с. 85]. Развернуто излагаются и критикуются взгляды Л. Больцмана, Э. Маха, А. Эддингтона, Г. Рейхенбаха и др. [215]. Приведя высказывание А. Эддингтона: «Когда энтропия увеличиваясь достигает максимума, время начинает существовать без «стрелы времени», то есть утрачивает направление», автор [215] приводит «правильную» (С.Т. Мелюхин) формулировку: «Энтропия – это частная физическая характеристика, тогда как время есть всеобщая форма бытия материи». Автор [215] считает, что «Больцман был прав, когда отрицал существование универсального направления времени для всей Вселенной... вопрос о направлении времени данной системы должен быть решен по направлению движения самой системы ... Если в изолированной системе обернулись все физические процессы, то обязательно обернулось и время.».

Если у философов, владеющих «диалектико-материалистическим методом» есть «правильные» ответы на все вопросы, связанные со временем, то у физиков эти вопросы постоянно возникают. «Эта теория (классическая теория газов) – восклицает А. Пуанкаре [210] – какой-то великий парадокс. В посылках мы имеем обратимость, в результатах – необратимость, а между ними – пропасть. Достаточно ли статистических соображений закона больших чисел, чтобы ее заполнить?» «Каким образом из обратимых уравнений получается явно необратимый результат?» – спрашивает Р. Пайерлс [27]. Он считает объяснение необратимости посредством вероятностной трактовки описания поведения больших коллективов частиц недостаточным и возлагает «вину» за необратимость на начальные условия. С этой точкой зрения солидаризуется В.Г. Левич [4], полагающий, что если «не задаваться в начальный момент времени маловероятным (неравновесным) состоянием системы, то закон возрастания энтропии становится симметричен по отношению к прошлому и будущему».

Д.Н. Зубарев в предисловии редактора перевода [19] пишет: «... делается попытка ответить на вопрос, который волнует физиков еще со времен Больцмана и до настоящего времени: как согласовать необратимость макроскопических уравнений с обратимостью уравнений механики, лежащих в их основе? Как объяснить теоретически причину возникновения необратимости?» Далее в [19] действительно «делаются попытки», такие например: «Уравнение Больцмана и Паули содержат допущения вероятностного толка – они необратимы».

Возвращаясь к «драме идей», редактор [19] на с. 58 пишет: «Очень убедительно это противоречие было сформулировано М. Грином: «Всюду в природе мы встречаемся с явлениями, которые протекают и завершаются и оперируем только с ними. Мы должны объяснить их с помощью динамических уравнений, решения которых **как известно** (выделено мной – И.В.) имеют повторяющийся, если не строго периодический характер.». Ни автор этого высказывания, ни «убежденный» им Д.Н. Зубарев не замечают, что: 1) Ни «повторяющиеся», ни периодические решения какой-либо механической задачи вовсе не свидетельствуют об «обратимости механики»; 2) Указанные решения характерны только для подкласса финитных движений, которыми механика не исчерпывается.

«Объяснение» термодинамической необратимости и обусловленной ею «стрелы времени» дают А. Эддингтон, Ф. Хойл, С. Хокинг и др. По Эддингтону [31] «... в физике стрела времени есть свойство энтропии и только ее одной ... Возрастание энтропии и объема Вселенной – два критерия, определяющие направление стрелы времени». Ф. Хойл также предлагал определять положительное направление («стрелу времени») по расширению Вселенной.

Одной из последних серьезных (апарадигмальной!) попыток ответа на «проклятые» вопросы являются работы И.Р. Пригожина [128,227]. Его кредо [128]: «Понятие времени намного сложнее, чем мы думаем. Время, связанное с движением, – лишь первый из многих аспектов этого понятия ... Связь между термодинамикой и динамикой затрагивает смысл времени и поэтому может иметь решающее значение. Рассчитывать на то, что ее удастся решить легко, заведомо не приходится, так как если бы простое решение существовало, то оно давно было бы найдено ... Мы можем, следуя Пуанкаре, заключить, что динамической интерпретации второго начала не существует. Тогда необратимость проистекает из каких-то дополнительных феноменологических или субъективистких допущений, из «ошибок».

В [227], работе более популярной, авторы цитируют (очевидно – солидаризуясь) Р. Пенроуза («Новый разум Императора»): «По моему мнению, наша современная картина физической реальности, особенно в том, что касается природы времени, чревата сильнейшим потрясением, еще более сильным, чем то, которое вызвали теория относительности и квантовая механика в их современной форме». Из приведенных высказываний ясно, что авторы [128,227] решение «парадокса времени» видят на путях «сильнейших потрясений», связанных с тем, что «простых решений не существует». Подход, сформулированный И.Р. Пригожиным, состоит в следующем: «... исходим из непреложного фундаментального факта – закона возрастания энтропии и вытекающего из него существования «стрелы времени». При этом второе начало термодинамики является своеобразным «принципом отбора», который формулируется так: «... в неустойчивых динамических системах невозможно задать начальные условия, которые привели бы к одинаковому будущему для всех степеней свободы» Переход от динамического, обратимого во времени описания к вероятностному осуществляется «через нелокальные преобразования специального вида ... Важную роль играет новое понятие – внутреннее время ... Это новое время не является более простым параметром, как время в классической или квантовой механике. Второе время – скорее оператор, подобно операторам в квантовой механике».

Наш подход иной. Мы не считаем время «сложным», описываемым оператором. Напротив, время, на наш взгляд, даже не физическая величина, а просто шкала. Время необратимо, этим элиминируется вся та «драма идей», на изложение которой разными авторами мы не пожалели места.

Время в предлагаемом нами варианте дискретной термодинамики (Боргартонике) вводится аналогично механическому времени (см. §38). Роль «порождающей» шкалы играет количество тепла, переданного Боргартоном диссипатору. Факторизация $\Delta Q_k^{(+)}$ на «термическую скорость» – плотность потока тепла $q_k^{(+)}$ и временной интервал (D-период) τ_k аналогично (12.37) или (12.38) и может быть названа фундаментальным термодинамическим запретом (ФТЗ – по аналогии с ФКЗ). Поскольку знаки $\Delta Q_k^{(+)}$ и $q_k^{(+)}$ всегда совпадают (по смыслу этих величин), то отрицательное значение τ_k невозможно. Таким образом, необратимость времени в термодинамике, как и в механике, следует **сразу** из соотношений, первично вводящих время. Шкала получена дискретной, поскольку «порождающая» шкала $\left\{\Delta Q_k^{(+)}\right\}$ также предполагалась дискретной.

Выделены два вида хроногенерации – линейная (линейный диссипатор) и нелинейная (нелинейный диссипатор). Соответственно получены две хроношкалы: линейная $\{\tau_k\}$:

$$\tau_k = \frac{2t_0}{2(N-k)+1}, \qquad t_0 = \frac{l_0^2}{4a}, \qquad k = \overline{1,N}$$

и нелинейная $\{\tilde{\tau}_k\}$:

$$\tilde{\tau}_k = \frac{t_0}{N-k+1}.$$

Поскольку при всех $k = \overline{1,N}$ $\left(\tilde{\tau}_k / \tau_k\right) < 1$ (случай $N \to \infty$ исключен), ясно, что нелинейные процессы протекают более интенсивно (быстрее).

Определенные две дискретные термодинамические шкалы надо бы, строго говоря, называть хроношкалами теплопроводности. Если аналогично рассмотреть другие диссипаторы (для процессов диффузии, вязкости, электропроводности), то получим шкалы, в которых параметр t_0 будет иным (для диффузии, в частности, $t_0 = l_0^2 / 4D$, где D – коэффициент диффузии). Если «порождающие» шкалы постулировать непрерывными, то таковыми же будут и соответствующие хроношкалы.

При рассмотрении цепочек диссипаторов и перехода от D-моделей к K-моделям был получен класс квазилокальных уравнений переноса. Все K-приближения, начиная с нулевого – стандартного уравнения Фурье – содержат первую производную по времени, то есть формально необратимы. Формальное определение в термодинамике обратимости-необратимости (как в механике, где обратимость вводят из того, что в уравнениях движения фигурируют вторые производные по времени) может подвести (как подвело в механике, где обратимость оказалась артефактом).

Рассмотрим необратимое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{12.40}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t и в правую часть подставим (12.40). Получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T = 0. \tag{12.41}$$

С одной стороны, получено обратимое (так как содержит $\partial^2 T / \partial t^2$) уравнение теплопроводности, с другой – оно эквивалентно двум уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T = 0. \tag{12.42}$$

Первое из (12.42) – исходное (необратимое) уравнение (12.40), а второе переходит в первое при $t \to -t$, или $a \to -a$. Отсюда ясно, что «обратимое» уравнение со второй производной по t (12.41) – артефакт, порождающий «монстра» – паразитный результат – второе из уравнений (12.42).

Из положительной определенности термодинамической хроношкалы (шкал) вытекает также ошибочность встречающихся решений краевых задач, в которых имеются интегралы по времени в пределах от $-\infty$ до t.

Итак, наш ответ на вопрос, чем является время в термодинамике, таков:

1. Время в термодинамике – совокупность шкал, различных для разных процессов переноса, линейных и нелинейных.

2. Все значения на этих шкалах положительны ($t > 0$).

3. Шкалы могут быть дискретными или непрерывными, в зависимости от того, каковы «порождающие» шкалы.

4. Шкалы строятся анализом хроногенерации диссипаторов, определяются термодинамическими параметрами и поэтому не являются механическими хроношкалами (то есть время в термодинамике не механическое).

§40. Время в физике

Природа – сфинкс. И тем она верней
Своим искусом губит человека,
Что, может статься, никакой от века
Загадки нет и не было у ней

Ф.И. Тютчев

Физика едина, но для удобства будем рассматривать природу времени в ее отдельных частях. К таковым относим (исключая уже рассмотренные механику и термодинамику): механику сплошной среды (включая макроскопическую электродинамику); электродинамику (включая оптику); специальную и общую теории относительности; квантовую механику, космологию, теорию элементарных частиц. В этом перечне отсутствуют статистическая механика и физическая кинетика – микроскопические «составляющие» термодинамики, базирующиеся на статистических методах и механике (классической или квантовой). Вопрос о времени в этих разделах физики сводится к таковому для квантовой механики (для классической этот вопрос решен (§38)).

Анализ литературных источников как современных периоду становления парадигмы, так и относительно недавних [32,221,241,246] показывает, что вопрос о **появлении** времени и его свойствах в различных физических теориях никогда не ставился. «По умолчанию» время предполагается механическим, непрерывным и обратимым. Для обеих теорий относительности и квантовой механики это оправдывается их «родством» с механикой. Механика сплошной среды есть синтез механики и термодинамики с моделью среды. В рамках Боргартоники хроношкалы механики сплошной среды должны определяться хроногенерацией соответствующих диссипаторов, построение и исследование моделей которых – задача дальнейших исследований. Уравнения электродинамики (Максвелла), как микро-, так и макроскопические, содержат плотность тока, зависящую от величины электрических зарядов частиц и их механических скоростей. Поэтому время в электродинамике должно быть механическим. Если для микроскопической электродинамики это правдоподобно, то для макроскопической возникает противоречие: как составляющая механики сплошной среды, она должна базироваться на термодинамическом времени.

Еще более запутан вопрос о хроногенезе в космологии и в физике элементарных частиц [119,227,229,233,246-248]. В последней не редкость теории, где обходятся без времени и пространства (или, напротив, используются многомерные пространства). Следует признать, что наука (дисциплина) о методах построения хроношкал в различных физических теориях – хронофизика – не существует. Устранение артефакта обратимости времени в механике, постановка нами проблемы существования фундаментального хроноартефакта должны, на наш взгляд, привлечь к хронофизике внимание исследователей.

В качестве «нулевого приближения» такого рода общей хронофизической теории предлагается анализ в рамках Боргатоники. В некоторой физической теории выделяется основная аддитивная характеристика (ОАХ) – величина, изменяющаяся дискретно или непрерывно. Пусть эта ОАХ обозначается Q и принимает значения: $\{Q\} = Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_i, ...$ (для общности рассматриваем дискретную ОАХ). Вводим шкалу $\{Q\}$ с «шагами»: $\Delta Q_1 = Q_2 - Q_1$, $\Delta Q_2 = Q_3 - Q_2$, ..., $\Delta Q_i = Q_{i+1} - Q_i$, ... Пусть, наряду с ОАХ, имеется «основная величина (ОВ) (не обязательно аддитивная), обозначаемая T, которая более легко измеряема, чем Q, но связана с ней так, что зная T, можно вычислить Q и вообще все остальные величины данной теории. Вводим дискретную шкалу $\{T\}$ с отсчетами $T_1, T_2, ..., T_j, ...$ Устанавливаем связь простейшего вида между шкалами $\{Q\}$ и $\{T\}$ (это можно назвать «проектированием $\{Q\}$ на $\{T\}$:

$$\Delta Q_i = C_i \Delta T_i, \;\; \Delta T_i = T_{i+1} - T_i, \;\; C_i = \text{const}, \;\; i = 1,2,... \qquad (12.43)$$

Параметр C_i, в общем случае переменный (который является «коэффициентом проектирования») будем называть Q-емкостью. Для ОАХ запишем закон сохранения (балансовое соотношение)

$$\Delta Q_i = \Delta Q_i^{(+)},$$

где $\Delta Q_i^{(+)}$ – изменение параметра Q за счет «потока», тогда ΔQ_i будем называть аккумулируемым изменением. Величину $\Delta Q_i^{(+)}$, а вследствие последнего соотношения – ΔQ_i, факторизуем путем «проектирования» на ось $\{t\}$ с коэффициентом проектирования именуемым «плотностью потока» $\bar{q}_i$ (черта сверху обозначает среднее значение)

$$\Delta Q_i = \bar{q}_i \tau_i, \;\; \tau_i = \Delta t_i = t_{i+1} - t_i. \qquad (12.44)$$

Соотношением (12.44) **одновременно** вводятся хроношкала $\{t\} = t_1, t_2, ..., t_i, ...$ и обобщенная «скорость» – плотность потоков $\bar{q}_i$. По смыслу этих величин, ΔQ_i и $\bar{q}_i$ всегда имеют один знак, поэтому все $\tau_i > 0$, то есть шкала $\{t\}$ положительно определена. Выражение (12.44) назовем основным кинематическим соотношением (ОКС), оно является обобщением (12.34) – ФКЗ и играет ту же роль – вводит существенно положительное время. Исключая ΔQ_i из (12.43) и

(12.44), получаем выражение для связи шкал $\{T\}$ и $\{t\}$ – **основное уравнение** (ОУ):

$$C_i \Delta T_i = \overline{q}_i \tau_i. \tag{12.45}$$

ОУ осуществляет синтез **кинематики** данной теории (ОКС – (12.44)) с **динамикой**, которая содержится в выражении $\overline{q}_i$. Для получения на основе ОУ различных конкретных дискретных или континуальных (K-приближений) моделей, необходимо ввести (лучше всего эмпирически) уравнение связи $\overline{q}_i$ с ΔT_i (УС). В Боргартонике роль УС играют эмпирические законы переноса – Фурье, Фика, Ома и др. В механике УС является второй закон Ньютона. Разработка методологии реализации изложенного подхода вне рамок термодинамики – задача дальнейших исследований.

Таким образом, применение Боргартоники вне термодинамических рамок сводится к построению и исследованию электродинамических и квантово-механических диссипаторов и их цепочек (с последующим обобщением на дву- и трехмерные системы). В механике схема (12.43)–(12.45) также реализуется: роль ОАХ играет объем пространства U, роль величины T – пройденное движущейся частицей расстояние x, роль Q-емкости C_i – «сечение» S частицы (можно принять любое, единичное в частности). В итоге уравнение (12.45) принимает вид:

$$\Delta U_i = S_i \Delta x_i = S_i \overline{q}_{\vartheta i} \tau_i, \quad \overline{q}_{\vartheta i} = \overline{\vartheta}_i, \Delta x_i = \overline{\vartheta}_i \tau_i, \tag{12.46}$$

где $\overline{\vartheta}_i$ – скорость частицы. Последнее выражение в (12.46) является ОКС, выражающим ФКЗ обратимости механической хроношкалы.

Перейдем к рассмотрению «обратимости» времени. В механике сплошной среды есть уравнения «необратимые с первого взгляда» – теплопроводности, диффузии, Навье–Стокса. Однако имеются уравнения неразрывности и Эйлера, которые по формальным признакам «обратимы»: замены $t \to -t$ и $\mathbf{V} \to -\mathbf{V}$ оставляют их инвариантными. Однако привлечение ФКЗ сразу элиминирует эту «обратимость».

«Обратимость» макроскопических уравнений Максвелла формализуется условиями: $t \to -t$, $\mathbf{V} \to -\mathbf{V}$, $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Система уравнений имеет вид [95]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{12.47}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\rho_e. \tag{12.48}$$

К ним добавляется уравнение неразрывности (сохранение заряда ρ_e):

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{12.49}$$

Выражение для плотности потока заряда $\mathbf{j}$ может быть записано в виде:

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{V}_{cp}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\nabla\varphi. \tag{12.50}$$

Уравнения (12.48) времени не содержат, в уравнениях (12.47) и (12.49) условием «обратимости» его, кроме приведенных, будет условие $\mathbf{j} \to -\mathbf{j}$. Если воспользоваться первым из выражений (12.50), заметив, что если $\mathbf{V}_i \to -\mathbf{V}_i$, то и $\mathbf{V}_{cp} \to -\mathbf{V}_{cp}$, то тогда «обратимость» есть. Если же воспользоваться вторым из представлений (12.50) («термодинамическим»), то $\mathbf{j}$ = invar и обратимости нет. Нет ее и в первом случае, поскольку ФКЗ и здесь запрещает ее.

Важную роль в механике сплошной среды играет волновое уравнение, содержащее вторую производную по времени от соответствующей полевой величины. Кроме ФКЗ, в этом случае «обратимость» исключена и некорректностью понятия «обратимости времени» для периодических процессов. Волновое уравнение следует, в пределе $N \to \infty$ при рассмотрении цепочки из N осцилляторов [63,103]. Для осциллятора же, как было показано в §38, «обратимость» – артефакт. Поясним подробнее некорректность «обращения времени» для периодических процессов. Эти процессы не являются эволюционными: с периодом T все состояния повторяются, так что усреднив по T получаем стационарное, не зависящее от времени поведение системы. Временная координата в периодических процессах циклическая и поэтому $t \to -t$, если t отсчитывать в целых периодах T ничего не меняет, так как весь процесс – бесконечный ряд повторяющихся периодов: $T_1, T_2, ..., T_j, ...$, где все $T_j = T$. Так как нумерация этого ряда осуществляется положительными числами (натуральным рядом) и **начать** эту нумерацию можно **когда угодно**, то время, выраженное в периодах T, **всегда положительно**. Если же иметь в виду замену $t \to -t$ внутри периода T, то надо рассмотреть осциллятор, что уже было сделано. «Обратимость» осциллятора – артефакт.

В микроскопической электродинамике, где система уравнений Максвелла имеет ту же структуру, что и в (12.47)–(12.49), а условия «обратимости» задаются таки же образом, для плотности потока заряда справедливо лишь первое из выражений (12.50). Но в этом случае требуемое соответствие $\mathbf{j} \to -\mathbf{j}$ невозможно из-за ФКЗ. Если считать, что время в электродинамике (вакуума) – механическое, то необратимость уравнений Максвелла есть просто следствие необратимости уравнений механики.

Специальная и общая теории относительности. Специальная теория относительности (СТО) обобщает классическую механику и переходит в нее при умеренных скоростях движения $(|\mathbf{V}| << c)$. Поскольку СТО описывает **любые механические** движения со скоростями $(|\mathbf{V}| < c)$, время в СТО – механическое, ФКЗ действует и «обратимость» времени в СТО – артефакт. Считающееся «парадоксальным» положение СТО о разном ходе часов в различных системах отсчета (то есть наличие счетного числа хроношкал), является очевидным с точки зрения Боргартоники, где каждый процесс (диссипатор) обладает своим хроногенезом (шкалой).

В парадигме СТО пространство и время по отдельности заменяются единым пространственно-временным континуумом, то есть времени предписывается физическое содержание. Однако смысл его вновь, как и в классической механике, «ускользает», теряясь в различных квазиопределениях. Время – это то, что указывают часы [246, с.11]; собственное время объекта – это время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с объектом [246, с. 20].

Подытожить сказанное можно так: время – не физическая величина, а шкала; шкала эта – непрерывная, положительно определенная и своя для каждой системы отсчета: шкала эта реализуется устройством, именуемым часами.

В общей теории относительности (ОТО) четырехмерный пространственно-временной континуум неэвклидов, а системы отсчета – неинерциальные. Временная координата x^0 определяется произвольно идущими часами [246]. Промежуток времени между двумя любыми событиями в одной и той же точке пространства зависит от местоположения этой точки [246].

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}\,x^0, \qquad g_{00} > 0,$$

где c – скорость света, g_{00} – компонента метрического тензора g_{ik}, зависящего от координат. Время в ОТО еще «более относительно», чем в СТО: если в СТО оно «течет по-разному» в различных системах отсчета (то есть имеется бесконечное, но счетное количество хроношкал), то в ОТО оно ведет себя таким же образом даже в различных точках одной и той же системы отсчета (несчетное количество – континуум хроношкал).

В предельном (нерелятивистском) случае слабых полей тяготения, формулы ОТО переходят в механические, в частности, из них следует [246] $\mathrm{d}\,r = \mathbf{V}\,\mathrm{d}\,t$, то есть ОКС механики, являющееся ФКЗ на обратимость. Поскольку необратимость предельного случая не могла возникнуть в ходе редукции ОТО, следует признать обратимость времени в ОТО – артефактом.

Известны попытки доказательства необратимости времени во всех механиках на основе так называемой «причинной» механики [249]. В предложенной Н.А. Козыревым системе аксиом этой «новой» механики, первая гласит: «Время обладает особым свойством (непрерывностью, ходом), которое создает отличие прошедшего от будущего, причин от следствий» [249]. Эта теория представляется излишне «странной», относясь к механике так же, как и теория [154] к термодинамике.

Квантовая механика также считается «обратимой». «Обратимость» эта, например в [32], определяется так: «Это уравнение (Шредингера) ... сохраняет свой вид, если в нем заменить t на $-t$ и одновременно перейти к сопряженному». Противоречие налицо: вначале говорится о сохранении вида уравнения, а затем – о переходе к сопряженному уравнению – то есть к **другому**. Там же [32, с. 78] находим другую формулировку: «В квантовой механике симметрия к обоим направлениям времени выражается ... в неизменности волнового уравнения (так авторы [32] называют уравнение Шредингера – параболическое – И.В.) при изменении знака t и одновременной замене Ψ на Ψ^*». Аналогичные определения квантово-механической «обратимости» дают и другие авторы [4,128,229,250].

Следствием «обратимых» уравнений Шредингера («прямого» и сопряженного) является квантово-механическое уравнение неразрывности [32]:

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{I}=0, \tag{12.51}$$

в котором «плотность потока вероятности» $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi\right). \tag{12.52}$$

Поскольку (12.51) должно «унаследовать» от уравнения (уравнений!) Шредингера «обратимость», имеем, что $t\to -t$ должно сочетаться с $\mathbf{I}\to-\mathbf{I}$. Для последнего достаточно в (12.53) осуществить замены: $\Psi\to\Psi^*$, $\Psi^*\to\Psi$. Здесь уже не требуется замены уравнения на сопряженное. Поскольку операторы импульса и скорости связаны [32]:

$$\hat{\mathbf{V}}=\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m}, \qquad \hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\nabla, \tag{12.53}$$

то для перехода $\mathbf{I}\to-\mathbf{I}$ необходимо (что ясно после подстановки (12.53) и (12.52):

$$\Psi\to\Psi^*,\quad \Psi^*\to\Psi,\quad \hat{\mathbf{p}}\to-\hat{\mathbf{p}}^*=\hat{\mathbf{p}},\quad \hat{\mathbf{V}}\to-\hat{\mathbf{V}}^*=\hat{\mathbf{V}}. \tag{12.54}$$

Таким образом, в условиях «обратимости» импульсы (скорости) не участвуют. Предельный переход к классической механике $(\hbar\to 0)$ приводит к уравнениям Гамильтона–Якоби и непрерывности [32]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+U=0, \qquad \frac{\nabla S}{m}=\mathbf{V},\\ \frac{\partial a^2}{\partial t}+\operatorname{div}\left(a^2\frac{\nabla S}{m}\right)=0, \qquad a^2=|\Psi|^2,\end{gathered} \tag{12.55}$$

где S – функция действия, $\mathbf{V}$ – классическая скорость частицы. Как и в случае ОТО, заключаем, что предельный переход **не может изменить хроношкалу**. Поэтому, если уравнения (12.55) необратимы, то необратимы и уравнения Шредингера. Это так и есть, поскольку формальная «обратимость» (12.55) элиминируется ФКЗ.

Если волновую функцию $\Psi=\Psi_a+i\Psi_b$ подставить в уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\Psi,\qquad \hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\mathbf{r}). \tag{12.56}$$

то, выделив действительную и мнимую части в (12.56), получим:

$$\hbar\frac{\partial\Psi_a}{\partial t}=\hat{H}\Psi_b,\qquad -\hbar\frac{\partial\Psi_b}{\partial t}=\hat{H}\Psi_a. \tag{12.57}$$

Уравнения (12.57) образуют систему, эквивалентную (12.56), условиями инвариантности относительно преобразования $t\to-t$ (обращение времени) будут:

$$\Psi_a\to-\Psi_a,\quad \Psi_b\to-\Psi_b,\qquad \Psi\to-\Psi^*;$$

$$\Psi_b\to-\Psi_b,\quad \Psi_a\to\Psi_a,\qquad \Psi\to\Psi^*. \tag{12.58}$$

Поскольку согласно (12.56) Ψ-функция определена с точностью до знака, условия (12.58) эквивалентны друг другу. Таким образом, «обратимость» (12.56) заключается в допустимости одновременных замен: $t\to-t$, $\Psi_b\to-\Psi_b$, что следует также и из выражения:

$$\rho=|\Psi|^2=\Psi\Psi^*=\left(\Psi_a+i\Psi_b\right)\left(\Psi_a-i\Psi_b\right)=\Psi_a^2+\Psi_b^2.$$

Перехода в (12.56) к комплексно-сопряженному уравнению, как и в (12.51), вновь не требуется. «Игры в обратимость» можно продолжить и «доказать», что замену $t\to-t$ в уравнении Шредингера, если его заменить некоторым эквивалентным, «явно волновым» уравнением, можно осуществить даже и без замены $\Psi\to\Psi^*$, т.е. при $\Psi=\mathrm{inv}$. Действительно двумя способами: а) дифференцированием (12.57) по t с последующими подстановками каждого уравнения в другое; б) действием оператора $\hat{H}$ на левую и правую части (12.56) с заменой $\hat{H}\Psi$ в левой части согласно (12.56) можно получить уравнение

$$h^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+\hat{H}^2\Psi=0. \tag{12.59}$$

Здесь уже есть «абсолютная обратимость»: кроме замены $t\to-t$ в (12.59) ничего менять не надо, чтобы его вид оставался прежним. Если записать (12.59) в виде

$$\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}+i\hat{H}\right)\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}-i\hat{H}\right)\Psi=0, \tag{12.60}$$

то получим, что возможны два решения, Ψ_1 и Ψ_2, удовлетворяющие уравнениям:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}=\hat{H}\Psi_1,\qquad -i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=\hat{H}\Psi_2. \tag{12.61}$$

Первое из уравнений (12.61) совпадает с (12.56), о котором уже было сказано выше; второе уравнение (12.61) при замене $t\to-t$ дает уравнение Шредингера относительно функции $\Psi_2=\Psi_2(\mathbf{r}_1,-t)$, т.е. «решение в обратном времени» –

для «прошлого» ($t<0$). Ситуация аналогична софизму с построением «обратимого» уравнения теплопроводности (12.41), которое распадалось на два: «нормальное» уравнение – необратимое и на уравнение – «монстра» («обратимое», второе из уравнений (12.42).

Для более сложных квантовых объектов и описывающих их уравнений (Дирака, Клейна–Гордона) в литературе также уделяется достаточное внимание «обратимости» [251–254]. Первые работы по квантовомеханическому «обращению» были выполнены Вигнером, Людерсом и др. [251,252], причем оказалось, что «... рассмотрение операции «обращения времени» требует гораздо больше предосторожностей, потому что соответствующий оператор антиунитарен. Теоретически это обстоятельство должно приводить к новому квантовому числу и новой классификации частиц ...» [251, с. 56]. Такая вот «инвариантность» (т.е. неизменность! – И.В.). Далее Е. Вигнер пишет [251, с. 66]: «Соответствие между законами природы и естественными свойствами симметрии пространства–времени обладает двумя тревожными аспектами. Первый из них состоит в том, что операция симметрии физически очень сложна. Если бы оказалось, что операция обращения времени в том виде, как мы понимаем ее сейчас, не принадлежит к числу операций симметрии ... мы все же могли бы сохранить эту операцию симметрии, придав ей иную интерпретацию. Например, можно было бы постулировать, что обращение времени переводит материю в метаматерию, которая будет открыта позднее. Другой тревожный аспект ... мы усматриваем в том, что столь долго заблуждались, веря в существование бóльшего числа элементов симметрии, чем их имеем в действительности».

Приведенное высказывание, на наш взгляд, является кратким, но исчерпывающим некрологом по «обратимости», где ключевое слово – «вера» (в симметрию, в «красоту» законов природы, которые «долны» быть одинаковы для $t>0$ и $t<0$). А вера, как известно, слепа, иначе чем объяснить «определение» Людерсом обращения времени [251, с. 82], как преобразования, заменяющие каждую скорость на противоположно направленную, «вследствие чего частица в момент времени $+t$ занимает то же положение, какое она без обращения времени (фактически – без обращения скорости – И.В.) занимала бы в момент $-t$». Все это (т.е. просто изменение знака скорости частицы) Людерсом названо «обращением времени I-го рода».

В [253,254] – весьма солидных книгах, авторы для «объяснения» обратимости времени вновь прибегает к образу кинопленки, прокручиваемой в обратную сторону. Ранее уже отмечалось, что это – образ неверного – ОПО-определения обратимости. Далее [253] фактически **подбирается** некоторое преобразование уравнения Дирака с «прежней физической интерпретацией», но **другого вида**, которое эквивалентно замене t на $t'=-t$. Инвариантность относительно обращения времени этого уравнения означает, что

$$FH(t)F^{-1}=-H(t'), \qquad \Psi'(t')=T\Psi^*(t),$$

где F – оператор комплексного сопряжения, умноженный слева на матрицу T (4×4).

В квантовой теории поля также используется аналогичная «игра в операторы», именуемая «обращением времени», осуществляемая как ради «обращения» как такового, так и для доказательства CPT-теоремы [252,254] (именуемой в [252] FCP-теоремой, согласно которой лагранжиан преобразуется следующим образом: $PCF\pounds(x,t)F^{-1}C^{-1}P^{-1} = \pounds(-x,-t)$).

Завершая краткий обзор «квантовомеханической обратимости», заметим, что несмотря на гораздо более сложные математические конструкции, она столь же противоречива и ошибочна, как и «механическая обратимость». Поскольку никакого введения «квантовомеханического времени» нигде и никем не осуществляется, то, стало быть, подразумевается, что это время – механическое. Обратимость же последнего, как было показано, артефакт.

Космология, как считает автор [237], «кардинально изменяет представления о времени». Фактически же, как это в дальнейшем выяснится, речь идет об изменениях представлений о времени, внесенных в физику СТО и ОТО.

По мнению С. Хокинга [222], «...время не отделимо полностью от пространства и не независимо от него, но вместе с ним образует единый объект. ...Пространство и время не только влияют на все, что происходит во Вселенной, но и сами изменяются по влиянием всего, в ней происходящего». Налицо следование автора парадигмам СТО и ОТО, время в которых – механическое, то есть «обратимое». Эту «обратимость» автор [222] применил для «обращения» теоремы Пенроуза.

В связи с синтезом идей Р. Фейнмана (интегралы по траекториям) с ОТО, автор [222] приходит к введению эвклидова пространства для описания пространственно–временного континуума, это означает что «... ось времени – мнимая и не отличается от пространственных осей». Мнимое время, по автору, имеет преимущества: «В действительном времени у Вселенной есть начало и конец, отвечающие сингулярностям ... В мнимом же времени нет ни сингулярностей, ни границ ... между направлениями мнимого времени нет существенной разницы ... Законы науки не отличают прошлое от будущего» Таким образом, по С. Хокингу мнимое время, как и действительное, обратимо. Последнее утверждение, как и сама концепция мнимого времени, на наш взгляд, артефакты. Поскольку самые «безумные» космологические теории все же базируются на разделах физики, ранее рассмотренных, а время в них – необратимо, то необратимо время и в космологии.

Физика элементарных частиц также использует основные фундаментальные физические теории [222,227,233,248], обратимость времени в которых – артефакт. Артефактом являются и комбинированная четность (CPT-симметрия) вне зависимости от экспериментальных результатов прошлого и будущего. Завершая на этом наш краткий обзор, остановимся не некоторых следствиях обнаружения и устранения фундаментального хроноартефакта, имея в виду, в основном, необратимость времени.

Последствия устранения фундаментального хроноартефакта

1. Теорема Нетер. В классической и в квантовой механике эта теорема [217,245,250] связывает сохранение энергии системы со свойством времени – его однородностью. Но так как время, в отличие от времени, не есть физическая величина, а является **только шкалой**, необходимо считать, что напротив, из сохранения энергии следует однородность хроношкалы.

2. Общая группа Лоренца. В СТО рассматриваются преобразования Лоренца, определяемые 16-ю величинами, образующими квадратную 4×4 матрицу L_{ik}. Это позволяет интерпретировать их как повороты в четырехмерном пространстве, образующие группу Лоренца [245]. Выделяются четыре типа этих преобразований – ортохронные (собственные и несобственные) и неортохронные (собственные и несобственные. Неортохронные преобразования включают в себя «обращение» времени и должны считаться артефактами. Здесь встает проблема полноты «общей группы Лоренца».

3. Упругое рассеяние частиц. Симметрия состояний «до» и «после» столкновения объясняется «обратимостью» времени [32,217,219,236]. На этом базируется «теорема взаимности» [32], отражающая совпадение амплитуд двух процессов рассеяния, обратных по времени по отношению друг к другу. На этой основе устанавливается связь сечений прямого и «обратного» процессов. Эти вопросы требуют нового осмысления, поскольку базисное положение – «обратимость» времени – артефакт.

4. Принцип детального равновесия. Играет важную роль в физической кинетике, в неравновесной термодинамике (симметрия кинетических коэффициентов – теорема Онзагера [19,20,145]). Был использован А. Эйнштейном при выводе закона излучения Планка и соотношений между вероятностями переходов [239]. Поскольку «обращение» времени – артефакт, встает проблема иного обоснования принципа детального равновесия либо замены его чем-то другим.

5. Опережающие и запаздывающие потенциалы. В Нобелевской лекции Р. Фейнмана говорится [35]: «Мне удалось выяснить, что правильный результат получается в том случае, когда опережающие и запаздывающие поля, генерируемые каждым источником, берутся в равных пропорциях (то есть когда мы пользуемся тем решением уравнений Максвелла, которое симметрично во времени) ... тогда появление реакции излучения можно объяснить ... посредством опережающих волн». Этот подход Уилер и Фейнман позаимствовали у Дирака, предложившего механизм самодействия электрона [240]: «Замена запаздывающих волн опережающими означает просто смену знака запаздывания, что, как нетрудно видеть, эквивалентно изменению знака t». Если «обратимость» времени – артефакт, изложенные идеи некорректны и требуется поиск других подходов к решению проблем.

6. Собственная энергия частицы. В теории возмущений для вычисления собственной энергии электрона Р. Фейнман полагал [35]: «... мы можем просто пятиться во времени», что было развитием идеи Уилера о том, что «... позитрон можно представить себе просто-напросто как электрон, возвращающийся из будущего в прошлое». Эти идеи просто некорректны, несмотря на их красоту, поскольку «обращение» времени – артефакт.

7. Теорема Пенроуза–Хокинга. Согласно теоремы Пенроуза, любое тело в процессе гравитационного коллапса должно в конце концов сжаться в сингулярную точку [222]. С. Хокинг доказал «обратную» теорему [222]: «... если в теореме Пенроуза изменить направление времени на обратное так, чтобы сжатие перешло в расширение, то эта теорема также будет верна». Поскольку «обращение» времени – артефакт, теорема С. Хокинга некорректна.

8. Комбинированная четность (CPT-инвариантность). Под этим в физике элементарных частиц понимают утверждение о том, что все законы физики инвариантны относительно преобразования симметрии, состоящего из трех преобразований: C – замена частиц на античастицы; P – зеркальное отражение любого движения или процесса; T – обращение времени (замены $t \to -t$) [222]. В 1964 г. Д. Кронином и В. Фитчем было обнаружено нарушение CPT-симметрии при распаде K-мезонов. Тем не менее, это считается исключением и понятие CPT-симметрии входит в парадигму теории элементарных частиц. Однако его составляющая T – артефакт, что должно быть учтено в дальнейшем.

Устранение фундаментального хроноартефакта ведет к смене парадигмы времени в физике, а такие смены всегда сопровождались борьбой старого и нового. «Обратимость» времени давно входит в парадигму, на ее «стороне» крупнейшие авторитеты – Л. Больцман, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Л.Д. Ландау, Р. Фейнман, И. Пригожин и многие другие. Однако есть «союзники» и у автора. О том, что время – не физическая величина, а лишь шкала, высказывались в той или иной форме многие.

Аристотель считал, что «Время не есть движение, а является им постольку, поскольку **движение имеет число** (выделено мной – И.В.)». «Чисто относительным», как и пространство, считал время Лейбниц. Близких, «релятивистских» взглядов на время придерживались многие философы. А. Пуанкаре считал [210], что «... нам дано психологическое время, и мы хотим **создать** (выделено мной – И.В.) научное и физическое время». При этом он полагал, что «... измеримое время по существу тоже относительно ... **Свойства времени – только свойства часов** (выделено мной – И.В.), подобно тому, как свойства пространства – только свойства измерительных инструментов».

Содержит «еретические» высказывания о времени и книга Х. Хармута [234]. Редактор ее перевода размышляет так: «Если часы «генерируют», «порождают» время, что можно понимать как отсчет числа единиц измерения времени, укладывающихся от начала измерения до его окончания, то что является физическим объектом (временем), которое мы измеряем? Можно ли здесь вводить разные модели, кроме линейной функции от количества единиц измерения? ... Или такого физического объекта нет?» (выделено мной И.В.). Ему вторит один из цитируемых авторов, М. Шлик: «Утверждение о том, что все движения ... относительны, эквивалентно утверждению, что пространство и время не являются физической объективностью. Пространство и время сами по себе не измеряемы: **они образуют только каркас** (выделено мной – И.В.), в котором мы организуем физические события. В принципе этот каркас можно выбрать, как нам заблагорассудится ...». Р. Карнап высказывается в том же духе [229]: «Любые часы представляют собой инструмент для создания периодического процесса». Ясно, что и измеряют любые часы всегда **только свой собственный ход**, который используется для реализации хроношкалы – субъективной (человеческой) формы изучения интенсивности протекания физических процессов. Готовых заклеймить автора и признать его субъективистом, идеалистом, махистом и проч. (см. труды классиков истмата и диамата) я прошу обратиться к прекрасной книге академика Маркова [247]. Хорошо сформулировал С. Маршак: «Мы знаем – время растяжимо / Оно зависит от того / Какого рода содержимым / Вы наполняете его». Так что субъективная трактовка времени – как шкалы, построенной человеком для анализа хода процессов, видимо, правильная. В Природе, в Мире нет никаких часов, никаких шкал ... Как выразился Ж.-Б. Ламарк: «Для природы – время ничего не значит и никогда не представляет затруднений; она всегда его имеет в своем распоряжении и для нее это средство не имеет границ ...»

Что же касается необратимости времени, то здесь мне не на кого сослаться. Абсолютное и подавляющее большинство авторов уже несколько столетий твердят об «обращении» времени и «симметрии законов природы». Друг А. Эйнштейна, М. Бессо было усомнился, но получил категорическую «отповедь» (письма А. Эйнштейна М. Бессо цитирую по [128]): «... необратимость это иллюзия, субъективное впечатление, обусловленное некими начальными условиями ... Необратимость не заключена в основных законах физики ... В динамике нет ничего такого, что позволило бы отличить прошлое от будущего ... согласно нашим современным представлениям, все элементарные процессы обратимы». То же самое говорят И. Пригожин [128,227], А Зиновьев [41] и многие, многие другие ...

Тем не менее, еще раз повторим: ВРЕМЯ НЕОБРАТИМО. МЕХАНИЧЕСКАЯ И ИНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ЕГО – АРТЕФАКТ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку при внимательном прочтении книги, как надеется автор, ответы на все вопросы могут быть найдены, а необходимые выводы – сделаны, настоящее «Заключение» будет полезно, в основном, Занятым Читателям, которые открыли его непосредственно после прочтения Предисловия и просмотра Оглавления. Автор попытался угадать возникающие у Таких Читателей вопросы и дать на них краткие ответы.

Вопрос 1. О чем же эта книга? – **Об артефактах** (преимущественно – хроноартефактах) термодинамики. Они перечислены в конце §5 и §6 (выявленные в оболочках парадигмы), в конце §10 (артефакты базиса), в конце §14 (артефакты ядра) и обобщены в таблице 2 (в §16). Фундаментальный хроноартефакт в эту таблицу не включен: его значение шире рамок термодинамики. Артефакты, выявленные в Части I устраняется в Части III на основе результатов Части II, где дано введение в Боргартонику (дискретную термодинамику). Кроме того, поскольку подробно рассмотрен и устранен (гл. 12) фундаментальный хроноартефакт – **эта книга о времени**. В этой части радикализм автора достигает максимума: предлагается изменить парадигму времени в физике.

Вопрос 2. Зачем это все нужно? – Исключение из всех структурных уровней парадигмы термодинамических артефактов (заделка «трещин» в фундаменте) ведет к модернизации парадигмы, что послужит разработке новых прикладных методов и повышению обоснованности самой термодинамики и ее ответвлений (к упрочнению здания и возможности его переделки и достройки новых этажей). Устранение фундаментального хроноартефакта освобождает физику от заблуждения, которому пошел четвертый век («обратимой» считал механику еще Лаплас), будет способствовать лучшему пониманию ряда фундаментальных проблем физики.

Вопрос 3. Какие задачи решает Боргартоника? – Кроме основ дискретной термодинамики, в Части II с помощью введенных понятий (см. Предисловие) решаются конкретные задачи, что, в совокупности, и представляет собой развитие (пока – начальное!) этой теории. Все задачи имеют отношение к D- и K-моделям (дискретным и континуальным) диссипаторов и их цепочек. В §18 рассмотрены: задача 1 – Факторы хроногенерации; задача 2 – Энтропогенерация диссипатора. В §19: задача 3 – K-модель диссипатора; задача 4 – Нестационарный диссипатор; задача 5 – Нелинейный диссипатор; задача 6 – Энтропогенерация невзаимодействующих диссипаторов; задача 7 – Хроногенерация диссипатора; задача 8 – Сравнение D- и K-моделей диссипатора; задача 9 – Двухтемпературный Боргартон; задача 10 – Диссипатор с переменными параметрами; задача 11 – Диссипатор с нелинейными параметрами; задача 12 – Условие аддитивности хроношкалы; задача 13 – Энтропогенерация диссипатора. Параграф 20 содержит: задачу 14 – Система двух диссипаторов; задачу 15 – Система двух диссипаторов. Общий метод; задачу 16 – Сравнение D- и K-моделей системы четырнадцати диссипаторов. В §21 рассмотрена задача 18 – Двумерная система, а в §23 – задача 19 – Цепочка переменной длины. В §25 содержатся; задача 20 – K-модель однородной цепочки; задача 21 – Двумерное K-приближение; задача 22 – K-модель неоднородной цепочки; задача 23 – K-модель нестационарной цепочки; задача 24 – K-модель нелинейной цепочки; задача 25 – K-модель цепочки переменной длины; задача 26 – Модели с источниками тепла; задача 27 – Квазилокальное условие Стефана. В табл. 6 приведено 21-о частное квазилокальное уравнение – K-приближения первого порядка для частных случаев поведения параметров в общем K-уравнении (8.25), описывающем теплоперенос в произвольно неоднородной и нестационарной среде.

Вопрос 4. Какие иные результаты получены? – В части III, где устраняются артефакты всех структурных уровней парадигмы и фундаментальный хроноартефакт, для этого, кроме результатов Части II, используются и другие: 1) показана несостоятельность вариационного принципа Онзагера–Махлупа и получен принцип наименьшего D-периода, эквивалентный принципам наименьшего действия и максимальной скорости энтропогенеза Г. Циглера; 2) двумя простыми феноменологическими моделями (чего ранее не делалось) показана справедливость соотношения взаимности для кинетических коэффициентов конституитивных уравнений; 3) описана процедура введения времени в механике и термодинамике; 4) показано, что хроношкалы механики и термодинамики – различны; 5) продемонстрирована необратимость времени в механике и в физике вообще; 6) сформулированы ФКЗ и ФТЗ (фундаментальные кинематический и термодинамический запреты – отсутствие на хроношкалах значений $t < 0$).

Кратко проанализируем четыре последних результата. Во всех разделах физики, кроме термодинамики, время присутствует изначально (априорно). Введение (как показано в §13 – ошибочное) времени в термостатику (для «переделки» ее в термодинамику) является единственной процедурой такого рода. В работах по теории относительности, строгих [34,246] и более популярных [236,255] речь **всегда** идет о синхронизации и сравнении показаний часов, установленных в различных системах отсчета – т.е. **о сравнении, а не построении хроношкал**. Пожалуй единственный раз вопрос «Как же ввести понятие времени в физику?» был поставлен вполне определенно [256, с. 21], однако ответ на него свелся к той же процедуре синхронизации и ссылке на постоянство скорости света.

Запрет на $t < 0$, т.е. принципиальная положительность механической хроношкалы (и, как следствие, хроношкал в других разделах физики) автоматически ликвидирует парадокс Лошмидта и прекращает многолетние споры по проблеме «обратимость–необратимость» [128,227,257]. Однако возникают проблемы нового обоснования многих известных результатов теоретической физики, базирующихся на «обратимости» времени (CPT-теорема, принципы детального равновесия, опережающие потенциалы и др.). Автор надеется, что эти проблемы будут решены теми из Читателей, кто еще не дойдя до настоящего Заключения, пришел к выводу, что «эту книгу нельзя было бы написать, не обладая известной способностью к рассуждению» (Ч. Дарвин). Хотелось бы также, чтобы слова А. Сент-Дьердьи: «... тот, кто логически доводит мысль до конца, совершенно не заботясь о последствиях, должен обладать ... почти паталогической конституцией» не были истолкованы в смысле «паталогичности» автора, ранее признавшего частичную «ненормальность» этой книги.

Вопрос 5. Чего хотел автор? – Сформулировать ответ на этот, последний, вопрос вполне по силам Прочитавшему Читателю. Возможно, ему будут при этом полезны высказывания:

Т. Мора: «... вкусы смертных столь различны, нравы их столь причудливы ... кажется намного счастливее живут те, которые ублажают себя приятностью и веселием, чем те, которые изводятся в заботах издать что-нибудь ...»

Ж. Кювье: «... я нисколько не буду жалеть, что представил критике несовершенное произведение, если это принесет через меня или через других некоторую пользу науке».

Б. Спинозы: «Если, наконец, у Вас при чтении явится сомнение в том, что я утверждаю, то я прошу Вас не торопиться со своими возражениями, пока Вы не потратите достаточно времени на размышление».

– РАЗМЫШЛЯЙТЕ !

Донецк, 09.08.2004

ЛИТЕРАТУРА

1. Большой энциклопедический словарь. – В – В 2–х томах. – М.: Советская энциклопедия, 1991. – т. 2. – 768 с.
2. Базаров И.П. Термодинамика. – Изд-е 4-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1991. – 376 с.
3. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – Изд-е 2-е, перераб. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
4. Левич В.Г. Курс теоретической физики: В 2-ч т. – т. 1/Изд-е 2-е, перераб. – М.: Наука, 1969. – 912 с.
5. Ансельм А.И. Основы статистической физики и термодинамики – М.: Наука, 1973. – 424 с.
6. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. Физические основы. – М.: Наука, 1978. – 128 с.
7. Журавлев В.А. Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. – М.: Наука, 1979. – 136 с.
8. Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 559.с.
9. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – Пер. с болгарск. – М.: Мир, 1986. – 288 с.
10. Ван-дер-Ваальс И.Д., Костамм Ф. Курс термостатики. – Ч. I. Общая термостатика. – Пер. с немец. – М.: ОНТИ, 1936. – 452 с.
11. Гельфер Я.М. История и методология термодинамики и статистической физики. – 2-е изд-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 536 с.
12. Леонова В.Ф. Термодинамика. – М.: Высшая школа, 1968. – 158 с.
13. Коздоба Л.А. Вычислительная теплофизика. – Киев : Наукова думка, 1992. – 224 с.
14. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 1. Введение в анализ парадигмы. – Донецк: ДонФТИ им. А.А. Галкина НАН Украины. – Препринт №2002-1, 2002. – 36 с.
15. Кун Т. Структура научных революций. – Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1977. – 300 с.
16. Большой энциклопедический словарь. – В 2-х томах. – М.: Советская энциклопедия, 1991. – т. 1. – 863 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – Изд-е 2-е, перераб. и доп. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 788 с.
18. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1985. – 480 с.
19. Честер Дж. Теория необратимых процессов. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 112 с.
20. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
21. Базаров И.П. Методологические проблемы статистической физики и термодинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 87 с.

22. Бубнов В.А. Замечания к волновым уравнениям теории теплопроводности. – В кн.: Проблема тепло- и массопереноса / Сб-к работ ИТМО им. А.В. Лыкова АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1976, с. 168–175.
23. Власов А.А. Статистические функции распределения. – М.: Наука, 1966. – 289 с.
24. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. – Пер. с. польск. – М.: Нака, 1967. – 776 с.
25. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
26. Хазен А.М. О возможном и невозможном в науке. – М.: Наука, 1988. – 344 с.
27. Пайерлс Р. Сюрпризы в теоретической физике. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
28. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
29. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 5. Теплоперенос в горных выработках. Донецк: ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-5, 2002. – 103 с.
30. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 7. Принципы развития парадигмы. – Донецк: ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-7, 2002. – 111 с.
31. Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии. – Пер. с франц. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
32. Ландау Л.Д. и Лившиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Изд-е 2-е, перераб. и доп. – М.: Физматгиз, 1963. – 704 с.
33. Борн М. Физика в жизни моего поколения. – Пер. с немецк. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 536 с.
34. Эйнштейн А. Физика и реальность / Сб-к статей. – М.: Наука, 1965. – 360 с.
35. Фейнман Р. Характер физических законов. – Пер. с англ. – М.: Мир, – 1968. – 232 с.
36. Эренфест П. Относительность. Кванты. Статистика. / Сб-к статей. – Пер. с англ. и немецк. – М.: Наука, 1972. – 360 с.
37. Боргардт А.А., Карпенко Д.Я. Характеристические задачи и потенциал движущегося заряда в электродинамике / Препринт ДонФТИ-86-9 (117) – Донецк: Изд-во ДонФТИ АН УССР, 1986. – 53 с.
38. Боргардт А.А. Карпенко Д.Я. Задача Коши для уравнения гиперболического типа / Препринт ДонФТИ-87-17 (137) – Донецк: Изд-во ДонФТИ АН УССР, 1987. – 38 с.
39. Боргардт А.А., Карпенко Д.Я. Поле равномерно ускоренного релятивистского заряда / Препринт ДонФТИ-88-2 (139). – Донецк: Изд-во ДонФТИ АН УССР, 1988. – 30 с.
40. Брусиловский Б.Я. Теория систем и система теорий. – Киев: Вища школа, 1977. – 192 с.

41. Зиновьев А.А. Логическая физика. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
42. Карслоу Г. Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – Пер. с англ. – М.; Наука, 1964. – 488 с.
43. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
44. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Изд-е 4-е, исправл. – М.: Наука, 1972.– 736. с.
45. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – 560 с.
46. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
47. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
48. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
49. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
50. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Изд-е 2-е, дополн. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
51. Толубинский Е.В. Теория процессов переноса. – Киев: Наукова думка, 1969. – 260 с.
52. Лыков А.В. Тепломассообмен / Справочник. – М.: Энергия, 1972. – 560 с.
53. Лыков А.В. Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса. – В кн.: Проблема тепло- и массопереноса /Сб-к работ ИТМО им. А.В. Лыкова АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1976, с. 9–82.
54. Колпащиков В.Л., Шнип А.И. К термодинамической теории линейного проводника с памятью. – там же (см. [53]), с. 102–123.
55. Колесников П.М. Методы теории переноса в нелинейных средах. – Минск: Наука и техника, 1981. – 336 с.
56. Таганов П.Н. Моделирование процессов массо- и энергопереноса. Нелинейные системы. – Л.: Химия, Л.о., 1979. – 208 с.
57. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса. – Киев: Наукова думка, 1983. – 352 с.
58. Никитенко М.І. Деякі проблеми теорії теплопереносу. Вісник АН УРСР, 1986, №6, с. 23–32.
59. Никитенко Н.И. Радиационный механизм теплопроводности. – Доповіді Національної Академії наук України, 1996, №4, с. 77–82.
60. Толпыго К.Б. Термодинамика и статистическая физика. – Киев: Изд-во КГУ, 1966. – 364 с.
61. Зельдович Я.Б. Мышкис А.Д. Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. – М.: Наука, 1973. – 386 с.
62. Оран Э., Бóрис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 660 с.
63. Уэрт Ч., Томсон Р. Физика твердого тела. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 568 с.

64. Маннинг Дж. Кинетика диффузии атомов в кристаллах. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 278 с.
65. Бокштейн Б.С. Диффузия в металлах. – М.: Металлургия, 1978. – 248 с.
66. Джафаров Т.Д. Дефекты и диффузия в эпитаксиальных структурах. – Л.: Наука, Л.о., 1978. – 208 с.
67. Старк Дж. П. Диффузия в твердых телах. – Пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 240 с.
68. Робертс Дж. Теплота и термодинамика. – Пер. с англ. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 592 с.
69. Драбл Дж. И Голдсмит Г. Теплопроводность полупроводников. – Пер. с англ. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 268 с.
70. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 288 с.
71. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
72. Райченко А.И. Математическая теория диффузии в приложениях. – Киев: Наукова думка, 1981. – 396 с.
73. Любов Б.Я. Диффузионные процессы в неоднородных твердых средах. – М.: Наука, 1981. – 296 с.
74. Венгеров И.Р. К обобщению задачи Зоммерфельда о теплопроводности в кольце. – ИФЖ, 1978, т. 35, №1, с. 150–154.
75. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Изд-е 4-е, дополн. – Новосибирск: Наука, С.о., 1970. – 660 с.
76. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – Пер. с англ. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
77. Слеттери Дж. С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. – Пер. с англ. – М.: Энергия, 1978. – 448 с.
78. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
79. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. – В 3-х т. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1970, т.3. – 343 с.
80. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
81. Шашков А.Г., Волохов Г.М., Абраменко Т.Н.,Козлов В.П. Методы определения теплопроводности и температуропроводности. – М.: Энергия, 1973. – 336 с.
82. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Часть I. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1974. – 452 с.
83. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 228 с.
84. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. – Киев: Наукова думка, 1982. – 360 с.
85. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – Пер. с англ. – М.: Энергия, 1975. – 208 с.

86. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
87. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 4. Теплоперенос в горных массивах. – Донецк: ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-4, 2002. – 101 с.
88. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 112 с.
89. Туницкий Н.Н., Каминский В.А., Тимашев С.Ф. Методы физико-химической кинетики. – М.: Химия, 1972. – 198 с.
90. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
91. Змитренко Н.В., Михайлов А.П. Явление инерции тепла. – В кн.: Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1988, с. 137–170.
92. Вейник А.И. Термодинамика литейной формы. – М.: Машиностроение, 1968. – 332 с.
93. Камья Ф.М. Импульсная теория теплопроводности. – Пер. с франц. – М.: Энергия, 1972. – 272 с.
94. Адиутори Е.Ф. Новые методы в теплопередаче. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
95. Левич В.Г. Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики : В 2-х томах. – т. 2. – М.: Физматгиз, 1962. – 820 с.
96. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 2. Массоперенос в горных массивах. – Донецк: ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-2, 2002. – 104 с.
97. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 3. Массоперенос в горных выработках. – Донецк: ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-3, 2002. – 101 с.
98. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. – М.: Наука 1987. – 240 с.
99. Михайлов Ю.А., Глазунов Ю.Т. Вариационные методы в теории нелинейного тепло- и массопереноса. – Рига : Зинатне, 1985. – 190 с.
100. Бонд Дж., Уотсон К., Уэлч Дж. Физическая теория газовой динамики. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 556 с.
101. Kovalenko N.P., Ebeling W. Phys. Stat. Solidi. – 1968. – V. 30. – p. 533.
102. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
103. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
104. Карери Дж. Порядок и беспорядок в структуре материи. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 232 с.
105. Ленюк М.П. Одномерное волновое температурное поле. – В кн.: Краевые задачи теории теплопроводности / Сб-к научн. Трудов. – Киев : Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1975, с. 131–144.

106. Лакуста К.В. Об одной задаче сопряжения полупространств. – ИФЖ, 1976, т. 31, №1, с. 145–146.
107. Лакуста К.В., Ленюк М.П. Решение задач сопряжения для многослойных сред преобразованием Лапласа. – ИФЖ, 1976, т. 31, №4, с. 742.
108. Венгеров И.Р. Тепломассоперенос в шахтах и рудниках (Математические модели) / 6. Процессы переноса при подземных пожарах. – Донецк, ДонФТИ им А.А. Галкина НАН Украины – Препринт №2002-6, 2002. – 88 с.
109. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Часть II. – Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1974. – 292 с.
110. Бахарева И.Ф. Нелинейная неравновесная термодинамика. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1976. – 141 с.
111. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – В 2-х томах. – М.: Наука, 1970. – т. I – 492 с.
112. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 516 с.
113. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 304 с..
114. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
115.Поттер Д. Вычислительные методы в физике. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 392 с.
116. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
117. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – Пер. с англ. – В 2-х томах. – М.:Мир, 1990. – т. I – 384 с.
118. Беккер Р. Теория теплоты. – Пер. с немецк. – М.: Энергия, 1974. – 504 с.
119. Юкава Х. Лекции по физике. – Пер. с японск. – М.: Энергоиздат, 1981. – 128 с.
120. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волков К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
121. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. – Пер. с немецк. – М.: Мир, 1979. – 280 с.
122. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – Пер. с англ. – М.: Мир,1979. – 512 с.
123. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
124. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика – теория самоорганизации (идеи, методы, перспективы). – В кн.: Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1988, с. 137–170.

125. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Процессы в открытых диссипативных системах. – М.: Знание, 1988. – 32 с.
126. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Потапов А.Б. Синергетика – новые направления. – М.: Знание, 1989. – 48 с.
127 Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны. Локализованные сильнонеравновесные области в однородных диссипативных системах. – М.: Наука, 1991. – 200 с.
128. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
129. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
130. Повх И.Л. Гидродинамика и жизнь – Киев: Об-во «Знание» УССР, 1981. – 64 с.
131. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 638 с.
132. Лихтенберг А. Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
133. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
134. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
135. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев : Наукова думка, 1970. – 308 с.
136. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Саморазогрев при растяжении высоковязкого цилиндра в теплопроводной среде. – ИФЖ, 1987, т. 52, №1, с.160.
137. Попов В.В. Теплопередача в растягиваемых телах. – ИФЖ, 1987, т. 52, №1, с.161.
138. Бартошевич М.А., Прудников А.П. Применение операторов Ватсона к решению некоторых задач теории теплопроводности. – ИФЖ, 1979, т. 37, №3, с. 503–507.
139. Кузнецова Н.Н. Решение одной задачи теплопроводности в области с подвижной границей методом разложения по ортогональным операторам Ватсона. – ИФЖ, 1986, т. 50, №4, с. 654–659.
140. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение / Сб-к статей. – Пер. с англ. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 227 с.
141. Лоренц Г.А. Лекции по термодинамике. – Пер. с англ. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1946. – 156 с.
142. Гребер Г. и Эрк С. Основы учения о теплообмене. – Пер. с немецк. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 328 с.
143. Семенченко В.К. Вступительная статья. – В кн.: [113], с. 5–19.
144. Гуров К.П. Основания кинетической теории. Метод Н.Н. Боголюбова. – М.: Наука, 1966. – 352 с.
145. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 416 с.

146. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. – Пер. с англ. – М.: Госинлитиздат, 1947. – 168 с.
147. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
148. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. – Изд-е 2-е, перераб. и дополн. – М.: Высшая школа, 1973. – 280 с.
149. Фейнман Р. Статистическая механика. – Пер. с англ – М.: Мир, 1978. – 408 с.
150. Базаров И.П., Николаев П.М. Теория систем многих частиц. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 312 с.
151. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. Часть I. Теплопроводность. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.
152. Охотин А.С., Боровикова Р.П., Нечаева Т.В., Пушкарский А.С. Теплопроводность твердых тел : Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 320 с.
153. Дмитриев А.П., Кузяев Л.С., Протасов Ю.И., Ямщиков В.С. Физические свойства горных пород при высоких температурах. – М.: Недра, 1969. – 160 с.
154. Майков В.П. О нелокальной версии классической термодинамики. – М.: Изд-во МГУИЭ, 2001. – 32 с.
155. Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. – Изд-е 2-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
156. Рихтмаейер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. – Пер. с англ. – М.: Инлитиздат, 1960. – 246 с.
157. Вазов В. Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Пер. с англ. – М.: Инлитиздат, 1963. – 488 с.
158. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск : Наука, С.о., 1967. – 197 с.
159 Жаблон К., Симон Ж.-К. Применение ЭВМ для численного моделирования в физике. – Пер. с франц. – М.: Наука, 1983. – 236 с.
160. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
161. Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
162. Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
163. Kelly R. Theory of diffusion for discrete media. – I. – Acta met., 1964, **12**, N 2, p.123–127.
164. Румянцев Г.Д. Линейно-алгебраическая теория переноса нейтронов в плоских решетках. – М.: Атомиздат, 1979. – 224 с.
165. Кубо Р. Термодинамика. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 304 с.
166. Эткинс П. Порядок и беспорядок в природе. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 224 с.
167. Эртель Х. Измерения в гиперзвуковых ударных трубах. – В кн.: Физика

быстропротекающих процессов / Сб-к обзоров в 3-х томах. – т. 3. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1971, с. 103–208.
168. Гамаля И.А. Данилейко В.М., Петров В.В. и др. Температурные поля полупроводниковой пленки, нагреваемой излучением лазера. – ДАН УССР, Сер. А, 1985, №7, с. 30–32.
169. Спирин Г.Г. Методические особенности кратковременных измерений в стадии иррегулярного теплового режима. – ИФЖ, 1980, т. 38, №3, с. 403–409.
170. Пак В. Новые контактные методы измерения температуры поверхности твердых тел со следящей компенсацией теплоотвода. – М.: Изд-во Госкомитета Стандартов СМ СССР, 1972. – 97 с.
171. Пфанцагль И. Теория измерений. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 248.
172. Соколов А.А. Дельта-функция и ее применение к решению некоторых математических задач геофизики. / Труды горно-геологического института, вып. 10. – Свердловск : Изд-во Ур. ф. АН СССР, 1946. – 43 с.
173. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. Классическая теория поля. – 2-е изд. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951. – 480 с.
174. Мочалин А.И. Применение δ-функции Дирака к решению дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. – В кн.: Тепло- и массообмен в процессах испарения. – М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 181–197.
175. Фейнман Р., Лейтон Р. Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 5. Электричество и магнетизм. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 296 с.
176. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. – В 3-х т. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1969, т. 1 – 423 с.
177. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, Л.о.,1986. – 144 с.
178. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
179. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – Изд-е 2-е, исправл. и доп. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
180. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
181. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – Пер. с 3-го немецк. изд-я. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
182. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Изд-е 4-е, перераб. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
183. Гельфанд И.Н., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 440 с.
184. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
185. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Изд-е 2-е, доп. – М.: Наука, 1974. – 544 с.

186. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – Пер. с англ. – М.: Мир,1974. – 208 с.
187. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – т. I. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
188. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – т. II. Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 328 с.
189. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Пер. с румынск. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
190. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
191. Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е. Ступенчатые изображения и их применения. – Киев : Наукова думка, 1983. – 216 с.
192. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев : Наукова думка, 1976. – 282 с.
193. Венгеров И.Р. Теория линейного переноса в слоистых системах. / Препринт ДонФТИ-82-27. – Донецк: Изд-во ДонФТИ АН УССР, 1982. – 64 с.
194. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. – Пер. с немецк. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1950. – 456 с.
195. Жернов И.Е. Динамика подземных вод. – Киев : Вища школа, 1982. – 324 с.
196. Черниченко В.К., Венгеров И.Р. Метод определения ширины охлажденной зоны породного массива. – В кн.: Охлаждение воздуха в угольных шахтах, вып. 3. – Макеевка – Донбасс : Изд-во МакНИИ, 1973, с. 29–33.
197. Венгеров И.Р., Кузин В.А. О формировании температурных полей вокруг выработок глубоких шахт. – Уголь Украины, 1982, №7, с. 40–41.
198. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 544 с.
199.Репин А.А. Тепловой резонанс в замкнутом циркуляционном контуре. – ИФЖ, 1991, т. 61, №3, с. 357–364.
200. Будак Б.Н., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – Изд-е 2-е, исправл. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
201. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. – ИФЖ, 1965, т. 9, №3, с.287–304.
202. Предводителев А.С. Учение о теплоте и римановы многообразия. – В кн.: Проблемы тепло- и массопереноса. / Сб-к работ. – М.: Энергия, 1970, с. 151–192.
203. Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. – М.: Высшая школа, 1974. – 328 с.
204. Кочанов Н.С. Компактные шестизначные математические таблицы. – Изд-е 2-е, дополн. – Л.: Машиностроение, 1973. – 264 с.

205. Смородинский Я.А. Температура. – М.: Наука, 1981. – 160 с.
206. Фейнман Р., Лейтон М., Сэндс Р. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 4 : Кинетика. Теплота. Звук. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 262 с.
207. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент. / Справочник под общ. ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 512 с.
208. Геращенко О.А., Гордов А.М., Еремина А.К. и др. Температурные измерения. / Справочник. – Киев : Наукова думка, 1989. – 704 с.
209. Ярышев Н.А. Теоретические основы измерения нестационарной температуры. – 2-е изд-е, перераб. – Л.: Энергоатомиздат, Л.о., 1990 – 256 с.
210. Пуанкаре А. О науке. – Пер. с франц. – М.: Наука, 1983. – 560 с.
211. Кузьменко П.П. Электроперенос, термоперенос и диффузия в металлах. – Киев: Вища школа, 1983. – 152 с.
212. Арефьев К.М. Явления переноса в газе и плазме. – Л.: Энергоатомиздат, Л.о., 1983. – 112 с.
213. Сокольников И. Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 376 с.
214. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть II. – Изд-е 4-е, перераб. и доп. С.М. Таргом. – М.: Наука,1966. – 332 с.
215. Авалиани С.Ш. Очерки философии естествознания. – Тбилиси : Мецниереба, 1968. – 312 с.
216. Штейнман Р.Я. Пространство и время. – М.: Физматгиз, 1962. – 240 с.
217. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика / Теоретическая физика, том I. – М.: Физматгиз, 1958. – 206 с.
218. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I. – Изд-е 6-е, перераб и доп. С.М. Таргом. – М.: Наука, 1965. – 468 с.
219. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 1 : Современная наука о природе. Законы механики. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 268 с.
220. Завельский Ф.С. Время и его измерение. Изд-е 4-е, перераб. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
221. Проблемы физики: классика и современность. / Сб-к докл. Конф. в честь 100-летия со дня рождения А. Эйнштейна. Под ред Г.-Ю. Тредера. – Пер. с англ. и немецк. – М.: Мир, 1982. – 328 с.
222. Хокинг С. От большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 168 с.
223. Бом Д. Причинность и случайность в современной физике. – Пер. с англ. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 248 с.
224. Ахиезер Л.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
225. Ланфорд (III) О.Э. О выводе уравнения Больцмана. – В кн.: Уравнение Больцмана / Сб-к перевод. с англ. – М.: Мир, 1968, с. 12–28.
226. Климонтович Ю.Л. Послесловие редактора перевода. – В кн.: [128], с. 283–312.

227. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. – Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1994. – 272 с.
228. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – Изд-е 8-е, перераб. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
229. Карнап Р. Философские основания физики. Введение в философию науки. – Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1971. – 390 с.
230. Ахундов М.Д. Проблема прерывности и непрерывности пространства и времени. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
231. Пространство и время в современной физике. / Материалы Симпозиума, посвящ. 50-летию общей теории относительности. – Киев : Наукова думка, 1968. – 300 с.
232. Методологический анализ теоретических и экспериментальных оснований физики гравитации. / Материалы философского Симпозиума. – Киев : Наукова думка, 1973. – 248 с.
233. Горелик Г.Е. Почему пространство трехмерно? – М. Наука, 1982. – 168 с.
234. Хармут Х. Применение методов теории информации в физике. – Пер. с англ. –М.: Мир, 1989. – 344 с.
235. Гуревич Л.Э. Современная космическая физика. – В кн.: Физика: проблемы, история, люди. / Сб-к трудов ФТИ им А.Ф. Иоффе АН СССР. – Л.: Наука, Л.о., 1968, с. 97–102.
236. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 2 : Пространство. Время. Движение. – Пер. с англ. – М.: Мир,1965. – 168 с.
237. Уилер Д.А. Эйнштейн: что он хотел. – В кн. [221], с. 86–98.
238. Вижье Ж.-П. Доклад о парадоксе Эйнштейна–Подольского–Розена. – В кн.: [221], с. 227–254.
239. Аут И. Эйнштейн и физика твердого тела. – В кн. [221], с. 255–277.
240. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 6: Электродинамика. – Пер. с англ. – М.: Изд-во Мир, 1965. – 344 с.
241. Гейзенберг В. Физические принципы квантовой теории. – Пер. с немецк. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1932. – 146 с.
242. Лорентц Г.А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. – Пер. с англ. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 432 с.
243. Фредерикс В.К. Электродинамика и введение в теорию света. – Л.: Кубуч, 1934. – 608 с.
244. Френкель Я.И. Волновая механика. Часть I. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. – 388 с.
245. Богуш А.А., Мороз Л.Г. Введение в теорию классических полей. – Минск : Наука и техника, 1968. – 388 с.
246. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля. – Изд-е 5-е, исправл. и доп. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
247. Марков М.А. О трех интерпретациях квантовой механики. – М.: Наука, 1991. – 112 с.

248. Спиридонов О.П. Фундаментальные физические постоянные. – М.: Высшая школа, 1991. – 238 с.
249. Рокитянский И.И. Абсолютное движение как источник возникновения причинных сил. – Доповіді Національної Академії наук України, 1995, №10, с. 76–86.
250. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – Вып. 9: Квантовая механика (II) – Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 260 с.
251. Вигнер Е. Этюды о симметрии. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 318 с.
252. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованніх полей. – Изд-е 2-е, перераб. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
253. Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. – Пер. с англ. – В 2-х томах. – М.: Наука, 1978. – т . 1 – 296 с.
254. Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. – Пер. с англ. – В 2-х томах. – М.: Наука, 1978. – т . 2 – 408 с.
255. Борн М. Эйнштейновская теория относительсти. – 2-е исправл. изд-е. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 368 с.
256. Ахиезер А.И. Эволюция физической картины мира. – Киев : Институт теоретической физики АН УССР / Препринт ИТФ-71-104Р, 1971. – 33 с.
257. Бунге М. Причинность. Место принципа причинности в современной науке. – Пер. с англ. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 512 с.

Научное издание

Венгеров Игорь Рувимович
ХРОНОАРТЕФАКТЫ ТЕРМОДИНАМИКИ
(монография)

Редактор – В. Л. Белявский
Технический редактор – к.ф.-м.н. И.А. Сибарова

Издательство «Норд-Пресс»
Св. о госрегестр. ДК №839
83112, Украина, м. Донецк, пр. Жуковского, 2
Телефон (062) 305-34-92

Рукопись поступила 22.04.05. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 16,5. Печать лазерная. Заказ № 4530/1. Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии ООО «Норд Компьютер»
на цифровом лазерном издательском комплексе Rank Xerox DocuTech 135.
Адрес: г. Донецк, б. Пушкина, 23. Телефон: (062) 337-43-06.

Венгеров И.Р.

В29 **Хроноартефакты термодинамики.** - Донецк: Норд-Пресс, 2005. – 236 с.
ISBN 966-8085-94-9

В монографии впервые системно рассматриваются известные и обнаруженные автором артефакты в парадигме термодинамики неравновесных процессов – в трех ее структурных уровнях: оболочке, базисе и ядре. Устранение этих артефактов осуществлено на основе новой — дискретной — версии термодинамики. Введены новые понятия: макроточка, диссипатор, диссипаторные цепочки. Известные уравнения теплопроводности - Фурье, гиперболическое, нелинейное получены как приближения различных порядков общего континуального, соответствующего полученному разностному, уравнения. Дана новая трактовка вариационных принципов; обнаружен и устранен «фундаментальный хроноартефакт» — ошибочность парадигмы времени в механике и в термодинамике.

Монография представляет интерес для преподавателей и исследователей-теплофизиков.

УДК 536.1 PACS: 05.70.Ln ББК В317.13

Vengerov I.R.
Chrono-artifacts of thermodynamics.

Known and revealed by the author artifacts of the paradigm of non-equilibrium thermodynamics are investigated for the first time. Elimination of the artifacts is realized on the base on a new discrete version of thermodynamics. Novel notions as a macro-point, a dissipator, a chain of dissipators, are introduced. Known linear, hyperbolic, and non-linear equations of thermal conductivity are found to be approximations of a general continual equation corresponding to a discrete equation obtained by the author. A new interpretation of variational principles is proposed; a fundamental chrono-artifact, an erroneous paradigm of time in mechanics and thermodynamics, is revealed and eliminated. The book can be useful for lecturers and experts in the field of thermophysics.