ИНТУИЦИЯ И МАТЕМАТИКА

В. Босс

2003

Оглавление

Предисловие

> Если хочешь быть скучным — говори все.
>
> ВОЛЬТЕР

В любой области полезно оказаться в подходящей среде устного общения, где осыпается книжная шелуха. Там иногда ничего не меняется по сути, зато возникает чувство попадания в колею и освобождения от догм. Для науки, которая всегда в маске, это особенно важно. Суть за кадром, перед глазами — кружева. И вечно чего-то не хватает. То простоты, то сложности, да точно и не определишь — чего. Что-то куда-то шагает, ты — на обочине, а время уходит в песок, не говоря о жизни.

Далее предпринимается попытка сдвинуть ситуацию с места, моделируя письменную среду, где «спадают покровы». Внешняя канва содержания более-менее неясна из оглавления, но главная цель — та, что за кадром. Снять вуаль, грим, убрать декорации. Переупростить, даже приврать слегка, ибо дозирование правды — краеугольный камень объяснения. Результаты, перегруженные деталями, не пролезают куда надо. Озарение случается, когда пухнущая голова проваливается на уровень «дважды два», в то время как счет идет на миллионы. Такая уж тут диалектика.

Диапазон читателей предполагается самый широкий, но каждый, естественно, действует на свой страх и риск. Примерно 80% текста опираются лишь на среднее образование, главы независимы друг от друга. Соотношение понятного и непонятного — как в жизни.

Глава 1

Водовороты абстракции

Я знаю —
гвоздь у меня в сапоге
кошмарней, чем фантазия у Гете.

МАЯКОВСКИЙ

Нивхи, аборигены Сахалина, до недавнего времени имели разные числительные для круглых предметов и продолговатых. В ситуациях «три огурца» и «три помидора» — ничего общего. Нам такое уже трудно представить. Понятие абстрактного числа стало банальностью. Этаким кирпичиком мировоззрения, вообразить отсутствие которого почти невозможно. Поэтому говорить о глубине и величии понятия Числа сегодня сложно. Уже никто не понимает — все привыкли.

Но есть другие абстракции, которые пока находятся как бы на другой стадии. То ли — в процессе, то ли — не все население с ними имеет дело. И там есть возможность посмотреть на ситуацию свежим взглядом[1].

[1] *Рассеянные по тексту портреты — понимаются как лики создателя, которые он принимал, ломая голову над математическими проблемами. Поэтому идея подбора — целиком из области физиогномики.*

1.1 Хромосомы числового поля

Возьмем числовую последовательность a_n

$$1,\ 1,\ 0,\ -2,\ -4,\ -4,\ 0,\ 8,\ 16,\ 16,\ 0,\ -32,\ \ldots,$$

устроенную по правилу

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \tag{1.1.1}$$

со стартовыми условиями $a_0 = a_1 = 1$.

Допустим, необходима формула n-го члена.

Теория рекуррентных последовательностей нас в данный момент не интересует, и мы просто воспользуемся готовым рецептом: n-ый член ищется в виде $a_n = x^n$, что после подстановки в (1.1.1) дает

$$x^{n+2} = 2x^{n+1} - 2x^n,$$

а после сокращения на x^n приводит к квадратному уравнению

$$x^2 - 2x + 2 = 0. \tag{1.1.2}$$

Это уравнение надо решить, получить два корня x_1 и x_2, и положить

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n.$$

что и будет общим решением (1.1.1). Значения констант c_1, c_2 могут быть определены из начальных условий ($a_0 = a_1 = 1$).

Вот, собственно, и все, если говорить о задаче как таковой. Но нас интересует другое.

Корни уравнения (1.1.2) оказываются комплексными

$$x_1 = 1 + i, \quad x_2 = 1 - i,$$

и формула для a_n в случае $a_0 = a_1 = 1$ получается такой

$$a_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2}, \tag{1.1.3}$$

или, с учетом известных тригонометрических ухищрений,

$$a_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}. \tag{1.1.4}$$

Итак, задача решена. Ни условие, ни ответ (1.1.4) не содержат и намека на комплексные числа. Другое дело, промежуточные вычисления, где мелькает мнимая единица i. Что это — фокус, фикция? Игрушечная модель, без которой можно обойтись, или существенный атрибут исходной задачи?

Первое, что приходит в голову — это фикция. Вспомогательный прием. И нет, мол, никакого особого смысла выяснять, существуют ли комплексные числа на самом деле. Они существуют как мысленный инструмент. Вот, дескать, и вся правда.

Однако, не вся. Тут дело не только в удобствах, которые дают комплексные числа. Конечно, у студента душа радуется, когда он в конце концов понимает, насколько обозримее и лаконичнее становится, скажем, теория электрических цепей при использовании комплексных чисел. Добавление к гармоническому колебанию $U(t) = U\cos\omega t$ фиктивной мнимой части,

$$\widehat{U}(t) = U(\cos\omega t + i\sin\omega t),$$

странным образом резко упрощает теорию. Как бы обнаруживается счастливое стечение обстоятельств. Законы электричества и правила умножения комплексных чисел проявляют неожиданную согласованность.

Но проблема глубже. Происхождение формулы (1.1.4) без комплексных чисел объяснить вообще невозможно. И мы почти не утрируем.

Другой пример. Ряды

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots,$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

сходятся лишь при $|x| < 1$, что объясняется наличием у функций, стоящих слева, особых точек с модулем $|x| = 1$. Но кто скажет, почему ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots. \qquad (1.1.5)$$

тоже сходится только при $|x| < 1$? Никаких особых точек нет, знаменатель в нуль не обращается...

Но это на действительно оси. Особая точка есть в комплексной плоскости, $x = i \quad (|x| = 1)$, — она-то и определяет погоду.

И выходит, что мнимая единица, как тень, все время присутствует за кадром. Надзирает и определяет, хотя явно не вмешивается[2]. Мистика?

1.2 Не мистика

Ответ — и прост, и сложен. Прост — потому что легко формулируется и часто повторяется. Сложен — потому что сродни инкарнации абстрактного числа. Чтобы уяснить наличие общности в ситуациях «три огурца» и «три помидора», человечеству потребовалось очень много времени. Здесь тоже необходимо время, хотя, если разобраться, непонятно — на что.

Все начинается с натурального ряда и введения двух операций: сложения и умножения. Из посаженного семени остальное вырастает само. Сначала естественным образом появляются обратные операции, вычитание и деление, влекущие за собой необходимость введения ряда

$$\dots, -3, -2, -1,$$

потом дробей. Расширение исходного объекта манипуляций,

$$0, 1, 2, 3, \dots,$$

происходит сравнительно безболезненно, потому что в окружающем мире есть в избытке готовые интерпретации. И это, между прочим, плохо, поскольку культивирует не тот источник абстрагирования. Потребность в отрицательных числах имеет гораздо более весомую причину, чем запись долга со знаком минус. Дело в том, что манипулирование числами на определенной стадии выводит на следующий уровень абстракции. Для однотипных действий начинает использоваться символьная запись[3]. Введение буквенных обозначений переводит арифметику на другие рельсы. Формулы типа $a - b = c$ или

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

[2]Интересно, какая «мнимая величина» определяет нашу судьбу?

[3]Это колоссальный скачок в мышлении. На него ушли века.

фокусируют внимание на операциях. Объекты, то есть пока числа, остаются за бортом, за кадром. Выводятся из поля зрения. Первостепенными становятся действия, а не объекты их приложения[4]. Тем не менее, множество потенциально возможных объектов должно быть не пусто, чтобы рассматриваемые операции имели смысл. Отрицательные и дробные числа нужны для того, чтобы уравнения

$$x + a = b, \quad ax = b$$

всегда решались. Вот, собственно, главная причина. Аналогичная ситуация возникает в связи с извлечением корней, что однозначно приводит к появлению комплексных чисел. При поверхностном взгляде может показаться, что на этом пути появляются только мнимые числа, но это не так. Начатое дело приходится доводить до конца: $\sqrt{-1} = \pm i$, но $\sqrt{i}$ — это уже $\pm(1+i)/\sqrt{2}$. Иногда еще добавляют аргумент разрешимости уравнений n-й степени, но это уже — просто побочный эффект.

Итак, никакого секрета, никакой мистики. Комплексные числа — такая же реальность (или такая же фикция — кому как больше нравится), как отрицательные или дробные числа. Некоторый дискомфорт имеется лишь по причине укоренившейся привычки искать в окружающем мире прообразы типа шкалы термометра, где отрицательные числа находят свое воплощение.

Если прообразы не находятся, дискомфорт испытывают не только дилетанты, но и профессионалы. Ярким подтверждением тому служит история создания неевклидовой геометрии.

Характерна также другая схема, когда наглядные прообразы есть, но прежний опыт мешает принять очевидное. Кантор, открывший, что отрезок и квадрат имеют одинаковое количество точек, писал: «Я это вижу, но не верю.» Ему потребовались три года на преодоление психологического барьера.

Возвращаясь к комплексным числам, надо еще ответить, почему они как бы неожиданно всплывают в самых разных областях. Да потому, что вся математика стоит на использовании сложения и умножения, для которых комплексная плоскость — неизбежный финал расширения натурального ряда.

[4]Как бы начинают изучаться глаголы в отрыве от существительных.

Поэтому игровое поле и для бесконечных рядов, и для дифуров, и для теории вероятностей — одно и то же.

Отмеченная выше человеческая потребность в реальных прообразах абстрактных понятий — и плоха, и хороша одновременно. С одной стороны, она мешает видеть ясную логическую картину, с другой — активизирует поиск наглядных инструментов и конструкций. С одной стороны, комплексные числа — это элементы вида

$$z = x + iy, \tag{1.2.6}$$

удовлетворяющие условию $i^2 = -1$, обычным правилам сложения, умножения, — и этим все сказано. С другой стороны, разочарованное подсознание ищет наглядности — и возникают попытки эквивалентных представлений. Почему бы, скажем, элементу (1.2.6) не сопоставить вектор на плоскости с координатами x, y, который можно записать в полярных координатах

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

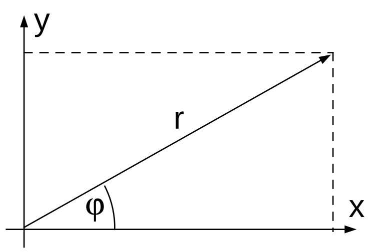


рис. 2.1. Вектор $z = x + iy$

Идея оказывается плодотворной. По счастливому стечению обстоятельств при умножении чисел аргументы φ просто складываются, — а это уже свидетельство большой удачи и попадания в некую десятку. Потом еще приплюсовывается красивая формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

что дополняет удачу.

В результате множеству комплексных чисел сопоставляется геометрический эквивалент — комплексная плоскость, в которой многое становится проще и нагляднее.

1.3 Прорыв в другую нишу

Итак, постепенное расширение натурального ряда $0,\ 1,\ 2, \dots$ последовательно приводит к появлению отрицательных, рациональных, действительных[5], наконец, комплексных чисел. Процесс идет под контролем идеологии выполнимости алгебраических операций и однозначно заканчивается на комплексных числах — дальше пути нет.

Закономерно возникает вопрос. А что если начинать не с натурального ряда, а с чего-то другого? При этом, правда, становится не ясно, что такое сложение и умножение. Но пусть это будут какие-то операции, удовлетворяющие тем же свойствам типа $a(b+c) = ab + ac$. И даже свойства пусть будут другие, и даже операция всего одна... или, наоборот, три... и т. д. Так происходит прорыв в другую нишу — рождается абстрактная алгебра.

Яркий пример алгебраической системы — векторное исчисление.

Векторы, как направленные отрезки, складываются по правилу параллелограмма, что в координатной записи

$$x = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad y = \{y_1, y_2, y_3\}$$

означает обыкновенное покоординатное сложение

$$x + y = \{x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3\}.$$

Вариантов умножения два. *Скалярное произведение*,

$$xy = |x|\,|y| \cos\alpha, \tag{1.3.7}$$

равное произведению длин векторов на косинус угла между ними, и *векторное произведение*,

$$z = x \times y,$$

где вектор z по длине равен

---

[5] С действительными — есть маленькая натяжка. Там, вообще говоря, внедряется как бы посторонняя идея непрерывности (неалгебраический вирус). В результате задним числом возникают все эти дополнительные разговоры об алгебраических и трансцендентных числах.

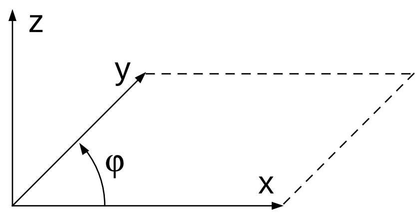


рис. 2.2. Векторное произведение

$$|z| = |x|\,|y| \sin \alpha,$$

т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах x, y (рис. 2.2), а направление z определяется по «правилу буравчика».

Оба способа умножения по своим свойствам совершенно непохожи на произведение обычных чисел. В первом случае (1.3.7) результатом xy является даже не вектор, а скаляр. Векторное же произведение дает вектор, но нет коммутативности, $x \times y \neq y \times x$, и ассоциативности, $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$. Правда, в обоих случаях справедлив дистрибутивный закон. Например,

$$(x + y) \times u = x \times u + y \times u.$$

Данное описание стартовой площадки векторного исчисления интересно тем, что умещается на пятачке, но достаточно было буквально для революции. Многие теоремы, доказательство которых в «довекторные» времена занимало десятки страниц, стали доказываться в одно касание. Появилась обозримость, ви́денье. Открылись широкие возможности решения новых задач. Возникло громадное поле исследований, и хлынул поток результатов.

Перечисленные факторы, определяющие поворотные точки развития науки, обычно рождаются на базе создания новых категорий мышления. Многие думают иначе, считая, что развитие математики в наибольшей степени зависит от решения сложных задач типа теоремы Ферма. Молодежь, соответственно, направляет усилия к таким целям, но пар нередко уходит в гудок даже в случае успеха. Сложная задача становится *Вехой* лишь в том случае, когда ее решение приводит к появлению новых путей, открытие которых все-таки чаще имеет источником не одну задачу, а большую совокупность причин.

Какие вспышки в истории математики были наиболее яркими? Первым приходит на ум исчисление бесконечно малых (Ньютон, Лейбниц), на котором стоит почти вся математика.

Очень показательный пример — аксиоматика Колмогорова для теории вероятностей. Что, собственно, было сделано? На первый взгляд, ничего особенного. Колмогоров предложил строить теорию вероятностей, как раздел теории меры, на основе «таких-то» аксиом. Стартовая площадка — опять на пятачке, а последствия грандиозны. На долгие годы работа Колмогорова становится одной из наиболее цитируемых. Тысячи математиков включаются в работу — хижина теории вероятностей перестраивается в небоскреб.

Если кому-то кажется, что такого сорта прорывы — исключительно дело удачи, надо, как говорится, думать дальше. Себестоимость творения первоначальных постулатов очень высока. Необходимо отсечь массу проигрышных вариантов, избежать заблуждений, пожертвовать малой выгодой ради большой ... На поверхности остается компактный и вроде бы невзрачный результат — но он определяет все дальнейшее движение.

Кое-кто может расценить сказанное, как умаление заслуг первооткрывателей. Дескать, зачем подчеркивать малые размеры стартовой площадки? Так затем, что именно малые размеры свидетельствуют о величии. Ведь самая яркая вспышка в истории математики — позиционная запись числа. Одна строчка

$$a_n \dots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

но каковы последствия! Представьте, что было бы с математикой при записи чисел римским способом.

Примечания и дополнения.

1. На комплексные числа полезно взглянуть с более общей точки зрения. Пусть, как и прежде, речь идет об элементах $z = x + iy$ с той лишь разницей, что i^2 равно не -1, а любому наперед заданному числу $\alpha + i\beta$ (в том числе, возможно, и -1). Некоторые варианты этой системы были детально проработаны: случай *дуальных чисел* ($i^2 = 0$) и *двойных* ($i^2 = 1$). Однако комплексные числа и дуальные (или двойные) — это, как говорят, две большие разницы.

Если комплексные числа находятся в фарватере математики, то дуальные и двойные числа — суть небольшие ответвления, представляющие интерес лишь в узких секторах приложений.

2. Гиперкомплексные числа (кватернионы), открытые Гамильтоном, являются четырехмерными объектами вида

$$Z = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta,$$

где α, β, γ, δ — действительные числа, а 1, i, j, k — четыре базисных единицы, удовлетворяющих соотношениям

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

откуда (с учетом того, что 1 — обычная единица) следует

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i,$$

$$ki = -jk = j.$$

Иногда кватернионы считают обобщением комплексных чисел, но это не более чем попытка выдать желаемое за действительное. Расширение поля комплексных чисел невозможно без потери тех или иных арифметических свойств. Произведение кватернионов, например, некоммутативно.

3. Знакомство с векторным исчислением на первых порах нередко приводит к эйфории. Трудные геометрические задачи начинают решаться «как по маслу». Большие коллекции примеров имеются в учебниках.

Мы здесь остановимся лишь на факте сложения вращений по правилу параллелограмма. Это весьма неочевидно и даже неожиданно, особенно, если учесть, что трехмерные повороты не коммутируют[6].

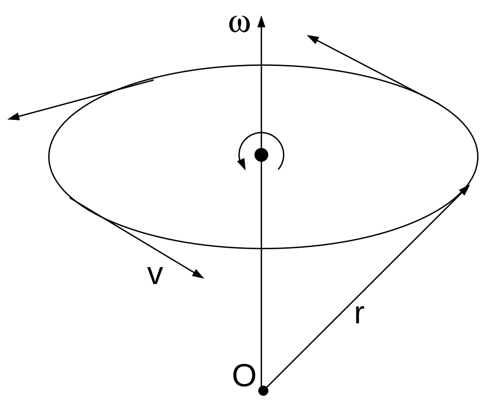


рис.2.3. Вращение – вектор

Тем не менее вращение в R^3 действительно имеет векторную природу. Стандартное кинематическое доказательство несколько громоздко

[6]Коммутируют бесконечно малые повороты, что и определяет векторный характер вращений в R^3.

и опирается на пространственное воображение. При использовании векторного аппарата усилие мысли почти не требуется. Линейная скорость v конца радиус-вектора r при вращении вокруг оси, проходящей через начало координат 0, с угловой скоростью ω равна

$$v = \omega \times r, \tag{1.3.8}$$

где (пока формально) вектор ω направлен по оси вращения (в сторону, определяемую по «правилу буравчика»). Очень полезная формула, кстати.

Если тело участвует в двух вращениях ω_1 и ω_2, то линейные скорости

$$v_1 = \omega_1 \times r \quad \text{и} \quad v_2 = \omega_2 \times r$$

складываются, и результирующая скорость оказывается равной

$$v = \omega_1 \times r + \omega_2 \times r = (\omega_1 + \omega_2) \times r,$$

что и дает нужный вывод. Результирующее движение происходит с векторной угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Глава 2

Докапываясь до причин

> Далеко пойдет тот, кто не знает, куда идет.
>
> XYZ[1]

До Ньютона в астрономии царила большая неразбериха. Разноголосица фактов, теорий, безответные «почему» — вот фон, на котором одна формула,

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{2.0.1}$$

перевернула всю астрономию и механику. Бесконечные «почему» слились — в одно. Аморфная масса астрономической науки неожиданно как бы кристаллизовалась — каждый факт занял согласованное с (2.0.1) положение. «Божественные» законы Кеплера оказались элементарными следствиями. Возник единый порядок.

Это хороший пример движения науки в направлении причин. Пример, конечно, исторического масштаба. Но тенденции подобного рода интересны и на микроуровне. При решении задач главное, как ни странно, — не результат, а способ его достижения

[1] По тем или иным причинам автора невозможно указать.

2.1 Две задачи

На плоскости P расположены три окружности разных радиусов, расположение которых характеризует рис. 3.1. Общие касательные к каждой паре окружностей пересекаются в точках A, B, C. Доказать, что A, B, C лежат на одной прямой.

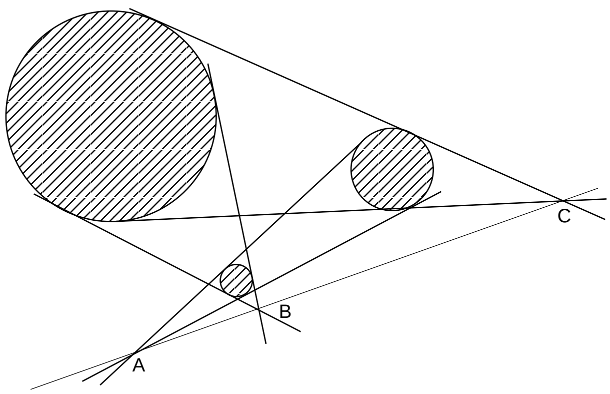


рис. 3.1. Точки A, B, C лежат на одной прямой

Задачу «в одно касание» решает пространственная модель. Три полусферы тех же радиусов устанавливаются, соответственно, на исходных окружностях. Общая касательная к полусферам плоскость K пересечется с плоскостью P по некоторой прямой, которой и обязаны принадлежать точки A, B, C.

В подобной ситуации принято говорить об удаче и оригинальности решения. А надо бы, пожалуй, акцентировать внимание на другом. Данное решение вскрывает природу задачи. В этом его основное достоинство. Важна не краткость сама по себе, а обнаружение источника, причины.

Обратим внимание, что в постановке задачи мы избегаем ситуаций типа той, которая изображена на рис. circle.eps. Разумеется, можно было бы рассказать о всех вариациях, но мы бы тогда забыли, куда идем. Нельзя же по дороге в баню отвлекаться на поездку в Сочи.

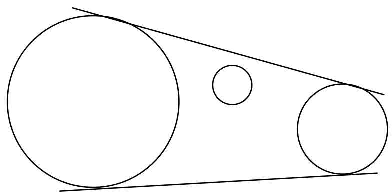


рис. 3.2. Такие ситуации не рассматриваем

Четыре космических корабля A, B, C, D движутся строго прямолинейно, каждый со своей постоянной скоростью. Никакие два курса не параллельны, никакие три — не пересекаются в одной точке. Известно, что A, B, C попарно встречались между собой, а D встречался с A и B. Доказать, что D встретится с C.

Разумеется, можно выписать уравнения прямолинейного движения, проанализировать их... Поллитра чернил, и успех гарантирован — но никакой ясности в понимании того, что откуда берется, не будет.

Задача становится прозрачной при ином взгляде. Понятно, что все курсы A, B, C, D из-за пересечения лежат в некоторой плоскости P. Возьмем перпендикулярную P ось времени t, и в трехмерном пространстве $\{P, t\}$ нарисуем графики движения кораблей. Это будут четыре прямых линии, которые обозначим теми же буквами A, B, C, D. Поскольку корабли A, B, C попарно встречаются, соответствующие прямые A, B, C попарно пересекаются, и потому лежат в некоторой плоскости Q. Прямая D, по условию, пересекается с прямыми A и B — поэтому двумя точками лежит в Q, а значит и вся принадлежит Q. Следовательно, (из-за непараллельности) пересекает C. Все.

2.2 Где истинные корни?

Рассмотренные примеры подталкивают к мысли, что истинные корни математической проблемы обнаруживаются в том случае, когда находится короткое и ясное решение. Некоторая доля правды в этом, безусловно, есть. Скажем, неравенство

$$\begin{aligned}&\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\geqslant\\&\geqslant\sqrt{(x_1+\ldots+x_n)^2+(y_1+\ldots+y_n)^2)}\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

можно доказывать разными путями. Причину (2.2.2) улавливает, пожалуй, рис. 3.3, показывающий, что в данном случае речь идет о простом геометрическом факте: длина отрезка меньше длины ломаной, соединяющей те же точки.

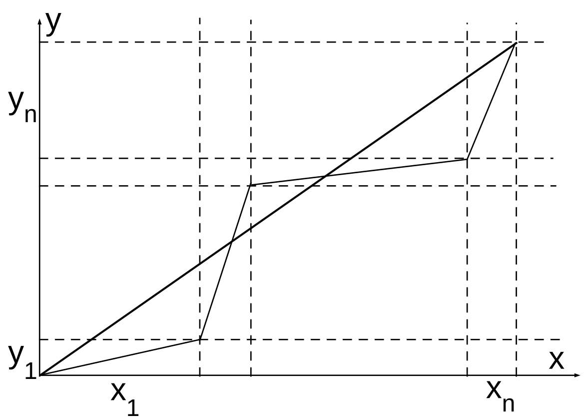


рис. 3.3. Прямая короче ломаной

Но вот пример другого сорта. *Неравенство Коши–Буняковского*

$$\begin{aligned}&(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)\leqslant\\&\leqslant(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

изящно и просто доказывается алгебраически. Очевидно,

$$(x_1-\lambda y_1)^2+\ldots+(x_n-\lambda y_n)^2\geqslant 0.$$

После раскрытия скобок имеем

$$\lambda^2(y_1^2+\ldots+y_n^2)-2\lambda(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+(x_1^2+\ldots+x_n^2)\geqslant 0$$

для любого λ, — что возможно лишь при неположительности дискриминанта — а это и есть (2.2.3).

Приведенное стандартное доказательство изящно и коротко, но никакого особого света на суть утверждения (2.2.3) не проливает. Природа неравенства Коши–Буняковского в другом — в записи фундаментального факта n-мерной геометрии: косинус угла α между векторами

$$x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{и} \quad y = \{y_1, \dots, y_n\}$$

не больше единицы:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}} \leqslant 1. \tag{2.2.4}$$

Выводится ли (2.2.3) из (2.2.4), либо, наоборот, (2.2.4) следует из (2.2.3), — в данном случае неважно. Важно, что интерпретация (2.2.4) помещает неравенство (2.2.3) в естественное для него окружение, и (2.2.3) начинает перекликаться с массой других близких по духу фактов[1].

Этот пример подталкивает к другой мысли. Первостепенную роль играет не способ решения, а интерпретация, в которой математический факт имеет максимальную значимость и продуктивность.

В рассмотренных примерах выходило так, что «истинная природа» оказывалась геометрической. Это в самом деле распространенный вариант, видимо, потому, что визуальный опыт в физическом мире играет важную роль. Детерминант матрицы, например, эквивалентно определяется разными способами, но студент испытывает облегчение, когда узнает, что детерминант (с точностью до знака) — это объем параллелепипеда, построенного на векторах-столбцах или строках. К восприятию подключается визуальный образ — и возникает ощущение ясности.

Даже аналитическая геометрия, во многом обязанная алгебраизации понятий и действий, как правило, после успешных формульных манипуляций делает шаг назад, стремясь дать им визуальную интерпретацию.

[1]Никто, как правило, (2.2.3) из (2.2.4) не выводит, поскольку в этом случае «головная боль» переносится из одного места в другое — возникает необходимость как-то иначе доказывать (2.2.4).

Разумеется, истинная природа математических фактов не всегда геометрическая. Чтобы понять, скажем, почему для устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2.5}$$

требуется неотрицательность действительных частей собственных значений (точек спектра) матрицы A, естественно обратиться напрямую к записи решения (2.2.5)

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Конечно, для этого требуется некая стадия предварительного обучения и привыкания к специальным категориям мышления. В этом отношении геометрическая интерпретация имеет то преимущество, что она дана как бы априори, и геометрический факт, как правило, легко объяснить даже новичку.

2.3 Загадка симметрии

Определенный интерес в данном контексте представляет вопрос о количестве правильных многогранников.

Докажем предварительно формулу Эйлера

$$V - R + G = 2, \tag{2.3.6}$$

где V — число вершин, R — ребер, G — граней любого рассматриваемого многогранника[2].

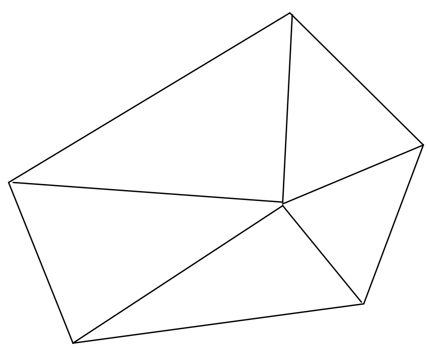


рис. 3.4.

[2] Возможно, неправильного.

Возьмем эластичную модель многогранника, растянем одну из его граней, и на нее уложим остальные. В результате получится плоский граф — фигура типа изображенной на рис. 3.4. В простейшем случае многоугольника (без внутренних вершин на графе), $V = R = n$, $G = 2$, равенство (2.3.6) верно. Далее решает индукция. Если (2.3.6) верно для любого многогранника с G гранями, то добавление еще одной грани (рис. 3.5) дает новый многогранник с числом вершин $V' = V + k$, — ребер $R' = R + k + 1$, — граней $G' = G + 1$, где k — число новых вершин. Поэтому

$$V' - R' + G' = V - R + G = 2,$$

что завершает доказательство.

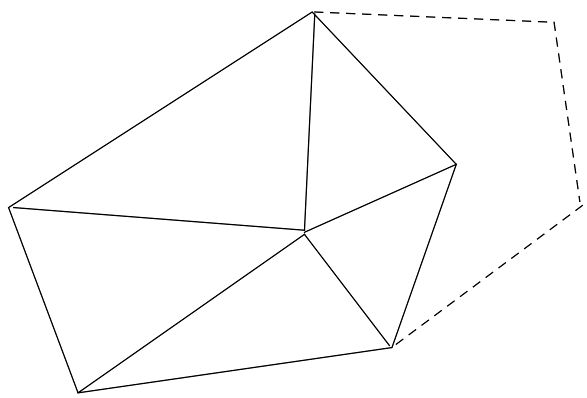


рис. 3.5.

Обратимся теперь к случаю правильного многогранника, который характеризуется тем, что в каждой вершине сходится одно и то же число K ребер и одно и то же число N ребер ограничивает каждую грань. Очевидно,

$$N \cdot G = 2R, \quad K \cdot V = 2R,$$

поскольку пересчет ребер многогранника, как с помощью идеи NG, так и с помощью — KV, дает $2R$, ибо в том и другом случае каждое ребро считается дважды. Таким образом необходимо

$$\left(\frac{2}{K} - 1 + \frac{2}{N}\right) R = 2.$$

Все возможные решения легко определяются прямым перебором[3], который дает:

$$\begin{aligned}
&K = 3, \quad N = 3 \quad - \quad \text{тетраэдр},\\
&K = 3, \quad N = 4 \quad - \quad \text{куб},\\
&K = 3, \quad N = 5 \quad - \quad \text{додекаэдр},\\
&K = 4, \quad N = 3 \quad - \quad \text{октаэдр},\\
&K = 5, \quad N = 3 \quad - \quad \text{икосаэдр}.
\end{aligned}$$

Как рассматривать такое решение? По-видимому, с восклицательным знаком, так как довольно сложная (и даже таинственная) задача решается коротко, ясно и наглядно. Есть, однако, два «но».

Плохо то, что остается ощущение глубины результата. Как бы не происходит развенчания мистического ореола. А это свидетельствует, как правило, о существовании неразгаданных механизмов и скрытых пружин[4]. Плохо и другое. Результат изящен, но стоит как-то особняком, сам по себе, ни с чем не перекликается, никаких вселенских закономерностей не выражает (хотя кажется, что должен).

Новый свет на задачу проливает совсем иной подход. Правильный многогранник характеризуется еще и тем, что некоторые его движения, повороты в пространстве, приводят к самосовмещению. Причем множество таких поворотов составляет группу.

Поворот в R^3 — это всегда вращение вокруг некоторой оси. Если речь идет о группе поворотов, то $a \circ b$ обозначает последовательное выполнение поворота a, потом b. Как доказал еще Эйлер, это снова поворот.

Чтобы не нарушать баланс акцентов, не будем входить в детали. Далее сюжет развивается примерно по такой схеме. Среди групп поворотов естественным образом выделяют некие группы симметрий, наличие которых влечет за собой существование правильных многогранников. Затем ставится вопрос: какие в R^3 симметрии рассматриваемого типа возможны. Их оказывается всего пять (группа тетраэдра, куба ...) — и получается прежнее решение.

---

[3]Перебор сводится к определению целочисленных решений неравенства

$$\frac{2}{K} + \frac{2}{N} > 1$$

при очевидном ограничении $K, N > 2$.

[4]Так и с людьми бывает. Документы предъявил, биографию рассказал, что за человек — не ясно.

Следуя примеру хорошего дантиста, который все время объясняет, что делает — заметим, следующее. Наша цель — некий общий взгляд, для которого математические подробности несущественны. Указанный путь определения и поиска групп симметрий отнюдь не усыпан розами. Он длиннее предыдущего и утомительнее. Поэтому в данном случае нет никакого резона ему следовать. А вот внешние атрибуты этого пути заслуживают внимания, поскольку имеется один громадный плюс, который перевешивает все минусы. Описанный способ решения помещает задачу в теоретико-групповую среду родственных фактов. Задача уже не стоит особняком. У нее обнаруживаются многочисленные и плодотворные связи. Группа икосаэдра, например, оказывается тесно связанной с проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Галуа обнаружил, что эта группа проста (не имеет собственных нормальных подгрупп), — и это приводит к неразрешимости уравнений степени 5 и выше.

Примечания и дополнения.

1. В 4-мерном пространстве имеется 6 правильных многогранников. В пространствах большей размерности — только 3: *симплекс* (n-мерный тетраэдр), куб и многогранник *двойственный* кубу (аналог октаэдра).

2. Икосаэдр и додекаэдр (так же как октаэдр и куб) двойственны друг другу — центры пятиугольных граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра, а центры треугольных граней икосаэдра — вершинами додекаэдра. Тетраэдр двойствен сам себе.

3. В механике есть теорема о том, что результирующий момент сил,

$$L_0 = r_1 \times F_1 + \ldots + r_n \times F_n,$$

относительно точки 0, равен результирующему моменту L_C плюс моменту результирующей силы

$$F = F_1 + \ldots + F_n$$

относительно точки C (имеющей радиус-вектор r_C), т. е.

$$L_0 = L_C + r_C \times F. \tag{2.3.7}$$

Кто не уловил деталей — не суть важно, поскольку речь о другом. На территории векторного исчисления формула (2.3.7) устанавливается в одну строчку. Действительно,

$$L_C = (r_1 - r_C) \times F_1 + \ldots + (r_n - r_C) \times F_n = L_0 - r_C \times F.$$

«Довекторное» доказательство — имело длину более ста страниц! И беда была не в том, что писанины много. Беда была в том, что за деревьями леса не видно. Все туманно, расплывчато, необозримо.

Пример иллюстрирует общую закономерность. Каждый математический факт как бы приписан к определенному пласту. Там видна его природа, его связи и, самое главное, там он доступен для интуитивного восприятия. На чужом поле он тоже имеет хождение, но — в маске, в усеченном виде. Именно такие муляжи производят впечатление глубины, порождая смутные подозрения о существовании таинственных этажей Знания.

Докопаться до истины, в этих случаях, означает пробить туннель в необитаемую Зону, где изучаемый факт попадает в естественную для него среду.

Глава 3

Гипноз и магия ассоциаций

— Что невесел?

— Стыдно признаться — мочусь во сне.

— Сходи к гипнотизеру — он поможет.

Через неделю

— Отлично выглядишь. Гипноз помог?

— Конечно. Мочусь по-прежнему. Но теперь я этим горжусь.

АНЕКДОТ

В семнадцатом веке Рене Декарт открыл эффективный метод решения геометрических задач с помощью алгебраического описания в координатах, которые теперь называются декартовыми[1]. Скажем, плоскость в R^3 описывается уравнением вида

$$ax = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha, \tag{3.0.1}$$

[1]Мы, как правило, избегаем уточнять исторические детали, поскольку многое сильно перепуталось, и не хотелось бы увеличивать хаос. В данном случае, например, идею координатного описания можно усмотреть уже у древних египтян. Систематически она начала развиваться П. Ферма и Р. Декартом. Руку приложили также И. Ньютон, Г. Лейбниц и, наверняка, многие другие, канувшие в Лету.

где «задающий» вектор $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ перпендикулярен плоскости, а множество точек $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, удовлетворяющих (3.0.1), представляет саму плоскость. Алгебраические эквиваленты даются также для линий, длин, углов, сфер и т. п. В результате возникает взаимнооднозначное соответствие между геометрическими и алгебраическими объектами, что обеспечивает свободу маневра. И теперь уже неясно, кто в большем выигрыше — алгебра или геометрия. Например, вопрос о разрешимости системы уравнений

$$ax = \alpha, \quad bx = \beta, \quad cx = \gamma$$

удобно рассматривать как задачу о пересечении трех плоскостей.

Многие «формульные» задачи стало возможным обдумывать, воображая их геометрические эквиваленты. Скажем, о функции $y = f(x_1, x_2)$ полезно размышлять, представляя себе в трехмерном пространстве ее график, т. е. некоторую поверхность. Разумеется, тут же возникает вопрос: нельзя ли задействовать геометрическую интуицию и в случае большего числа переменных?

3.1 Специфика n измерений

Если есть двух- и трехмерные пространства R^2, R^3, то почему бы не рассматривать n-мерное — R^n? Формалисты скажут, что тут и вопроса нет, поскольку-де математика к устройству физического мира никакого отношения не имеет. Она, мол, дает лишь определения и правила игры — и для нее что R^2, что R^{22}. И это, конечно, правда, но не вся. Что бы ни говорили о математике, примеси интерпретаций присутствуют в любых теориях, и наличие жизненного опыта в трехмерном пространстве накладывает отпечаток.

Никаких препятствий для рассмотрения геометрии R^n при $n > 3$, конечно, нет, но чтобы это не было пустым упражнением и соответствовало геометрической интуиции — необходима подготовительная работа, которая шаг за шагом была проделана. В пространствах n переменных были определены

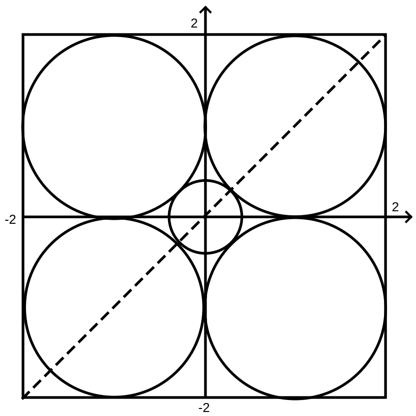


рис. 4.1.

плоскости, длины, углы, объемы и т. п. В результате «формульного» анализа установлено их соответствие обычным геометрическим представлениям. Постепенно стало привычным рассуждать об уравнениях и функциях большого числа переменных, опираясь на понятия нормалей, площадей, поверхностей уровня. Кое-кто при этом говорит, что мыслит трехмерными аналогиями. Кое-кто утверждает, что «видит» n-мерное пространство. Само по себе это уже принадлежит к области эмоций и принципиального значения не имеет. Главное, что творческий потенциал геометрического воображения оказывается подключенным к широкому классу задач.

Многолетняя практика, как правило, убеждает, что R^4 в общем случае не так уж сильно отличается от R^2 или R^3.

Но отличия есть. В R^4 можно разъединить два зацепленных кольца, не разрывая колец. Можно развязать узел на контуре, вывернуть наизнанку обычную сферу, не разрывая ее. Есть также некоторые аномалии в поведении привычных тел. Единичный куб (сторона 1, объем 1) при увеличении n неограниченно увеличивается в размерах — расстояние между противоположными вершинами (на большой диагонали) равно $\sqrt{n}$. Оъем шара при больших n концентрируется у экватора, а объем куба, вписанного в единичный шар (радиуса 1), очень быстро убывает $V_n = (2/\sqrt{n})^n$. Эта дисгармония ярко проявляется в нижеследующем примере.

На рис. 4.1 квадрат со стороной 4 разбит на 4 одинаковых квадрата, в каждый из которых вписан единичный круг ($R = 1$). В центральную область вписан круг радиуса r, касающийся остальных кругов. Очевидно, $r = \sqrt{2} - 1$.

Аналогичным образом в R^3 куб со стороной 4 можно разбить на 8 одинаковых кубов, в каждый из которых вписать единичный шар и т. д. В R^3 радиус центрального вписанного шарика окажется равным $r = \sqrt{3} - 1$. Легко видеть, что в R^n

$$r = \sqrt{n} - 1,$$

поскольку $r + R$ при любом n дают длинную диагональ единичного куба, т. е. $r + R = \sqrt{n}$, а $R = 1$.

Таким образом, вписанный шарик, начиная с $n = 10$, вылезает за пределы ограничивающего куба, не говоря о том, что, начиная с $n = 5$, радиус «маленького» шарика превосходит радиус «большого».

Но это рядовые «несуразности». В R^n встречаются неожиданности и совсем другого масштаба.

3.2 Не чертовщина ли?

Рассмотрим *задачу о выпуклых многогранниках, у которых каждые две вершины соединены ребром.* Спрашивается, какое максимальное число вершин может иметь такой многогранник? На плоскости R^2 указанным свойством обладает лишь треугольник — максимальное число вершин $m = 3$. В R^3 — тетраэдр ($m = 4$). В пространстве четырех измерений и выше такой многогранник *может иметь вершин сколько угодно*!

Это уже неожиданность качественного характера, и ее можно повернуть так (см. далее), что интуитивно она будет казаться совсем неприемлемой.

Пока остановимся на доказательстве. Рассмотрим так называемый *циклический многогранник* в R^4 с любым числом вершин, лежащих на кривой

$$x(\tau) = \{\tau,\, \tau^2,\, \tau^3,\, \tau^4\}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Удивительное свойство, которым обладает кривая $x(\tau)$, заключается в следующем. Через любые две точки $x(t)$, $x(s)$ можно

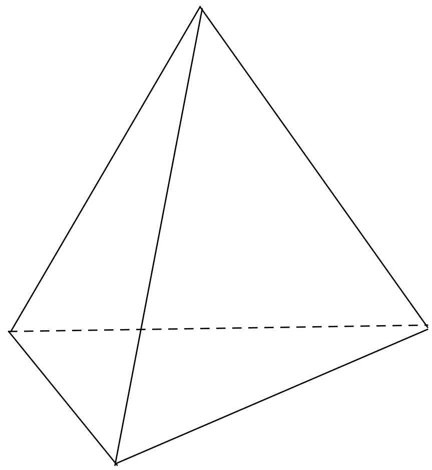


рис. 4.2. Тетраэдр

так провести плоскость H (в данном случае трехмерную, коль речь идет об R^4), что все остальные точки $x(\tau)$ будут находиться по одну сторону H.

Покажем это. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\tau) = (\tau - t)^2(\tau - s)^2 = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \alpha_3\tau^3 + \alpha_4\tau^4,$$

и в качестве плоскости H возьмем множество точек x, для которых

$$hx + \alpha_0 = 0,$$

где $h = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$,

$$hx = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4.$$

Очевидно, $hx(\tau) + \alpha_0 = \varphi(\tau) \geqslant 0$, значит, вся кривая $x(\tau)$ лежит по одну сторону H. Кроме того ясно, что лишь две точки $x(t)$, $x(s)$ попадают на саму плоскость H,

$$\varphi(t) = \varphi(s) = 0.$$

Теперь остается вспомнить, что многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, в данном случае точек

$$x(\tau_1), \ldots, x(\tau_n). \tag{3.2.2}$$

Все плоскости типа H, как обычно говорят, *опорные* — поэтому отрезки, соединяющие любые две точки из (3.2.2), будут ребрами многогранника[2] M_c.

Аналогичный пример для $n > 4$, легко получается из данного. В качестве вершин можно взять любые m точек, у которых первые четыре координаты совпадают с координатами точек (3.2.2).

Эффект неожиданности в рассмотренном примере несколько смазывается из-за того, что сценарий разворачивается в четырехмерном пространстве, где мы не имеем осязаемого опыта. Скептики могут сказать: мало ли что бывает в R^4. Поэтому перевод сюжета в привычное R^3 заслуживает некоторого усилия мысли.

Зададимся вопросом: сколько выпуклых многогранников в R^3 могут попарно соприкасаться по двумерным границам? Аналогичный вопрос в R^2 имеет очевидное решение[3], изображенное на рис. 4.3. Максимум — четыре многоугольника. Кажется невероятным, что в R^3 таких многогранников может быть *сколько угодно*, но это так.

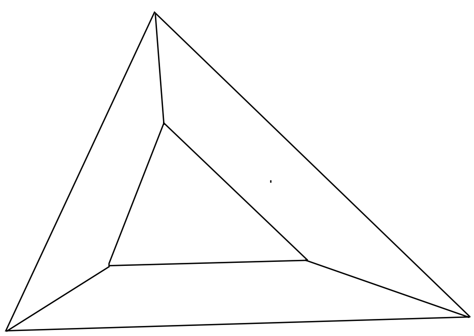


рис. 4.3.

Построить соответствующий пример, располагая моделью циклического многогранника M_c, совсем легко. Многогранник

[2]Ясно, что отрезок, соединяющий $x(t)$ и $x(s)$, весь лежит в H, и ни одна его точка не может быть получена как выпуклая комбинация остальных вершин (3.2.2), поскольку те лежат по одну сторону H.

[3]Понятно, что многогранники на плоскости — это многоугольники.

M_c^*, состоящий из точек $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$xy \leqslant 1 \text{ для любого } y \in M_c,$$

является двойственным к M_c.

Разумеется, здесь не место затевать подробное объяснение двойственности, тем более что для понимания достаточно намека. У двойственного многогранника в R^n каждой вершине исходного многогранника M соответствует $(n-1)$-мерная грань (и наоборот), и эти грани соприкасаются по $(n-2)$-мерным граням, если соответствующие вершины M соединены ребром. На рис. 4.4 изображен пример взаимно двойственных многогранников: куб и октаэдр.

Таким образом, граница M_c^* представляет собой совокупность выпуклых трехмерных многогранников, которые попарно соприкасаются по плоским граням. Но это пока еще не окончательное решение вопроса, поскольку граница M_c^* — это замкнутое трехмерное многообразие, а не R^3.

Последний шаг можно сделать двумя способами. Первый: одна из трехмерных граней M_c^* растягивается, и на нее укладываются остальные грани. Кому-то такой способ может не понравиться, поскольку он опирается на мысленную деформацию в четырехмерном пространстве. Вот более формальный способ. Пусть M_c^* имеет m трехмерных граней. Разобьем R^4 на m конусов. Все конусы имеют вершину 0, лежащую внутри M_c^*, и каждый конус — в точности содержит одну из трехмерных граней.

Получается пример m четырехмерных конусов, которые попарно соприкасаются. В любом плоском трехмерном сечении (не проходящем через 0) этих конусов возникает пример попарно соприкасающихся $(m-1)$ трехмерных многогранников.

Глава 4

Глубина банальных фактов

> Горячая крышка на кастрюле выглядит так же, как холодная.
>
> XYZ

Любая наука в своей основе проста, но не все кормящиеся ею любят это раскрывать. И, возможно, правильно делают. Ведь нельзя ворота держать нараспашку. Поэтому в математике, как и в искусстве, есть свои маленькие хитрости, предназначенные не столько для внутреннего пользования, сколько для посторонних. Чтобы не толпились.

С другой стороны, никаких хитростей для посторонних вроде бы и нет. Уточнение деталей автоматически оштукатуривает исходную простоту толстым слоем. Понимать перестают не только чужие, но и свои.

4.1 Миллион областей с общей границей

Рассмотрим знаменитую *теорему Жордана* о том, что простой контур делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Делит в том смысле, что внутреннюю точку и внешнюю — нельзя соединить непрерывной кривой, которая бы не пересекала исходный контур. Очень длинное и трудное доказательство, кстати. Хотя, казалось бы, что тут доказывать? Все ясно. Однако не все. Теорема Жордана — совсем не отвлекающий трюк. Правильно оценить ее роль можно лишь в подходящем контексте.

Зададимся следующим вопросом. Могут ли на плоскости три области иметь общую границу? Не общую точку или участок — а одну и ту же границу. Другими словами, может ли некое множество Г делить плоскость на 3 области? Области разные, а граница одна и та же. Вроде бред, но ответ — положительный. И это в некотором роде дает благотворный шок, потому что геометрическая интуиция оказывается в нокауте. К тому же соответствующий пример конструируется совсем легко.

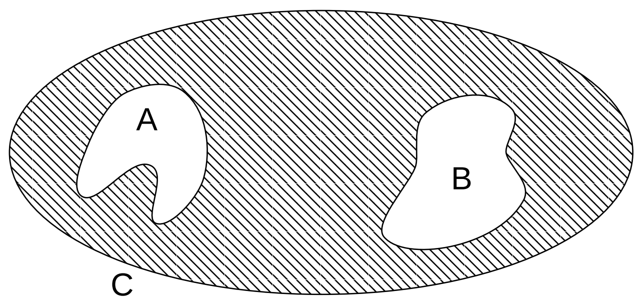


рис. 5.1.

Пусть в море C есть остров, а на острове два озера — A и B (рис. 5.1). На сухопутной (заштрихованной) части острова выделим множество M_ε точек, расположенных в узлах квадратной ε-решетки. Затем от каждого озера и от моря к каждой точке M_ε пророем канал, не доводя его до этой точки на расстояние $\frac{\varepsilon}{2}$.

На оставшуюся часть суши поместим $\frac{\varepsilon}{2}$-решетку, и к точкам $M_{\frac{\varepsilon}{2}}$ пророем каналы, не доходящие до соответствующих точек на $\frac{\varepsilon}{4}$. Потом накроем сушу $\frac{\varepsilon}{4}$-решеткой, и так далее. Понятно, что в пределе области A, B, C разрастутся до областей A^∞, B^∞, C^∞ с общей границей Г. Граница Г — это все, что останется от суши.

Вот такая неожиданная ситуация. Более того, изначально можно было бы взять остров с миллионом озер — в результате получился бы *пример миллиона областей с общей границей.*

Понятно, что граница тут простым замкнутым контуром не является, но пример все же впечатляет, и на его фоне теорема Жордана приобретает другую окраску.

Но это пока не все. В теореме речь идет о простом контуре, т. е. о взаимнооднозначном непрерывном в обе стороны образе окружности. Непрерывность же — штука совсем не такая ясная, как многим хотелось бы. График непрерывной функции $y = x \sin \frac{1}{x}$ невозможно нарисовать, а график непрерывной в нуле функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}, \\ x, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально} \end{cases}$$

совершенно дыряв, через него «гулять можно», и отрезку прямой линии ничего не стоит прошить его насквозь, не пересекая. А если сюда еще приплюсовать кривые Пеано[1], то теорема Жордана начинает выглядеть скорее сомнительной, нежели очевидной. И если бы под простым контуром понимался непрерывный образ окружности, то теорема вообще не была бы верна — контур тогда мог бы, например, заполнять всю плоскость, не оставляя места ни для внутренности, ни для внешности. Но кривые Пеано обязательно самопересекаются, и это сохраняет надежду, поскольку у нас речь идет о гомеоморфном образе окружности. Согласитесь, однако, что в данном контексте теорема перестает вселять оптимизм.

Трудность, с которой здесь сталкивается подсознание, имеет общую природу. Когда два-три десятка примеров сливаются в единое понятие — в фокус попадают безбрежные области

[1]Кривая Пеано — непрерывный образ отрезка $(x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, заполняющий всю внутренность квадрата. Интересно, что простая дуга (линия) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = t$ перекрывает путь любому вертикальному лучу (вдоль z), не являясь непрерывной поверхностью.

частностей и деталей, о которых предстоит узнать лишь потом. Таково в данном случае понятие непрерывности.

4.2 Аксиома выбора

Глубины дают о себе знать в самых безобидных на вид ситуациях. Скользишь по поверхности — нет проблем. Начинаешь присматриваться — рассыпаются простейшие понятия. Как будто действует некий принцип неопределенности сродни квантовому. Чем больше уточняешь в одном месте, тем больше расползается — в другом. Затыкаешь одну дыру — образуется вторая.

Особенно это заметно в теории множеств. Возьмем аксиому выбора:

В любом семействе Φ непустых множеств в каждом множестве $X \in \Phi$ можно выбрать по одному элементу. (4.2.1)

Иными словами, существует функция выбора f, ставящая в соответствие каждому $X \in \Phi$ элемент $f(x) \in X$.

До Цермело утверждение (4.2.1) широко использовалось в математических рассуждениях как самоочевидный факт, но будучи явно сформулировано (1904 г.), вызвало ожесточенную критику. И было за что. Задумаемся, например, не могут ли возникнуть трудности при указании элемента некоторого множества X? Первым делом на ум приходят ситуации, где таких трудностей нет. Но ... Множество $I = [0, 1]$ несчетно, а множество имен счетно. Поэтому счетно множество Y *именуемых чисел*. Как тогда указать элемент в

$$X = I \setminus Y,$$

если все элементы X принципиально не имеют имени? Конечно, «именование» — вещь достаточно лукавая и неопределенная. Однако здесь можно стать на более основательную платформу вычислимости. И тогда, если Y — множество вычислимых чисел, то как указать элемент в $X = I \setminus Y$, если все элементы X невычислимы?

При отсутствии ответа на последний вопрос конструктивисты от дальнейшей дискуссии отказываются, и такая позиция, по-своему, плодотворна. Она привела к пониманию ряда фундаментальных закономерностей математики[2] и к созданию многих современных математических дисциплин (теория рекурсивных функций и др.). Противоположная позиция — не менее плодотворна. Значительная часть математики стоит на неконструктивной основе, но при этом порождает массу полезных результатов.

И все же с аксиомой выбора дело обстоит не так просто. Стандартный аспект здесь обыкновенный. Постулат (4.2.1) можно принимать или не принимать (как любую независимую аксиому), сравнивая приобретения и потери. На (4.2.1) опираются многие математические факты. Например:

- *Любое векторное пространство имеет базис.*
- *Счетная аддитивность меры Лебега.*
- *Эквивалентность ε, δ-определения непрерывности и определения через сходимость последовательностей.*

4.3 Парадокс Банаха – Тарского

Даже в тех случаях, когда можно обойтись без (4.2.1), использование аксиомы выбора часто дает выигрыш в простоте и обозримости. Поэтому отказ от нее выглядит крайне нежелательным.

В то же время (4.2.1) приводит к следствиям, которые, как говорится, не лезут ни в какие ворота. Вот наиболее яркий пример.

Шар B допускает разбиение на конечное число множеств

$$B_1, \dots, B_k, \tag{4.3.2}$$

при котором из (4.3.2) *можно составить передвижением B_j, как твердых тел (перенос плюс поворот), шар вдвое большего*

[2]Как будто математика не сама придумывает свои закономерности, — сказал бы циник.

радиуса (или вдвое меньшего, или дюжину шаров такого же радиуса).

Это одно из следствий теоремы Банаха–Тарского, которую чаще предпочитают называть парадоксом, что эмоционально вполне оправдано. Рациональное чувство здесь встает на дыбы и требует запрещения (4.2.1). Но тревога на самом деле едва ли обоснована. Речь ведь идет о разбиении (4.3.2), не имеющем ничего общего с обычным геометрическим опытом. Скажем, нигде недифференцируемая функция — такая же химера с физической точки зрения, но там, как бы, лишь периферия игрового поля. Тут же речь идет о хорошо знакомых передвижениях твердых тел — и возникает резкое чувство протеста, которое, по здравому размышлению, с существом дела никак не связано.

Чтобы лучше почувствовать природу аксиомы выбора, полезно рассмотреть несколько вариантов ее применения.

4.4 Разрывная линейная функция

Возьмем простой с виду вопрос. Какая функция φ может удовлетворять свойству

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y). \tag{4.4.3}$$

Вопрос может показаться даже неприличным, поскольку (4.4.3) — это обычное определение линейной функции. Там, правда, есть оговорка насчет непрерывности, которая воспринимается «как сбоку бантик», но играет на самом деле принципиальную роль. Без такой оговорки ответ на поставленный вопрос неожиданный, но продуктивный по последствиям (ведет, например, к решению третьей проблемы Гильберта).

Посмотрим сначала, почему решением функционального уравнения (4.4.3) обычно оказывается линейная функция

$$\varphi(x)=kx. \tag{4.4.4}$$

Из (4.4.3) легко следует $\varphi(px)=p\varphi(x)$ для любого целого p. Равносильно, $\varphi\left(\frac{z}{p}\right)=\frac{1}{p}\varphi(z)$, что получается в результате замены $z = px$. Поэтому $\varphi\left(\dfrac{p}{q}\,z\right) = \dfrac{p}{q}\,\varphi(z)$, откуда

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(1)\,\frac{p}{q},$$

т. е. (4.4.4) обязано выполняться для всех рациональных x, где $k = \varphi(1)$. Окончательный вывод о неизбежности (4.4.4) делается на основе предположения о непрерывности φ (выстреливает та самая оговорка).

Возможность иного решения в отсутствие непрерывности кажется маловероятной. Однако аксиома выбора позволяет указать бесконечное число таких решений, говорить о которых удобнее, опираясь на понятие базиса Гамеля.

Напомним, что вообще базисом называется некая совокупность линейно независимых векторов $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$, через которые однозначно выражается любой вектор x рассматриваемого пространства

$$x = \sum_i x_i\,e_i. \tag{4.4.5}$$

При этом x_i называют координатами вектора x.

В конечномерном пространстве процедура построения базиса элементарна. Берется любая система B линейно независимых векторов (это может быть, в том числе, один вектор) и к ней добавляется любой вектор, который линейно не выражается через B. На каком-то шаге процесс заканчивается — иначе возникает противоречие с конечномерностью.

При наличии аксиомы выбора такая процедура может быть реализована также в бесконечномерном случае, как в счетном варианте (4.4.5), так и в несчетном (как бы с континуальным индексом i). В несчетном варианте необходимые рассуждения несколько усложняются, но суть остается примерно та же. Получаемые таким образом базисы называются *базисами Гамеля*.

Дополнительное разнообразие ситуаций определяется возможностью вводить ограничения на допустимые координаты. Требовать, скажем, их рациональности. В последнем случае действительная прямая становится бесконечномерным векторным пространством из-за рациональной несоизмеримости многих чисел. Например, 3 и $\sqrt{2}$ линейно независимы, поскольку

$$\lambda_1 3 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0$$

невозможно при рациональных λ_i.

Возвращаясь теперь к решению функционального уравнения (4.4.3), возьмем любой базис Гамеля на действительной прямой, выберем некоторый базисный вектор e_λ, например, $e_\lambda = \sqrt{5}$ или $e_\lambda = \pi$, или даже $e_\lambda = 1$, и положим

$$\varphi(x) = kx_\lambda, \tag{4.4.6}$$

что даст функцию, удовлетворяющую (4.4.3).

Скептик может заметить, что все это казуистика и метафизика, поскольку никакого решения (4.4.3) на самом деле не дано. Если $e_\lambda = \sqrt{5}$, то мы не можем даже сказать, чему равно, например, значение $\varphi(4)$, потому что x_λ зависит не только от e_λ, но и от всего базиса[3], о котором ведает (4.2.1), но не мы. Что же это тогда за функция, если мы знаем ее значения лишь в исключительных точках? Выходит, утверждается только факт существования некой функции, который не поддается проверке.

Да, это так. Но это конструктивно работает.

4.5 Решение третьей проблемы Гильберта

Равновеликие многоугольники равносоставлены, т. е. один из них можно разрезать на меньшие многоугольники и сложить из них другой. Этот факт существенно упрощает учение о площадях. При определении же объемов многогранников в R^3 приходится использовать сложный предельный переход. Необходимость это или равновеликие многогранники тоже равносоставлены? В этом вопросе, собственно, и заключалась третья проблема Гильберта, которую отрицательно решил Дэн еще сто лет назад (1900 г.). Таким образом оказалось, что при переходе от R^2 к R^3 ситуация принципиально меняется.

[3]Если в базис входит какое-либо рациональное число e_β, то $\varphi(4) = 0$, если не входит, то $\varphi(4) =?$

Доказательство Дэна было весьма сложным и запутанным, но на алтарь упрощения положили много усилий другие исследователи, и *неравносоставленность куба и правильного тетраэдра* стала относительно прозрачной. Очень просто это можно объяснить с помощью идей, изложенных в предыдущем пункте.

Для этого введем понятие *псевдовеса* многогранника M,

$$P(M) = \sum_i l_i \, \varphi(\lambda_i), \tag{4.5.7}$$

где суммирование идет по всем ребрам длины l_i, λ_i — двугранный угол при i-м ребре, а φ — функция вида (4.4.6). Точнее говоря, пусть θ — двугранный угол при ребре правильного тетраэдра. Достроим множество $\{\theta, \pi\}$ до базиса Гамеля (легко проверяется, что π и θ несоизмеримы), и положим

$$\varphi(\lambda) = \lambda_\theta,$$

т. е. $\varphi(\lambda)$ равно θ-й координате в разложении по базису. Вычислять значения $\varphi(\lambda)$ мы можем лишь в двух ситуациях[4]

$$\varphi(c\theta) = c \quad \text{и} \quad \varphi(c\pi) = 0$$

для рациональных c, что как раз достаточно для наших целей.

Необходимый результат вытекает из неравенства

$$P(\text{куба}) \neq P(\text{тетраэдра}),$$

поскольку

$$P(\text{куба}) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_i l_i^k = 0, \tag{4.5.8}$$

$$P(\text{тетраэдра}) = \varphi(\theta) \sum_i l_i^T = \sum l_i^T \neq 0. \tag{4.5.9}$$

Закулисная эстетика здесь — в следующем. При разрезании куба или тетраэдра на меньшие многогранники и суммировании псевдовесов этих меньших многогранников, вычисленных по формуле (4.5.7), получается тот же самый псевдовес исходного многогранника. Это происходит потому, что суммирование по всем новым ребрам (появившимся в результате разрезания) дает нуль. Дело в том, что если некоторое l лежит внутри

[4]Значения $\varphi(\lambda)$ для других углов λ мы не можем знать из-за произвола достройки базиса, но эти значения нам и не нужны.

M и служит ребром (или частью ребра) новых многогранников, то

$$l\{\varphi(\lambda_1) + \ldots + \varphi(\lambda_s)\} = l\varphi(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s) = l\varphi(2\pi) = 0,$$

если же l лежит на грани M, то опять получается нуль

$$l\{\varphi(\lambda_1) + \ldots + \varphi(\lambda_s)\} = l\varphi(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s) = l\varphi(\pi) = 0.$$

Наконец, если l совпадает с ребром исходного многогранника, то $\lambda_1 + \ldots + \lambda_s$ равно $\frac{\pi}{2}$ в случае куба, и — θ в случае тетраэдра. Таким образом, псевдовес не зависит от способа разрезания и может просто вычисляться по формулам (4.5.8), (4.5.9).

Глава 5

О ценности отрицательных результатов

> Если у них на Небесах нет шоколада, я останусь здесь.
>
> XYZ

Негативные факты подталкивают к всестороннему изучению действительности. В результате иногда шире открываются глаза.

5.1 Теорема Брауэра

Представим себе пластичный шар B, ограниченный сферой S. Понятно, что B можно сплющить и распластать по S. Это означает существование непрерывного отображения $F(x)$ шара на сферу. Факт, вообще говоря, банальный.

Потребуем, однако, чтобы при такой деформации точки S оставались на месте. Другими словами, фиксируем границу S

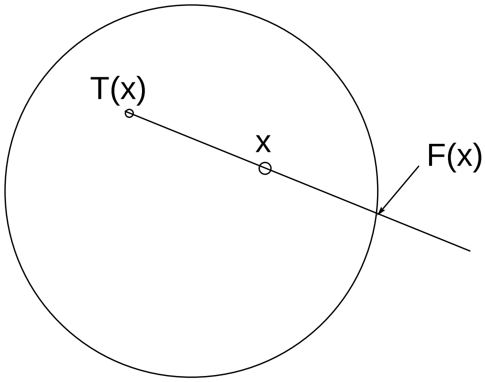


рис. Br.eps

и, деформируя внутренность B, пробуем распластать шар по граничной сфере. Легко видеть, что, не разрывая шар, сделать это невозможно.

Формализация дает «отрицательный» результат:

Не существует непрерывного отображения шара B в граничную сферу S, которое все точки S оставляет на месте.

Негативный характер утверждения не умаляет его ценности, ибо надлежащая переформулировка приводит к позитивному результату, *теореме Брауэра*:

Любое непрерывное отображение $T(x)$ шара B в себя имеет неподвижную точку, т. е.

$$x = T(x) \tag{5.1.1}$$

для некоторого $x \in B$.

Это ценный инструмент для выяснения разрешимости уравнений. От предыдущего (негативного) результата до теоремы Брауэра — буквально один шаг.

В предположении противного, $x \neq T(x)$ для любого $x \in B$, — соединим x и $T(x)$ отрезком прямой и продолжим его за точку x до пересечения со сферой S в точке $F(x)$. Понятно, что $F(x)$ — непрерывное отображение B в S, оставляющее сферу S на месте. Противоречие.

5.2 Энергия негатива

Вот пример из другой области. Если проблема совпадения P и NP классов (полиномиально разрешимых и переборных[1] задач) имеет отрицательное решение, $P \neq NP$, — это в каком-то смысле плохо, потому что большая масса задач остается без эффективных алгоритмов решения. Но это хорошо для криптографии, базирующейся, в основном, как раз на предположении $P \neq NP$. Кто-то может подумать, не дай бог, $P = NP$ — и секретность рухнет. Не рухнет. Просто будет развиваться в новых условиях. Да еще трудные пока задачи окажутся легкорешаемыми, и большая группа математиков, потеряв работу, направит стопы, может быть, как раз в криптографию.

Разумеется, «качели» возникают не всегда. Отрицательные, по ощущению, результаты чаще оказываются ценны сами по себе, а не потому, что их использование в конкурирующей области дает нечто конкретно положительное.

Взять хотя бы большую группу математических фактов, которые принято называть контрпримерами. Терминология, надо признать, несколько странная. В разряд контрпримеров обычно попадают самые типичные ситуации. Скажем, почти все непрерывные функции недифференцируемы, но пример Вейерштрасса нигде недифференцируемой функции — это контрпример. Контрпример потому, что интуиции такую химеру трудно вообразить. Поэтому трюк Вейерштрасса произвел в свое время на математическое сообщество сильное впечатление. Яркие эмоции сопровождали открытия и других типичных фактов и объектов: иррациональность $\sqrt{2}$ (древние греки), трансцендентные числа (Лиувилль), неразрешимые множества, недоказуемые утверждения и т. п.

Привлекательны также и менее масштабные явления, как например:

- *Функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках (Риман)*;
- *Периодическая функция* $f(x) \neq \mathrm{const}$, *не имеющая наименьшего периода*[2];

[1] Точнее говоря, NP-полных, т. е. универсально переборных задач.

[2] Этому требованию удовлетворяет, например, функция $f(x) = 1$ в рациональных точках x, и $f(x) = 2$ — в иррациональных.

- *Разрывная линейная функция (см. главу 4).*

Истоки притягательности здесь достаточно очевидны. Опыт на 90% состоит из неудач и поражений. Должен состоять — иначе праведные пути будут висеть в воздухе, не имея фундамента и контраста. Поэтому «плохие» функции, множества, факты — пользуются повышенным спросом. Примерно как детективы. То и другое тонизирует, напоминая о неприятностях, которые, по законам жанра, должны быть правдоподобны и жизненны, а мы должны тренироваться, чтобы избегать...

5.3 Спрос на реальные неприятности

Реальность математических неприятностей сродни правдивости литературных образов. В предыдущей главе, например, упоминалась аномальная ситуация трех и более областей, имеющих общую границу. Факт, безусловно, яркий, но чересчур надуманный, вроде бы. Поэтому удовольствие от неожиданности сильно обесценивается уверенностью, что на практике такое не встречается.

Оказывается, встречается (!) — причем в самых банальных ситуациях. Итерационная процедура

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} \tag{5.3.2}$$

на комплексной плоскости вычисляет корень кубический из единицы, каковых имеется три,

$$1, \qquad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \tag{5.3.3}$$

и есть, соответственно, три области притяжения A, B, C. Процесс (5.3.2) сходится к одному из корней (5.3.3) в зависимости от того, какой области принадлежит z_0.

Пусть теперь Γ_A, Γ_B, Γ_C обозначают границы областей A, B, C. Невероятно, но факт:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \Gamma_C\,,$$

т. е. области притяжения имеют одну и ту же границу[3].

Этот пример существенно дополняет картину «рытья каналов» (глава 4) и кардинально меняет представление о рассматриваемом явлении. Если раньше казалось, что ситуация трех областей с общей границей крайне патологична и неактуальна, то теперь она смотрится как рядовая.

Придуманные «гадости» (в том числе математические), как правило, оживают. Или обнаруживается, что они были живы с самого начала. И этот процесс всегда в центре внимания.

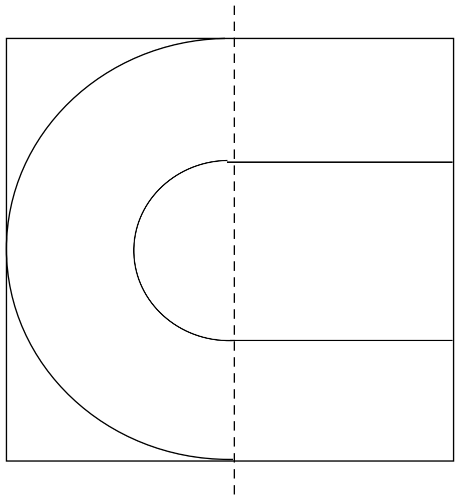


рис. 6.2. Подкова Смейла

Почему, например, стала знаменитой так называемая *подкова Смейла*? Там ведь по сути все очень просто и даже банально. Рассматривается элементарное преобразование $f(x)$ единичного квадрата в себя. Квадрат вытягивается в прямоугольную полоску высотой $\frac{1}{3}$, после чего полоска укладывается на квадрат в виде подковы, как показано на рис. 6.2. Это и есть отображение f. Смейл заметил, что интересные вещи происходят при итерациях f. В вертикальном сечении,

[3]Это простейшая ситуация возникновения фракталов, которую в начале прошлого века изучал Гастон Жюлиа.

изображенном пунктиром, при отображении f из отрезка $[0,1]$ выпадает средняя треть $\left(\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right)$ и остаются две крайние (в заштрихованной области),

$$\left[0, \quad \frac{1}{3}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{2}{3}, \quad 1\right]. \tag{5.3.4}$$

Легко видеть, что при повторной итерации f из отрезков (5.3.4) опять выпадут средние трети и т. д. Что получается в пределе?

В пределе получается знаменитое канторово множество. Другими словами, ничего нового. Что же тогда дает подкова Смейла? Оказывается, очень много.

Пока канторово множество строилось чисто умозрительным выбрасыванием третей из отрезка, а потом из оставшихся частей, — результат представлялся монстром казуистики, имеющим сугубо академический интерес. Теперь же выясняется, что «монстр» живет рядом за стеной. Заурядная функция f элементарно осуществляет процедуру «выбрасывания третей».

Примечания и дополнения.

1. Общая идеология разрешимости уравнений (включающая теорему Брауэра в виде маленького фрагмента) базируется на геометрически прозрачной картине.

Пусть Ω — ограниченная область плоскости (или пространства) с границей Γ, и пусть непрерывное отображение f переводит Γ в замкнутую поверхность $f(\Gamma)$. Если точка 0 лежит внутри $f(\Gamma)$, то уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет решение в Ω (потому, что образ $f(\Omega)$ обязан накрывать внутренность $f(\Gamma)$).

Проверить, лежит ли 0 внутри $f(\Gamma)$, можно, например, пытаясь снять (сдернуть) $f(\Gamma)$ с «гвоздика» 0 (рис. 6.3). Другими словами, деформируя поверхность $f(\Gamma)$ и не касаясь при этом нуля, увести $f(\Gamma)$ подальше от 0, а потом, скажем, сжать ее в какую-то точку $w \neq 0$. Формализовать это можно так: 0 не лежит внутри $f(\Gamma)$, если непрерывная деформация (гомотопия) $h(x,\tau)$ такова, что

$$h(x,0) \equiv f(x), \quad h(x,1) \equiv w \neq 0, \quad x \in \Gamma$$

и

$$h(x,\tau) \neq 0$$

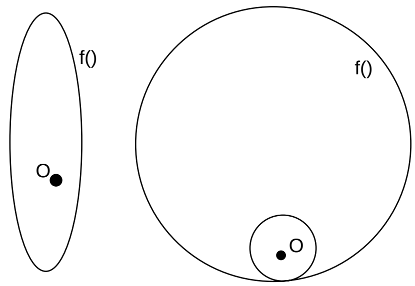


рис. 6.3. Где внутренность?

при любых $x \in \Gamma$, $\tau \in [0,1]$, что называют *невырожденностью деформации.*

Общий результат теперь звучит так: *уравнение (5.1.1) разрешимо в Ω если не существует невырожденной деформации.*

Общность тут покупается, конечно, дорого. «Не существует» и «не виноват» доказывать одинаково трудно, а «презумпция невырожденности», ясное дело, не годится. Поэтому на практике пользуются различными частными случаями. Теорема Брауэра — один из них. Другой вариант. Если $0 \in \Omega$, а $f(\Gamma)$ удается невырожденно продеформировать в Γ, то — все в порядке (потому что Γ в точку $w \neq 0$ потом не деформируется). Деформация может быть, например, линейной

$$h(x,\tau) = (1-\tau)x + \tau f(x).$$

Для ее невырожденности, очевидно, необходима и достаточна непротивоположная направленность векторов x и $f(x)$ на Γ.

Простота описанной картины в определенной степени обманчива. Примерно так же, как ситуация в теореме Жордана (глава 4). Усилия по наведению порядка здесь уводят весьма далеко от наглядности, и топология из «мира картинок» переходит в абстрактную нишу, где у человека нет опыта и ощущений[4]. В этих условиях прозрачные, хотя и нестрогие, модели особенно полезны.

2. Тенденция переработки искусственных построений в естественные довольно сильна, и она проявляется на всех уровнях.

Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

поначалу представляется искусственной. Тем не менее,

$$f_k(x) \to f(x) \text{ при } k \to \infty,$$

где

$$f_k(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos k!\, \pi x)^{2n}.$$

[4]Не считая чувства дискомфорта.

Получается, конечно, та же самая функция, но с указанием на возможное происхождение, что характеризует совсем другой подход. Как в медицине... Результат болезни фиксирует патологоанатом, изучает причины и лечит — целитель. В математике возможны такие же направления деятельности.

Глава 6

Парадоксы бесконечности

И, сидя с милой на траве примятой,
Ты будешь с жаром говорить, любя,
Слова, что были сказаны когда-то.
Ты заблуждаться будешь, веря свято,
Что я не говорил их до тебя.

КАЙСЫН КУЛИЕВ

Бесконечность недаром известна как место, где происходит то, чего не бывает. Какая из двух последовательностей,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n, \ldots \tag{6.0.1}$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots,\ n^2, \ldots \tag{6.0.2}$$

содержит больше членов? С одной стороны, множество квадратов — это сильно прореженный натуральный ряд. С другой — члены этих последовательностей могут быть поставлены во взаимнооднозначное соответствие,

$$n \Longleftrightarrow n^2,$$

что дает эмоционально парадоксальный ответ о «равенстве» — говорят, о равной мощности — множеств (6.0.1) и (6.0.2).

Пример, конечно, уже набил оскомину, но он в простейшей форме обнажает суть противоречия. Когда изучаемый объект ограничен, любое ошибочное рассуждение рано или поздно упирается в стену. Если же рассуждение ведется на бесконечном множестве, то разногласия часто уходят за горизонт, не вступая в конфликт. Представим, что государство берет у нас каждый божий день 10 долларов, а отдает — один. Если бы процесс был бесконечен, то по его завершению мы были бы квиты, к удовольствию государства, потому что любой n-ый доллар был возвращен нам в n-ый раз.

Характер возникающих противоречий, конечно, богаче, и некоторые из них серьезно затрагивают основания математики. Тем не менее, запретить «то, чего не бывает» было бы ошибкой. Бесконечность эффективно работает как инструмент.

Допустим, необходимо решить уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x+2}}=2. \tag{6.0.3}$$

Двойку под радикалом заменим на левую часть (6.0.3), и повторим эту операцию бесконечное число раз. В результате (6.0.3) перейдет в уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}=2 \tag{6.0.4}$$

с бесконечным числом радикалов (двойка «ушла за горизонт»). Поскольку бесконечность минус один — опять бесконечность, уравнение (6.0.4) эквивалентно

$$\sqrt{x+2}=2,$$

откуда $x=2$. Тот же фокус работает и в случае, когда исходное уравнение вида (6.0.3) содержит дюжину радикалов, и последовательное избавление от них утомительно.

Но дело, конечно, не в отдельных фокусах. Бесконечность — одна из вечных тем абстрактного мышления и одна из наиболее продуктивных идей.

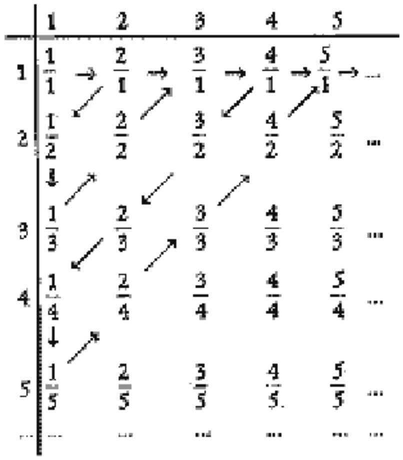


рис. 7.1.

6.1 Интуиция в шоке

Долгое время все бесконечности считались как бы равными друг другу. Революцию в понимании этого вопроса совершил Георг Кантор. Первым делом он задался целью выяснить, какие бесконечности эквивалентны натуральному ряду и какие превосходят его по мощности. Первое естественное предположение, что рациональных чисел больше, чем целых, оказалось ложным. Их оказалось столько же. Для установления этого факта рациональные числа располагаются в виде бесконечной квадратной таблицы и нумеруются вдоль стрелочек, как на рис. 7.1.

В результате число $\frac{1}{1}$ получает номер 1, $\frac{1}{2}$ — номер 2, $\frac{2}{1}$ — номер 3 и так далее. Ранее встречавшиеся числа пропускаются. Легко видеть, что такой способ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и натуральным рядом. Любое множество, эквивалентное в этом смысле натуральному ряду, называют *счетным.*

Далее, как хорошо известно, Кантор показал, что множество действительных чисел, отрезка $[0, 1]$ — уже несчетно. В предположении противного их можно пронумеровать

$$a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n, \ldots, \tag{6.1.5}$$

и тогда любое число

$$b = 0,\, \beta_1,\, \beta_2 \ldots,$$

отличающееся от a_1 в первом десятичном знаке, от a_2 — во втором, и так далее, не входит в список (6.1.5), что дает противоречие[1]. Бесконечность $[0, 1]$, таким образом, оказывается более мощной (говорят, *континуальной*).

Драматичный момент наступил, когда Кантор попытался доказать, что на квадрате точек больше, чем на отрезке. После трехлетних мучений вопрос был решен отрицательно. «Я вижу это, но не верю», — писал Кантор Дедекинду.

Вот доказательство, на которое ушло три года. Каждая точка единичного квадрата задается двумя координатами

$$x = 0,\, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad y = 0,\, \beta_1\beta_2 \ldots$$

Ей можно сопоставить точку отрезка

$$z = 0,\, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \ldots$$

Элементарное уточнение деталей показывает, что получается взаимнооднозначное соответствие

$$z \Longleftrightarrow (x, y).$$

Конечно, это был шок.

6.2 Наваждение равносоставленности

Поскольку история с квадратом миллион раз пересказывалась, ощущение логической катастрофы давно притупилось. О мытарствах Кантора теперь судят несколько свысока, а вот парадокс равносоставленности Банаха – Тарского (глава 4) до сих пор сохраняет остроту, хотя в том и другом случае речь идет об очень близких явлениях.

[1]Такой способ построения числа b называют диагональным.

Можно даже говорить о взаимнооднозначном соответствии не отрезка и квадрата, а двух отрезков разной длины, соответствие которых устанавливает какая-нибудь гладкая функция $f(x)$, как на рис. 7.2.

Это ведь тоже удивительно. Выходит, что отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ состоят из одного и того же количества точек. Причем, если равносоставленность (6.0.1) и (6.0.2) обеспечивается уводом расхождения при подсчете членов в бесконечность, то в данном случае все находится в ограниченном поле зрения, но все равно получается «1=2». Конечно, бесконечность здесь подкрадывается изнутри, и отрезок оказывается тем логическим изобретением, которое позволяет упаковать ее в ограниченный объем.

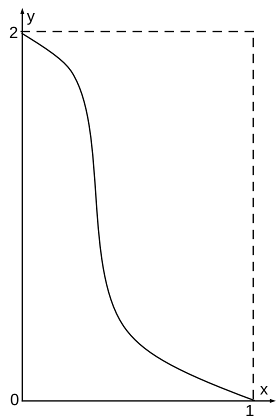


рис. 7.2.

Возвращаясь к рис. 7.2, можно сказать так. Функция f показывает, в какую точку $y = f(x)$ надо передвинуть x, чтобы в результате из $[0, 1]$ получился отрезок $[0, 2]$. Теорема Банаха – Тарского дополнительно дает не так много. Оказывается, точки можно передвигать не каждую в отдельности, а группами, причем эти группы (множества) можно двигать как твердые тела. Результат, безусловно, красивый. Из-за трудности доказательства он сохраняет мистический ореол, поскольку мало кто знает, в чем там дело.

Никому ведь не хочется расходовать время на Банаха с

Тарским, которое можно потратить на сон и другие полезные дела. Поэтому еще раз изводить типографскую краску едва ли стоит. Но можно коротко объяснить близкий результат.

Пусть фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Точки x, $y \in [0,1]$ назовем *π-соизмеримыми,* если

$$\{x-y\} = \{k\pi\}$$

при некотором целом, положительном или отрицательном, k.

Отрезок $[0,1]$ разобьем на непересекающиеся множества Z_α π-соизмеримых чисел, в каждом Z_α фиксируем по одному элементу z_α (аксиома выбора), из которых образуем множество Z, и рассмотрим множества[2]

$$Z^k = \{Z + k\pi\}.$$

Легко видеть, что Z^k переходит в Z^p ($p > k$) при сдвиге одной части элементов Z^k на расстояние $(p-k)\,\pi$ вправо и другой части — на расстояние $1-(p-k)\,\pi$ влево. Другими словами, Z^k можно разрезать на две части и, передвигая те, как твердые тела, образовать Z^p (случай $p < k$ рассматривается аналогично[3]). Наконец очевидно, что Z^k ***в сумме дают весь отрезок*** $[0,1]$.

Но любая подпоследовательность Z^{γ_k} в сумме тоже дает весь отрезок $[0,1]$ после предварительной перестройки множеств Z^{γ_k} как твердых тел[4]. Поэтому, если семейство $\{Z^k\}$ разбито изначально на миллион бесконечных совокупностей $\{Z^{\gamma_k}\}$, то из каждой такой совокупности можно сложить отрезок $[0,1]$, а потом миллион отрезков поставить рядом, образовав $[0,10^6]$ из кусков $[0,1]$.

Разумеется, это пока лишь *счетная равносоставленность* (кубов неодинаковых размеров), представляющая собой первый шаг в направлении результата Банаха – Тарского, который в начале прошлого века осуществил Хаусдорф. Далее можно показать, что в R^3 число «кусков» можно сделать конечным, но для этого требуется чуть больше терпения.

[2]Состоящие из всевозможных элементов $\{z + k\pi\}$, $z \in Z$.

[3]Если концы отрезка $[0,1]$ соединить, образовав окружность, то Z^p из Z^k будет получаться жестким поворотом.

[4]Разрезание и движение частей переводит Z^{γ_k} в Z^k. В результате совокупность множеств $\{Z^{\gamma_k}\}$ переходит в полную совокупность $\{Z^k\}$.

Глава 7

Загадка теории вероятностей

У случайности есть своя причина.

ПЕТРОНИЙ

На фоне других математических дисциплин теория вероятностей (ТВ) выделяется большим числом интуитивно неожиданных выводов и решений. В чем причина? Об этой загадке, собственно, и речь.

7.1 Вопреки ожиданиям

Неожиданности в ТВ возникают с первых шагов. В классе 25 учеников. Какова вероятность того, что хотя бы двое родились в один день? Оказывается — больше половины, что явно противоречит ожиданию. И таких задач много.

Почему-то получается, что интуиция о вероятностях всегда имеет мнение, причем во многих случаях ошибочное. На другие вопросы даже не откликается, а как только речь о вероятности — она тут как тут.

Возьмем три одинаковые картонки. На одной с обеих сторон нарисуем букву A, на другой — B. На третьей картонке *с одной стороны нарисуем A, с другой стороны — B. Положим картонки в мешок, одну вытащим наугад и положим на стол. Предположим, что на видимой стороне картонки изображена буква A. Какова вероятность, что на другой стороне — тоже A?*

«Одна вторая», — ошибочно отвечает интуиция. Логика простая. Если сверху A, значит вытащена одна из двух картонок: AA или AB. Вероятности вытащить ту и другую — одинаковы.

Причина заблуждения далеко не очевидна. Нельзя забывать, что картонка не только случайно вытаскивается, но и случайно укладывается потом на одну из сторон. Рассудим так. Сколько в мешке лежит нарисованных букв A? Три штуки, причем две из них на картонке AA и лишь одна — на AB.

Раз мы видим на столе одну сторону картонки, то из мешка, выходит, тащим полкартонки, то есть одну букву. Букву же A из AA вытащить в два раза более вероятно, чем из AB. Получается, вероятность того, что перед нами на столе лежит картонка AA, равна $\frac{2}{3}$.

Еще одна простая с виду задача. Имеется две шестигранные кости A и B. Грани A помечены двумя шестерками и четырьмя двойками, а грани B — тремя единицами и тремя пятерками. При бросании костей выигрывает та, у которой на выпавшей грани — большее число. Чему равна вероятность того, что выиграет кость A?

Для наглядности запишем:

$$\begin{array}{cccccccc} A & - & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 2. \\ B & - & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

Шестерка у A выпадает с вероятностью $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. В этом случае A выигрывает автоматически. С вероятностью $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ у A выпадает двойка. В этом случае A выигрывает, если у B выпадает единица, что имеет вероятность $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Поэтому A у B выигрывает с вероятностью

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Теперь возьмем еще две кости:

$$C \;-\; 4\;\;4\;\;4\;\;4\;\;0\;\;0.$$

$$D \;-\; 3\;\;3\;\;3\;\;3\;\;3\;\;3.$$

Аналогично предыдущему легко посчитать и убедиться, что A выигрывает у B, B — у C, C — у D, — с одной и той же вероятностью $\frac{2}{3}$. Получается как бы

$$A > B, \quad B > C, \quad C > D.$$

Вопрос:

$$A > D \text{ или } D > A\,?$$

представляется даже нелепым. Тем не менее, D выигрывает у A (а не A у D) с вероятностью $\frac{2}{3}$. Как говорится, приехали.

7.2 Источники заблуждений

У ошибок интуиции много источников. В последнем случае на поверхности лежит инерция мышления — перенос привычных свойств транзитивности на объекты иной природы. Но есть и общая причина. Даже в самых простых вероятностных задачах взаимодействуют несколько факторов. Мышление же больше приспособлено для анализа линейных цепочек причин и следствий. А если без дипломатии, то уже два взаимодействующих фактора ставят разум в тупик.

Вот простейшая ситуация. Допустим, что, как в Южном полушарии, так и в Северном, процент рыжих среди мужчин выше, чем — среди женщин. Можно ли на этом основании утверждать, что процент рыжих среди мужчин вообще выше?

Можно держать пари, что 99% населения ответят положительно, хотя к тому нет никаких предпосылок. Пусть, например, в Южном полушарии 10 женщин, из них одна рыжая, и 90 мужчин — 10 рыжих. В Северном — картина другая: 90 женщин — 89 рыжих, 10 мужчин — все рыжие.

В каждом полушарии процент рыжих мужчин действительно выше:

$$\frac{10}{90} > \frac{1}{10}, \; \frac{10}{10} > \frac{89}{90}.$$

В целом же по Земле выходит наоборот: среди мужчин — 20% рыжих, среди женщин — 90%.

В экономике и медицине подобного рода «статистические» выводы — не редкость.

В рассмотренных примерах расхождение между «тем, как оно есть» и «тем, что кажется» виновата была интуиция. Ее поспешность, некритичность... Но есть сектор противоречий, где виновата, пожалуй, Теория.

Возьмем «Петербургский парадокс», которому уже около трехсот лет и которым занимались многие выдающиеся ученые.

Бросается монета. Если герб выпадает в первый раз в n-м бросании, — участнику игры выплачивается 2^n франков.

Математическое ожидание выигрыша,

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots = 1 + 1 + \ldots,$$

бесконечно. Поэтому Теория рекомендует при оплате ставки за участие в игре денег не жалеть. Однако ни один здравомыслящий человек не поставил бы и сотни франков... И был бы прав.

Потенциально бесконечная серия бросаний здесь направляет мысль по ложному следу. Поэтому рассмотрим другую игру с той же подоплекой. Монета бросается один раз. Плашмя она падает с вероятностью $1-2^{-100}$, и тогда выплачивается 1 доллар. На ребро монета становится с вероятностью 2^{-100}, и тогда выплата составляет 2^{200} долларов. Математическое ожидание выигрыша $\sim 2^{100}$ долларов. Тем не менее очевидно, что больше одного доллара за участие в игре платить глупо. Потому что событие, имеющее вероятность 2^{-100} «никогда» не случится, и какая разница, сколько за него обещано.

Мораль здесь в том, что не надо поддаваться гипнотизирующему влиянию «высоконаучных» понятий типа математического ожидания. Оно может служить критерием разумности ставки, но — не для любых игр. Надо просто видеть, что происходит за кадром.

Еще один принципиальный источник возможных разногласий — понятие *независимости*, которое, собственно, и выделяет ТВ из общей теории меры.

События A и B называют независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{7.2.1}$$

т. е. вероятность того, что произойдет «и A, и B», равна произведению вероятностей A и B. Это, между прочим, совсем не то, что подразумевает под независимостью интуиция, и, может быть, не совсем то, чего бы хотелось от теории.

Поясним на примере. Бросают две монеты. Пусть выпадение первой монеты гербом обозначает событие A, второй — B. Рассмотрим также C — «только одна монета выпала гербом».

Для симметричных монет все три события попарно независимы, поскольку

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}. \tag{7.2.2}$$

С независимостью A и B интуиция согласна, но не с независимостью A и C (или B и C). И у нее есть основания. Независимость (7.2.2) имеет как бы «арифметический» характер, является результатом численного совпадения. Качественные отличия взаимосвязей событий выявляются при нарушении симметрии монет. Для несимметричных монет (с вероятностью выпадения герба $\neq 1/2$) свойство независимости A и B вида (7.2.1) сохраняется, а вот равенства

$$P(AC) = P(A)P(C), \;\; P(BC) = P(B)P(C)$$

нарушаются.

Здесь уместно замечание общего характера. Математическое описание любой реальной системы всегда неточно в результате неизбежных ошибок при определении параметров, пренебрежении малозначащими факторами и т. п. При этом естественно, что модель может представлять практический интерес лишь при наличии определенной нечувствительности к малым ее изменениям, возмущениям. В противном случае нет никаких гарантий, что выводы соответствуют поведению и свойствам изучаемого реального объекта.

Это соображение каждый раз извлекается на свет, когда та или иная теория сталкивается с аномалиями вида «малые причины — большие последствия». ТВ иногда не отвлекается на такие «мелочи».

7.3 Проклятие или подарок?

Трудности решения задач большой размерности часто порождают афоризмы типа: «если в задаче одна переменная — это не задача, если больше двух — она неразрешима». А как одолеть «проклятие размерности», когда число переменных измеряется десятками, сотнями, тысячами? Как ни странно, большая размерность нередко является не проклятием, а подарком, который позволяет резко упростить решение, переходя на агрегированное описание. Вопрос только упирается в наличие подходящего инструмента.

Классический образец «испарения сложности» дает статистическая физика, но гипнотизирующая роль этого примера настолько велика, что за пределами термодинамической специфики возможности агрегирования остаются малоизученными. Другой стандартный пример — ***закон больших чисел***, где речь идет о стабилизации линейной функции

$$L_n(x) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Долгое время считалось, что стабилизацию нелинейных функций обеспечивают свойства симметрии. На самом деле это не так. Если под стабилизацией (асимптотическим постоянством) подразумевать стремление к нулю дисперсии (среднеквадратического уклонения), то примеры наихудшей стабилизации дают как раз симметрические функции.

Истинная причина стабилизации заключается в ограниченности скорости роста функции $f_n(x)$, т. е. в равномерной по n ограниченности градиента,

$$|\nabla f_n(x)| \leqslant \gamma. \tag{7.3.3}$$

Если, например, величины x_i равномерно распределены на $[0,1]$ и выполняется условие (7.3.3), то при $n \to \infty$ функция $f_n(x)$ асимптотически постоянна.

Рекламный вариант утверждения мог бы звучать так:

Все функции большого числа переменных, имеющие ограниченный рост, — константы!

Пусть необходимо вычислить среднее геометрическое n чисел при заданном среднем арифметическом. Оказывается, при достаточно большом n сколь угодно точно выполняется равенство

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = \gamma \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right),$$

где γ — константа.

Таким образом при большом n нет необходимости производить трудоемкое перемножение с последующим извлечением корня n-й степени. Достаточно вычислить агрегат $X = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ и воспользоваться приведенной формулой. Высокая точность обеспечивается уже при n порядка нескольких десятков.

Глава 8

Подводные рифы оптимизации

> Мы должны думать не о том, что может пригодиться, а о том, без чего не сможем обойтись.
>
> ДЖЕРОМ

Червячок оптимизации глубоко сидит в психологии. Человек не только сам оптимизирует, но и с удовольствием подмечает и выискивает оптимизацию в природе. «Свет распространяется по наикратчайшему пути» — вот что доставляет удовлетворение, а не какой-то там «угол падения равен углу отражения». Видимо, по этой причине экстремальные задачи в математике пользуются большой популярностью.

8.1 Простая ловушка

Имеется некоторая функция двух переменных $z = \varphi(x, y)$. Рассечем ее график вертикальной плоскостью, проходящей через нулевую точку. В разрезе будет кривая. Допустим, что в любом таком сечении получается кривая, имеющая минимум в

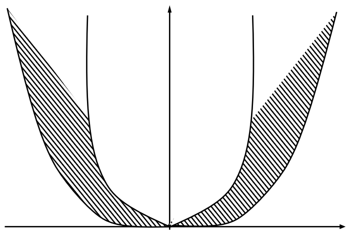


рис.9.1. Графики сомножителей

нулевой точке. Обязана ли в этом случае функция $\varphi(x, y)$ тоже иметь минимум в нуле?

Интуиция, воспитанная на простых примерах, дает положительный ответ. Правильный ответ — отрицательный.

Возьмем простую ситуацию

$$z = 2x^4 - 3x^2y + y^2. \tag{8.1.1}$$

На любой прямой $y = ax$ функция

$$z = 2x^4 - 3ax^3 + a^2x^2$$

принимает в нуле локально минимальное значение, поскольку поведение функции в нуле определяется старшим членом. Здесь это a^2x^2. При $a = 0$ имеем $z = 2x^4$ — тоже минимум.

В сечении $x = 0$ — парабола, $z = y^2$ — опять минимум.

Однако для ненулевых x, y, удовлетворяющих условию $y = cx^2$, где $1 < c < 2$, функция (8.1.1) отрицательна. Поэтому в нуле она не может иметь минимум. Причину понять легко, записав z в виде

$$z = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

откуда ясно, что $z < 0$ в заштрихованной области (рис. 9.1).

8.2 Прием визуализации

Если у непрерывной функции одного переменного имеется единственный локальный минимум и отсутствуют локальные максимумы, то этот минимум автоматически оказывается глобальным.

Можно ли то же самое сказать о функции двух переменных?

Здесь удобно мыслить в терминах линий уровня. Пусть, например, $\varphi(x, y)$ принимает в нуле минимальное значение, скажем нуль. Начинаем резать график $z = \varphi(x, y)$ горизонтальными плоскостями, которые пересекают ось z в точках $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ и так далее. В сечениях будут получаться линии постоянного уровня. Если их спроектировать на плоскость (x, y), может получиться картинка как на рис. ...

Вот другой вариант (рис. ...). Здесь функция имеет единственный локальный минимум, но он не глобальный. При этом у функции нет никаких других экстремальных точек, ни минимумов, ни максимумов, ни седловых точек.

Чтобы мысленно представить график этой функции, полезно рассмотреть физическую модель. Возьмем два бесконечных шнура и вытянем их по линиям уровня 1. Закрепим шнуры, набросим сверху гибкую пленку, приклеим ее к шнурам и будем продавливать... Ну, в общем так, чтобы получилось как на картинке.

Это, кстати, удобный инструмент геометрического мышления. Поэтому, если не получилось, стоит попробовать еще раз — не ради задачи, а ради инструмента.

Для решения математических проблем нередко придумывались наглядные модели. Тот, кто нащупывал продуктивную связь или же находил мост, ведущий на другой берег, становился обладателем волшебной палочки. Это большая тема для отдельного разговора.

Еще один пример. Поверхность гор можно рассматривать как график функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$. Если есть две вершины (два локальных максимума), между ними обычно — перевал (седло). На рис. 9.4 изображены линии постоянного уровня для седловой точки.

Интуиция подталкивает к мысли, что при двух вершинах перевал обязателен. Правильный ответ здесь, как ни странно, и да и нет. Вот пример (рис. 9.5). К двум параллельным шнурам приклеим пленку. В средней полосе продавим ее наискосок, а по краям вспучим две вершины.

Перевала нет. Он утащен в бесконечность. На поверхности шара (Земли) ситуация иная. Седло девать некуда. Его можно отдалить от вершин, но не убрать.

8.3 Домашние заготовки Творца

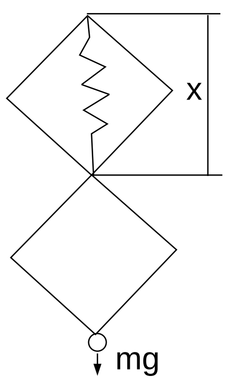


рис. 9.6

В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума. Так говорил Эйлер, приписывая глубину замысла Всевышнему. Можно было бы сказать и по другому. Нет ничего в мире, что нельзя было бы, перевернув, выставить в форме оптимизации. Так или иначе, но уже почти вся физика стоит на вариационных принципах, и это дает свои плоды.

Поначалу кажется, что дрейф, скажем, механики к вариационным мотивам идет по пути эквивалентных преобразований. Шаг за шагом законы Ньютона трансформируются в более удобные формы. Уравнения Лагранжа, потом Гамильтона... Затем совершается некоторый логический скачок, и придумываются вариационные задачи, решением которых были бы исходные уравнения движения. В результате возникают новые категории мышления, возносящие механику на более высокие этажи.

Пробуждение идей оптимизации плодотворно на самом элементарном уровне. В той же механике они эффективно работают уже в статике. Чему, например, равно натяжение пружины на рис. 9.6? Проще всего положиться на минимизацию потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - 2mgx + const.$$

Из $U'(x) = 0$ сразу получается $kx = 2mg$.

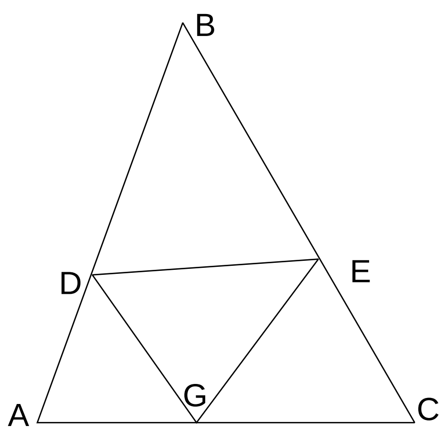


рис. 9.7

Понятие энергии может помогать в решении и чисто математических задач. Допустим, в остроугольный треугольник надо вписать треугольник минимального периметра с вершинами, лежащими на сторонах исходного (*задача Шварца*). Сделаем проволочную модель $\triangle ABC$ (рис. 9.7). На AB, BC, AC оденем свободно скользящие кольца D, E, G, которые соединим резинками. Натяжение резинок пусть равно f и не зависит от величины растяжения. Потенциальная энергия тогда

$$U = f(DE + EG + GD). \tag{8.3.2}$$

Модель, предоставленная сама себе, решает задачу автоматически. В равновесии достигается минимум (8.3.2), т.е. минимум периметра $\triangle DEG$, а из условий равновесия очевидно, что равнодействующая сил растяжения в каждой точке D, E, G должна быть ортогональна соответствующей стороне $\triangle ABC$. Это уже другая задача, и ее решение известно: треугольник $\triangle DEG$ получается соединением оснований высот $\triangle ABC$.

Вот более сложная задача. Через точку O надо провести плоскость, которая бы отсекла от трехгранного угла пирамиду наименьшего объема (рис. 9.8).

Простое решение опять дает физическое моделирование и минимизация потенциальной энергии. В точке O шарнирно закрепим плоскость ABC, и всю модель поместим в герметичный сосуд, заполненный газом. Внутри $SABC$ — вакуум. В равновесии объем газа максимален, объем $SABC$ — минимален. С другой стороны, в равновесии центр давления газа должен совпадать с точкой O, поэтому O должна быть точкой пересечения медиан $\triangle ABC$.

Аналогичные по духу динамические задачи требуют для своего описания больше места, но там и результаты более весомы.

Много есть задач оптимизации, которые человек, уподобляясь Богу, придумал сам. Их обычно легко отличить по некоторой искусственности и надуманности. Дело в том, что видимая потребность в оптимизации не всегда является таковой. Довольно часто она проистекает из необходимости как-то осмысленно решать проблему выбора. Выбора маршрута, расписания, траектории и т.п. Задаваясь критерием, исследователь нередко попадает в капкан собственного замысла. Исходная задача всегда в той или иной степени неточна и приблизительна. В этих условиях задание жесткой целевой функции,

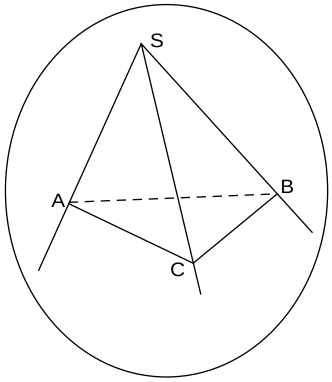


рис. 9.8

мягко говоря, нелогично. Критерий дает определенность цели, но требует учета разных мелких деталей, которые к реальной задаче обычно не имеют никакого отношения. И наоборот, существенные факторы, которые не удалось отразить в описании модели, вообще остаются за бортом оптимизации.

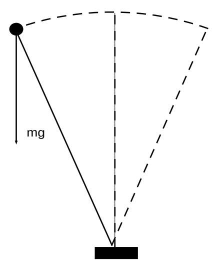
В результате получаются решения типа «двух ведер уксуса в качестве оптимальной диеты». Нелепость уксусного решения, слава богу, очевидна, а вот экономические планы «наилучшего» развития не так наглядны.

Глава 9

Бифуркации и катастрофы

Десять причин убеждают меньше, чем одна.

XYZ



При увеличении частоты вибрации точки подвеса — маятник «вдруг сходит с ума». Бросает нижнее положение равновесия — и начинает колебаться около верхнего. Это пример *бифуркации*, качественного изменения поведения системы при возмущении параметров. Обычно говорят о «малых возмущениях», но это потому, что сюжет качественного скачка всегда развивается в окрестности критических значений. Чуть-чуть левее — и устойчивая система идет вразнос.

9.1 Причины метаморфоз

Динамические фокусы часто определяет статика. Если, например, система описывается дифференциальным уравнением (в том числе векторным)

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon), \tag{9.1.1}$$

то динамика зависит от того, что происходит с равновесием, т. е. с решением уравнения

$$F(x, \varepsilon) = 0,$$

при изменении параметра ε.

В популярной ситуации, когда $F(x, \varepsilon)$ представляет собой градиент некоторой функции φ, равновесием служат критические точки потенциала φ, в которых градиент $\nabla F(x, \varepsilon)$ обнуляется.

При малом возмущении εx функции $\varphi(x) = x^3$, то есть при переходе к $x^3 + \varepsilon x$, критическая точка $x = 0$ (точка перегиба) вообще пропадает при $\varepsilon > 0$, а для отрицательных ε в окрестности $x = 0$ появляются две новые критические точки. Аналогичным образом x^4 в результате возмущения $x^4 + \varepsilon x^2$ при сколь угодно малом по модулю $\varepsilon < 0$ дает в окрестности $x = 0$ вместо одного — два минимума и один максимум. Это примеры негативного характера.

Пример другого рода, структурно устойчивой критической точки, дает $\varphi(x) = x^2$. Малое возмущение x^2 может лишь незначительно сместить критическую точку, но она остается единственной и сохраняет свой тип (минимума).

В случае большего числа параметров возникают ситуации нового типа, изучением которых занимается теория катастроф. Скажем, минимум по x функции

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,\lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \tag{9.1.2}$$

определяется условием

$$\frac{d\varphi_\lambda}{dx} = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0.$$

Это уравнение, так называемой, *катастрофы сборки*. При различных параметрах λ_1, λ_2 кубическое уравнение будет иметь или один действительный корень, или три. Получается поверхность, изображенная на рис. 10.1. Можно ли эту поверхность считать графиком некоторой многозначной функции $x(\lambda_1, \lambda_2)$? Вообще говоря, можно, но на самом деле здесь подразумевается нечто большее. Например, если система в начальный момент находится в точке A, и параметр λ_2 плавно увеличивается, то состояние системы меняется вдоль ACB — в точке C происходит скачок. При возвращении λ_2 в исходное положение состояние системы будет меняться по другому пути — BEF (нечто вроде петли гистерезиса). В то же время при специальной регулировке параметров λ_1, λ_2 возможен плавный переход из A в B вдоль ADB. Наконец, заштрихованная часть поверхности соответствует нереализуемым (неустойчивым, метастабильным) состояниям системы.

Кубическое уравнение задает канонический вид катастрофы сборки, имеющей в точке S характерную особенность. К такому виду с помощью нелинейных замен координат сводятся различные другие уравнения. По первому впечатлению различных типов особенностей может быть довольно много. Однако оказывается, что в типичных, *структурно устойчивых*, случаях при наличии двух параметров могут встречаться лишь два типа особенностей: катастрофа сборки и катастрофа складки. При трех и более параметрах различных особенностей несколько больше, но и там дается их полная классификация — в значительной степени благодаря Арнольду.

Замечание. Обратим внимание, что минимум функции x^4 приводился в качестве примера структурно неустойчивой особенности из-за возмущения εx^2. В (9.1.2) квадратичные члены (и линейные) «легализованы», поэтому возмущение εx^2 меняет только параметр функции (9.1.2), которая (в отличие от «одинокого» x^4) структурно устойчива, но это уже не простая теорема.

9.2 Структурная устойчивость

Родоначальником теории катастроф считается Ренэ Том, придумавший эмоциональное название — на уровне, пожалуй, сигнала SOS. Однако говорят, как назовешь, так и поедешь. В данном случае так и получилось. «Пронзительное» имя на

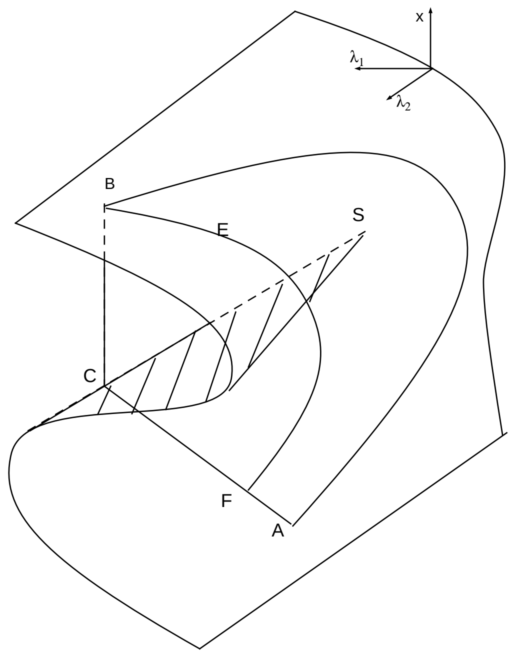


рис. 10.1. Катастрофа сборки

каком-то этапе обеспечило теории необыкновенную популярность, что, с одной стороны, хорошо. С другой — образовалась такая каша, что не разберешь, где математика, а где пиар.

Особо важную роль в теории катастроф играет структурная устойчивость. Дело в том, что различных видов *особенностей* принципиально может быть сколько угодно — и предмет изучения расползается. В то же время ясно, что нет смысла изучать те катастрофы, которые исчезают при малейшем возмущении системы. Это и служит разумным основанием для локализации внимания на грубых (структурно устойчивых) ситуациях.

Говорят, что теория катастроф появилась слишком поздно. Она-де занимается вопросами, которыми было бы естественно задаться «задолго до». Например…

Поведение функции $f(x)$ скалярной переменной x можно изучать, исследуя ее ряд Тэйлора

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

где $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Обычно ограничиваются рассмотрением некоторого отрезка этого ряда, который дает достаточно хорошее приближение $f(x)$. Скажем, если $f'(0) = 0$, то о характере критической точки $x = 0$ можно судить по первому ненулевому члену ряда Тэйлора (при $a_2 > 0$ — минимум, при $a_2 < 0$ — максимум и так далее).

Широко распространен миф, что для функций многих переменных дело обстоит аналогичным образом. На самом деле это не так, и разъяснение ситуации — одна из задач теории катастроф.

Функция[1]

$$f(x, y) = xy^2 + x^{101} + \varphi(x, y),$$

где разложение в ряд Тэйлора $\varphi(x, y)$ начинается с членов порядка не менее 102-го, оказывается эквивалентной вблизи нуля многочлену $xy^2 + x^{101}$, но не xy^2.

Нетривиальность проблемы подчеркивает следующий загадочный пример. Рассмотрим функции

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2,$$
$$g(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2 + \varphi(x, y),$$

где в разложении $\varphi(x, y)$ присутствуют лишь члены порядка не менее четвертого.

В общем случае функции f и g могут быть не эквивалентны. Другими словами, квадратичных плюс кубичных членов здесь не хватает для определения характера критической точки функции g. Однако если разложение $\varphi(x, y)$ начинается лишь с членов пятого порядка, то f и g — эквивалентны!

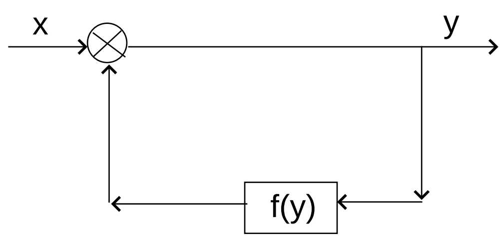


рис. 10.2

9.3 Подводная часть айсберга

Изучение бифуркаций часто останавливается на задачах статики, т.е. на рассмотрении особых точек функции $F(x, \varepsilon)$. Здесь много интересных проблем, и на динамику сил уже не остается. Между тем центр тяжести теории, конечно, лежит в динамической области, которая довольно велика.

«Статического» ракурса иногда не хватает даже в тех задачах, где изначально нет никакой динамики. Рассмотрим для примера блок-схему, изображенную на рис. 10.2. В цепи обратной связи здесь использован функциональный преобразователь $f(y) = \sqrt{y}$ при $y > 0$ и $f(y) = -\sqrt{-y}$ при $y < 0$.

Результирующая связь между входом x и выходом y системы определяется равенством

$$x + f(y) = y,$$

что приводит к зависимости, изображенной на рис. 10.3.

Возникает *неожиданный сюрприз.* Выход y не определяется входом x, хотя все звенья системы детерминированы и взаимнооднозначны. Беспечное заявление, что связь входа с выходом многозначна, не решает проблемы, так как безответным повисает вопрос: чему конкретно равно y? В реальной системе ведь значение y должно быть определено. Поэтому на практике приходится уточнять задачу: описывать динамику, учитывать «паразитные» емкости, индуктивности и прочее.

[1]Примеры из книги «Теория катастроф и ее приложения», Постон, Стюарт, 1980.

Не хватать может даже динамического ракурса. Представим, что в системе, изображенной на рис. 10.2, время дискретно, и f – динамический блок, дающий на выходе сигнал $y[k] - y[k-1]$ при входном сигнале $y[k]$. Тогда из балансового соотношения

$$x[k] + y[k] - y[k-1] = y[k]$$

вытекает $y[k] = x[k+1]$! Ни много ни мало — блок-схема предсказывает будущее. Понятно, чтобы удержаться в рамках дозволенного, надо переходить на более тонкое описание динамики, опять учитывая влияние паразитных параметров, и самое главное — запуск процесса.

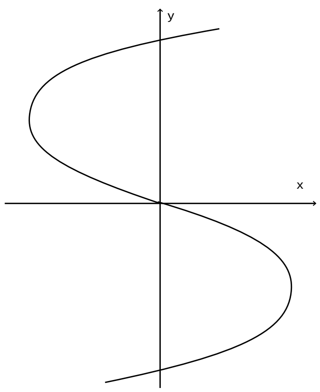


рис. 10.3

На эту мельницу льют воду многие примеры. Скажем, парадокс Пенлеве, возникающий при движении маятника с точкой подвеса, которая может «сухо» скользить по горизонтальной прямой (рис. 10.4). Детальное описание неприятностей здесь заняло бы много места, но нам достаточно резюме. Анализ динамики показывает, что движение точки подвеса влево ($\dot{x} < 0$) невозможно (если маятник отклонен влево), а вправо — неоднозначно. Спасая механику Ньютона, снова приходится выходить за рамки упрощенной модели.

Теперь надо пояснить, при чем тут бифуркации. Дело в том, что в границах модели (9.1.1) не всегда ясно, как будет

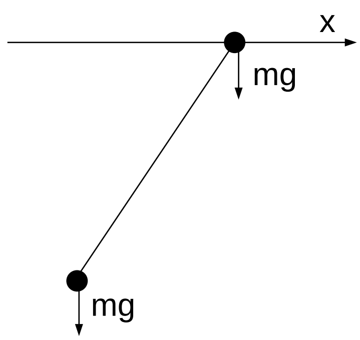


рис. 10.4. Парадокс Пенлеве

вести себя реальная система. При изменении ε вдруг начинает мигать «сигнальная лампочка». Это может быть что угодно:

- *решения за конечное время уходят в бесконечность (или приходят из),*
- *модель начинает предсказывать будущее,*
- *решения ветвятся (какое выбирать?),*
- *уравнение перестает решаться (нет решений).*

В любом случае с территории (9.1.1) реальная система выглядит загадкой, и приходится искать другие модели. Выходить за рамки исходной постановки, переосмысливать задачу ... К слову, из модели, предсказывающей будущее, более-менее ясно, что временны́е задержки сигналов в цепи обратной связи могут приводить к большим недоразумениям. Если такие задержки фигурируют в качестве параметров, то в задаче о бифуркациях надо ожидать серьезных приключений.

Сами по себе неожиданности при бифуркациях почти всегда связаны с забывчивостью. Забываются явные и неявные допущения при выводе уравнений модели. Дифференциальное описание, как правило, предполагает, что «процесс уже пошел», в то время как этап «включения» способен испортить обедню. К стационарному режиму иногда нет дороги.

Примечания и дополнения. Оба многочлена

$$f_1(x,y) = x^2 - 2xy + y^2,$$

$$f_2(x,y) = x^2 - y^2$$

вырождены. Первый обращается в нуль при $x = y$, второй — как при $x = y$, так и при $x = -y$.

Между ними имеется принципиальная разница. Функция f_2 определяет седло, и седловой характер критической точки не может быть нарушен добавлением членов третьего порядка и выше. Другими словами, любая функция

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + \varphi(x,y),$$

где ряд Тэйлора $\varphi(x,y)$ начинается с членов порядка не менее третьего, также имеет седловую критическую точку. Причем обязательно существуют нелинейные координаты u, v такие, что в окрестности нуля

$$f[x(u,v),\ y(u,v)] = u^2 - v^2.$$

Ничего подобного нельзя сказать о первом многочлене f_1. Прибавление к нему членов более высокого порядка может менять характер критической точки так или иначе.

В общем случае невырожденной критической точки у функции $f(x_1,\dots,x_n)$, всегда существуют нелинейные координаты, в которых f в окрестности нуля имеет вид

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_n^2, \tag{9.3.3}$$

конечно, при условии, что $f(0) = 0$.

Этот результат известен как лемма Морса, а функции вида (9.3.3) называются *морсовскими седлами*, которые исчерпывают структурно устойчивые критические точки.

Глава 10

Еще один прорыв в бесконечность

> Если человек не понимает проблемы, он пишет много формул...
>
> Н. БОР

Разложение функций в бесконечные ряды типа

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

или

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

довольно быстро привело математиков к мысли о бесконечномерной природе функций.

В основу легла аналогия с конечномерным случаем

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где x_i — координаты, e_i — базисные векторы. У функционального ряда

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

величины c_i можно принять за координаты, а функции $\varphi_i(x)$ — за базисные векторы.

Наивное соображение в конечном итоге привело к созданию функционального анализа. В процессе, как водится, выяснилось, что начинать можно совсем с другого конца, задавая, например, не базис, а метрику. Но так или иначе в обиход изучения функций был введен геометрический стиль мышления. Плоскости, шары, конусы — такие понятия стали эффективно применяться при манипуляциях с множествами функций.

В отличие от перехода $R^3 \Rightarrow R^n$ $(n > 3)$, функциональный «шаг в бесконечность» был сопряжен со значительными потерями.

10.1 Жертвы

Главная потеря была в следующем. Непрерывная функция на ограниченной замкнутой области X в R^n достигает своего максимума и минимума. Это очень важное свойство для оптимизации. Именно поэтому в R^n задача определения

$$\max_{x \in X} f(x)$$

никогда не упирается в проблему существования решения. В бесконечномерных задачах — это серьезная головная боль.

Например, вариационная задача Ньютона минимизации функционала

$$J = \int_0^1 \frac{x dx}{1 + (y')^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

для поиска тела вращения с наименьшим сопротивлением газовому потоку, не имеет решения, поскольку $J > 0$, но $J_n \to 0$ для

$$y_n(x) = x + \sin^2 n\pi x.$$

Еще одно принципиальное отличие. В R^n сферу невозможно непрерывной деформацией стянуть по себе в точку, что служит основой для результатов о разрешимости уравнений. В бесконечномерном пространстве такой фокус возможен. Рассмотрим, например, сферу в $C[0,1]$, состоящую из непрерывных функций $f(x)$ таких, что

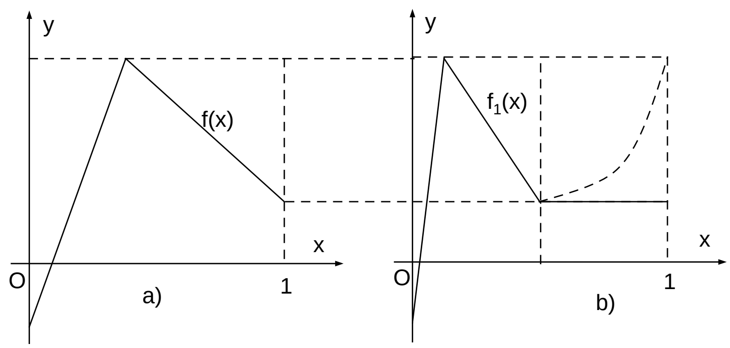


рис. 11.1. Деформация бесконечномерной сферы

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 1.$$

Деформацию проведем в три шага. На первом — деформируем $f(x)$ в

$$f_1(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{для} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ f(1) & \text{для} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

при этом функция на рис. 11.1a переходит в функцию на рис. 11.1b с помощью деформации

$$h(\tau, x) = \begin{cases} f(\tau x) & \text{для} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{\tau}\right] \\ f(1) & \text{для} \quad x \in \left[\dfrac{1}{\tau}, 1\right] \end{cases}$$

при изменении τ от 1 до 2.

На втором шаге все $f_1(x)$ деформируются в функции $f_2(x)$. График $f_2(x)$ совпадает с графиком $f_1(x)$ на $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, а правые концы плавно поднимаются до верхнего «потолка» так, чтобы $f_2(1) = 1$ (наклонный пунктир на рис. 11.1b).

Теперь (последний шаг) все функции $f_2(x)$ стягиваются по сфере в любую точку $f_0(x)$, если $f_0(1) = 1$. Деформацией может служить

$$H(x,\lambda) = \lambda f_0(x) + (1-\lambda)\, f_2(x), \quad \lambda \in [0,1].$$

10.2 Функциональный анализ

Выдвижение на передний план понятия функционального пространства сместило акценты и дало толчок анализу в новом направлении. Такого сорта поворотные моменты в развитии научных дисциплин для поверхностного взгляда совсем незаметны, поскольку, речь идет о прежних задачах, разве что под несколько иным углом зрения. Первое время кажется, что в этой метаморфозе больше минусов, чем плюсов. Но мало-помалу преимущества накапливаются, и возникает эволюционный скачок. Неожиданно выясняется, что построен дворец.

Роль функциональных пространств подобна роли действительных чисел, которые сами по себе никому не нужны в таком количестве, но они преображают и оживляют математику. Это только на первый взгляд кажется, что без иррациональных чисел можно обойтись, поскольку нет нужды в бесконечной точности вычислений. Несколько знаков после запятой — вот обычная практика.

Но действительные числа необходимы вовсе не для вычислений. Их главная роль в том, что они делают работоспособными многие математические инструменты. На самом глубоком уровне — это придание законности предельным переходам, что обеспечивает дифференцирование, интегрирование, использование таких функций, как $\sin x$, и т. п.

Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что весь анализ базируется на понятии предела, для чего существенно, чтобы прямая походила на сплошную дорогу. Если даже рассматривать исключительно рациональные последовательности типа

$$a_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

то и в этом случае важно залатать множество дробей, чтобы паровоз не прыгал по шпалам.

Таким образом, если потребовать выполнимость арифметических операций и предельного перехода, то расширение игрового поля, начатое с натурального ряда, дает комплексную плоскость. В главе 1 предельные переходы остались за кадром.

Следующий шаг — изучение пределов функциональных последовательностей. Надежды на легкое путешествие здесь быстро исчезают, потому что ситуация оказывается радикально другой. Выясняется, что расширять игровое поле для функций можно в разных направлениях. Возникают сотни вариантов. У каждого свои плюсы и минусы. В результате — функциональных пространств столько, что глаза разбегаются, и думается, не чересчур ли. Однако широта ассортимента в данном случае играет положительную роль, поскольку стандартный сценарий оказания помощи опирается именно на эту широту.

Допустим, речь идет о дифференциальном уравнении. Предположим, все из рук вон плохо. Существует ли решение — неясно, и так далее. Беда, как правило, заключается в том, что задача неправильно поставлена. Функциональный анализ указывает пространство, в котором надо рассматривать задачу, и все становится на свои места. Конечно, надо сказать о масштабах «благотворительности», потому что иногда за общими разговорами стоит помощь одному абитуриенту в решении двух задач. Тут размах несколько шире. Среди «пациентов» — крупные научные дисциплины.

Вариационное исчисление, например. Каких-нибудь сорок лет назад в этой области царили наивные методы поиска «подозрительных» функций. Проблема существования решения не поддавалась изучению — отсутствовал инструмент и координатная сетка мышления. Функциональный анализ дал понимание того, как нужно правильно ставить такие задачи, в каких пространствах рассматривать... Теория целиком преобразилась.

К списку можно добавить интегральные и дифференциальные уравнения, теорию управления, математическую физику и многое другое.

10.3 Обобщенные функции

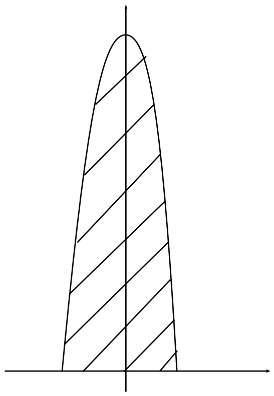


рис. 11.2.

Особого упоминания заслуживают обобщенные функции. До какого-то момента развитие понятий проходило в рамках представления о функции, как о чем-то, имеющем график. С некоторой натяжкой, конечно. Непрерывные, потом измеримые, или суммируемые с какой-то степенью... не везде однозначно определенные... Но так или иначе $f(x)$ означало, что почти везде аргументу x ставится в соответствие

$$y = f(x).$$

Однако на довольно широком классе задач идеология соответствия не работала. Мутила воду в основном так называемая δ-функция, которая содержательно соответствовала плотности точечного источника, но никак не поддавалась математически разумному определению.

Выход из положения был найден нестандартный, но естественный с позиций теории функциональных пространств. Обобщенные функции были определены, как линейные функционалы на некотором заданном пространстве $\mathcal{D}$ «хороших функций». В частности, δ-функция при этом оказалась функционалом, действующим по правилу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$.

Кто-то может заметить, что все это отдает схоластикой и наукообразием. Дескать, обычное представление о δ-функции, как о пределе колоколообразных приближений (рис. 11.2), приводит к тому же результату. Конечно, никакого разумного предела $\delta_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ — нет, но сам по себе он и не нужен, потому что обычно речь идет о решении какого-нибудь уравнения

$$Lu(x) = \delta(x), \tag{10.3.1}$$

где L — дифференциальный оператор. Если в правой части (10.3.1) $\delta(x)$ заменить на $\delta_\varepsilon(x)$, и через $u_\varepsilon(x)$ обозначить соответствующее решение, то, как правило,

$$u_\varepsilon(x) \to u^*(x) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{10.3.2}$$

что, собственно, и требуется. При этом нет никакой беды, что $\delta_\varepsilon(x)$ не сходится.

С тем, что сказано, надо согласиться. Но это та самая наивная точка зрения, связанная с поиском кривых «подозрительных на решение». Вопросы существования, устойчивости и многое другое остается за кадром. Работа ведется наощупь. В каком смысле $u^*(x)$ является решением (10.3.1) и является ли? Не упускаются ли из виду другие решения? Иными словами, решение может оказаться угаданным, но тут-то и выясняется, что необходимо гораздо больше — понимание ситуации, которого как раз не дают «доморощенные» методы.

Можно добавить еще один аргумент. Зачем тратить время на обоснование предельного перехода (10.3.2) в каждой отдельной задаче? Почему бы не сделать это один раз для всех задач сразу? Но о такой малости на фоне сказанного выше едва ли стоит говорить всерьез.

Глава 11

ДНК истории

> Библия была написана теми же людьми, которые утверждали, что Земля плоская.
>
> XYZ

История математики, как и вообще история, штука неуловимая. Даты, события, имена — маска. Главный процесс за кадром. При попытке ухватить — растворяется, как мираж. Жизнь уходит на то, чтобы вписаться в это закадровое течение, но обычно не получается. Правда, подстроиться к невидимому мы пытаемся, экономя усилия, как говорят, «с понедельника». Секрет же, необходимый, но недостаточный, — в том, чтобы вернуться назад, ступить в Реку Истории и немного поплавать.

Разумеется, это не так просто. Необходимо чувство, воображение, медитация. «Чушь собачья», — скажет молодежь и будет права, но отчасти. Переживание средневековых этапов развития математики — очень полезное упражнение. Что оно развивает, трудно сказать, но в результате появляется способность ловить «попутный ветер» сегодня.

11.1 Пятый постулат

Рождение неевклидовых геометрий — один из самых удачных вариантов для погружения. История началась в древней Греции с попыток освобождения евклидовой геометрии от пятого постулата о параллельных:

(E5) Через точку, лежащую вне прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая исходную, —

и закончилась через две тысячи лет построением новой геометрии Лобачевского с заменой (E5) аксиомой:

(Л5) Через точку, лежащую вне прямой, проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие исходную.

Долгое время поначалу думалось, что от постулата (E5) можно отказаться, доказав его как теорему.

11.2 Блуждание впотьмах

Задача в чем-то была сродни наркотику. Завораживала простотой, но не давалась. Много судеб сфокусировалось на ней. Накал страстей достиг апогея в восемнадцатом веке. Решение стало назревать. То там, то здесь начали появляться догадки и прозрения. Может быть, даже не прозрения, а поиск стал приближаться к месту, где «горячо».

Так часто бывает при решении крупных проблем. Словно цивилизация решает задачу, как единый биологический организм, о чем свидетельствуют географически отдаленные, но одновременные всплески.

Итальянский монах, Саккери, доказывая (E5) от противного, т. е. предполагая (Л5), двигался путем Лобачевского. Результаты опубликованы в 1733 году, но без последствий.

Более основательная попытка аналогичного толка была предпринята немецким математиком Ламбертом. Действуя от противного, как и Саккери, Ламберт получил значительную часть результатов геометрии Лобачевского, но что делать с этим — не знал. Желаемых противоречий не обнаружилось, и он даже высказал невнятное предположение, что такая геометрия может иметь место на некой мнимой сфере (1766 г.).

Затем появилось еще несколько математиков, которые вплотную подошли к созданию «другой» геометрии. Стало совсем «горячо», и тут как раз возник Лобачевский со своей стопроцентной убежденностью в возможности построения иной геометрии. Какую при этом космическую задачу он решил? Построил саму геометрию? Да, построил, но это не космический масштаб. Да и нет там особо трудных теорем, и не в теоремах дело.

Глубочайшая проблема была в другом. Человечество воспринимало геометрию как мировую данность. Сколько бы ни говорилось об абстрактном описании точек, линий и плоскостей, — их толкование явно и неявно было физическим. Все, что не соответствовало визуальному опыту, отвергалось. Даже высмеивалось.

11.3 Издевательские теоремы

«Возня» Лобачевского в лучшем случае смотрелась как чудачество. Представьте, некто декларирует «$1 = 2$» и начинает выводить следствия из разряда «всякое число равно нулю». Разве не то же самое делал Лобачевский? Провозгласил аксиому типа «$1 = 2$» и стал доказывать издевательские теоремы: «сумма углов треугольника меньше π» и т. д.

Что при этом раздражало общественность, так это отсутствие противоречий. Шутника с аксиомой «$1 = 2$» было бы легко ткнуть носом в несоответствие азам арифметики. Здесь же несоответствия ждали, но оно не появлялось. Дело ведь заключалось не в расхождении получаемых результатов с геометрическим опытом, чего было в достатке, а в противоречии с другими аксиомами. Постулат (Л5) изначально не соответствовал опыту. Поэтому следствия из него были того же сорта, но в этом не было криминала. Другое дело, если бы среди следствий обнаружилось что-нибудь вроде утверждения: «через две точки можно провести две прямые». Тогда бы новая геометрия рухнула, а постулат (Е5) превратился бы наполовину в теорему[1]. Именно такие противоречия искали Саккери и Ламберт, но не нашли.

Лобачевский, наоборот, противоречий не искал и был уверен, что их нет. Некоторая слабость его позиции заключалась

[1] «Наполовину» — потому что надо было бы отсечь и другое возможное предположение: «любые две прямые пересекаются».

в том, что свою геометрию он считал воображаемой. То есть строил теорию непротиворечивую, но — сказочную. Потом, конечно, у него появились соображения о геометрии реального мира, но это все же на серьезном уровне оказалось уделом других исполнителей.

Из сказанного, наверное, ясно, что история на Лобачевском закончиться не могла. Прорыв образовался, но процессу требовалось завершение. Не говоря о том, что «сказка» могла в любой момент обернуться блефом, поскольку оставалось две ахиллесовых пяты.

Во-первых, нужна была модель, оправдывающая логические построения. Для арифметики с аксиомами вида

$$a + b = b + a,$$

моделью служат числа с заданными на них арифметическими операциями. Хотелось подобного, поскольку без реализующей модели логические фокусы остаются привидениями.

Во-вторых, дамокловым мечом нависала проблема непротиворечивости. Гёдель, конечно, доказал, что непротиворечивость вообще недоказуема (Глава 14), но здесь ситуация была особая. Непротиворечивость геометрии Евклида тоже неясна, но там порукой определенного благополучия служит наличие реальной модели, интуиция и многовековой опыт. Здесь же — никакой опоры. Там интуиция — «за», здесь — «против».

Напряжение возрастало. Ситуация нуждалась в разрешении. Опять всплыла идея о мнимой сфере, но четко выразить ее не удавалось. И только в 1868 году (через сорок с лишним лет после первой работы Лобачевского) Бельтрами, наконец, показал, что новая геометрия выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, и в той же степени непротиворечива, что и анализ.

Решение вопроса геометров не вполне удовлетворило, для чего были определенные основания. Речь все же шла о локальной реализации геометрии Лобачевского на псевдосфере (покусочно).

11.4 Фокус Клейна

Вскоре объявился Клейн с гениально простой моделью, и ситуация стала совершенно прозрачной. Клейн предложил в ка-

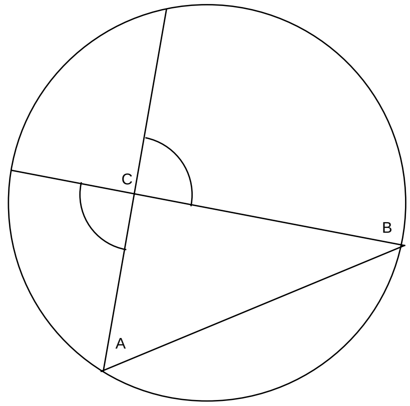


рис. 12.1.

честве плоскости внутренность круга, в качестве прямых — хорды (естественно, без концевых точек). Через точку C (рис. 12.1) проходит целый пучок прямых (хорд), не пересекающих AB.

Вот такая модель геометрии Лобачевского. Без преувеличения, высший пилотаж! Плюс к тому, поскольку модель строится как элемент обычной геометрии, то она в той же степени непротиворечива.

11.5 Другая сторона медали

Наше внимание до сих пор было сфокусировано на течении идей. Что и как? Каковы препятствия? Туда ли поток вынес, куда направлялся? Почему долго? Откуда драматургия?

При таком ракурсе исполнители вторичны. Поэтому многих мы даже не упомянули, а там были выдающиеся участники процесса. Младший Больяи, получивший те же результаты, что и Лобачевский, но волей судьбы оставшийся вторым. Великий среди великих Гаусс, построивший ту же геометрию у себя в черновиках «задолго до». Гениальный Риман, прочитавший еще в 1854 году выдающуюся лекцию о новом геометрическом подходе, в рамках которого геометрии Евклида и Лобачевского — простые частные случаи.

Лекцию, правда, никто не понял, иначе бы не пришлось ждать еще 14 лет результатов Бельтрами. Интересно, что лекция Римана была опубликована после смерти автора (в том же 1868 году, что и результаты Бельтрами, кстати) — и тут ее поняли сразу все, кому положено.

Но это другая тема, из сферы несогласованности содержания и формы. Исполнитель космического замысла, будучи един в двух ипостасях, еще ест, спит и тянет одеяло на себя, что при доброжелательной позиции вызывает улыбку симпатии, ибо такова природа. Наблюдать эту грандиозную картину — удовольствие и наука, но это совершенно другое занятие, и хорошо бы называть его не историей математики, а как-то иначе.

Еще хорошо было бы уйти от вопроса: «кто первым сказал А», — который всегда портит атмосферу. Один из законов типа Мэрфи – Паркинсона саркастически утверждает: *Ничто не было названо именем первооткрывателя.*

А что в этом плохого? Тем более, если таков закон. Идею дарвиновского отбора, например, можно встретить еще у древних. Формула Эйнштейна

$$E = mc^2$$

открыта Хэвисайдом, закон Бойля – Мариотта — Гуком, преобразования Лоренца — трудно вспомнить кем, но во всяком случае — не Лоренцем.

И не в плагиате дело. Ремарка Ньютона: «я стоял на плечах гигантов» — всегда применима при озарениях. Нет ни одного случая, когда бы идея родилась в голове отдельного индивида без подготовки, толчка, прообраза. И как тогда быть? Покинуть плечи гигантов или расшаркиваться всю последующую жизнь? Времяпровождение в реверансах не всем нравится. К тому же, не надо забывать, какая чаша перевешивает. Гауссу и Ньютону можно простить все. Всем все можно простить... Тем более, и прощать нечего, если разобраться. На чей счет отнести данное извне? Язык, стереотипы, подсознательные заимствования, перекрестное опыление... не считая Ритмов Вселенной и нашептывающих голосов. Не смешно ли регистрировать законы Космоса на свою мимолетную фамилию?

Три-четыре сотни лет назад атмосфера в этом плане была намного лучше. Открытия шли валом, и к ним не было такого ревнивого отношения, как сейчас. Упомянутый Гук, например, их совершил несколько сотен, а что ему досталось в награду? Что названо его именем? Один только закон упругости: «сила пропорциональна сжатию», — и все. Но бить в набат по этому поводу не резон. Ситуация изнутри была специфической. Английская академия наук обязала Гука регулярно демонстрировать новые законы природы, что граничит с анекдотом. Так или иначе, но Гук под давлением контракта был вынужден поддерживать очень высокие обороты. Из общих соображений разумно предположить, что кое до чего он додумывался сам, кое-что разведывал, кое-где надувал щеки, а кое-где и вешал лапшу на уши, ибо бытие частично определяет сознание. Поэтому решать здесь вопросы, где что и что чье, — дело неблагодарное и бесперспективное.

Кроме того — самый важный аспект (!) — у каждого открытия есть нечто вроде критической массы. Пока она не достигнута — говорить не о чем. Кто-то думает, что должно быть так-то и так-то, или даже уверен, но на пустом месте. Это что угодно, но не открытие. Гук, между прочим, по-видимому, действительно первый сообразил, что гравитационное притяжение должно быть обратнопропорционально квадрату расстояния. И сказал Ньютону. И это впоследствии породило крупнейший приоритетный спор.

Что касается Лобачевского, то он, безусловно, первый преодолел эту самую критическую массу неевклидовой геометрии.

11.6 Некоторые подробности

Возвращаясь к «течению идей», приходится обратить внимание на некоторые детали. Кое-где мы воспользовались тем обстоятельством, что ложь — лучший инструмент объяснения. Но это тактически. Стратегически выгоднее говорить правду. Потому что быстро понятая вещь назавтра превращается в неразрешимую головоломку.

Подобное опасение возникает в связи с моделью Клейна. При попытке расставить точки над i могут возникнуть проблемы. Дело в том, что если позаботиться о справедливости не только пятого постулата (Л5), но и остальных аксиом, то движения, расстояния и углы приходится определять особо — на основе проективных преобразований. Вместо обычного расстояния, например, берется так называемое ангармоническое отношение четверок точек. Что это такое — неважно. Просто те самые детали, в которых прячется дьявол. Ничего сложного, но простота смазывается, и возникает простор для непонимания. Поэтому на семинаре у Вейерштрасса (1870 г.) молодому Клейну дали от ворот поворот. И только через год Клейн «дожал» ситуацию, хотя и после этого у него остались противники.

На такого рода примерах интересно понять, почему даже простые вещи нередко упираются в стену и воспринимаются в штыки. Попытка разобраться всегда походит на детектив. Всплывают подробности, радикально меняющие картину. Так и здесь. Во-первых, оказывается, модель Клейна была изобретена не Клейном, а Кэли, но для других целей — как реализация неких идей в области проективной геометрии. Клейну же пришло в голову, что на этой модели реализуется геометрия Лобачевского. Во-вторых, первоначальная целевая установка модели продолжала играть чуть ли не мистическую роль. Вместо того, чтобы ограничиться фактом реализации неевклидовой геометрии, Клейн уходил в дебри анализа взаимоотношения геометрий (Евклида, Лобачевского и проективной), где возникала путаница, и плодились противники, включая самого Кэли (хотя приоритетных споров, слава богу, у них не было).

Картина событий, вообще говоря, неполна без модели Пуанкаре, но мы ограничимся лишь упоминанием. «Плоскостью» в этой модели служит, например, открытая полуплоскость, «прямыми» — полуокружности, как на рисунке, и вертикальные полупрямые (как полуокружности бесконечного радиуса).

Справедливость (Л5) легко проверяется, что же касается других аксиом — возникают препятствия, которые изящно преодолеваются, но несколько усложняют модель. Для придания естественности некоторым определениям Пуанкаре изобрел даже «температурный трюк», который используется в главе 17.

Наконец последнее. Эффект драматургии всегда зависит от последовательности изложения. При перестановке нескольких фрагментов текста детектив превращается в протокол. Незначительная перестановка событий в описанном историческом процессе могла бы ликвидировать накал страстей и значительно опустить рейтинг неевклидовой геометрии. Причина и автор детективной организации событий в данном случае неизвестны.

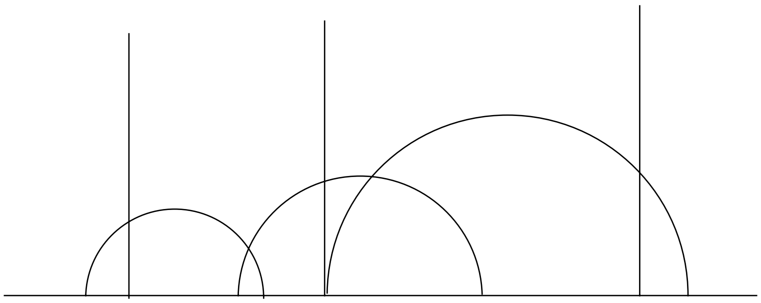


рис. 12.2. Модель Пуанкаре

Глава 12

Реакция как отражение сути

> Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.
>
> Козьма Прутков

Если изучать объект, не ломая, — остается наблюдать реакции. Изобретать воздействия и смотреть, что получится. В большинстве случаев результат заранее ясен. Вопрос в том, что из него следует.

12.1 Распределение скоростей.

Как распределены скорости молекул газа? В свое время это была очень серьезная проблема. Легенда утверждает, что Максвелл решил ее за полчаса на экзамене. Вот примерная реконструкция истории.

Мы перефразируем задачу, чтобы не тратить слов на физические детали и уклониться заодно от дебатов по поводу детерминизма. Итак, пусть случайный вектор $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ распределен с неизвестной плотностью $p(x)$, которая удовлетворяет двум свойствам:

(i) *величины x_i независимы, т. е.*

$$p(x) = p_1(x_1) \dots p_n(x_n); \qquad (12.1.1)$$

(ii) $p(x)$ *не зависит от направления* x.

Представляется, что эти свойства не так много говорят о плотности. На самом деле они однозначно определяют ее.

Действительно, из (ii) следует

$$p(x) = p(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

т. е. функция $p(x)$, а значит и

$$\ln p(x) = \ln p_1(x) + \ln p_n(x), \tag{12.1.2}$$

постоянна на сферах

$$x^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \mathrm{const}. \tag{12.1.3}$$

Другими словами, функции (12.1.2) и (12.1.3) имеют одни и те же поверхности уровня, а это возможно лишь, когда их нормали (градиенты) коллинеарны (одинаково или противоположно направлены), т. е. $\nabla \ln p(x) = \lambda \nabla x^2$. Это дает n равенств

$$\frac{p_i'(x_i)}{p_i(x)} + 2\lambda x_i = 0,$$

интегрирование которых приводит к

$$p_i(x_i) = k_i e^{-\lambda x_i^2}.$$

Константы определяются нормировкой и заданием, например, второго момента

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_i e^{-\lambda x_i^2}\, dx = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^2 k_i e^{-\lambda x_i^2}\, dx_i = \sigma^2.$$

Окончательно

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}. \tag{12.1.4}$$

12.2 Мораль

Здесь есть над чем задуматься. Профессиональный рост очень сильно зависит от того, извлекаются уроки из опыта или нет. Речь не о том, что информация пропускается мимо ушей. Скажем, приведенный пример может быть понят, осознан, но... не классифицирован. В результате он не попадает в нужную ячейку, не инициирует размышлений в определенном направлении, не открывает горизонтов. Как бы еще одна изюминка, и — тишина.

На вывод (12.1.4) можно смотреть с разных позиций. В данном случае нас интересует ракурс инвариантности (нечувствительности) по отношению к тем или иным преобразованиям. Исходный разговор типа «воздействуй и смотри» условен. Подразумеваются мысленные манипуляции, на которые объект не реагирует. Такие воздействия (не меняющие уравнений движения, тех или иных функций, решений, критических значений и т. п.) придумать обычно легко. Но при этом часто кажется, что все это тривиально и не стоит выеденного яйца. На самом же деле указание преобразований, на которые объект не реагирует, дает очень много информации — и главная проблема заключается в преодолении пессимизма. Но практика показывает, что это как раз сложно, хотя всего-то необходимо следовать простому правилу: «очерчивай инвариантные преобразования и выводи следствия».

Именно в этом и заключался секрет успеха Максвелла, а не в двух последующих строчках взятия градиентов. Можно держать пари, что будь задача поставлена в виде: «какова функция $p(x)$, удовлетворяющая двум условиям (i), (ii)», — ее бы решил каждый третий студент (а подобрал бы $p(x)$ — каждый второй). Сложность — в постановке задачи. А для этого нужно было задаться вопросом: «Что можно считать известным относительно $p(x)$?». Здесь бы уже любой студент указал (i), (ii). Но тут и происходит сбой. Скептик не может заставить себя думать дальше. Ему кажется, что из такой очевидной чепухи ничего нельзя вывести.

Оптимистов, разумеется, не меньше, чем скептиков, но у них другая беда. Им неинтересен исходный вопрос, они хотят получить результат из ничего.

Таким образом, успех Максвелла определила обыкновенная дисциплинированность мышления[1] в комбинации с настойчивостью. Он задался вопросом «что можно считать известным...». Не стал мудрствовать в поисках оригинальных ответов (что подавляющую часть исследователей уводит в дебри), взял два очевидных свойства (i), (ii), и стал решать задачу, не уступая эмоциям типа «вряд ли такой ерунды достаточно для решения».

12.3 Контраст причин и следствий

При замене минут часами скорость увеличивается в 60 раз. Это кажется настолько тривиальным, что не заслуживает упоминания. Тем не менее, такого рода соображения (методы размерности и подобия), позволяют решать сложные физические задачи (см. главу 17).

Поворот системы координат и перенос начала отсчета в другую точку не меняют уравнений движения. Сентенция производит впечатление тавтологии. Но из этой «тавтологии» вытекают основные законы сохранения (энергии, количества и момента количества движения).

Контраст причин и следствий всегда разителен. Грандиозные следствия как бы опираются на ничтожные причины. Но тут ничего удивительного. Следствия в масках, а причины голые. Например, банальный факт

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1} \qquad (12.3.5)$$

навевает лишь скуку. Но стоит тем или иным способом закамуфлировать (12.3.5), и результат можно посылать на олимпиаду. Скажем, пусть $\varepsilon_k = \operatorname{arctg} k$. Формула

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u-v}{1+uv}$$

легко приводит к

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2}. \qquad (12.3.6)$$

[1]При этом Максвелл был знаменит тем, что каждая строка формул его рукописей содержала ошибку.

Если теперь (12.3.5) «засекретить», то (12.3.6) нелегко доказать. И подобных следствий из (12.3.5) — миллион, о чем жизнь то и дело напоминает.

То ли Создатель широко пользовался такой техникой, то ли оно само так получилось, но мы вынуждены постоянно иметь дело с фактами типа (12.3.6). Голые причины вида (12.3.5) тоже в поле зрения, но их потенциал «не выпирает», связи не видны, и мир — в ловушке кривых зеркал. Следствия дразнят загадочностью, а причины незаметны из-за банальности.

Тот же, кто в каком-то секторе владеет связью причин и следствий легко играет роль чародея. Достаточно вспомнить нашумевшую в свое время историю открытия омега-минус бариона. Гелл-Манн (Нобелевская премия 1969 г.), как-то услышавший об открытии новой элементарной частицы, тут же предсказал (с указанием свойств) — существование еще одной, которая и была обнаружена в экспериментах через три года. Это выглядело даже более эффектно,чем открытие планеты Нептун, вычисленной предварительно Леверье и Адамсом.

Интересна подоплека истории. Квантовая механика с самого начала успешно справлялась с ситуациями, где колеблется «непонятно что» (см. главу 16). К середине прошлого века теория продвинулась далеко вперед, и уже описывала элементарные частицы как собственные векторы «неизвестно какого» оператора Шредингера. Правда, у неизвестного оператора предполагались известными некоторые свойства — не меняться под действием той или иной группы преобразований. Как раз тема нашего разговора, и главное русло квантовой механики.

Так вот Гелл-Манн, занимавшийся, незадолго до этого, группой[2] SU_3, сразу увидел, что размерность пространства, в котором действует *неизвестный* оператор Шредингера, надо так увеличить[3], чтобы группа SU_3 могла действовать в этом пространстве, и новый собственный вектор мог появиться. Но тогда возникал еще один «лишний» собственный вектор. Вот, собственно, и вся подноготная. Потом на волне успеха с омега-минус барионом Гелл-Манн, эксплуатируя ту же группу SU_3, выдвинул теорию кварков, которых не могут найти до сих пор.

---

[2]Группа унитарных преобразований комплексного трехмерного пространства.

[3]В связи с открытием новой частицы.

Хорошо хоть премию выдали, не дожидаясь...

Все это очень показательно в плане познания мира за пределами непосредственного опыта. Авангард физики напоминает сверхталантливого слепого, который по вторичным признакам догадывается о том, что происходит вокруг.

12.4 Идеология инвариантности

Упомянутое изучение «неизвестно какого» оператора Шредингера может показаться сарказмом, но это не так. Для решения многих задач уравнения, описывающие объект изучения, действительно не нужны. Это наглядно проявляется при использовании методов размерности и подобия (см. главу 17). Дифференциальное уравнение полезно иметь перед глазами лишь как гарантию того, что в поле зрения попадают все необходимые параметры. Если же ясно, допустим, что период колебаний T может зависеть только от l и g, то формула $T = k\sqrt{l/g}$ получается и так.

Есть другой класс задач, где требуются сами решения дифференциальных уравнений. Здесь тоже хорошо работает идеология инвариантности. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y \tag{12.4.7}$$

не меняется под действием преобразований

$$x = x' - u,$$
$$y = y' - 2u,$$

которые не меняют также функции $z = 2x - y$. Поэтому замена $z = 2x - y$ сразу упрощает (12.4.7), приводя к уравнению

$$\frac{dz}{2 - z} = dx,$$

которое легко интегрируется.

Вот более сложный пример: уравнение Абеля второго рода,

$$y\,\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}\,y, \tag{12.4.8}$$

которое, как легко убедиться, инвариантно относительно преобразований

$$x = kx', \quad y = \frac{1}{k}\,y'.$$

Эти же преобразования не влияют на функцию $z = xy$. Поэтому переход от переменных (x, y) к (x, z) упрощает (12.4.8), давая легко интегрируемое уравнение

$$\frac{zdz}{z^2 - 3z + 2} = \frac{dx}{x}.$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

не меняется под действием преобразований $t = kt'$, $x = \sqrt{kx'}$, к которым также инвариантна функция $\tau = x/\sqrt{t}$. Использование τ сводит исходное уравнение в частных производных к обыкновенному

$$\frac{d^2T}{d\tau^2} + \frac{a\tau}{2}\,\frac{dT}{d\tau} = 0.$$

Все это поначалу производит впечатление разрозненных эпизодов. Тем более приятно знакомиться с теорией групп Ли, где такого рода факты вкраплены в стройную систему. Эта система, кстати, играет частично отрицательную роль, фокусируя на себе слишком много внимания. Как только речь заходит об инвариантности, внимание замыкается на группах Ли и дифурах, в то время как инвариантные преобразования пронизывают всю математику.

Понятно, например, если функция $f(x)$ инвариантна по отношению к преобразованию $H(x)$, т. е.

$$f(H(x)) = f(x),$$

то из этого факта можно вывести массу полезных следствий, начиная с замены уравнения $f(x) = x$ эквивалентным $f(x) = H(x)$, которое может оказаться удобнее. Еще лучше, если преобразований типа H известно несколько. Скажем, функция

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - x)^2}$$

инвариантна к преобразованиям $H_1(x) = 1/x$, $H_2(x) = 1 - x$, а также

$$H_3(x) = \frac{1}{1-x}, \quad H_4(x) = \frac{x}{x-1}, \quad H_5(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Это богатый комплект, располагая которым, можно многое сделать. Но как его найти? В смысле — как искать инвариантные преобразования в сходных ситуациях. Это всегда проблема. Поэтому многие теории начинают с другого конца. Танцуют от преобразований и смотрят, что не меняется в том или ином случае. За каждым преобразованием вскрывается обычно целый пласт интересных фактов.

Проективная геометрия, например, занимается изучением довольно узкого типа преобразований — проектирования фигур из точки на плоскость (как при фотографировании). Красивых следствий хватает на увесистые тома, хотя первоначальная идея, казалось бы, лежит на поверхности. Естественно, что геометрические свойства, которые разрушаются проектированием, остаются за рамками теории. Но кое-что остается: прямая переходит в прямую, треугольник — в треугольник, сохраняется так называемое сложное отношение четырех точек на прямой, порядок алгебраической кривой. Этого оказывается достаточно для решения многих сложных задач, решаемых в проективной геометрии, как правило, изящно и легко.

Глава 13

Нелинейные явления

> Трудно читать, когда никто не слушает.
>
> XYZ

На пути следования обстоятельствам легко сдвигаются горы. Поэтому божий дар ощущать, куда направляется поток, очень важен.

Сейчас, похоже, наступает век нелинейной математики. Постепенное исчерпание «линейных источников», компьютеры, выход в целинные пространства Незнания, — все это толкает науку в нелинейный океан. Поначалу кажется, что в этой пучине разнообразие возможностей и явлений превышает разумный предел, и математика «размажется» по безбрежным просторам. Видимо, нет. Ситуация выглядит так, что богатство средств не в состоянии преодолеть небольшого списка эффектов, предусмотренных свыше. Эталоном может служить теория катастроф. Уж, казалось бы, разреши нелинейные поползновения — и возможностей не сосчитаешь. Однако нет, два параметра — две катастрофы (сборки и складки), при бесконечном разнообразии нелинейных «виражей».

13.1 Аттракторы и фракталы

Аттрактор — это притягивающее множество. Скажем, если отображение f (в том числе многозначное) преобразует в себя некоторое множество X, то последовательные отображения $f^k(X)$ при $k \to \infty$ будут сходиться к аттрактору A. При этом A будет неподвижным множеством[1] отображения f, т.е. $f(A) = A$. Динамический процесс

$$x_{k+1} = f(x_k), \tag{13.1.1}$$

начинаясь в A, будет в A и оставаться.

Если U_t — оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = h(x), \tag{13.1.2}$$

и у него есть инвариантное множество X, то аттрактор A опять определяется как предельное множество, $U_t(X) \to A$ при $t \to \infty$.

Интересно, что аттракторы в рядовых ситуациях, для простых динамических систем (13.1.1), (13.1.2), нередко оказываются довольно экзотическими множествами. Например, канторово множество K представляет собой аттрактор двузначного отображения $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \tag{13.1.3}$$

— два преобразования подобия отрезка $[0, 1]$. В результате K можно описать, как неподвижное множество преобразования f. Тот факт, что функции (13.1.3) являются преобразованиями подобия, влечет за собой *свойство самоподобия* множества K — и это характерно для многих аттракторов.

Аттрактор не обязательно, но часто оказывается *фракталом*. Фракталами с легкой руки Мандельброта называют множества, имеющие *дробную размерность*. Разумеется, речь идет не об обычной размерности, а о так называемой размерности по Хаусдорфу, которая определяется примерно так. Скажем, множество A на плоскости покрывается квадратными клетками со стороной ε. Если $N(\varepsilon)$ обозначает минимальное число клеток, необходимых для покрытия A, и $N(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ растет пропорционально ε^{-d}, то величина d называется размерностью A по Хаусдорфу. У канторова множества эта размерность равна $\log_3 2$.

[1] В частности, A может быть неподвижной точкой f.

Само собой, ощущение парадокса дает использование занятого имени. Справедливости ради надо сказать, что термин *размерность* в данном случае все же оправдан, поскольку для «добропорядочных» множеств величина d равна обычной размерности.

До поры до времени фракталы представлялись экзотикой недостойной серьезного внимания. Однако под давлением звезд, компьютеров и Мандельброта был достигнут перелом. Сейчас количество публикаций в этой области зашкаливает. Главный результат — понимание широкой распространенности фракталов.

13.2 Самоподобие и Вселенная

«Все во всем», — говорил Прокл, о чем-то догадываясь. На этом уровне так все и осталось до сих пор. Конечно, явление самоповторения целого в собственных частях, многократного включения своих копий, — обогатилось новыми фактами. Каждый фрагмент голограммы, например, при освещении лазерным лучом воспроизводит сфотографированный объект целиком. Этакая бесконечность, уходящая внутрь себя...

Голографический «удар по мозгам» полвека назад был очень внушителен. А теперь еще аттракторы и фракталы, моделирующие бесконечное самовложение на любой вкус (пыль Кантора, ковер Серпинского, снежинка Коха, губка Менгера).

Дэвид Бом экстраполировал идею целиком на Вселенную. Дескать, мир — это большая голограмма, каждая частичка которой содержит информацию о целом (так называемая *холономная парадигма*). Идея родилась как средство преодоления старого ЭПР-парадокса[2] из области квантово-механических неприятностей. Суть парадокса в том, что в некоторых ситуациях элементарные частицы, благодаря уравнению Шредингера, обязаны согласовывать поведение друг с другом, как бы мгновенно обмениваясь сигналами — в нарушение запрета сверхсветовых скоростей.

Бом повторил фокус с колумбовым яйцом. Парадокса нет, поскольку нет различных частиц. Частицы, мол, не отдель-

[2] Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (1935 г.)

ные объекты, а лишь разные лица чего-то единого. Поэтому никакого обмена сигналами вообще нет, как нет его между отражениями одного предмета в разных зеркалах.

Чтобы хоть как-то передать невыразимое, Бом «нарисовал» аналогию. Аквариум с рыбкой проецируется на два взаимно перпендикулярных экрана. Наблюдатель, которому видны только экраны, уверен, что есть две рыбки. Потом он замечает, что их поведение согласованно, и делает вывод о наличии мгновенного обмена сигналами.

Вот, собственно, и вся парадигма. Трюк с аквариумом играет решающую роль, и на его счет можно отнести всю популярность идеи, которая худо-бедно до сих пор тлеет. Самое интересное, что Бом, скорей всего, прав, но идея уперлась в глухую стену. Ситуация в чем-то напоминает атмосферу зарождения квантовой механики. Там что-то должно было колебаться. С мертвой точки ушли, решив: пусть колеблется «непонятно что», и тогда удалось придумать математический инструмент. Здесь пока все застопорилось на аквариуме.

Холономная парадигма имеет также другой независимый источник. Анализируя безуспешные попытки локализации памяти, нейрофизиолог Прибрам пришел к заключению о голографическом устройстве мозга, что тоже выглядит перспективно, но остается пока на разговорном уровне.

13.3 Детерминированный хаос

При изучении динамических систем значительный интерес представляет движение в пределах самого аттрактора. В случае непрерывного времени разнообразие возможностей *на плоскости* не очень велико. Причина проста. Требование единственности решения (13.1.2) не позволяет траекториям самопересекаться, и тогда варианты можно считать на пальцах. В случае $n \geq 3$ запрет самопересечения траекторий уже большой роли не играет, и сложные аттракторы возникают в довольно простых с виду системах.

Вот исторически первый (странный) *аттрактор Лоренца* (1963 г.) в системе

$$\dot{x} = -10x + 10y,$$

$$\dot{y} = 28x - y - xz,$$
$$\dot{z} = -\frac{8}{3}z + xy.$$

Изображений аттрактора Лоренца уже отпечатано, пожалуй, больше, чем репродукций Моны Лизы. Ничего особенного на вид он из себя не представляет. Что-то вроде перекрученного мотка ниток. Размерность — дробная, движение траектории — хаотичное, очень чувствительное к заданию начальных данных. Эти свойства считаются характеристическими атрибутами *странных аттракторов*.

Синоптики, умудряющиеся ошибаться в прогнозах чаще, чем это допускает теория вероятностей, должны поставить Лоренцу памятник. Дело в том, что Лоренц — метеоролог, а изученная им система имеет прямое отношение к конвекции в атмосфере. Убедившись в сверхчувствительности исследуемых траекторий, он написал статью «...может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии породить торнадо в Техасе?» — явно намекая, что с метеорологов не надо много спрашивать.

Лоренца часто превозносят за обнаружение детерминированного хаоса в условиях малой размерности, что несколько путает карты. Траектория одномерной системы

$$x_{k+1} = \{Cx_k\}, \tag{13.3.4}$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, при больших C дает очень качественный пример хаотичного поведения, чрезвычайно критичного к заданию начальных данных. Что касается непрерывного времени, то хаос ранее действительно изучался в основном для бильярдных систем более высоких размерностей[3], но истинное значение открытия Лоренца все же в другом. Был обнаружен очень простой пример *невыдуманной* динамической системы со сложным поведением, которая возникла в рядовой вычислительной практике. Стало ясно, что детерминированный хаос — это не экзотика, а рутина, которую мы не замечали раньше из-за отсутствия вычислительных средств.

[3]Из-за влияния гравитации смещение 1 г вещества во Вселенной на 1 см на расстоянии *1 световой год* от Земли делает абсолютно неопределенным направление движения молекулы в атмосфере через 1 сек! (Борель)

Если угодно, ситуация чем-то напоминает указание Вейерштрассом примера нигде недифференцируемой функции, тогда как заведомо ясно, что почти все функции недифференцируемы. Тем не менее... Очень важно понимать, как может реализоваться та или иная возможность, и может ли[4]. Детерминированный хаос мог бы возникать в системах лишь с очень сложным описанием, специально сконструированных, нереалистичных — и тогда бы мы имели дело совсем с другой Вселенной.

13.4 Богатство одномерного случая

Надо отметить, что эффективное изучение странных аттракторов едва ли было возможно без современной вычислительной техники. Роль компьютеров в математике вообще очень велика, хотя в большинстве случаев это и завуалировано. Примеры и численный эксперимент традиционно относились к разряду вспомогательных средств. Теперь же они постепенно переходят в категорию главенствующих факторов, определяющих успех исследования.

Вот довольно яркий пример простейшей итерационной процедуры

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), \qquad (13.4.5)$$

в которой компьютеры позволили обнаружить удивительные явления. Для определенности пусть, например,

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k). \qquad (13.4.6)$$

При постепенном увеличении λ от нуля и выше в системе происходит бесконечное число бифуркаций. Сначала процедура (13.4.6) сходится к одному из равновесий, потом начинают появляться циклы удвоения[5], $C(2), C(2^2), \ldots$, затем при некотором λ_∞ наступает хаос, потом снова циклы и т.д.

[4]Например, можно не опасаться, что кем-то будет «конструктивно предъявлено» невычислимое число, хотя их несоизмеримое большинство.

[5]Циклом $C(p)$ длины p называют траекторию $x_1, \ldots, x_p$, удовлетворяющую (13.4.6) и условию $x_1 = x_p$

Реализация широкого спектра возможностей на очень простой модели (13.4.6) сама по себе удивительна. Но еще более удивительно другое. В бифуркационной картине системы (13.4.6) обнаруживаются общие закономерности поведения систем вида (13.4.5), независимые в широком диапазоне от того, какова конкретно функция $f(x, \lambda)$. В частности, в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ бифуркационных значений параметра λ и даже в численном описании самих циклов $C(p)$ выявляется наличие *универсальных констант*, чего до исследований Фейгенбаума никто не ожидал.

Еще одна удивительная закономерность — *иерархия циклов Шарковского.* Если в (13.4.5) из существования цикла $C(m)$ следует существование $C(n)$, пишут $m \succ n$. Шарковский установил общую закономерность:

$$
\begin{gathered}
3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \ldots \\
\succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
\end{gathered}
$$

Таким образом, цикл $C(3)$ как бы самый старший. Из его наличия вытекает существование любых других циклов[6].

Разнообразие нелинейностей опять до некоторой степени оказывается декорацией.

На эту мельницу льют воду многие исследования нелинейной динамики. Например, *солитоны*... Поначалу кажется, что вот, дескать, учет кубической составляющей приводит к уравнению Кортвега – де Фриза, решения которого обладают чудесными свойствами. Но потом выясняется, что солитонные решения дают и многие другие уравнения. И становится понятно, что солитон в нелинейном мире — это, скорее, не исключение, а стандарт распространения сигнала.

Впечатление бесконечного многообразия нелинейностей, по-видимому, проистекает из привычки думать о функциях в категориях рядов Тэйлора, что порождает иллюзию неисчерпаемых возможностей. Во многих же задачах это не затрагивает существа дела. Там важно другое. Выпукла или вогнута функция, имеет ли экстремальные точки, насколько быстро растет

[6]Все эти результаты подробно и широко отражены в литературе.

по сравнению с линейной. В этом случае «тэйлоровский» ассортимент превращается в украшение, и остается не так много вариантов. Поэтому «нелинейная целина» обширна, но не настолько, как многим кажется.

Глава 14

Вычислимость и доказуемость

> Думаю не ошибусь, если ничего не скажу.
>
> XYZ

Комбинируя наблюдаемые факты и немного фантазируя, математика развивается вширь. Потом вдруг обнаруживаются противоречия, и тогда возникает необходимость копать вглубь, задаваясь общими вопросами. Можно ли доказать все математические истины? Оправдана ли уверенность в том, что для любой задачи существует алгоритм ее решения?

14.1 Вычислимость

Рассмотрим функцию

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи числа } \pi \text{ есть ровно } n \text{ идущих подряд семерок;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как определять значения $f(n)$? Напрашивается процедура последовательного вычисления цифр десятичного разложения числа π. Если на каком-то шаге появляется n соседних семерок, процесс останавливается, $f(n) = 1$. Однако если $f(n) = 0$

для некоторого n, то указанная процедура неэффективна — никогда не остановится.

Разумеется, неработоспособность конкретной схемы вычислений ничего не доказывает. Возможно, существует другая эффективная процедура.

Та же песня вроде бы возникает в ситуации

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{если существует целое } k, \text{ квадрат которого содержит ровно } n \\ & \quad \text{идущих подряд семерок;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но функция $g(n)$ вычислима, поскольку $g(n) \equiv 1$.

Доказательство этого факта легко выводится из известной теоремы Кронекера:

Для произвольного иррационального числа a и любых x, y $(x < y)$ всегда можно указать целые m и n такие, что

$$x < ma - n < y.$$

Покажем теперь, что всегда существует квадрат целого числа, десятичная запись которого начинается с любой наперед заданной последовательности цифр. Пусть заданная последовательность цифр обозначает в десятичной записи число A. Нам надо показать, что найдутся такие целые k и p, что

$$A \cdot 10^p < k^2 < (A+1) \cdot 10^p.$$

После логарифмирования неравенство переходит в

$$\lg A < 2 \lg k - p < \lg(A+1).$$

Полагая $k = 2^m$, $p = 2q$, получаем

$$\lg A < 2m \lg 2 - 2q < \lg(A+1).$$

Далее остается сослаться на теорему Кронекера.

На этом фоне может возникнуть впечатление, что и с $f(n)$ ситуация так или иначе разрешается. Но это эмоции.

Формальное доказательство существования невычислимых функций довольно просто. Исходным пунктом является нумерация вычислительных программ, что легко сделать. Сначала можно пересчитать программы из одной команды, потом из двух, потом из трех и так далее. В результате каждая программа получит свой номер k. Программу обозначим через P_k, а соответствующую функцию через $\varphi_k(n)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$h(n) = \begin{cases} \varphi_n(n) + 1, \text{ если } \varphi_n(n) \text{ определено} \\ 0, \text{ если } \varphi_n(n) \text{ не определено.} \end{cases} \tag{14.1.1}$$

Она не вычислима. Для доказательства предположим противное, то есть $h(n) = \varphi_p(n)$ при некотором p. Но этого не может быть, так как $h(p) \neq \varphi_p(p)$, если значение $\varphi_p(p)$ определено, и $h(p)$ определено, если $\varphi_p(p)$ не определено.

14.2 Ошибки

Данная область изобилует парадоксами, но здесь они в большинстве своем из области ошибочных умозаключений. Тем не менее эти ошибки полезно «пережить», чтобы знать, «куда ходить не надо». Вот один из примеров.

Назовем функцию $f(n)$ вычислимой, если для любого n существует предписание, по которому за конечное число шагов вычисляется $f(n)$. Пронумеруем такие функции и определим

$$g(n) = f_n(n) + 1.$$

Эта функция не вычислима, так как при $n = 1$ отличается от f_1, при $n = 2$ — от f_2 и так далее. С другой стороны, она вычислима, поскольку к вычисляемому значению $f_n(n)$ всегда можно прибавить 1.

Возникает вопрос, зачем было мудрить с функцией (14.1.1). Причина весьма серьезная. Любая попытка определить вычислимую функцию $f(n)$ так, чтобы она была вычислима при любом n, — принципиально обречена на провал. Или получаются слишком узкие классы функций (дискредитирующие понятие вычислимости), или какие-то $f(n)$ обязательно имеют область неопределенности. Попытка доопределить $f(n)$ силовым методом тоже не проходит (неразрешимость проблемы останова).

Корень неприятностей довольно очевиден. Определение функций с помощью заведомо выполнимых прямых действий (типа сложить, умножить) приводит в итоге к уравнениям

$$u(a, n) = 0, \tag{14.2.2}$$

решение которых $n = f(a)$ естественно относить к вычислимым функциям. В противном случае теория превращается в малополезную игрушку. В то же время (14.2.2) принципиально не всегда разрешимо.

Еще один популярный пример.

Рассмотрим осмысленные тексты, каждый из которых содержит не более ста слов и определяет какое-то число. Очевидно, количество таких текстов ограничено, поэтому ограничено множество определенных подобным образом чисел. Следовательно, в этом множестве существует максимальное число. Прибавим к этому числу единицу.

Предыдущий абзац содержит менее ста слов, но определяет число на единицу большее максимального!

Софистика здесь многопланова. Когда говорят об ограниченности множества чисел, определяемых фразами, подразумевают что-то вроде кодировки. Но как быть с фразами, которые определяют числа не сами по себе, а опираясь на другие фразы? Получается уже не жесткая кодировка, а развивающая система фраз...

Далее. Число атомов во Вселенной, или максимальное число, которое кто-нибудь когда-нибудь записывал на бумаге... Что такие фразы определяют? Ничего. Плюс возможная опора на большую совокупность человеческих знаний. Простейший пример — «число микрон в дюйме». Четыре слова задают вполне определенное число, но узнать его можно, лишь располагая информацией, которая в самой фразе не содержится.

Короче говоря, после очистки от несуразностей от парадокса ничего не остается.

14.3 Рекурсивные мотивы

Множество называется *рекурсивным*, если существует эффективная процедура для выяснения того, принадлежит или нет произвольный элемент этому множеству.

Множество называется *рекурсивно перечислимым*, если существует эффективная процедура для последовательного порождения его элементов, которая в пределе исчерпывает все множество.

Имеет место следующий фундаментальный результат.

Существует рекурсивно перечислимое, но не рекурсивное множество положительных целых чисел.

Схема доказательства проста. Сначала устанавливается справедливость следующего факта: *множество положительных целых чисел S рекурсивно тогда и только тогда, когда рекурсивно перечислимо не только S, но и $\bar{S}$,* где $\bar{S}$ обозначает дополнение S, то есть множество положительных целых чисел, которые не принадлежат S.

Доказательство этого представляет собой несложное упражнение. Дальнейший ход рассуждений таков. Пусть $S_1, S_2, S_3, \ldots$ — эффективное перечисление всех рекурсивно перечисленных множеств. Образуем множество R из тех чисел x, которые принадлежат S_x. Таким образом, $\bar{R}$ состоит из элементов x, удовлетворяющих условию $x \notin S_x$. Поэтому $\bar{R}$ не может совпадать ни с одним из S_p (доказывается от противного — в две строчки, но не просто) — следовательно, $\bar{R}$ рекурсивно неперечислимо, а R — нерекурсивно.

В принципе, существование невычислимой функции и рекурсивно перечислимого, но нерекурсивного множества, — это отражения одного и того же явления в двух разных зеркалах. Есть еще много других зеркал. Некоторые из них стоят поодаль, и в них изображение того же явления дополняется посторонними деталями (теоремы Геделя, например).

Известны многочисленные попытки определения вычислимой функции. В 1936 году Тьюринг ввел функции, вычислимые конечной машиной, известной ныне как *машина Тьюринга.* В том же году Гедель, Эрбран, Клини ввели *рекурсивные функции.* Затем Черч, Пост, Марков — выделяли иные классы функций.

Усилиями многих математиков было установлено, что все пути, как говорится, ведут в Рим — приводят к одному и тому же классу вычислимых функций.

14.4 Диофантовы множества

Уравнение

$$p(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{14.4.3}$$

где p — полином с целыми коэффициентами, называется *диофантовым* и подразумевает решение в целых числах.

Такие уравнения с древних времен притягивали математиков, как рулетка игроков. Способы решения отличались фрагментарностью. В 1900 году Гильберт в своем знаменитом списке математических проблем под номером 10 поставил вопрос: «существует ли единый алгоритм для выяснения разрешимости любого уравнения (14.4.3)?». Проблема оказалась трудной и плодотворной. Последнюю точку в ее отрицательном решении поставил Матиясевич в 1970 году. «Зрители» получили громадное удовольствие, поскольку математики (Гедель, Дэвис, Путнам, Робинсон, Матиясевич и др.) действовали с изяществом и вдохновением. К тому же, необыкновенно красивое решение оказалось доступным буквально школьнику (разумеется, терпеливому). Масса сопутствующих результатов получилась неожиданной для интуиции, а сама тематика обернулась в чистом виде тематикой вычислимости. Остановимся на плодах.

Часть переменных в (14.4.3) выделим в качестве параметров, и перепишем уравнение в виде $p(a, x) = 0$, т. е.

$$p(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_m) = 0. \tag{14.4.4}$$

Множество A векторов[1] $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ назовем *диофантовым*, если при любом $a \in A$ и только при $a \in A$ уравнение (14.4.4) разрешимо в целых положительных $x_1, \ldots, x_m$.

На первый взгляд, определение устанавливает довольно жесткие ограничения, и кажется маловероятным, что диофантовыми будут сколько-нибудь нетривиальные множества. Скажем, множество целых чисел π_n, где запись π_n совпадает с первыми n разрядами в разложении числа π. Матиясевич, кстати, мог бы стать миллионером, предлагая до публикации своих результатов вопрос на пари: «диофантово ли множество простых чисел?». Любой математик ответил бы: «нет».

Оказалось же, что *любое рекурсивно перечислимое множество диофантово*! Тех, кто «был в теме», это шокировало. Да еще небольшая переформулировка усиливала эффект. Переформулировка на основе очень простого, но тоже неожиданного результата:

Множество A целых положительных чисел диофантово в том и только том случае, когда оно является множеством положительных значений некоторого полинома $P(x_1, \ldots, x_k)$.

Доказательство элементарно. Если A — множество положительных значений $P(x_1, \ldots, x_k)$, то

$$p(a, x_1, \ldots, x_k) = a - P(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

определяет A, как диофантово.

Обратно. Пусть A — множество тех a, при которых

$$Q(a, x_1, \ldots, x_l) = 0$$

[1]Почти везде далее можно считать $k = 1$, т. е. A — просто множество целых чисел.

разрешимо. Тогда A — множество положительных значений полинома $x(1 - Q^2(a, x_1, \ldots, x_l))$.

Таким образом, существует полином, множество положительных значений которого в точности совпадает с множеством простых чисел. Более того, его можно конкретно указать, хотя это мало что дает из-за плохой обозримости.

Каждый полином (14.4.4) характеризуется степенью n и числом m переменных x. Для любого диофантова множества A можно указать полином (14.4.4) с $n \leqslant 4$ (но, возможно, большим m) либо $m \leqslant 9$ (но, может быть, большим n). Чисел n и m порядка двух-трех десятков, как правило, достаточно для самых сложных случаев. Такого порядка n и m достаточно и для записи универсального полинома (аналог универсальной машины Тьюринга), генерирующего любое диофантово множество по его номеру.

На фоне открывающегося пейзажа 10-я проблема Гильберта как-то отходит на второй план. Ее отрицательное решение дает простой перевод на другой язык факта существования рекурсивно перечислимого, но не рекурсивного множества.

Что касается вычислимых функций $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, то это функции, график которых (множество)

$$G = \{x_1, \ldots, x_n,\ y = f(x_1, \ldots, x_n)\},$$

диофантов.

Таким образом, диофантовы уравнения оказываются еще одним вариантом (языком) изучения вычислимости. В каком-то смысле — эквивалентным, в каком-то — более эффективным, в каком-то — менее. Большинство исследований в рассматриваемой области традиционно опирается на машины Тьюринга или на рекурсивные функции. В том и другом случае процесс вычислений как бы покрыт вуалью (ускользает из-под контроля, хотя правила описаны). Здесь же вычисляются значения обыкновенного полинома, который можно «потрогать». Для некоторых задач это может быть существенно.

14.5 Теоремы Геделя

В связи с «диофантовой эпопеей» геделевская тематика существенно прояснилась. В свое время Геделю пришлось много повозиться с переводом арифметики и логики на язык цифр. Конечный его результат хорошо известен, и в жаргонном варианте звучит так: *«Какова бы ни была совокупность аксиом, в теории чисел существует недоказуемое утверждение».*

Это, конечно, слишком вольная и, строго говоря, неправильная трактовка, хотя она близка к истине. Один из вариантов точной формулировки: *«Каждая ω-непротиворечивая и адекватная арифметическая логика неполна»*, — дает намек на те самые детали, которые доводят до белого каления, когда теорема сдается «под ключ». Основное ядро здесь представляет факт существования перечислимого, но не рекурсивного множества. Это — по весу. Вклад по головной боли на 99% дают детали, преодоление которых ставит достижение Геделя в один ряд с подвигами Геракла.

На языке диофантовых уравнений ситуация намного прозрачнее. Там как раз последовательно, шаг за шагом, устанавливается, что утверждения, опирающиеся на

- любые арифметические операции;
- различные числовые функции и их композиции;
- логические связки $\wedge$ (и), $\vee$ (или), квантор $\exists$ (существует);

и кое-что еще — могут быть выражены на языке диофантовых множеств.

Логические операции:

$\sim$ (не), $\forall$ (для всех...), $\rightarrow$ (если..., то...), — к разрешенным средствам не относятся. И это понятно, поскольку с помощью любой из них можно записать утверждение о рекурсивности перечислимого множества, что, как было установлено, не всегда верно.

Поэтому на языке полиномов эквивалент теоремы Геделя более-менее точно можно сформулировать так:

Какова бы ни была непротиворечивая система аксиом, существует полином, который неразрешим[2], но этот факт недоказуем.

Два замечания.

[2]В смысле неразрешимости уравнения (14.4.4)

1. Когда речь заходит об отрицательном решении 10-й проблемы Гильберта, то часто говорят, мол, нет единого алгоритма, а для любого конкретного полинома может существовать свой. Не так. По крайней мере, Матиясевич и K° установили большее: существует конкретный полином, для которого нет алгоритма проверки разрешимости. А уж отсюда, тем более, следует отсутствие общего алгоритма.

2. Упоминание в результатах Гёделя непротиворечивости аксиом не должно вызывать затруднений, поскольку это не столько важное условие, сколько присказка. В противоречивом случае можно делать любые выводы. Более того, *непротиворечивость аксиом сама по себе непроверяема* (в избранных рамках). Действительно, как происходит формирование системы аксиом? Отталкиваясь от любой стартовой совокупности, можно утверждать существование недоказуемой истины

$$\forall x > 0 : P(x) \neq 0. \tag{14.5.5}$$

Но конкретно указать $P(x)$ (в отличие от полиномов, генерирующих простые числа и другие яства) принципиально нельзя, иначе возникает противоречие с недоказуемостью (14.5.5). Поэтому у нас могут быть лишь подозрения об истинности утверждений типа (14.5.5). Присовокупляя их к аксиомам, мы и получаем «подозрительную» систему, сидя внутри которой, ничего не можем сказать ни об истинности, ни о противоречивости. Разумеется, если аксиомы действительно истинны и непротиворечивы, но об этом знает только Бог. В противном случае остается ждать, когда «заискрит».

14.6 Базисы тождеств

Из предыдущего видно, что вычислимость и доказуемость очень тесно соприкасаются друг с другом. Последняя, однако, имеет свою интерпретационную харизму, не говоря о более высокой интуитивной значимости. Так или иначе, но упрощенные модели, позволяющие увидеть, «что стоит за кадром», представляют большую ценность.

Иногда говорят, что без аксиомы индукции невозможно доказывать утверждения, справедливые для любых целых чисел. Это не совсем так. Например, в рамках арифметики можно ограничиться совокупностью аксиом A_0:

- коммутативность (перестановочность) сложения и умножения,
- правило прибавления нуля и умножения на единицу,
- произвол в расстановке скобок для суммы и произведения,
- дистрибутивный закон $a(b+c) = ab + ac$.

Если теперь рассмотреть (в качестве теорем) тождества, записываемые с помощью только сложения, умножения и расстановки скобок, то получится замкнутая теория, в которой все истины доказуемы (из-за искусственного ограничения средств). В этом случае A_0 называют конечным базисом тождеств.

Не так давно (40 лет назад) Тарскому пришло в голову задаться вопросом о некотором расширении A_0. Что, если добавить, скажем, возведение степень, постулируя обычные свойства:

$$\begin{gathered} 1^a = 1, \quad a^1 = a, \\ c^{a+b} = c^a c^b, \\ (ab)^c = a^c b^c, \quad (a^b)^c = a^{bc}. \end{gathered} \tag{14.6.6}$$

При этом, конечно, разрешить возведение в степень и при записи тождеств. Будут ли в этом случае доказуемы все правильные тождества? (HSI-проблема Тарского).

Постепенно стало ясно, что это очень трудная задача. И только лет через 20 она была решена отрицательно. Уилки нашел верное тождество

$$\begin{aligned} &[(1+a)^a + (1+a+a^2)^a]^b[(1+a^3)^b + (1+a^2+a^4)^b]^a = \\ &= [(1+a)^b + (1+a+a^2)^b]^a[(1+a^3)^a + (1+a^2+a^4)^a]^b, \end{aligned} \tag{14.6.7}$$

недоказуемое с помощью аксиом A_0+(14.6.6).

В таких ситуациях естественно возникает соблазн присоединить (14.6.7) к A_0+(14.6.6), чтобы получить все-таки конечный базис. Но уже ничего не получается. Барьер разнообразия средств преодолен, и *теоремы начинают размножаться быстрее, чем доказательства.*

Еще один острый вопрос: как удается доказать недоказуемость (14.6.7)? Ведь можно констатировать, что еще не получилось. Но как гарантировать, что и не получится? Оказывается, можно. Для этого создается модель, отличная от множества обычных чисел, в которой аксиомы A_0+(14.6.6) выполняются, а тождество (14.6.7) ошибочно[3].

[3]Подробности и дополнительный материал есть в интересной статье М.В.Волкова «Проблема конечности базиса тожеств», МИФ, № 2, 1997.

Глава 15

Пространство и время

Обманите меня... но совсем, навсегда...
Чтоб не думать зачем, чтоб не помнить когда...
Чтоб поверить обману свободно, без дум,
Чтоб за кем-то идти в темноте наобум...
И не знать, кто пришел, кто глаза завязал,
Кто ведет лабиринтом неведомых зал,
Чье дыханье порою горит на щеке,
Кто сжимает мне руку так крепко в руке...
А очнувшись, увидеть лишь ночь и туман...
Обманите и сами поверьте в обман.

Максимилиан Волошин

Как устроен мир, похоже, никто не знает, но некоторые делают вид... Последнее сильно запутывает ситуацию, зато дает работу большой армии ученых.

15.1 Загадка Космоса

Самая большая загадка Космоса — тайна бесконечности. Что, так сказать, «за горизонтом»? Такого рода вопросами все переболели в той или иной мере, но никто не выздоровел полностью. Поэтому большинство предпочитает опереться на Эйнштейна. Дескать, его теория относительности все объясняет.

Так удобнее. Алкоголь заблуждения тонизирует, и неизвестность не гложет. Но теория относительности ничего не объясняет, а только переносит загадку из одного места в другое.

Возьмем СТО (специальную теорию относительности), родившуюся в 1905 году на фоне изумления по поводу опытов Майкельсона – Морли.

Чтобы не сбивать прицел, не хотелось бы вообще затрагивать физику, но стерилизовать изложение полностью невозможно. Поэтому заметим, что у «физических отступлений» далее — нет намерений расставлять оценки.

Итак, правильно или нет, но в то время физики на основе упомянутых опытов пришли к заключению, что свет распространяется во всех инерциальных системах с одной и той же скоростью

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10}\,\text{см/сек}.$$

Разумеется, — дикость с точки зрения здравого смысла. Танк, едущий со скоростью V, выстреливает снаряд со скоростью v — и снаряд летит со скоростью $v+V$. А свет, испускаемый фарами того же танка со скоростью c, распространяется почему-то с той же скоростью c, а не $c+V$.

Интересны, конечно, причины, по которым научные круги согласились с этой «нелепостью». В то время господствовала картина мира, согласно которой Земля движется в неподвижном эфире, заполняющем Космос. Свет — колебание эфира, — поэтому скорость его распространения вдоль вращения Земли и — поперек (по параллелям и меридианам) должна была бы различаться, если бы работало правило сложения скоростей. Однако опыты Майкельсона (1881 г.), а потом — его же совместно с Морли (1887 г.) — не подтвердили ожиданий. Разумеется, возникли предположения, что эфир увлекается движением Земли, но это имело свои минусы. Варианты анализировались и отпадали. В конце концов остался один — постоянство скорости света.

Поскольку, каков поп — таков приход, — следствия были соответствующими. При переходе к другой инерциальной системе менялись размеры тел и течение времени, что разрушало устоявшиеся представления. Майкельсон впоследствии сокрушался: «Если бы я мог предвидеть все, что вывели из результатов моего опыта, то никогда бы его не делал».

15.2 Эйнштейн и Лоренц

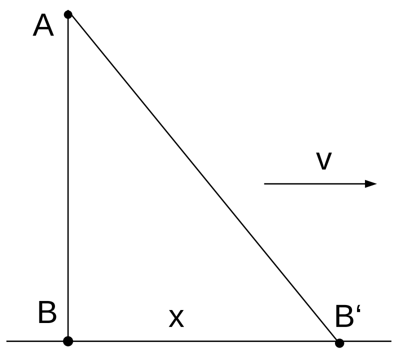


рис. 13.1.

Рассмотрим простой пример. Свет из A в B приходит за время (см. рис. 13.1)

$$\triangle t = \frac{h}{c}.$$

Если A и B расположить на тележке, едущей перпендикулярно AB со скоростью v, то неподвижный наблюдатель увидит другую картину: свет распространяется вдоль AB' и приходит в B' за время

$$\triangle t' = \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{c}.$$

Учитывая $h = x\triangle t$, $x = v\triangle t'$, имеем

$$\triangle t' = \frac{\triangle t}{(1 - \beta^2)}, \tag{15.2.1}$$

где $\beta = \dfrac{v}{c}$. Если теперь в A и B расположить зеркала и заставить фотон света бегать «туда-сюда» — получатся часы со световым маятником, которые в силу (15.2.1) будут идти медленнее в $\dfrac{1}{(1-\beta^2)}$ раз.

(!) Обратим внимание, что речь идет не о взаимосвязи течения времен в движущихся системах координат, а о том, что *движущиеся часы* с точки зрения неподвижного наблюдателя *идут медленнее.* Либо наоборот, что одно и то же, — покоящиеся часы с точки зрения движущегося наблюдателя. Иными словами, формула (15.2.1) выражает так называемое собственное время объекта через время системы отсчета, относительно которой происходит движение.

Действуя примерно в том же духе, можно получить преобразования Лоренца[1]

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \dfrac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15.2.2}$$

связывающие координаты точки $\{x, y, z, t\}$ в инерциальной системе K с координатами этой же точки в системе K', движущейся относительно K со скоростью v вдоль оси x.

Из (15.2.2) вытекает, например,

$$\triangle x' = \sqrt{1-\beta^2}\,\triangle x,$$

что означает сокращение размеров тел вдоль движения с коэффициентом $\sqrt{1-\beta^2}$. Короче говоря, сумасшедший дом.

Рассмотренный круг явлений на стыке 18-го и 19-го веков оказался в центре внимания физиков. Математика за кадром была копеечная, рассуждения — головоломные, и, что хуже всего, постоянно маячили тени парадоксов. Например, в часах со световым маятником фотон стукается о зеркало B 100 раз, а наблюдателю кажется, допустим, 60. И наоборот, кстати, у наблюдателя сердце делает 10 ударов, а часы «слышат» — 6. Для окончательного противоречия не хватает малости: очной ставки часов с наблюдателем через некоторое время, которую

[1]Это преобразование впервые рассматривал Фитцджеральд.

не удается организовать инерциальным способом[2]. Короче говоря, в центре внимания физиков была некая совокупность логических построений, противоречивших здравому смыслу.

Что сделал Эйнштейн? Аморфную груду фактов он привел в порядок и реорганизовал в теорию. В основу были положены две аксиомы:

(i) *принцип относительности*: законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (обобщение механического принципа Галилея);

(ii) максимальная скорость взаимодействия во Вселенной ограничена, одинакова во всех инерциальных системах и равна скорости света в пустоте.

На самом деле в неявной форме было заложено несколько больше: процедура синхронизации часов и некоторые способы логических рассуждений, казавшиеся само собой разумеющимися. Получившаяся картина, однако, походила на теорию. Никаких загадок Вселенной, правда, решено не было, поскольку главная заноза, постоянство скорости света, так и осталась, но клубок противоречий превратился в совокупность логически согласованных результатов.

Если проводить параллели, то произошло нечто подобное рождению механики Ньютона, который выдвинул в качестве аксиом три закона, не претендуя, между прочим, на авторство, добавил закон гравитационного притяжения, — и показал, что на этом фундаменте может быть построена вся остальная механика. Такой умеренно аксиоматический подход очень привлекателен. Недаром геометрия Евклида уже более двух тысяч лет явно выделяется на общем фоне стройностью и логичностью.

Однако вернемся к Эйнштейну. Бытует мнение, что теория относительности — невероятно сложная штука. На самом деле уровень сложности примерно такой же, как в обычной механике. Пока речь идет о фундаменте — математика на школьном уровне. Рассуждения в СТО сложнее, но это из-за

[2]Парадокс близнецов возникает при замене часов с наблюдателем двумя близнецами.

непривычности и несоответствия предмета здравому смыслу. Далее можно решать сколь угодно сложные задачи, но это уже не столько физика, сколько математика. Эйнштейн, кстати, вздыхал: «С тех пор, как за теорию относительности принялись математики, я ее уже сам больше не понимаю». Это высказывание математикам по душе. Физикам больше нравится другое (того же автора): «Существует поразительная возможность овладеть предметом математически, не поняв существа дела».

Большую роль в мифологизации СТО играет неосведомленность. Что стоит, например, за известной формулой

$$E = mc^2 \tag{15.2.3}$$

мало кто знает, и каждому чудится свое. Физикам же формула (15.2.3) была ясна с тех пор, когда стало известно, что падающий фотон сообщает телу импульс

$$p = \frac{E}{c},$$

откуда до (15.2.3) — один шаг. Берется какая-нибудь механическая задача с двумя телами, A и B. Часть тепловой, например, энергии $\triangle E$ тела A преобразуется в световой импульс и отправляется в B. Из-за ракетного эффекта (отдачи), пока фотоны летят к B, центр тяжести системы смещается. Чтобы ситуацию привести в согласие с обычной механикой, массу B после поглощения фотонов приходится увеличить на $\triangle m = \dfrac{\triangle E}{c^2}$, что и дает в конечном итоге (15.2.3). Эйнштейн, правда, вывел (15.2.3) несколько иначе, но это опять-таки полстранички текста.

Упирая на простоту и даже несколько перегибая палку, мы, конечно, ориентируемся не на зрителей, которых, фигурально выражаясь, больше интересуют иллюзионы Коперфильда, нежели их секреты. Другое дело — работа за кулисами или на сцене. Там другие ракурсы, и туда нужен доступ, чтобы сцена со временем не опустела. А для доступа необходимы трезвые суждения, дефицит которых в области СТО, безусловно, ощущается. Цивилизация, сотворив себе кумира в лице Эйнштейна, выставила табу. С одной стороны, это хорошо, как защита от дилетантов, с другой — тормоз...

15.3 Общая теория относительности

Общая теория относительности (ОТО) — совсем другая штука. Здесь Эйнштейн — единоличный автор, а теория, как многие считают, сильно опережает свое время. По этой причине, ясное дело, она нужна в основном физикам, получающим зарплату за «охрану берегов».

Если кто-то считает, что это колкость в адрес Эйнштейна, то — ничего подобного. Цивилизация создала Эйнштейна, как миф, но прообраз мифа, без всяких сомнений, — гениальный ученый. Две нобелевских премии говорят сами за себя, и Эйнштейн — один из лучших объектов для восхищения, если к тому располагает настроение и диспозиция. Но другая ситуация возникает за кулисами, где начинает работать правило «нет пророка в своем отечестве».

Совсем неплохое правило, кстати. Оно может не нравиться иногда пророку, зато свиту из немых почитателей превращает в участников основного процесса, без которых пророку было бы одиноко.

Вернемся к ОТО. Теория родилась из загадки. Почему совпадают инертная и гравитационная массы? В третьем законе Ньютона,

$$mw = F, \tag{15.3.4}$$

и в законе гравитационного притяжения,

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \tag{15.3.5}$$

фигурирует одна и та же масса m. В (15.3.4) — это коэффициент инерции, а в (15.3.5) — гравитационный заряд. С какой стати гравитационный заряд определяет инерционные свойства? Это ведь явления «из разных опер».

Здесь уместно вспомнить Галилея в связи с падением тел. Потрясающий, между прочим, пример всеобщей слепоты. Две тысячи лет человечество доверяло Аристотелю, считая, что тяжелые тела падают быстрее. Галилей сбросил с Пизанской башни пушечное ядро и мушкетную пулю. Комиссия, внизу, зафиксировала результат — и наука двинулась по другой колее.

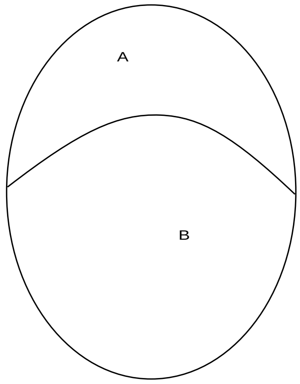


рис. 13.2.

Это впечатано в историю. Менее известно, что у Галилея были теоретические аргументы. Он рассуждал так. Если тело A тяжелее B и падает быстрее, то объединение A и B (рис. 13.2), как более тяжелое тело, должно падать еще быстрее. С другой стороны, тело B, падающее медленнее A, должно тормозить A. Получается противоречие, из которого один выход — все тела падают одинаково.

Рассуждение ошибочно, хотя с ходу это не бросается в глаза. Какие тела как падают зависит как раз от соотношения инертной и гравитационной массы, что во времена Галилея вообще не было в поле зрения.

Факт совпадения гравитационного заряда с коэффициентом инерции, конечно, удивителен, и было ясно, что он свидетельствует о какой-то глубинной связи разнородных явлений. Но никому в голову не приходило хотя бы нечто правдоподобное в качестве объяснения.

Эйнштейн совершил гениальный прорыв, заменив гравитацию и неинерциальные силы искривлением пространства. Взгляд на Вселенную радикально изменился. Стало привычным рассуждать о замкнутых моделях Вселенной типа трехмерной сферы или тора. Всколыхнулись математические заготовки нелинейных геометрий. Возникло обширное поле для исследований.

Кое-кто утверждает, что ОТО (а некоторые добавляют: и СТО) — самая большая ошибка 20-го века. Здесь не место спорить. Но даже если ошибка, то она сейчас так отшлифована, что лучше всякой правды. К тому же, еще неизвестно, от чего больше пользы. Модель атома Резерфорда, например, противоречившая всем мыслимым и немыслимым законам физики, сыграла в свое время колоссальную положительную роль.

Глава 16

Вавилонская башня

> Пока астрономические наблюдения не подтверждаются теорией, верить им нельзя.
>
> ЭДДИНГТОН

За границей — иностранный язык, в микромире — квантовая механика. Во времена Луи де Бройля казалось, что говорить о волнах материи — чистейший бред. Потом физики, чтобы спать спокойно по ночам, убедили себя и других, что это приемлемо. Оно так и оказалось. Все притерпелись, и квантовая механика осталась узаконенным фокусом, позволяющим многое вычислять. Особенно задним числом, — говорят циники.

Но до сих пор нет правдоподобной картины. Хоть не задумывайся. Теория, так сказать, для толстокожих. А ведь математические фокусы загадочной природы могут вполне уживаться с правдоподобными интерпретациями. Общая теория относительности, например, несмотря на замах объять необъятное, в *некоторых срезах* — понятийно прозрачна. Многое укладывается в обычные представления. Искривленное пространство, замкнутая модель Вселенной — без края, но с ограниченным объемом — все это, по крайней мере, не вызывает логического дискомфорта. Определенную часть теории можно моделировать, «сидя здесь», чего не скажешь о СТО или о квантовой механике.

16.1 Уравнение Шредингера

Ньютон, установивший в свое время волновую природу света в замечательных опытах по интерференции и дифракции, потом неожиданно выдвинул корпускулярную теорию. Дескать, свет — это поток частиц.

Через двести с лишним лет де Бройль, как бы отвечая на удар, констатировал, что частицы типа электрона — это волны. Вывод был чересчур радикален, чтобы сразу согласиться, но...

Изучение микромира взорвало представления классической физики. Модель атома Резерфорда (по типу солнечной системы) рухнула под грузом противоречий. Вращающиеся вокруг ядра электроны должны были бы непрерывно излучать и, теряя энергию, падать на ядро. Модель Бора кое-как залатала прорехи, но больше походила на список чудес. От элементарных частиц остались одни названия. Электрон из электрически заряженного шарика превратился в фикцию, обязанную пребывать в непонятных состояниях и совершать какие-то квантовые скачки. Короче говоря, ни ясности, ни цементирующего начала.

И вот когда де Бройль заговорил о волнах материи, в воздухе повисла естественная ассоциация. Закрепленная струна колеблется с определенными частотами. Дискретные спектры пронизывают всю теорию колебаний. Не такова ли природа дискретности излучения атома?

Шредингер подобрал (1924 г.) уравнение колебаний[1], которое бы согласовывалось с экспериментальными данными. Что колеблется, было неясно, поэтому сие деяние никто, включая самого Шредингера, всерьез не воспринимал. Потом попробовали и втянулись. Что колеблется, до сих пор неясно, но фокус работает. Вопрос о природе колебаний закрыт «волнами вероятности». Кстати, авторитет теории уже так велик, что эти «волны вероятности» можно вполне заменить эквивалентной формулировкой «колеблется непонятно что». Короче говоря, процесс завершился по Планку, который говорил, что научная истина торжествует по мере того, как вымирают ее противники. Циник бы тут добавил, что «по мере того» торжествует не

[1]Как музыкант мелодию.

только истина.

Теперь два слова о самом уравнении.

Напряженность электрического поля вдали от гармонического излучателя меняется по закону

$$E = E_0 \, e^{i(\omega t - kr)}, \tag{16.1.1}$$

где ω — круговая частота ($\omega = 2\pi\nu$), k — так называемый волновой вектор, $r = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор.

Поскольку де Бройль приписал частицам длины волн по аналогии с фотонами, то в качестве волновой функции было естественно испробовать копию (16.1.1) с заменой разве что буквы E на что-нибудь другое. Так возникла волновая функция

$$\psi(r,t) = \psi_0 \, e^{\frac{i}{\hbar}(Et - pr)}, \tag{16.1.2}$$

отличающаяся от (16.1.1) лишь перезаписью параметров с учетом хорошо известных связей

$$E = \hbar\omega, \quad p = k\hbar, \tag{16.1.3}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π.

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет (16.1.2), легко подбирается.

Дифференцирование (16.1.2) дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} E\psi,$$

а также

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\hbar^2} \, \psi.$$

Теперь из

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = E$$

следует

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right), \tag{16.1.4}$$

что и представляет собой один из возможных вариантов записи уравнения Шредингера.

Любой шаг в новом направлении, как правило, оказывается первым, требуя дальнейшего движения. В этом смысле ясно, что на записи (16.1.4) квантовая механика не заканчивается.

16.2 Распространение волн

Спустимся с небес на Землю. Определим скорость c распространения импульса сжатия вдоль стержня с сечением S (рис. 14.1). Пусть в импульсе давление увеличено на $\triangle P$, а плотность — на $\triangle\rho$. За время $\triangle t$ через S пройдет масса вещества $\triangle m = \triangle\rho S c \triangle t$.

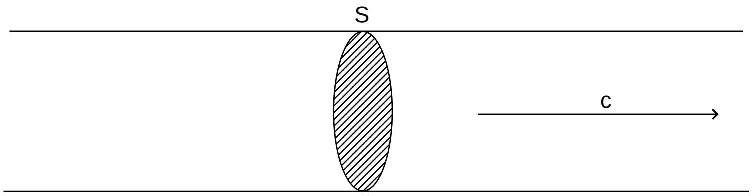


рис. 14.1.

Сила, действующая на площадку S, очевидно, $F = \triangle P \cdot S$. Изменение количества движения равно импульсу силы, т. е. $\triangle mc = F \triangle t$, откуда

$$\triangle \rho S c^2 \triangle t = \triangle P S \triangle t,$$

что после перехода к пределу $(\triangle P, \triangle \rho \to 0)$ дает

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \tag{16.2.5}$$

Хотелось бы обратить внимание на важный гуманитарный аспект, лежащий здесь на заднем плане. Общеизвестно, что школьные задачи на составление уравнений вызывают наибольшие трудности. Задним числом все просто, но изначально выглядит неприступно. Что принять за неизвестное, за какие концы ухватиться, что чему приравнять... Глаза разбегаются, руки опускаются, клубок не распутывается.

Физики-теоретики виртуозно владеют искусством решения такого сорта задач. И надо признать, что по хваткости, умению ориентироваться и заряженности на результат, — они явно занимают лидирующее положение.

Формула (16.2.5) — одна из физических миниатюр. Для твердого стержня она дает $c = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга.

В случае газа вопрос упирается в уравнение состояния. Если положиться на

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{16.2.6}$$

т. е. $P = \rho \dfrac{RT}{\mu}$, то $\dfrac{dP}{d\rho} = \dfrac{RT}{\mu} = \dfrac{P}{\rho}$, что приводит к заниженному результату

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \tag{16.2.7}$$

Ошибочность(16.2.7) состоит в том, что при звуковых колебаниях температура не успевает выравниваться, поэтому вместо (16.2.6) надо рассматривать адиабатический процесс $P/\rho^\gamma = \mathrm{const}$, откуда $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$, что уже правильно определяет скорость звука.

Между прочим, к выводу формулы (16.2.5) можно было бы предъявить много претензий, начиная с неопределенности самого понятия скорости c. Например, форма импульса может зависеть от t, и тогда непонятно, что такое c. Но мы все это оставляем за кадром, тем более что в первом приближении результаты верны.

Имеет право на существование и другая точка зрения, требующая «дожимания» задачи до конца. Но тогда надо учитывать, что 1% населения выпивает 99% алкоголя. Точно так же 1% усилий решает задачу на 99%. А кому хочется все сто, то на один недостающий процент уходит очень много сил и времени.

Обратим теперь внимание на другую сторону дела. Если стержень расположен вдоль оси x, то степень сжатия $u(x,t)$ в общем случае будет функцией двух переменных. Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u(x,t)$. Рассмотрим два сечения x и $x + \triangle x$ (рис. 14.2), а также заключенный между ними объем $\triangle V = S\triangle x$. Сила, действующая

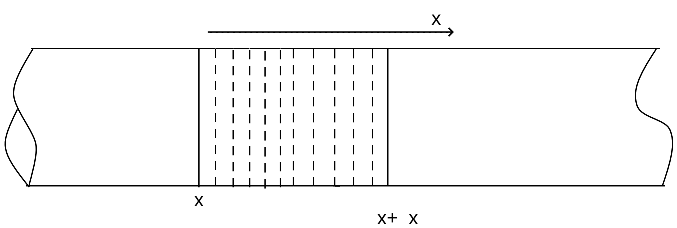


рис. 14.2. Распространение сжатия

на сечение x, равна

$$kS\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x,$$

где k определяется физикой задачи (газ, твердый стержень). Результирующей силой, действующей на объем $\triangle V$, будет

$$F = kS\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\triangle x} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\right) = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\triangle x, \qquad (16.2.8)$$

и тогда закон Ньютона дает волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{16.2.9}$$

где $c = \sqrt{k/\rho}$ — скорость волны, если говорить с натяжкой, $\partial^2 u/\partial t^2$ — ускорение.

При переходе в пространство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

16.3 Уравнение теплопроводности

Для вывода уравнения распространения тепла большую часть рассуждений предыдущего раздела можно оставить без изменений. Вместо (16.2.9) получается

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{16.3.10}$$

где $T(x,t)$ — температура, как функция x и t. Аналогом силы (16.2.8) в данном случае будет количество тепла

$$Q = kS \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \triangle x,$$

которое втекает в объем $\triangle V$ (теперь k — коэффициент теплопроводности).

Затем то же самое Q подсчитывается другим способом

$$Q = \rho\lambda S \triangle x \frac{\partial T}{\partial t} \triangle t,$$

где λ — теплоемкость, $\dfrac{\partial T}{\partial t} \triangle t$ — повышение температуры за время $\triangle t$, что и дает (16.3.10), $a = k/\rho\lambda$.

Таким образом принципиальная разница с предыдущим случаем заключается в том, что в данной ситуации не работает аналог закона Ньютона. В результате вторая производная по времени заменяется на первую.

16.4 О мистическом подобии

Схемы рассуждений предыдущих двух разделов в очищенном от деталей виде исчерпывают большую часть физических задач. Всегда есть нечто вроде силы F, влияющей на движение, и нечто вроде координаты z, определяющей фокус внимания. И есть всего два варианта (если не говорить об исключениях):

(i) Сила порождает движение, $F = k\dot{z}$ (при $F = 0$ движение останавливается, $\dot{z} = 0$).

(ii) Движение происходит по инерции, сила определяет ускорение $F = k\ddot{z}$.

И с силой, и с координатой происходят метаморфозы при переходе в другую область (из механики, скажем, в оптику). Но по сути — ничего не меняется. Маятник на пружине описывается уравнением $m\ddot{x} = -kx$, крутильные колебания уравнением $I\ddot{\varphi} = -k\varphi$ (φ — угол, I — момент инерции «того, что крутится», «сила» $k\varphi$ — момент обычной силы). При переходе к электрическому колебательному контуру декорации меняются значительнее (q — заряд, L — индуктивность, C — емкость), а уравнение — то же самое

$$L\ddot{q} = -\frac{q}{C},$$

«сила» q/C — электрическое напряжение.

Поэтому разговоры о глубинных связях разнородных прикладных областей в определенной степени проистекают из лукавства или неосведомленности. Физика во всех своих ипостасях до сих пор опиралась в основном на линейные дифференциальные уравнения. Поэтому истоки «мистического подобия» результатов достаточно очевидны. Уравнения одни и те же, разница — в названиях коэффициентов[2].

Опять-таки надо сказать о широком использовании при этом комплексных чисел. В принципе, все сказано было в главе 1. Математика стоит на арифметических операциях, для которых комплексная плоскость — игровое поле. Но это чересчур общо. Некоторые сферы знания все-таки успешно функционируют на краю этого поля, обходясь без мнимой единицы (бухгалтерия, например). В чем конкретно заключается причина того, что дифференциальные уравнения «играют по всему полю»? Да еще вместо $\cos\omega t$ сразу начинают с

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t,$$

прибегая к услугам загодя. Зачем к реальному колебанию $\cos\omega t$ добавлять без видимой необходимости фиктивное $i\sin\omega t$?

Главная причина — в дифференциальных свойствах $e^{i\omega t}$,

$$(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}, \tag{16.4.11}$$

т. е. вычисление производной сводится к умножению на $i\omega$. Интегрирование — к делению. Получается существенный выигрыш в простоте.

Может показаться, что это все же вопрос удобства, не касающийся существа дела. Это не так. Количество действительно иногда переходит в качество. Даже незначительные технические упрощения могут шаг за

[2] Разумеется, мы заостряем внимание лишь на одной стороне дела.

шагом поднять ту или иную научную дисциплину на другой этаж. Там рождаются новые категории мышления, и развитие идет совсем другой дорогой, выходя на закономерности, для которых старый язык вообще не годится.

Так или иначе, но свойство (16.4.11) в теории линейных дифференциальных уравнений оказывается чем-то вроде позиционной системы счисления для арифметики. Конечно, может показаться странным, что $e^{i\omega t}$ играет несоразмерно большую роль в дифурах, которые имеют дело, вообще говоря, с разнообразными функциями. Причин тому две. Во-первых, гармоническим колебаниям в линейных дифурах действительно принадлежит центральная роль. Во-вторых, разложение функций в ряды Фурье (представление в виде суммы гармоник) позволяет эффективно использовать свойство (16.4.11) в общем случае.

Конечно, чтобы все это оценить в полной мере, надо пройти собственным путем по соответствующей территории. Общие соображения хороши, как компас, но они не заменяют опыта, особенно отрицательного. Можно сразу, например, сказать, что для вычисления суммы[3]

$$S = \cos\omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \ldots + \cos(\omega t + n\varphi)$$

полезно рассмотреть

$$\Omega = e^{i\omega t} + e^{i(\omega t+\varphi)} + \ldots + e^{i(\omega t+n\varphi)},$$

что легко вычисляется как сумма геометрической прогрессии с показателем $e^{i\varphi}$,

$$\Omega = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}\, e^{i\omega t}.$$

Окончательно $S = Re(\Omega)$. Но гораздо полезнее, если кому-то повезло предварительно помучиться с вычислением S. Тогда фокус добавления фиктивных мнимых частей получит совсем другое освещение, а преобразование неудобной суммы S в сумму геометрической прогрессии будет выглядеть маленьким открытием.

16.5 Еще о квантовой механике

Запишем уравнение Шредингера (16.1.4) для одномерного случая

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \qquad (16.5.12)$$

Можно сказать, что (16.5.12) в каком-то смысле выведено из предположения о виде волновой функции (16.1.2). Теперь естественно посмотреть, какие функции удовлетворяют (16.5.12). Оказывается, их много (то есть больше, чем задумывалось).

[3]Возникающей в задаче о дифракционной решетке.

Далее начинается «футбол», представляющий собой увлекательное занятие в области гипотетических умозаключений.

Среди решений (16.5.12) есть

$$\psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar}. \qquad (16.5.13)$$

Подставляя (16.5.13) в (16.5.12) и сокращая на $e^{-iEt/\hbar}$, получаем уравнение для амплитуды $\psi(x)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi(x) = 0. \qquad (16.5.14)$$

Дискретные спектры возникают примерно так. Решением (16.5.14) служит

$$\psi = a\sin(kx+b), \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

Если частица зажата на отрезке[4] $[0,l]$ краевыми условиями $\psi(0)=\psi(l)=0$, то этим условиям можно удовлетворить, требуя

$$kl = n\pi; \quad n = 1,2,\ldots,$$

что дает дискретный набор возможных энергий

$$E_n = n^2\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}, \qquad (16.5.15)$$

а, значит, и частот в силу (16.1.3).

Ненамного сложнее определяется дискретный спектр атома водорода. Соответствие экспериментальным данным замыкает круг, и теория получает официальный статус, как работоспособный инструмент. Любители интерпретаций придумывают мифы и пишут учебники.

Это сказано отнюдь не в укор физикам, которые на самом деле заслуживают восхищения. Классический математик на их месте пороху бы не выдумал, будучи повязан иным уставом. Если посмотреть на эскиз короткой цепочки, ведущей от (16.1.2) к (16.5.15), то логику здесь способны рассмотреть

[4] Физики говорят в этом случае, что частица находится в потенциальной яме.

только физики. Скажем, в электродинамике решением волнового уравнения служит колебание действительной измеряемой величины (напряженности поля), а использование комплексных решений — вопрос удобства. Здесь наоборот. Физическая интерпретация колебаний отсутствует, и волновая функция изначально определяется как комплексная, чтобы не было лишних вопросов. Если вдуматься — это гениальный ход.

По указанной причине уравнение Шредингера уже само содержит мнимую единицу и принципиально отличается от уравнений типа (16.2.9) или (16.3.10), но перекликается с последними. Если бы речь шла только о поиске дискретных спектров типа (16.5.15), то все можно было бы оставить в таком положении, считая ψ-функцию удобной фикцией для промежуточных действий. Но в квантовой механике есть масса задач, которых мы не затрагивали. Поэтому «фикцию» приходится извлекать на свет и приспосабливать, например, для изучения интерференции тех же электронов. Вопрос об интерпретации ψ-функции становится острее, но в ранее принятом смысле он так и не решается. Поиски логики останавливаются на волнах вероятности, что, надо признать, является оптимальным выходом из положения. Колеблется по-прежнему «непонятно что», но внешняя сторона дела именно вероятностна — и язык адекватен.

В целом квантовая механика — совершенно уникальная научная дисциплина, научившаяся справляться с обширным кругом явлений в отсутствие их понимания. Физики насчет понимания могут спорить, но это вопрос терминологии. Естественное раздражение аудитории по поводу отсутствия интерпретаций в обычных понятиях — адресовать надо, скорее всего, не физикам, а Создателю.

Что же касается глубины нашего *фундаментального* непонимания, то она везде одинакова. Квантовая механика хороша тем, что там эта глубина зрима.

Глава 17

Великая роль игрушечных задач

> Знание некоторых принципов возмещает незнание некоторых фактов.
>
> К. ГЕЛЬВЕЦИЙ

Восхваление науки иногда наталкивается на просьбу скептиков показать что-нибудь из примеров. Дескать, нельзя ли посмотреть на теорему, которая применяется на практике? Предъявить оказывается нечего. Получается как бы парадокс. Роль науки трудно отрицать — ракеты летают, компьютеры считают, — но при чем тогда бином Ньютона?

Конечно, можно говорить о том, что сражение выигрывает армия, а не отдельные солдаты. Но тут дело в другом. Как ни странно, науку вперед двигают исключительно игрушечные задачи. Именно они обеспечивают 90 процентов успеха.

17.1 Флаттер-эффект

В тридцатые годы прошлого столетия с новыми скоростными самолетами стали происходить необъяснимые катастрофы. Нормальный полет, потом вдруг невероятной силы удар, и самолет разлетается на куски.

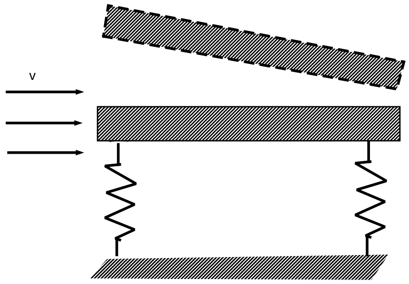


рис. 1.1. Флаттер

В учебниках по газовой динамике о таком писано не было. Пришлось браться за перо. Интересно, что при этом никому в голову не пришло исследовать обтекание газовым потоком не то что профиля самолета, но даже бревна. Сначала взяли простейшую упруго закрепленную пластинку в газовом потоке, записали уравнения и долго пробовали и ошибались пока не «поймали» эффект, названный потом флаттером.

Выяснилось, что при определенных соотношениях параметров (скорость, упругость, размеры) возникает особого рода динамическая неустойчивость взрывного характера. Впоследствии, разумеется, было много других исследований, диссертаций, экспериментов в аэродинамических трубах, — но та самая первая задача с прямоугольной пластинкой сыграла все-таки решающую роль, вскрыв суть явления и его качественные закономерности.

17.2 Модель Вселенной

Игрушечные задачи дают ответы при замахе даже на Вселенную. Хаббл, исследовавший «красное смещение», установил разбегание галактик со скоростью v пропорциональной расстоянию r до «центра разбегания»,

$$v = Hr, \tag{17.2.1}$$

где H — постоянная Хаббла.

За кадром теории расширяющейся Вселенной многим представляется очень сложная математика. Как бы сообразно грандиозности решаемой задачи... Тем не менее, ответы на многие вопросы здесь можно получить, полагаясь на крайне простые модели. Положим, масса всей материи M равномерно заполняет шар радиуса R, а скорость каждой материальной точки определяется законом (17.2.1). Рассмотрим некоторую частицу массы $\triangle m$ на краю области. Ее скорость будет равна

$$v_R = HR, \tag{17.2.2}$$

кинетическая энергия

$$E_{\text{кин}} = \frac{\triangle m v_R^2}{2},$$

потенциальная —

$$E_{\text{пот}} \approx -\gamma \frac{M \triangle m}{R},$$

где γ — гравитационная постоянная.

Из закона сохранения энергии,

$$\triangle m \left(\frac{v_R^2}{2} - \gamma \frac{M}{R} \right) = \text{const}, \tag{17.2.3}$$

вытекает следующее. Если константа в (17.2.3) больше 0, то расширение будет продолжаться бесконечно

$$v_R^2 = 2\gamma \frac{M}{R} + k, \quad k = \frac{\text{const}}{\triangle m},$$

если меньше, — то по достижению $R = -\dfrac{2\gamma M}{k}$ расширение остановится и сменится сжатием. Таким образом, равенство

$$v_R^2 - 2\gamma \frac{M}{R} = 0 \tag{17.2.4}$$

определяет пограничную ситуацию. Подставляя в (17.2.4) $v_R = HR$ и

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

получаем

$$R^2 \left(H^2 - \frac{8\pi}{3} \gamma \rho \right) = 0,$$

откуда критическая плотность вещества во Вселенной

$$\rho^* = \frac{3H^2}{8\pi\gamma}, \tag{17.2.5}$$

что в точности совпадает с оценкой, которую получил Фридман (автор теории расширяющейся Вселенной) на основе общей теории относительности.

Здесь можно решить малой кровью еще один «большой вопрос».

Оценки средней плотности вещества во Вселенной близки к критическому значению (17.2.5), поэтому приближенно имеет место (17.2.4), т.е.

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{2\gamma\frac{\mu}{R}}, \tag{17.2.6}$$

или $\sqrt{R}dR = \sqrt{2\gamma\mu}dt$, что после интегрирования (от 0 до R и от 0 до t) дает

$$\frac{2}{3}\,R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2\gamma\mu}\;t. \tag{17.2.7}$$

Решая теперь совместно (17.2.6), (17.2.7) и $\frac{dR}{dt} = HR$, получаем возраст Вселенной

$$t = \frac{2}{3H} \approx 10^{10}\text{лет}.$$

В изложенном удивителен контраст между сложностью задачи и простотой модели. Элементарный до наивности подход позволяет, как ни странно, говорить о сотворении мира, не впадая в сильные противоречия с современной космологией. Библия, разумеется, остается вне конкуренции.

17.3 Сила упрощения

Упрощенные модели обычно воспринимаются как временная уступка обстоятельствам. Подразумеваются педагогические цели и якобы предполагается, что на следующем этапе (до которого никогда не доходит) будет рассмотрена настоящая постановка задачи со всеми подробностями.

На самом деле этот «следующий этап» в большинстве случаев не нужен и даже вреден (ибо напускает туман).

Представьте себе прыгуна в длину, который наткнулся в учебнике на формулу

$$l = v\sqrt{\frac{8h}{g}}, \tag{17.3.8}$$

определяющую дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, и задумался.

Дальность прыжка (каждый примеряет окружающий мир на себя), оказывается, пропорциональна v и только корню из h. Таким образом, увеличение скорости разбега, скажем, на 3% увеличивает l тоже на 3%, а такой же прирост h (прыгучести) дает выигрыш в длине прыжка всего 1,5%... Небезынтересная информация для выбора стратегии тренировок.

Несмотря на определенный примитивизм формулы (17.3.8), в контексте легкой атлетики она (формула) ухватывает некую суть, но все ценное, что в ней содержится, едва ли возрастет при усложнении постановки задачи.

Простейшая динамическая модель «хищник – жертва» описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y)\, x, \\ \dot{y} &= (\gamma x - \delta)\, y, \end{aligned} \tag{17.3.9}$$

где x, y — соответственно, численности жертв и хищников (овец и волков). Скорость $\dot{x}$ пропорциональна x, но коэффициент пропорциональности $\alpha - \beta y$ тем меньше, чем больше волков. И наоборот, коэффициент $\gamma x - \delta$ роста популяции хищников тем больше, чем больше овец.

Модель в значительной степени условна и приблизительна, но она отражает реальные эффекты. Анализ показывает, что решения (17.3.9) имеют колебательный характер, система движется по замкнутым кривым типа эллипсов (рис. 1.2). На практике такого сорта колебания действительно имеют место. Далее. Представим, что в точке A производится отстрел волков и система перепрыгивает в точку B. Дальнейшее движение будет происходить по эллипсу меньшего размера, что интуитивно ожидаемо. Теперь уменьшим численность волков в точке C. Система перейдет в D и будет двигаться по большему эллипсу. Амплитуда колебаний увеличится. Это уже противоречит интуиции, но практика подтверждает такого рода метаморфозы. Выбор момента отстрела, оказывается, существенно влияет на поведение системы.

Серьезное уточнение рассмотренной модели едва ли целесообразно. Попытки все измерить и разложить по полочкам показывают, что биология — не физика. Популяции — это не планеты, которые миллион лет придерживаются своих орбит. Тут все «дышит» и реагирует на мелочи. Система постоянно перестраивается. Коэффициенты дрейфуют быстрее, чем обрабатывается статистика...

Поэтому «измерить и вычислить» — это неправильно поставленная цель. Физика, конечно, великая наука, но ее идеологический опыт не везде годится для подражания. Более того, сама физика все чаще сталкивается с проблемами нового типа, где точные предсказания принципиально невозможны.

17.4 Невероятно, но факт

Можно ли два тела разных температур привести в контакт таким образом, чтобы они обменялись температурами? Многим вопрос покажется нелепым, ибо хорошо известно, что при контакте тепло переходит от горячего тела к холодному. Когда температуры сравниваются, процесс прекращается и наступает равновесие. Тем не менее, правильный ответ — *положительный*.

Задачу решает динамический контакт[1]. Мы не будем давать точного решения. Рассмотрим игрушечную модель. Пусть имеется два тела A, B, каждое из которых состоит из двух половинок $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1, B_2\}$. Теплопередача между половинками одного тела — очень медленная, между A_i, B_j — быстрая.

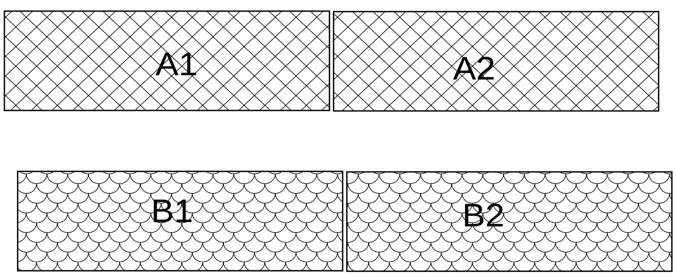


рис. 1.3. Тела A и B

[1] Обычные представления о тепловом обмене связаны со статическими (неподвижными) контактами.

Начальная температура A — $100°$, B — $0°$. Контакт проводим в 4 этапа. Сначала приводим в контакт A_2 и B_1. В результате температуры A_2 и B_1 уравниваются и становятся равными $50°$ (рис. 1.4).

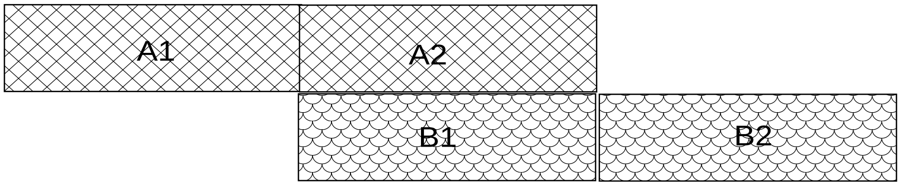


рис. 1.4. Первый этап

На следующем этапе контакт изображен на рис.1.5. Легко видеть, что после выравнивания, температуры становятся такими

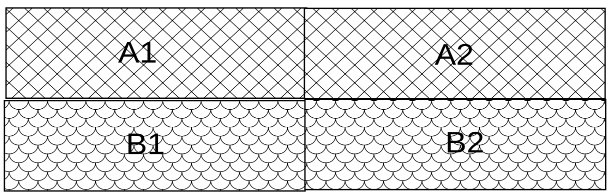


рис. 1.5. Второй этап

$$A_1, B_1 - 75°, \quad A_2, B_2 - 25°.$$

Следующий этап дает температуры

$$A_1 - 50°, \ A_2 - 25°$$
$$B_1 - 75°, \ B_2 - 50°.$$

Последний этап: тела разводятся, и после выравнивания температур между половинками — имеем

$$A - 37{,}5° \text{ (вначале было } 100°\text{)},$$
$$B - 62{,}5° \text{ (вначале было } 0°\text{)},$$

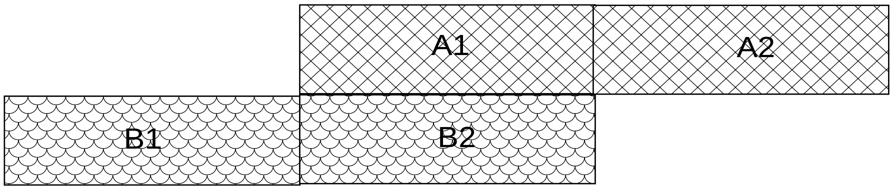


рис.1.6. Третий этап

что весьма удивительно с точки зрения классической термодинамики (ибо при обмене тела «умудрились проскочить равновесие»).

Полного обмена температурами, правда, добиться не удалось, но теперь ясно, в каком направлении надо двигаться (увеличение количества элементов каждого тела, потом переход к непрерывному варианту).

Как можно было бы охарактеризовать здесь роль игрушечной модели? Что она дает? Во-первых, конечно, освещение. Открытие новых возможностей... Во-вторых, образец для обобщений, накатанную дорогу для более сложных задач (не только в уже освоенной нише теплообмена на основе противотока).

Примечания и дополнения.

1. *Модель Вселенной Пуанкаре* представляет собой шар радиуса R. Температура внутри шара неравномерна. Она максимальна в центре и понижается до абсолютного нуля на граничной сфере. Более точно, температура пропорциональна $R^2 - r^2$, где r — расстояние до центра от рассматриваемой точки.

Предположим далее, что все тела имеют одинаковый коэффициент расширения, причем линейные размеры любого тела строго пропорциональны абсолютной температуре. Пусть, наконец, свойства модели таковы, что любой предмет, перенесенный из одной точки в другую, с иной температурой, тотчас приходит в состояние теплового равновесия с новой окружающей средой.

Любопытно, что эта Вселенная будет казаться его обитателям бесконечной. В самом деле, если они пожелают приблизиться к граничной сфере, то будут охлаждаться по мере приближения и уменьшаться в размерах. Шаги их, соответственно, будут укорачиваться, и они никогда не смогут достичь границы своего мира. Здесь есть над чем поразмыслить. Например, над тем, могут ли обитатели этого мира обнаружить существование температуры...

Модель, конечно, не объясняет, как устроен наш мир. Зато — дает новые направления мысли, опосредованно подтачивает догмы, раскрепощает...

2. Для понимания механизма флаттер-эффекта надо выписывать уравнения динамики, решать их, анализировать, ошибаться и много раз начинать сначала. Интересно, что есть другой путь выяснения закономерностей явления, не требующий изощренной квалификации.

Имеется в виду метод контроля размерностей. Приблизительно такой, как в задаче определения периода T колебаний маятника. Если заранее ясно, что T может зависеть лишь от m, g, l, то проблема сводится к поиску комбинации из m, g, l, имеющей размерность времени. Такая комбинация единственна $\sqrt{\frac{l}{g}}$, масса m оказывается ни при чем. Поэтому

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где k — некая безразмерная константа.

Метод хорошо работает во многих сложных ситуациях, и он вполне строг, как физически, так и математически. Философия здесь базируется на простом соображении: решение задачи не может зависеть от используемой системы единиц. Несложные рассуждения тогда показывают, что задача должна характеризоваться набором безразмерных параметров, связанных какой-то функциональной зависимостью[2].

Итак, рассмотрим упруго закрепленное крыло (пластину) в потоке идеальной жидкости (однородная, несжимаемая жидкость вместо газа несколько упрощает задачу). Ситуация определяется параметрами

$$E,\ \mu,\ m,\ \rho,\ l,\ v, \tag{17.4.10}$$

где E и μ — модули Юнга и сдвига, m — масса крыла, ρ — плотность жидкости, l — характерный размер, v — критическая скорость.

Из набора (17.4.10) конструируются три безразмерных параметра

$$\frac{\rho v^2}{E}, \quad \frac{\mu}{E}, \quad \frac{m}{\rho l^3},$$

каждый из которых можно выразить как неизвестную функцию двух остальных. Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ \varphi\left(\frac{\mu}{E}, \frac{m}{\rho l^3}\right). \tag{17.4.11}$$

Конечно, здесь фигурирует неизвестная функция φ, но формула (17.4.11), тем не менее, является значительным шагом в понимании закономерностей флаттера. Сразу ясно, например, что увеличение жесткости в n раз (увеличение E, μ в n раз) увеличивает критическую скорость только в $\sqrt{n}$ раз.

---

[2]Для маятника безразмерный параметр $T\sqrt{\frac{g}{l}}$, зависимость — $T\sqrt{\frac{g}{l}} = k$.

3. Интересная ремарка к теме разговора — модель иммунитета. Иммунные механизмы долгое время служили источником обширных исследований и нобелевских премий. Серьезным камнем преткновения была загадочная способность иммунной системы отличать «свое» от «чужого», отторгая исключительно чужеродное. Наблюдения и факты никак не укладывались в единую модель.

Прорыв совершил Фрэнк Бернет (Нобелевская премия 1961 года). Его теорию можно было бы реконструировать так. Любой организм состоит из ингредиентов w_i (различные белки и проч.) и клонов k_i, способных уничтожать w_i. Что такое клон — несущественно[3]. Главное, что уничтожая w_i (питаясь), клон k_i как бы усиливается, приобретая способность выполнять свою работу более эффективно. На эмбриональной стадии k_i слабы и, входя в соприкосновение с w_i, — гибнут. То есть гибнут только те клоны, которые соответствуют ингредиентам собственного организма.

Вот и вся теория, если не надувать щеки. Она очень изящна, гармонична и, по ощущению, вписывается в устройство Космоса. Конечно, в изложенном виде модель слабо привязана к биологии и как бы висит в воздухе. Но в своей игрушечной форме она дает ясную картину и приводит к поразительным (по временам пятидесятилетней давности) следствиям. Например, если в эмбриональной стадии w_i побеждает k_i, логично предложить для преодоления несовместимости тканей оригинальный трюк. Эмбриону A ввести вытяжку ингредиентов эмбриона B, и наоборот. Тогда взрослым организмам A, B можно будет свободно пересаживать органы друг от друга. Мысль сумасшедшая, как гипотеза, но соответствующие эксперименты в свое время произвели фурор (опять с нобелевским фейерверком).

[3]Разговоры о фагоцитах и антителах здесь только запутывают общую картину.

Обозначения

Используются стандартные обозначения:

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ — объединение, пересечение и разность множеств X и Y, для разности X и Y иногда употребляется эквивалентное обозначение $X - Y$

R^2 — плоскость, R^3 — трехмерное, R^n — n-мерное пространство

i — мнимая единица, $i^2 = -1$

$z = x + iy$ — комплексное число, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — его тригонометрическая запись

$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор, x_i — его координаты

xy, $x \times y$ — соответственно, скалярное и векторное произведение векторов x и y, понятия разъясняются на стр. 22

$\frac{df(x)}{dx}$ — производная (скорость изменения по x) функции $f(x)$ в точке x, эквивалентное обозначение: $f'(x)$

для производной по времени вместо $x'(t)$ чаще используется $\dot{x}$, а для второй производной $\ddot{x}$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ частная производная функции u по переменной x, частные производные используются практически лишь в главе 16

$\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$, т.е. вектор

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

который направлен по нормали к поверхности постоянного уровня функции $f(x)$ и численно равен скорости максимального роста $f(x)$ в точке x.