Если вдруг ошибку лектор
На доске нарисовал,
В знак протеста, хлопнув дверью,
Уходи домой скорее,
И читай, ища ошибки,
Эту книжку на диване.

Д.Н.Булгаков, А.М.Попов

Билинейные и квадратичные формы

Учебное пособие

Москва
Издательство Российского университета дружбы народов
2001

ББК 22.1
Б 90

У т в е р ж д е н о
РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов

Булгаков Д.Н., Попов А.М.
Б 90 Билинейные и квадратичные формы: Учеб. Пособие.- М.: Изд-во РУДН, 2001. – 32 с.

ISBN 5-209-01364-2

Вошедший в пособие раздел изучается в курсе алгебры на математических специальностях бакалавриата.

Для студентов I и II курсов бакалавриата по направлениям «Математика. Прикладная математика», «Прикладная математика. Информатика», «Математика. Компьютерные науки».

Подготовлено на кафедре математического анализа.

ISBN 5-209-01364-2 ББК 22.1

Введение.

Изучение основ теории билинейных и квадратичных форм вызывает ряд трудностей методического характера, обусловленных существованием нескольких различных подходов к построению этой теории. Принятое в данном пособии изложение основано на теории унитарных и евклидовых пространств и содержит единый подход к изучению симметричных и эрмитовых форм. От читателя требуется знание классических понятий теории унитарных и евклидовых пространств и основных свойств самосопряженных и унитарных (ортогональных) линейных операторов.

Общими обозначениями в пособии являются:

$\boldsymbol{P}$ – основное поле, под которым мы будем понимать поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ или поле действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

$\overline{\alpha}$ - комплексное число, сопряженное к комплексному числу α $(\overline{\alpha} = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \boldsymbol{R})$; $|\alpha|$ - модуль комплексного числа α.

L - линейное пространство над полем $\boldsymbol{P}$.

В случае, когда размерность линейного пространства L равна n $(L = L^n)$ будем считать L унитарным (при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}$) или евклидовым (при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$) пространством, так как на любом конечномерном пространстве L^n над полем $\boldsymbol{C}$ или $\boldsymbol{R}$ можно определить скалярное произведение. Для любых векторов $x, y \in L^n$ (x, y) обозначает их скалярное произведение. Остальные обозначения или являются общепринятыми в линейной алгебре, или объясняются при их первом использовании в тексте пособия.

1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА БИЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

1.1. Определение билинейной формы. Общие свойства билинейных форм.

Определение 1. Билинейная форма F на линейном пространстве L над полем $\boldsymbol{P}$ - это отображение

$$F: L\times L \to \boldsymbol{P},$$
$$(x, y) \to F(x, y) \in \boldsymbol{P},$$

удовлетворяющее условию линейности по первому аргументу и условию антилинейности по второму аргументу:

1. Для любого фиксированного $z \in L,\ \forall x, y \in L,\ \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}$
$F(\alpha x+\beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z);$
2. Для любого фиксированного $x \in L,\ \forall y, z \in L,\ \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{P}$
$F(x, \alpha y+\beta z) = \overline{\alpha}\, F(x, y)+ \overline{\beta}\, F(x,z).$

Замечание. В современой математической литературе формы из определения 1 часто называют полуторалинейными, а билинейными называют формы, линейные по обоим аргументам. Для удобства изложения мы будем придерживаться терминологии из определения 1.

Пример 1. Скалярное произведение (x,y) на унитарном или евклидовом пространстве L является билинейной формой на L.

Пример 2. Функция $F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной формой на пространстве $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Из определения 1 непосредственно следуют два свойства билинейных форм:

1. $F(0_L , y) = F(x, 0_L) = 0 \quad \forall x, y \in L;$
2. $F(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n}\beta_j v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta}_j F(u_i, v_j)$

$\forall m,n \in \boldsymbol{N},\ \forall \alpha_i,\ \beta_j \in \boldsymbol{P},\ \forall u_i,\ v_j \in L.$

Действительно, $F(0_L, y)=F(0 \cdot 0_L, y)= 0 \cdot F(0_L, y)=0= F(x, 0_L)$, а свойство 2 доказывается индукцией по m, n.

1.2. Матрица билинейной формы.

Пусть F - билинейная форма на n-мерном пространстве $L=L^n$ над полем $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{e}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ - произвольный базис в L. Для любых $x,\ y \in L$ существуют их разложения по $\boldsymbol{e}$:

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, где все $x_i, y_j \in \boldsymbol{P}$.

Тогда

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{j,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j F(e_i, e_j). \qquad (1)$$

Формула (1) показывает, что значение билинейной формы $F(x,y)$ при произвольных $x,y \in L$ полностью определяется n^2 значениями $F(e_i,\ e_j)$ на упорядоченных парах базисных векторов $e_i,\ e_j$. Более того, множество $\{F(e_i,\ e_j) \mid \forall i,j=1,\ldots,n\}$ значений билинейной формы F на парах базисных векторов однозначно определяет билинейную форму F: если для некоторой билинейной формы G на L над $\boldsymbol{P}$ при любых $e_i,\ e_j$ $G(e_i,\ e_j)= F(e_i,\ e_j)$, то для любых $x,y \in L$

$$G(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j G(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j F(e_i, e_j) = F(x,y), \text{ и } G=F.$$

Определим квадратную матрицу $\underset{e}{A}{}_F=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ порядка n:

$a_{ij} \overset{def}{=} F(e_i,\ e_j),\ i,j = 1,\ldots,n.$ $\underset{e}{A}{}_F$ называется матрицей билинейной формы F в базисе $\boldsymbol{e}$.

Вернемся к формуле (1). При любых $x,y \in L$

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j F(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{y}_j . \qquad (2)$$

Пусть

$$\underset{e}{[x]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underset{e}{[\bar{y}]} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$ - столбцы координат векторов x и $\bar{y} = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j e_j$ в базисе $\boldsymbol{e}$, ^{t} - операция транспонирования матрицы. В этих обозначениях формула (2) приобретает матричный вид

$$F(x,\ y) = \underset{e}{[x]}^t \cdot \underset{e}{A}_F \cdot \underset{e}{[\bar{y}]} \quad \forall x,y \in L. \tag{3}$$

Из приведенных рассуждений и формулы (3) следует, что матрица $\underset{e}{A}_F$ полностью и однозначно определяет билинейную форму F. Следующая лемма показывает, что формула (3) однозначно определяет матрицу билинейной формы F.

Лемма 1. Пусть F - билинейная форма на L над полем $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{e}$ - некоторый базис в L. Если для некоторой квадратной матрицы $B=(b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ $\forall x,y \in L$ $F(x,\ y) = \underset{e}{[x]}^t \cdot B \cdot \underset{e}{[\bar{y}]}$, то матрица B равна матрице $\underset{e}{A}_F=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ билинейной формы F в базисе $\boldsymbol{e}$.

Доказательство. Возьмем $x = e_i$, $y = e_j$ при произвольных $i,j = 1,\dots, n$. Тогда $a_{ij} = F(e_i,\ e_j) = \underset{e}{[e_i]}^t \cdot B \cdot \underset{e}{[\bar{e}_j]} =$
$= (b_{i1}, b_{i2},\dots, b_{ij},\dots,b_{in}) \cdot \underset{e}{[\bar{e}_j]} = b_{ij}$, поэтому $B = \underset{e}{A}_F$.

1.3. Связь матриц билинейной формы в разных базисах. Ранг билинейной формы.

Пусть $\boldsymbol{e}'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ - другой базис в L, и $\underset{e\to e'}{T} = T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ - матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$: $e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$. Тогда $\forall x,y \in L$ имеем $\underset{e}{[x]} = T\underset{e'}{[x]}$, $\underset{e}{[y]} = T\underset{e'}{[y]}$, и из (3)

$$F(x,y) = \underset{e}{[x]}^t \underset{e}{A_F} \underset{e}{[\bar{y}]} = (T\underset{e'}{[x]})^t \underset{e}{A_F} \overline{(T\underset{e'}{[y]})} = \underset{e'}{[x]}^t \cdot T^t \underset{e}{A_F}\, \overline{T} \cdot \overline{\underset{e'}{[y]}}.$$

Следовательно, по лемме 1

$$\underset{e'}{A_F} = \underset{e\to e'}{T^t} \cdot \underset{e}{A_F} \cdot \underset{e\to e'}{\overline{T}} , \qquad (4)$$

или

$$\underset{e'}{A_F} = \underset{e\to \bar{e}'}{\overline{T}^{\,t}} \cdot \underset{e}{A_F} \cdot \underset{e\to \bar{e}'}{T} , \qquad (5)$$

где $\underset{e\to \bar{e}'}{T} = (\bar{t}_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ - матрица перехода от базиса ***e*** к комплексно сопряженному с ***e′*** базису $\bar{\boldsymbol{e}}'$: $\bar{e}_j' = \sum_{i=1}^{n} \bar{t}_{ij} e_i \quad \forall j=1,\dots,n.$

Следствия.

$\det \underset{e'}{A_F} = \det \underset{e}{A_F} \cdot \left|\det \underset{e\to e'}{T}\right|^2.$

1. При $\det \underset{e}{A_F} \in \boldsymbol{R}$ $\quad sign(\det \underset{e'}{A_F}) = sign(\det \underset{e}{A_F}).$

Определение 2. Пусть F - билинейная форма на L. Рангом rgF билинейной формы F называется ранг ее матрицы в каком-либо базисе пространства L: $rgF = rg \underset{e}{A}_F$.

Корректность определения 2 следует из того, что ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса: $rg \underset{e'}{A_F} = rg \underset{e}{A_F}$ для любых базисов ***e*** и ***e′***, так как умножение $\underset{e}{A_F}$ в формуле (4) на невырожденные матрицы T^t и $\overline{T}$ не меняют ранга матрицы билинейной формы.

1.4. Определение квадратичной формы. Связь билинейных и квадратичных форм. Матрица и ранг квадратичной формы.

Определение 3. Пусть F - билинейная форма на линейном пространстве L над $\boldsymbol{P}$. Отображение $f\colon L \to \boldsymbol{P}$, заданное формулой $f(x)=F(x,x)$ $\forall x \in L$, называется квадратичной формой, определяемой билинейной формой F .

В случае, когда L задано над ***C***, билинейная форма F однозначно восстанавливается по определенной ею квадратичной форме f формулой: $\forall x,y \in L$

$$F(x, y)=\frac{1}{4}(f(x+y) + if(x+iy) - f(x-y) - if(x-iy)), \qquad (6)$$

которая проверяется непосредственным вычислением.

В случае, когда L задано над ***R***, билинейная форма F однозначно восстанавливается по определенной ею квадратичной форме f формулой:

$$\forall x,y \in L \quad F(x, y)=\frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y)), \qquad (7)$$

тогда и только тогда, когда F - симметричная билинейная форма, то есть $\forall x,y \in L \quad F(x,y)=F(y,x)$. Действительно, билинейная форма F, определенная формулой (7), является симметричной, а для симметричной билинейной формы F $F(x+y,x+y)=F(x,x)+F(x,y)+F(y,x)+F(y,y)=F(x,x)+2F(x,y)+$ $+F(y,y)$, так что $f(x+y)=f(x)+2F(x,y)+f(y)$, откуда следует формула (7). Далее, в п.2.1 будет доказано, что вид записи любой квадратичной формы f на L над полем ***R*** можно преобразовать так (симметризовать) , что f будет определяться симметричной билинейной формой. Поэтому и в случае L над ***R*** можно считать, что билинейная форма однозначно восстанавливается по определенной ею квадратичной форме.

Определение 4. Матрицей $\underset{e}{A_f}$ квадратичной формы f, определяемой билинейной формой F, в базисе ***e*** пространства $L= L^n$ называется матрица $\underset{e}{A_F}$ билинейной формы F в базисе ***e***: $\underset{e}{A_f} = \underset{e}{A_F}$.

Из формулы (2) при $x = y$ следует, что для любого $x \in L$

$f(x)=F(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \bar{x}_j = [\underset{e}{x}]^t \underset{e}{A_f} [\underset{e}{\bar{x}}]$, то есть

$$f(x) = [\underset{e}{x}]^t \underset{e}{A_f} [\underset{e}{\bar{x}}] \qquad \forall x \in L. \qquad (8)$$

Связь матриц квадратичной формы f в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$ пространства $L = L^n$ устанавливается формулой

$$A_{\underset{e'}{f}} = T^t_{e\to e'} \cdot A_{\underset{e}{f}} \cdot \overline{T}_{e\to e'} = \overline{T}^t_{e\to \bar{e}'} \cdot A_{\underset{e}{f}} \cdot T_{e\to \bar{e}'} , \qquad (9)$$

которая непосредственно следует из формул (4)-(5) для билинейной формы F, определяющей квадратичную форму f.

Определение 5. Рангом rgf квадратичной формы f называется ранг определяющей ее билинейной формы F: $rgf=rgF$.

Из определений 5 и 2 следует, что $rgf = rg\, A_{\underset{e}{f}}$ при любом базисе $\boldsymbol{e}$, то есть ранг квадратичной формы равен рангу ее матрицы, взятой в любом базисе пространства L^n.

1.5. Эквивалентность билинейных форм и квадратичных форм.

Определение 6. Билинейные или квадратичные формы f и g на пространстве L над полем $\boldsymbol{P}$ называются эквивалентными (обозначение $f \sim g$), если существует невырожденный линейный оператор $\varphi: L \to L$ такой, что

$\forall x,y \in L \quad f(x,y) = g(\varphi x, \varphi y)$ (для билинейных форм f и g),

или

$\forall x \in L \quad f(x) = g(\varphi x)$ (для квадратичных форм f и g).

Если φ - унитарный или ортогональный линейный оператор, то формы f и g называются унитарно эквивалентными (обозначение $f \approx g$).

Очевидно, что отношения $\sim$ и $\approx$ являются отношениями эквивалентности на множестве билинейных (квадратичных) форм на пространстве L над полем $\boldsymbol{P}$.

Лемма 2. Для билинейных или квадратичных форм f и g на конечномерном пространстве $L = L^n$

1. $f \sim g \iff$ в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L матрицы форм f и g связаны соотношением $A_{\underset{e}{f}} = T^t\, A_{\underset{e}{g}}\, \overline{T}$, где T - невырожденная матрица.
2. $f \approx g \iff$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L

матрицы форм f и g связаны соотношением $\underset{e}{A_f} = T^t \underset{e}{A_g} \overline{T}$,

где T - унитарная (ортогональная при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$) матрица.

Доказательство проведем для билинейных форм f и g (в случае квадратичных форм f и g в формулах доказательства необходимо положить $x = y$).

1. Пусть $f \sim g$. Возьмем произвольный базис $\boldsymbol{e}$ пространства L и обозначим через T матрицу линейного оператора φ в этом базисе. T является невырожденной матрицей, так как φ - невырожденный оператор. $\forall x,y \in L$ $f(x,y)=g(\varphi x, \varphi y), f(x,y)=$
$= \underset{e}{[x]}^t \underset{e}{A_f} \overline{\underset{e}{[y]}}$, $g(\varphi x, \varphi y) = [T\underset{e}{[x]}]^t \cdot \underset{e}{A_g} \cdot \overline{[T\underset{e}{[y]}]} = \underset{e}{[x]}^t \cdot T^t \underset{e}{A_g} \overline{T} \cdot \overline{\underset{e}{[y]}}$,

поэтому $\underset{e}{A_f} = T^t \underset{e}{A_g} \overline{T}$.

Обратно, если в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ матрицы форм f и g связаны соотношением $\underset{e}{A_f} = T^t \cdot \underset{e}{A_g} \cdot \overline{T}$, где T - невырожденная матрица, то $\forall x,y \in L$ $f(x,y) = \underset{e}{[x]}^t \underset{e}{A_f} \overline{\underset{e}{[y]}} = \underset{e}{[x]}^t \cdot T^t \underset{e}{A_g} \overline{T} \cdot \overline{\underset{e}{[y]}} =$
$= [T\underset{e}{[x]}]^t \cdot \underset{e}{A_g} \cdot \overline{[T\underset{e}{[y]}]} = g(\varphi x, \varphi y)$, где $\varphi\colon L \to L$ - невырожденный линейный оператор, определенный в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицей T. Поэтому $f \sim g$.

2. Доказательство этого утверждения основано на том, что линейный оператор φ является унитарным (ортогональным) тогда и только тогда, когда в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ его матрица T - унитарная (ортогональная). Технически доказательство полностью повторяет доказательство первого утверждения леммы.

Следствие 1.

$f \sim g \Leftrightarrow$ в L существуют базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$ такие, что $\underset{e}{A_f} = \underset{e'}{A_g}$.

$f \approx g \Leftrightarrow$ в L - существуют ортонормированные базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$ такие, что $\underset{e}{A_f} = \underset{e'}{A_g}$.

Доказательство. Определим в доказательстве прямых утверждений леммы базис $e' = \varphi e$. Тогда, согласно формуле (4), $A_{f\,e} = T^t A_{g\,e} \overline{T} = A_{g\,e'}$, а при ортонормированном базисе e и унитарном (ортогональном) операторе φ базис $e' = \varphi e$ также будет ортонормированным.

Для доказательства обратных утверждений следствия определим T как матрицу перехода от базиса e к базису e'. Для ортонормированных базисов e и e' матрица T будет унитарной (ортогональной). По формуле (4) $A_{f\,e} = A_{g\,e'} = T^t A_{g\,e} \overline{T}$, так что, согласно лемме, $f \sim g$ или $f \approx g$.

Следствие 2. В ортонормированных базисах пространства L матрицы унитарно эквивалентных билинейных или квадратичных форм f и g унитарно эквивалентны.

Доказательство. Матрица T называется унитарной (ортогональной), если $T^{1} = \overline{T}^{\,t}$ (соответственно $T^{1} = T^{t}$) . Для унитарной матрицы T матрица $\overline{T} = U$ также является унитарной: $T^{1} = \overline{T}^{\,t} \Rightarrow \overline{T}^{\,t} \cdot T = E \Rightarrow T^t \cdot \overline{T} = \overline{E} = E \Rightarrow (\overline{T})^{-1} = T^t \Rightarrow U^{-1} = \overline{U}^{\,t}$. По лемме в ортонормированном базисе e матрицы унитарно эквивалентных форм f и g связаны унитарной (ортогональной) матрицей T: $A_{f\,e} = T^t \cdot A_{g\,e} \cdot \overline{T} = \overline{U}^{\,t} \cdot A_{g\,e} \cdot U = U^{-1} \cdot A_{g\,e} \cdot U$ при $U = \overline{T}$. Поэтому матрицы форм f и g в базисе e унитарно эквивалентны. При другом ортонормированном базисе e' матрицы $A_{g\,e}$ и $A_{g\,e'}$ унитарно эквивалентны: по формуле (5) $A_{g\,e'} = \overline{T}^{\,t}_{e\to\bar{e}'} \cdot A_{g\,e} \cdot T_{e\to\bar{e}'} = T^{-1}_{e\to\bar{e}'} \cdot A_{g\,e} \cdot T_{e\to\bar{e}'}$, и матрица $T_{e\to\bar{e}'}$ перехода от ортонормированного базиса e к ортонормированному базису $\bar{e}'$ является унитарной (ортогональной) матрицей. Следовательно, в любых ортонормированных базисах e и e' матрицы $\underset{e}{A_f}$ и $\underset{e'}{A_g}$ унитарно эквивалентных форм f и g унитарно эквивалентны.

Следствие 3. $f \sim g \quad \Rightarrow rg\, f = rg\, g,$ то есть эквивалентные формы имеют равные ранги.

Действительно, по следствию 1 $rg\, f = rg\, \underset{e}{A_f} = rg\, \underset{e'}{A_g} = rg\, g.$

Введенные в определении 6 отношения эквивалентности $\sim$ и $\approx$ разбивают множество билинейных (квадратичных) форм, определенных на пространстве L над $\boldsymbol{P}$, на непересекающиеся классы эквивалентных форм. Возникает важный вопрос: какой наиболее простой вид может иметь представитель каждого класса эквивалентных форм? Другими словами, насколько выбором базиса L можно упростить общие виды (3) и (8) билинейной и квадратичной форм или, что эквивалентно, упростить матрицу этих форм? Этот вопрос решается для билинейных и квадратичных форм, изучаемых в следующем разделе.

2.ЭРМИТОВЫ И СИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

2.1. Определения и основные свойства эрмитовых и симметричных форм.

Определение 7. Билинейная форма F на пространстве L над полем $\boldsymbol{C}$ (над $\boldsymbol{R}$) называется эрмитовой (симметричной), если $\forall x,y \in L \quad F(x,y) = \overline{F(y,x)} \qquad (F(x,y) = F(y,x)).$

Квадратичная форма f называется эрмитовой (симметричной), если соответствующая ей билинейная форма F является эрмитовой (симметричной).

Примером эрмитовой (симметричной) билинейной формы служит скалярное произведение на унитарном (евклидовом) пространстве.

Свойства эрмитовых и квадратичных форм.

Пусть F - билинейная, а f - соответствующая ей квадратичная форма на пространстве $L = L^n$ над $\boldsymbol{P}$.

1. Матрица эрмитовой (симметричной) формы в любом базисе ***e*** пространства L является эрмитовой (симметричной) матрицей.

Действительно, $a_{ij} = F(e_i,e_j) = \overline{F(e_j, e_i)} = \overline{a}_{ji} \quad \forall i, j = 1,\ldots,n.$

Поэтому $\underset{e}{A_F} = \underset{e}{\overline{A}_F^t}$ - эрмитова матрица (при ***P=C***) и $\underset{e}{A_F} = \underset{e}{A_F^t}$ - симметрическая матрица (при ***P=R***).

2. Если в некотором базисе ***e*** пространства L матрица билинейной или квадратичной формы является эрмитовой (симметричной), то форма также является эрмитовой (симметричной).

Доказательство. Если $\underset{e}{A_F} = \underset{e}{\overline{A}_F^t}$, то $\forall i, j=1,\ldots,n \quad a_{ij} = \overline{a}_{ji}$.

Тогда $\forall x,y \in L \qquad F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j = \overline{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} y_j \overline{x}_i} = \overline{F(y,x)}.$

Следствие из свойств 1-2. Форма F или f эрмитова (симметричная) $\Leftrightarrow$ в любом базисе пространства L матрица формы F или f эрмитова (симметричная).

3. Матрицу любой квадратичной формы f на пространстве L над ***R*** можно преобразовать в симметричную матрицу. Поэтому любую квадратичную форму f на L над ***R*** можно считать симметричной, и ей будет соответствовать единственная симметричная билинейная форма F такая, что $f(x) = F(x,x)$ $\forall x \in L$ над ***R***.

Доказательство. Пусть ***e*** - произвольный базис пространства L над ***R***, и $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ - матрица квадратичной формы f в базисе ***e***. Тогда

$$\forall x \in L \qquad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{10}$$

Пусть матрица $C = \frac{1}{2}(A + A^t)$. Очевидно, что $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ - симметричная матрица: $c_{ij} = c_{ji} \quad \forall i, \; j=1,\ldots,n$. Далее, $\forall i,j=1,\ldots,n \qquad a_{ij}\, x_i\, x_j + a_{ji}\, x_j\, x_i = 2c_{ij} x_i\, x_j = c_{ij} x_i\, x_j + c_{ji} x_j\, x_i$. Поэтому из формулы (10) получаем, что $\forall x \in L$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j = [x]_e^t C[x]_e. \qquad (11)$$

Симметричная матрица C определяет на пространстве L над $\boldsymbol{R}$ симметричную билинейную форму $F(x,y)=[x]_e^t C[y]_e$. Из формулы (11) следует, что $f(x)=F(x,x)\ \ \forall x \in L,$ то есть квадратичная форма f определена симметричной билинейной формой F и, следовательно, является симметричной. Единственность восстановления симметричной билинейной формы по определенной ею квадратичной форме была доказана в п.1.4.

4. Билинейная форма F на пространстве L над $\boldsymbol{C}$ является эрмитовой тогда и только тогда, когда соответствующая F квадратичная форма f принимает только действительные значения $(\Leftrightarrow \forall x \in L$ над $\boldsymbol{C}$ $f(x) = F(x,x) \in \boldsymbol{R})$.

Доказательство. Если F - эрмитова форма, то $\forall x,y \in L$ $F(x,y)=\overline{F(y,x)}$, поэтому $\forall x \in L \quad f(x)=F(x,x)=\overline{F(x,x)}=\overline{f(x)}$, так что $f(x) \in \boldsymbol{R} \quad \forall x \in L$.

Пусть $\forall x \in L \quad f(x) = F(x,x) \in \boldsymbol{R}$. Покажем, что тогда $\forall x,y \in L \quad F(x,y)=\overline{F(y,x)}$, то есть F - эрмитова форма. Используем формулу (6) восстановления на пространстве L над $\boldsymbol{C}$ билинейной формы F по ее квадратичной форме f: $\forall x,y \in L$

$$F(x,y) = \frac{1}{4}(f(x+y)+if(x+iy)-f(x-y)-if(x-iy)). \qquad (12)$$

$\forall x,y \in L \quad f(x+y)=f(y+x) \in \boldsymbol{R}$,

$f(x-y)=F(x-y,x-y)=(-1)^2F(y-x,y-x)=f(y-x) \in \boldsymbol{R}$,

$f(x+iy)=i\cdot\bar{i}\cdot F(x+iy,x+iy)=F(-y+ix,-y+ix)=$

$=(-1)^2F(y-ix,y-ix)=f(y-ix) \in \boldsymbol{R}$,

$f(x-iy)=f(y+ix) \in \boldsymbol{R}$ - вывод аналогичен выводу предыдущей формулы.

Подставим последние четыре формулы в формулу (12):

$\forall x,y \in L \quad F(x,y)=\dfrac{1}{4}(f(y+x)+i\,f(y-ix)-f(y-x)-i\,f(y+ix))=$

$=\overline{F(y,x)}$. Следовательно, F - эрмитова форма.

Следствие. Квадратичная форма f на L над $\boldsymbol{C}$ эрмитова тогда и только тогда, когда f принимает только действительные значения ($\Leftrightarrow \forall x \in L$ над $\boldsymbol{C}$ $f(x) \in \boldsymbol{R}$).

2.2. Канонические виды эрмитовых и симметричных форм.

Определение 8. Пусть F и f - эрмитовы (симметричные) билинейная и квадратичная формы на $L= L^n$ над $\boldsymbol{C}$ (соответственно, над $\boldsymbol{R}$), $\boldsymbol{e}$ - некоторый базис в L, и $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ - разложения по базису $\boldsymbol{e}$ произвольных векторов из L.

Эрмитова (симметричная) билинейная форма F имеет в базисе $\boldsymbol{e}$ канонический или диагональный вид, если $\forall x,y \in L$

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \bar{y}_i \quad \left(F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i\right), \text{ где все } \alpha_i \in \boldsymbol{R}. \tag{13}$$

Эрмитова (симметричная) квадратичная форма f имеет в базисе $\boldsymbol{e}$ канонический или диагональный вид, если $\forall x \in L$

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^2 \quad \left(f(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right), \text{ где все } \alpha_i \in \boldsymbol{R}. \tag{14}$$

Согласно данному определению эрмитова (симметричная) билинейная или квадратичная форма имеет в некотором базисе канонический вид тогда и только тогда, когда в этом базисе матрица формы является диагональной, причем ее диагональные элементы - действительные числа (сравните канонические виды (13),(14) с общими видами (2), (8) билинейных и квадратичных форм).

Примером канонического вида билинейной формы служит вид скалярного произведения в ортогональном базисе конечномерного унитарного или евклидова пространства L, когда матрица Грама скалярного произведения является диагональной с действительными элементами.

Теорема о приведении эрмитовых (симметричных) билинейных и квадратичных форм к каноническому виду унитарным (ортогональным) линейным оператором.

Пусть F - эрмитова (симметричная) билинейная форма и f – порожденная формой F квадратичная форма на конечномерном унитарном (евклидовом) пространстве $L = L^n$. Тогда в L существует ортонормированный базис, в котором формы F и f имеют канонический вид.

Доказательство проведем в случае унитарного пространства L. Пусть $\boldsymbol{e}$ - произвольный ортонормированный базис в L, A - матрица форм F и f в базисе $\boldsymbol{e}$. Матрица A является эрмитовой, так как формы F и f - эрмитовы.

Определим линейный оператор $\varphi: L \to L$ формулой: $\forall x \in L$ $[\varphi x]_e = A[x]_e$. φ имеет в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ эрмитову матрицу A, поэтому φ - самосопряженный оператор. Для самосопряженного оператора φ существует канонический базис $\boldsymbol{e}'$ пространства L, такой, что $\boldsymbol{e}'$ - ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора φ с собственными значениями $\alpha_{1,\dots,}\alpha_n \in \boldsymbol{R}$. Обозначим через U матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$. U является унитарной матрицей $(U^{-1} = \overline{U}^t)$, так как базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ - ортонормированные. В каноническом базисе $\boldsymbol{e}'$ матрица оператора φ равна $diag(\alpha_{1,\dots,}\alpha_n)$ - диагональной матрице с диагональными элементами $\alpha_{1,\dots,}\alpha_n \in \boldsymbol{R}$. Поэтому $U^{-1}AU = diag(\alpha_{1,\dots,}\alpha_n)$. Но U - унитарная матрица $(U^{-1} = \overline{U}^t)$, так что
$\overline{U}^t AU = diag(\alpha_{1,\dots,}\alpha_n)$.

Согласно формуле (5) левая часть $\overline{U}^t AU$ последнего равенства является матрицей эрмитовых форм F и f в ортонормированном базисе $\overline{\boldsymbol{e}}'$ - базисе пространства L, комплексно сопряженном к каноническому базису $\boldsymbol{e}'$ самосопряженного оператора φ. Поэтому в базисе $\overline{\boldsymbol{e}}'$ матрица эрмитовых форм F и f равна $diag(\alpha_{1,\dots,}\alpha_n)$ - диагональной матрице с действительными элементами. Следовательно, в L существует ортонормированный базис $\overline{\boldsymbol{e}}'$, в котором эрмитовы формы F и f имеют канонический вид.

Следствие 1. Эрмитовы или симметричные формы F и f унитарно эквивалентны эрмитовым или симметричным формам, имеющим канонический вид.

Действительно, матрица $\overline{U}$, комплексно сопряженная к введенной в доказательстве теоремы унитарной матрице U, является унитарной ($U^{1}= \overline{U}^{t} \Rightarrow \overline{U}^{t} \cdot U =E \Rightarrow U^{t} \cdot \overline{U} = \overline{E} =E \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{U}^{-1} = U^{t}$) и определяет в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ унитарный оператор $u\colon L \to L$ формулой $[ux]_e = \overline{U}[x]_e \quad \forall x \in L.$

Этот унитарный оператор u приводит эрмитовы или симметричные формы F и f к каноническому виду: $\forall x,y \in L$
$F(ux,uy)=[ux]_e^t \cdot A \cdot \overline{[uy]_e} = [\overline{U}[x]_e]^t \cdot A \cdot [\overline{\overline{U}[y]_e}] = [x]_e^t \cdot \overline{U}^{t} AU \cdot [\overline{y}]_e =$

$=[x]_e^t \cdot diag(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \cdot [\overline{y}]_e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \overline{y}_i$, а эрмитовость или симметричность формы с эрмитовой матрицей $diag(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (при $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \boldsymbol{R}$) следует из свойства 2 п.2.1. Этим свойством унитарного оператора u объясняется название доказанной теоремы.

Следствие 2. Канонические виды унитарно эквивалентных эрмитовых или симметричных форм, полученные приведением этих форм к каноническому виду унитарным (ортогональным) оператором, совпадают с точностью до перенумерации их коэффициентов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Действительно, при приведении этих форм к каноническому виду унитарным оператором коэффициентами канонических видов являются собственные значения унитарно эквивалентных матриц этих форм (см. следствие 2 из леммы 2, п.1.5). Но эквивалентные матрицы имеют одинаковые собственные значения. Следовательно, полученные с помощью унитарного оператора канонические виды рассматриваемых форм могут отличаться только нумерацией их коэффициентов - совпадающих собственных значений эквивалентных матриц этих форм.

Фактически, в следствии 2 установлена единственность канонического вида эрмитовой (симметричной) билинейной или квадратичной формы при ее приведении к каноническому виду унитарным оператором: выбор в доказательстве теоремы исходного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ не влияет на канонический вид формы, так как матрицы этой формы в различных ортонормированных базисах эквивалентны и, следовательно, имеют одинаковые собственные значения.

Следствие 3. Две эрмитовы или симметричные формы унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы даже в различных ортонормированных базисах пространства L имеют равные характеристические многочлены.

Доказательство. По следствию 2 из леммы 2 матрицы унитарно эквивалентных форм в ортонормированных базисах унитарно эквивалентны и, следовательно, их характеристические многочлены равны. Обратно, из равенства характеристических многочленов матриц двух эрмитовых или симметричных форм, взятых в ортонормированных базисах, следует совпадение собственных значений этих матриц и совпадение с точностью до нумерации коэффициентов канонических видов этих форм. Поэтому существует унитарный оператор, который переводит ортонормированный канонический базис первой формы в ортонормированный канонический базис второй формы и согласует нумерацию совпадающих коэффициентов канонических видов этих форм. Таким образом, рассматриваемые формы унитарно эквивалентны одной и той же форме, имеющей канонический вид и, следовательно, унитарно эквивалентны между собой.

Следствие 4. Формулы замены переменных в эрмитовой или симметричной билинейной форме F для перехода к каноническому виду формы F унитарным оператором имеют вид:

$$\underset{e}{[x]} = \overline{U}\underset{\bar{e}'}{[x]},\ \underset{e}{[y]} = \overline{U}\underset{\bar{e}'}{[y]} \quad \text{или} \quad \underset{\bar{e}'}{[x]} = U^t\underset{e}{[x]},\ \underset{\bar{e}'}{[y]} = U^t\underset{e}{[y]}, \qquad (15)$$

так как для унитарной матрицы $\overline{U}$ имеем: $(\overline{U})^{-1} = U^t$.

2.3. Нормальный вид эрмитовой и симметричной квадратичных форм. Закон инерции.

Пусть в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $L= L^n$ над полем $\boldsymbol{P}$ эрмитова или симметричная квадратичная форма f имеет канонический вид: $\forall x \in L,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^2$ или при $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$ $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$, где все $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$.

В дальнейшем изложении для общности и краткости обозначений канонический вид как эрмитовой, так и симметричной квадратичной формы f будем записывать в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i|^2, \quad \text{где все } \alpha_i \in \boldsymbol{R}, \tag{16}$$

ведь при $x_i \in \boldsymbol{R}$ $\quad x_i^{\ 2} = |\ x_i\ |^2$.

Если $rgf = r < n,$ то ранг матрицы $diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ формы f в базисе $\boldsymbol{e}$ также равен $r < n$. Поэтому среди коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ канонического вида (16) формы f существует ровно r ненулевых, а остальные $n - r$ коэффициентов равны 0. Учитывая, что при рассмотрении эрмитовой или симметричной квадратичной формы f только в ортонормированных базисах пространства L и приведении ее к каноническому виду унитарным оператором канонический вид формы f определен с точностью до перенумерации его коэффициентов - собственных чисел матрицы f, взятой в любом ортонормированном базисе пространства L (см. следствие 2 п.2.2), можно считать, что в формуле (16) $\alpha_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, r$ и $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0.$ Поэтому при $rgf = r \leq n$ канонический вид эрмитовой или симметричной квадратичной формы f записывается в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i |x_i|^2, \quad \text{где все } \alpha_i \in \boldsymbol{R} \text{ и } r = rgf. \tag{17}$$

Перейдем от канонического вида (17) к нормальному виду эрмитовой или симметричной формы f. Пусть в каноническом виде (17) $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0,\ \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_r < 0,$ где $0 \leq k \leq r.$ После невырожденного преобразования переменных в форме f $x_i' = \sqrt{|\alpha_i|}\, x_i$ при $i = 1,\dots,r,$ $x'_{r+1} = x_{r+1},\dots, x'_n = x_n,$ которое выполняется невырожденным линейным оператором $\psi\colon L \to L,$ $\psi e_i = \left(\sqrt{|\alpha_i|}\right)^{-1} e_i$ при $i = 1,\dots,r,$ $\psi e_i = e_i$ при $i = r+1,\dots,n,$ квадратичная форма f имеет в базисе $\boldsymbol{e}'$: $e'_1 = \psi e_1,\dots, e'_n = \psi e_n$ нормальный вид:

$$f(x) = |x'_1|^2 + \dots + |x'_k|^2 - |x'_{k+1}|^2 - \dots - |x'_r|^2 \quad (18)$$

- для эрмитовой формы, или

$$f(x) = x'^2_1 + \dots + x'^2_k - x'^2_{k+1} - \dots - x'^2_r \quad (19)$$

- для симметричной формы.

Определение 9. Эрмитова или симметричная квадратичная форма f на линейном пространстве $L = L^n$ имеет в базисе $\boldsymbol{e}'$ нормальный вид (18) или (19), если ее вид в базисе $\boldsymbol{e}'$ - диагональный (или канонический - см. определение 8) с коэффициентами, равными ± 1.

Заметим, что использованный для перехода от канонического вида (17) квадратичной формы f к ее нормальному виду (18) или (19) линейный оператор ψ в общем случае, когда среди коэффициентов $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ существуют коэффициенты, не равные по модулю 1, не является унитарным, так как ψ меняет длины некоторых базисных векторов, а полученный базис $\boldsymbol{e}'$ - ортогональный, но не ортонормированный. Поэтому, в общем случае, эрмитова или симметричная квадратичная форма эквивалентна, но не унитарно эквивалентна квадратичной форме, имеющей нормальный вид. Таким образом, доказана

Теорема. Эрмитова или симметричная квадратичная форма эквивалентна квадратичной форме, имеющей нормальный вид.

Замечание. В дальнейшем изложении нормальный вид как эрмитовой, так и симметричной квадратичной формы f в базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L будем записывать формулой

$$\forall x \in L,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \ f(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_r|^2, \quad (20)$$

где $r = rgf \le n,\ 0 \le k \le r.$

Определение 10. Пусть (20) - нормальный вид эрмитовой или симметричной квадратичной формы f. Тогда:

$I^+ = k$ (число положительных коэффициентов в нормальном виде f) называется положительным индексом инерции квадратичной формы f;

$I^- = r - k$ (число отрицательных коэффициентов в нормальном виде f) называется отрицательным индексом инерции квадратичной формы f;

$s = I^+ - I^-$ называется сигнатурой квадратичной формы f.

Очевидно, что $I^+ + I^- = r = rg\,f$.

Вопрос о единственности нормального вида квадратичной формы f и, по существу, вопрос о корректности определения 10 решается в следующей теореме.

Теорема (закон инерции для эрмитовых и симметричных квадратичных форм). Числа $I^+, I^-, r = rg\,f, s$ являются инвариантами эрмитовой или симметричной квадратичной формы f, то есть не зависят от базиса пространства $L = L^n$, в котором f имеет нормальный вид, и, следовательно, от метода приведения формы f к нормальному виду.

Доказательство. Инвариантность ранга $r = rg\,f$ любой квадратичной формы f установлена в следствии 3 п.1.5: эквивалентные формы имеют равные ранги. Установим от противного инвариантность индексов инерции I^+ и I^- квадратичной формы f. Пусть в пространстве L существуют базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$, в которых f имеет разные нормальные виды:

в базисе $\boldsymbol{e}$ $\quad f(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_r|^2, \qquad (21)$

в базисе $\boldsymbol{e'}$ $\quad f(x) = |x'_1|^2 + \ldots + |x'_l|^2 - |x'_{l+1}|^2 - \ldots - |x'_r|^2 \qquad (22)$

и $l < k$.

Определим в L подпространства $L_1 = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ и $L_2 = \langle e'_{l+1}, \ldots, e'_n \rangle$. $\quad dim(L_1 + L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 \cap L_2)$, откуда $dim(L_1 \cap L_2) = dimL_1 + dimL_2 - dim(L_1 + L_2) =$

$= k + (n - l) - dim(L_1 + L_2) \geq k + (n - l) - n = k - l > 0,$ так как $dim(L_1 + L_2) \leq n$ и, по предположению $l < k$. Следовательно, $dim(L_1 \cap L_2) > 0,$ и, значит, существует ненулевой вектор $y \in L_1 \cap L_2$. Из $y \in L_1$ получаем, что $y = y_1e_1 + \ldots + y_ke_k$ и не все $y_1, \ldots, y_k$ равны $0,$ поэтому, согласно (21), $f(y) > 0$. Но $y \in L_2$, так что $y = y'_{l+1}e'_{l+1} + \ldots + y'_ne'_n$ и, согласно (22), $f(y) \leq 0$. Полученное противоречие возникло вследствие сделанного предположения, что $l < k$. Значит, $l = k$, что влечет за собой совпадение нормальных видов (21) и (22) квадратичной формы f и независимость индексов инерции формы f от выбора базиса в L. Инвариантность сигнатуры $s = I^+ - I^-$ формы f очевидна.

Следствие. Эрмитова или симметричная квадратичная форма имеет 4 числовых инварианта $r, I^+, I^-, s,$ из которых любые два взаимно независимы, а остальные инварианты выражаются через них. Эти 4 инварианта составляют полную систему инвариантов эрмитовой или симметричной квадратичной формы, так как определяют такую квадратичную форму с точностью до эквивалентности (см.п.1.5).

Действительно, пусть квадратичные формы f и g на пространстве L эквивалентны и $\forall x \in L \;\; f(x) = g(\varphi x),$ где $\varphi: L \to L$ - невырожденный линейный оператор. Если f имеет в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ нормальный вид

$$f(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_r|^2, \;\; \forall x \in L, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad (23)$$

то g будет иметь такой же нормальный вид в базисе $\boldsymbol{e}' = \varphi \boldsymbol{e}$.

В самом деле, $\forall x \in L, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} x'_i \varphi e_i, \;\; g(x) = f(\varphi^{-1} x) =$

$$= f(\varphi^{-1}(\sum_{i=1}^{n} x'_i \varphi e_i)) = f(\sum_{i=1}^{n} x'_i e_i) = |x'_1|^2 + \ldots + |x'_k|^2 - |x'_{k+1}|^2 - \ldots - |x'_r|^2$$

(см.(23), а также следствие 1 к лемме 2, п.1.5).

Очевидно, что полученное совпадение нормальных видов эквивалентных квадратичных форм f и g приводит к равенству их соответствующих числовых инвариантов.

Обратно, если квадратичные формы f и g на L имеют одинаковые числовые инварианты, то существуют базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, в которых f и g имеют одинаковые нормальные виды:
$f(x)= |x_1|^2 +\ldots+ |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 -\ldots- |x_r|^2$ - в базисе $\boldsymbol{e}$,
$g(x) = |x'_1|^2 +\ldots+ |x'_k|^2 - |x'_{k+1}|^2 -\ldots-|x'_r|^2$ - в базисе $\boldsymbol{e}'$.
Определим невырожденный линейный оператор $\varphi: L\to L$ формулой $\forall i =1,\ldots,n \ \ \varphi e_i = e'_i$. Тогда $\forall x\in L,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \quad g(\varphi x) = g(\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i))= g(\sum_{i=1}^{n} x_i e'_i)=|x_1|^2 +\ldots+ |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 -\ldots- |x_r|^2 = f(x),$ так что квадратичные формы f и g эквивалентны.

Замечание. Если квадратичная форма f, заданная на линейном пространстве L над $\boldsymbol{C}$, не является эрмитовой, то она принимает комплексные значения (см.п.2.1, следствие из свойства 4). У такой формы на конечномерном пространстве может не существовать диагонального вида или в ее диагональном виде должны присутствовать комплексные коэффициенты. Поэтому для неэрмитовых квадратичных форм не определены индексы инерции и сигнатура, а их единственным числовым инвариантом является ранг.

2.4. Метод Лагранжа приведения симметричной квадратичной формы к диагональному виду.

Пусть f - квадратичная форма на линейном пространстве $L=L^n$, над $\boldsymbol{R}$. В п.2.1 (свойство 3) было показано, что любую квадратичную форму f на действительном линейном пространстве можно считать симметричной, так что без ограничения общности полагаем, что f - симметричная квадратичная форма. В произвольном базисе $\boldsymbol{e}$

$$\forall x\in L^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \ f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad (24)$$

и матрица формы f симметрична: $\forall i,j = 1,\ldots,n \quad a_{ij} = a_{ji}$. Приведем в правой части выражения (24) подобные члены

($a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = 2a_{ij}x_ix_j$ при $i < j$):

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\
&+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\
&\qquad + a_{33}x_3^2 + \ldots + 2a_{3n}x_3x_n + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + a_{nn}x_n^2.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Полученный вид (25) квадратичной формы f показывает, что в любом базисе $\boldsymbol{e}$ форма f представляет собой однородный многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ второй степени от n переменных $x_1,\ldots,x_n$ - координат вектора x в базисе $\boldsymbol{e}$. Очевидно, что любой однородный многочлен второй степени от переменных $x_1,\ldots,x_n$ можно представить в виде (25), а затем в виде (24). Поэтому часто квадратичную форму на действительном линейном пространстве определяют как однородный многочлен второй степени от n переменных, принимающих только действительные значения.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы f к диагональному виду использует представление (25) формы f как однородного многочлена $f(x_1,\ldots,x_n)$ второй степени. Основу метода составляет справедливая в любом коммутативном кольце формула

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n)^2 = z_1^2 &+ 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + \ldots + 2z_1z_n + \\
&+ z_2^2 + 2z_2z_3 + \ldots + 2z_2z_n + \\
&\qquad + z_3^2 + \ldots + 2z_3z_n + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + z_n^2,
\end{aligned} \tag{26}
$$

которая последовательно используется для выделения полных квадратов в правой части представления (25) квадратичной формы f.

Первый шаг. Пусть $a_{11} \neq 0$. Определим вспомогательную квадратичную форму

$g_1(x_1,\ldots,x_n) = (a_{11})^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$,

которая, согласно (26), содержит все слагаемые с x_1 квадратичной формы $f(x_1,\ldots,x_n)$ представленной в (25). Поэтому квадратичная форма

$$f_1(x_2,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) - g_1(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} x_i x_j$$

не содержит x_1. Считаем, что f_1 представлена в симметричном виде : $\forall i,j = 2,\dots,n \quad a'_{ij} = a'_{ji}$. Очевидно, что

$$f(x_1,\dots,x_n) = g_1(x_1,\dots,x_n) + f_1(x_2,\dots,x_n).$$

Второй шаг. Пусть $a'_{22} \neq 0$. Определим вспомогательную квадратичную форму

$$g_2(x_2,\dots,x_n) = (a'_{22})^{-1}(a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n)^2,$$

которая содержит все слагаемые с x_2 квадратичной формы $f_1(x_2,\dots,x_n)$.

Поэтому квадратичная форма

$$f_2(x_3,\dots,x_n) = f_1(x_2,\dots,x_n) - g_2(x_2,\dots,x_n) = \sum_{i,j=3}^{n} a''_{ij} x_i x_j$$

не содержит x_1 и x_2. Считаем, что f_2 представлена в симметричном виде: $\forall i,j = 3,\dots,n \quad a''_{ij} = a''_{ji}$. Очевидно, что

$$f(x_1,\dots,x_n) = g_1(x_1,\dots,x_n) + g_2(x_2,\dots,x_n) + f_2(x_3,\dots,x_n).$$

За $r = rg\, f$ шагов получим

$$f(x_1,\dots,x_n) = g_1(x_1,\dots,x_n) + g_2(x_2,\dots,x_n) + \dots + g_r(x_r,\dots,x_n) =$$
$$= (a_{11})^{-1}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + (a'_{22})^{-1}(a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n)^2 + \dots +$$
$$+ (a^{(r-1)}_{rr})^{-1}(a^{(r-1)}_{rr}x_r + \dots + a^{(r-1)}_{rn}x_n)^2.$$

При переходе от $x_1,\dots,x_n$ к новым координатам $x'_1,\dots,x'_n$ по формулам

$$\begin{array}{ll}
x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\
x'_2 = \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n \\
x'_3 = \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n & \quad (27) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x'_r = \qquad\qquad\quad a^{(r-1)}_{rr}x_r + \dots + a^{(r-1)}_{rn}x_n \\
x'_{r+1} = \qquad\qquad\qquad x_{r+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x'_n = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n
\end{array}$$

квадратичная форма f приобретает диагональный вид

$$f(x'_1,\dots,x'_n) = (a_{11})^{-1}(x'_1)^2 + (a'_{22})^{-1}(x'_2)^2 + \dots + (a^{(r-1)}_{rr})^{-1}(x'_r)^2. \quad (28)$$

Замена переменных (27) является невырожденной, так как, по предположению, $a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0, \ldots,\ a^{(r-1)}_{rr} \neq 0,$ и ей соответствует невырожденная матрица

$$V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ & a'_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & a^{(r-1)}_{rr} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a^{(r-1)}_{rn} \\ & & & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

для которой $[x'] = V[x],\ [x] = V^{1}[x']$.

Матрицу $T = V^{1}$ можно интерпретировать как матрицу перехода от исходного базиса $\boldsymbol{e}$, в котором квадратичная форма f имела общий вид (24), к некоторому базису $\boldsymbol{e}'$, в котором квадратичная форма f имеет диагональный вид (28). Так как ранг матрицы квадратичной формы не меняется при смене базиса линейного пространства и равен числу ненулевых коэффициентов диагонального вида квадратичной формы, приведение квадратичной формы (24) ранга r к диагональному виду (28) методом Лагранжа выполняется ровно за r шагов. Заметим, что в общем случае (например, уже при $a_{11} \neq 1$) матрица T не будет ортогональной, так что переход к диагональному виду квадратичной формы методом Лагранжа производится, как правило, не унитарным линейным оператором. Поэтому собственные значения матриц квадратичной формы f в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ могут не совпадать, а базис $\boldsymbol{e}'$ обычно не является ортонормированным и даже ортогональным базисом.

В данном изложении метода Лагранжа предполагалось, что $a_{11} \neq 0,\ a'_{22} \neq 0, \ldots,\ a^{(r-1)}_{rr} \neq 0.$ Если на некотором шаге метода Лагранжа, например, на первом шаге, $a_{11} = 0,$ но существует $a_{kk} \neq 0$, то при перенумерации переменных $x'_1 = x_k,\ x'_k = x_1,$

$x'_i = x_i \quad \forall i \neq 1,k$ коэффициент при $(x'_1)^2$ в квадратичной форме f становится равным $a_{kk} \neq 0$. Если же $a_{ii} = 0$ при любом $i = 1,\ldots,n$, но, допустим, $a_{12} \neq 0$, то выполним следующее невырожденное преобразование переменных: $x_1 = x'_1 + x'_2$, $x_2 = x'_1 - x'_2$, $x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n$. При переходе к новым переменным в квадратичной форме f появляются их квадраты с ненулевыми коэффициентами ($a_{12} \neq 0$):

$f(x) = 2a_{12}x_1x_2 + \ldots = 2a_{12}(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) + \ldots =$
$= 2a_{12}(x'_1)^2 - 2a_{12}(x'_2)^2 + \ldots$, что позволяет использовать для приведения f к диагональному виду описанный выше метод Лагранжа.

2.5. Классификация эрмитовых и симметричных квадратичных форм по знаку.

В п. 2.1 было доказано, что квадратичная форма f на пространстве L над $\boldsymbol{C}$ принимает только действительные значения тогда и только тогда, когда f - эрмитова форма. Поэтому только для эрмитовых и симметричных квадратичных форм существует следующая классификация.

Определение 11. Эрмитова или симметричная квадратичная форма f на L называется:

положительно определенной, если $\forall x \in L \quad f(x) \geq 0$, и $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_L$;

отрицательно определенной, если $\forall x \in L \quad f(x) \leq 0$, и $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_L$;

неотрицательной, если $\forall x \in L \quad f(x) \geq 0$;

неположительной, если $\forall x \in L \quad f(x) \leq 0$;

неопределенной, если $\exists\, x,y \in L$: $f(x) > 0, f(y) < 0$.

Примером положительно определенной квадратичной формы f является скалярный квадрат вектора унитарного или евклидова пространства: $f(x) = (x,x)$.

Следующая теорема устанавливает принадлежность квадратичной формы к одному из введенных в *определении 11* классов по ее числовым инвариантам.

Теорема. Эрмитова или симметричная квадратичная форма f с числовыми инвариантами $r = rg\, f$, I^+, I^- является на пространстве $L=L^n$:

1. положительно определенной $\Leftrightarrow r = I^+ = n;$
2. отрицательно определенной $\Leftrightarrow r = I^- = n;$
3. неотрицательной $\Leftrightarrow r = I^+ < n;$
4. неположительной $\Leftrightarrow r = I^- < n;$
5. неопределенной $\Leftrightarrow I^+ > 0, I^- > 0.$

Доказательство. Достаточно доказать утверждения 1,3,5, так как квадратичная форма f является положительно определенной (неотрицательной) тогда и только тогда, когда $(-f)$ является отрицательно определенной (неположительной) формой, где, по определению, $(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in L.$

Пусть в базисе $\boldsymbol{e}$ квадратичная форма f имеет нормальный вид $f(x)= |x_1|^2 +\ldots+ |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 -\ldots- |x_r|^2$, $0\le k \le r,$ $0 < r \le n,$ $I^+= k, I^- = r - k.$ При $I^+> 0, I^- > 0 \quad f(e_1) > 0,$ $f(e_{k+1}) < 0,$ так что f - неопределенная.

Обратно, если f - неопределенная, но $I^-= 0,$ (или $I^+= 0$), то $\forall x \in L \quad f(x) \ge 0 \quad (f(x) \le 0)$ - противоречие.

Из доказанного необходимого и достаточного условия неопределенности квадратичной формы следует, что f - неотрицательная $\Leftrightarrow I^-= 0 \Leftrightarrow I^+= r.$

Если $I^+= r = n,$ то $\forall x \in L \quad f(x) \ge 0$ и $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_L$, так что f является положительно определенной.

Обратно, если f - положительно определенная, но $r < n$, то $f(e_n) = 0$ - противоречие.

Следовательно, f положительно определенная форма $\Leftrightarrow$ $I^+= r = n.$

2.6. Положительно определенные квадратичные формы.

Применение доказанной в п.2.5 теоремы к определению типа квадратичной формы требует нахождения числовых инвариантов этой формы, что является для эрмитовых форм достаточно сложной задачей (для симметричных квадратичных форм эта задача алгоритмически разрешима с помощью метода Лагранжа). Поэтому цель дальнейшего исследования состоит в нахождении практически более удобных способов классификации квадратичных форм.

Пусть f - положительно определенная квадратичная форма на $L=L^n$, F - порождающая форму f билинейная форма и $A = (a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}$ - матрица форм F и f в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L. Рассмотрим свойства положительно определенной формы f и ее матрицы A.

1. $\forall i =1,\ldots,n \quad a_{ii} = F(e_i, e_i) = f(e_i) > 0$. Следовательно, элементы главной диагонали матрицы положительно определенной квадратичной формы в любом базисе - положительные числа.

2. $detA > 0$. Действительно, матрица канонического вида формы f равна $diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, и, так как f положительно определенная форма, то $I^+ = n$, откуда $\alpha_1 > 0,\ldots,\alpha_n > 0$. Поэтому $det\ diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1\cdot\ldots\cdot\alpha_n > 0$, и по следствию 2 п.1.3, $detA > 0$.

3. Пусть L_1 - произвольное подпространство в L. Тогда форма f будет положительно определенной квадратичной формой на L_1. В самом деле, $L_1 \subseteq L$, поэтому для любого $x \in L_1$ при $x \neq 0_L$ $f(x) > 0$.

Теорема (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы). Квадратичная форма f на n-мерном пространстве L является положительно определенной тогда и только тогда, когда в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L все главные миноры матрицы A квадратичной формы f положительны:

$$M_1= a_{11} > 0,\ M_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ldots,\ M_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ldots,$$

$M_n= detA >0$.

Доказательство (предложено профессором Рыжковым В.В.). Пусть f - положительно определенная квадратичная форма на L. По свойству 3 f будет положительно определенной формой на подпространстве $L^k = <e_1,...,e_k>$ при любом $k = 1,...,n$. В базисе $e_1,...,e_k$ пространства L^k матрица A_k формы f имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \text{ и по свойству 2} \quad M_k = detA_k > 0.$$

Таким образом, все главные миноры матрицы положительно определенной квадратичной формы положительны.

Обратное утверждение доказывается от противного. Предположим, что все главные миноры матрицы A квадратичной формы f в базисе $\boldsymbol{e}$ положительны, но форма f не является положительно определенной на пространстве $L= L^n$. Покажем, что тогда f не является положительно определенной на подпространстве $L^{n-1} = <e_1,...,e_{n-1}>$.

Ранг квадратичной формы f равен n, так как $detA = M_n >0$. и, поэтому, $rgf = rgA = n$. Пусть $\boldsymbol{e'}$ - базис в пространстве L, в котором f имеет нормальный вид: $\forall x \in L,\ x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$,

$f(x) = \varepsilon_1|x'_1|^2 + \varepsilon_2|x'_2|^2 + ... + \varepsilon_n|x'_n|^2$, где все $\varepsilon_i = \pm 1$.

По следствию 2 п.1.3 знак определителя матрицы $diag(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ формы f в базисе $\boldsymbol{e'}$ совпадает со знаком $detA= M_n >0$, так что $\varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_n > 0$. Поэтому отрицательный индекс инерции I^- формы f, равный числу отрицательных коэффициентов в нормальном виде формы f, является ненулевым четным числом (если $I^- = 0$, то, вопреки предположению, f будет положительно определенной формой). Итак, $I^- \geq 2$ и для определенности предположим, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Тогда в базисе $\boldsymbol{e'}$

$$f(x) = - |x'_1|^2 - |x'_2|^2 + \varepsilon_3|x'_3|^2 + ... + \varepsilon_n|x'_n|^2, \qquad (29)$$

Рассмотрим подпространство $L^{n-1} \cap <e'_1, e'_2>$.
$dim(L^{n-1} \cap <e'_1, e'_2>) = dimL^{n-1} + dim<e'_1, e'_2> -$
$- dim(L^{n-1} + <e'_1, e'_2>) \geq (n - 1) + 2 - n = 1$, поэтому в подпространстве $L^{n-1} \cap <e'_1, e'_2>$ существует вектор $z \neq 0_L$. Так как

$z \in <e'_1, e'_2>$, то $z = z'_1 e'_1 + z'_2 e'_2$ и $|z'_1|^2 + |z'_2|^2 > 0$. Из (29) следует, что $f(z) = -|z'_1|^2 - |z'_2|^2 < 0$. Но $z \in L^{n-1}$, поэтому f не является положительно определенной формой на подпространстве $L^{n-1} = <e_1,\dots,e_{n-1}>$.

Аналогично доказывается, что квадратичная форма f не является положительно определенной на подпространствах $L^{n-2} = <e_1,\dots,e_{n-2}>,\dots,L^1 = <e_1>$. Но на подпространстве L^1 форма f является положительно определенной: при $x \in L^1 = <e_1>$, $x = \alpha e_1$, $f(x) = f(\alpha e_1) = F(\alpha e_1, \alpha e_1) = \alpha\overline{\alpha}\, F(e_1, e_1) = |\alpha|^2 \cdot a_{11} =$ $= |\alpha|^2 \cdot M_1 > 0$ для $x \neq 0_L$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие. Эрмитова или симметричная квадратичная форма f на L является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ пространства L^n главные миноры матрицы A квадратичной формы f образуют знакочередующуюся последовательность: $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0,\dots$, $M_n > 0$ при четном n и $M_n < 0$ при нечетном n.

Доказательство следствия, которое основывается на очевидной связи отрицательно и положительно определенных квадратичных форм (f - отрицательно определенная форма $\Leftrightarrow (-f)$ - положительно определенная форма), предлагается провести читателю.

СОДЕРЖАНИЕ