Министерство образования и науки Украины

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.А. БОБРИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 7.091401

ОДЕССА ОНПУ 2001

Конспект лекций по дисциплине “Математические основы теории систем” для студентов специальности 7 091 401/сост. С.А. Бобриков - Одесса: ОНПУ, 2001. – 101с.

Конспект лекций охватывает разделы математики, необходимые для изучения основных дисциплин специальности 7 091 401, и не вошедшие в курс “Высшая математика” и другие дисциплины: элементы теории множеств и теории графов, математическая логика, теория конечных автоматов, элементы теории случайных функций.

Автор С.А. Бобриков, к.т.н., доц.

ВВЕДЕНИЕ

Современное производство характеризуется широким внедрением во все его сферы микроэлектроники, вычислительной техники, автоматики, систем автоматического управления. Все новейшие отрасли науки и техники так или иначе связаны с техникой автоматического управления, а некоторые из них совершенно немыслимы без широкого использования автоматического управления в технологических процессах. Это атомная энергетика, космические исследования, микроэлектроника и др. Особое место занимают автоматические системы, которые обеспечивают обработку больших потоков информации, надежность и экономическую эффективность производства. В настоящее время теория автоматических систем быстро развивается, ее идеи используются в таких научных направлениях как кибернетика, вычислительная техника, теория оптимального управления и др. Теоретической базой теории систем управления являются разделы математики, которые бурно развиваются: теория множеств, теория графов, математическая логика, теория конечных автоматов, теория случайных процессов и ряд других. Особое место в этом ряду занимает теория множеств, являющаяся фундаментом всей математики и зародившаяся в работах немецкого математика Кантора в 1879 - 1884 гг. В настоящее время теория множеств представляет собой математический аппарат теоретико-множественного анализа систем управления.

Данное учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций по дисциплине “Математические основы теории систем”, составленный в соответствии с рабочей программой курса и учебным планом, принятым в Одесском политехническом университете для студентов, обучающихся по специальности 7 091 401 “ Компьютеризированные системы управления и автоматика”. В пособие включены лишь те разделы курса, которые недостаточно освещены в учебной литературе, либо изучение которых представляет для студентов определенные трудности. Это теория множеств, графы, математическая логика, теория конечных автоматов, случайные процессы.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Основные определения

Под множеством понимают совокупность определенных, вполне различимых объектов, рассматриваемых как единое целое. Множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Примеры множеств: множество студентов в данной группе, множество книг в библиотеке, множество точек на прямой, множество людей на Марсе и т.д.

Примечание:

Объекты, составляющие множество, называются элементами множества. Принято обозначать множества прописными буквами, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита.

Если объект **a** является элементом данного множества **A,** то это записывается с помощью символа принадлежности следующим образом: $\mathbf{a}\in\mathbf{A}$ и читается как "**a** является элементом множества **A**", или "**a** входит в **A**".

Множество может быть задано по разному: 1) перечислением всех входящих в него объектов; 2) описанием свойств, которыми должны обладать все элементы данного множества. Например, множество, состоящее из трех человек: Иванов, Петров, Сидоров. Либо множество студентов третьего курса, занимающихся боксом.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок, внутри которых перечисляются элементы множества. Например, $\mathbf{A}=\{1,2,3,4\}$ – множество **A**, элементами которого являются числа 1, 2, 3, 4. Пусть **M** – множество студентов группы, **A** – множество отличников этой группы, тогда можно записать так: $\mathbf{A}=\{x\in\mathbf{M}$: x - отличник группы$\}$ – это описательный способ задания множества. В фигурных скобках слева от двоеточия указывается общее обозначение элементов данного множества и какому более объемлющему множеству они принадлежат, а справа от двоеточия указывается общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Множество может содержать лишь один элемент – одноэлементное множество. Например, $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}\}$. Здесь следует различать **a** и $\{\mathbf{a}\}$. **a** – элемент одноэлементного множества $\{\mathbf{a}\}$: $\mathbf{a}\in\{\mathbf{a}\}$.

<u>Пустое и универсальное множества.</u> Пустым называется множество, не содержащее ни одного элемента. Обозначается пустое множество символом $\varnothing$.

Например, $\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}:x^2-x+1=0\}=\varnothing$, если **R** – множество вещественных чисел. Пустое множество в алгебре множеств аналогично нулю в алгебре чисел.

Если в рассмотрении участвуют только элементы некоторого фиксированного множества **J**, то это самое большое множество **J** называется универсальным, или объемлющим, или полным множеством. В различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть различные множества.

<u>Предикаты и кванторы.</u> Пусть имеется универсальное множество **J** и некоторое высказывание, относительно его произвольного элемента. Высказывание, которое отображает наличие или отсутствие того или иного признака у предмета называют предикатом. Таким образом, предикат **P** задает множество **X**, каждый элемент которого $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ обладает определенным свойством. В общем виде некоторое множество **X**, состоящее из элементов **x**, обладающих определенным свойством, можно записать так: $\mathbf{X=\{x:P(x)\}}$.

Могут быть предикаты, которые являются истинными для любого элемента **x** множества **J**, т.е. **P(x)** может быть истинным при любом **x**. Для обозначения этого факта вводится символ $\forall$, который называется квантором общности. Запись $\forall\mathbf{(x)P(x)}$ означает высказывание, что для любого $\mathbf{x}\in\mathbf{J}$ значение предиката **P(x)** - истина.

Введем квантор существования $\exists$. Запись $\exists(\mathbf{x})\mathbf{P(x)}$ означает, что среди всех $\mathbf{x\in J}$ существует хотя бы один элемент, для которого предикат **P(x)** принимает истинное значение.

К кванторам также как и к предикатам можно применять отрицание, которое обозначается чертой над соответствующим символом. Например, запись $\overline{\forall}\mathbf{(x)P(x)}$ означает: не для всякого элемента **x** в множестве **J** **P(x)** - истина. **(x)P(x)** означает – не существует ни одного элемента **x** в **J**, для которого **P(x)** - истина.

Пусть **P(x)** представляет высказывание, заключающееся в том, что **x** обладает некоторым свойством. Тогда запись $\overline{\mathrm{P}}(x)$ означает, что элемент **x** не обладает этим свойством. Запись $\forall\mathbf{(x)}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)}$ имеет следующий смысл: для любого $\mathbf{x\in J}$ **P(x)** - ложь, а $\overline{\mathrm{P}}(x)$ - истина.

Очевидны следующие записи:

$$\forall\mathbf{(x)P(x)} \Leftrightarrow \overline{\exists}\mathbf{(x)}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)},\quad \overline{\forall}\mathbf{(x)P(x)} \Leftrightarrow \exists\mathbf{(x)}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{(x)}.$$

<u>Равенство множеств.</u> Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. При этом порядок расположения элементов в множестве значения не имеет. В одном и том же множестве не может быть несколько одинаковых элементов. Например, запись **A**={1,1,2,3}следует считать неправильной. Это множество состоит из трех элементов: **A**={1,2,3}.

<u>Подмножество.</u> Множество **X** является подмножеством **Y**, если любой элемент множества **X** принадлежит и множеству **Y**. Для обозначения подмножества используются символы включения: $\subset$ - строгое включение, $\subseteq$ - нестрогое включение. Например $\mathbf{X\subset Y}$ или $\mathbf{X\subseteq Y}$. Эти записи означают, что **X** есть подмножество множества **Y.**

В первом случае в множестве **Y** обязательно есть элементы, не принадлежащие множеству **X**. Во втором случае таких элементов в **Y** может и не быть. Символически определение подмножества можно записать следующим образом:

$$\mathbf{X\subseteq Y \Leftrightarrow \forall(x)[x\in X \rightarrow x\in Y].}$$

Любое множество всегда содержит в себе пустое множество в качестве подмножества и само является подмножеством универсального множества

$$\mathbf{\forall(X)[\varnothing\subseteq X,\ X\subseteq J].}\ \text{Кроме того } \mathbf{X\subseteq X.}$$

Для любого множества **X** существует множество **X*,** элементами которого являются подмножества множества **X.** Такое множество обозначается через 2^X или expX и называется множеством-степенью.

Если число элементов множества **X** равно n, то число элементов его множества-степени равно 2^n **.**Например, **X**={1,2,3}, тогда

$$\mathbf{X^*=2^X=\{}\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\varnothing\mathbf{\}.}$$

Как видно из примера в множество-степень включают также само множество **X** и пустое множество.

1.2. Операции над множествами

<u>Объединение множеств .</u> Объединением множеств **X** и **Y** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **X** или принадлежат **Y**. Объединение обозначается через $\mathbf{X\cup Y}$**.** Суть операции легко понять, пользуясь диаграммами Эйлера-Венна. Пусть **X-**множество точек левого круга (Рис.1а), **Y-**множество точек правого круга. Тогда $\mathbf{X\cup Y}$ - заштрихованная область.

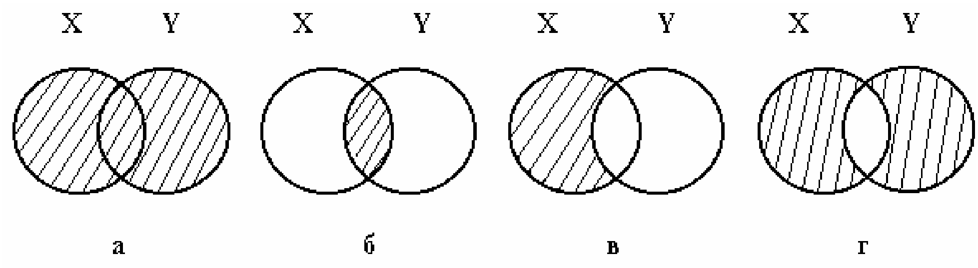


Рис.1. Диаграммы Эйлера-Венна

Пересечение множеств. Пересечением множеств **X** и **Y** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству **X,** так и множеству **Y.** Пересечение множеств обозначается через $\mathbf{X \cap Y}$. На рис.1б пересечение множеств **X** и **Y** соответствует заштрихованной области. Если $\mathbf{X \cap Y} = \varnothing$, то множество **X** и **Y** называются непересекающимися.

Разность множеств. Разностью множеств **X** и **Y** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат **X** и не принадлежат **Y.** Обозначается разность множеств следующим образом: $\mathbf{X \setminus Y}$. На рис1.в заштрихована область, соответствующая разности множеств **X** и **Y.**

Симметрическая разность множеств. Симметрической разностью множеств **X** и **Y** называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат или множеству **X**, или множеству **Y**, но не обоим вместе. Обозначается симметрическая разность множеств следующим образом: $\mathbf{X \Delta Y}$. На рис1.г заштрихованная область соответствует $\mathbf{X \Delta Y}$.

Дополнение множества. Множество $\overline{X}$, определяемое из соотношения $\overline{X} = \mathbf{J \setminus X}$ называется дополнением множества **X**. Пусть множество точек прямоугольника на рис.2 составляет универсальное множество **J**, **X**-множество точек круга. Тогда $\overline{X}$ - множество точек заштрихованной области. Множества **X** и $\overline{X}$ не имеют общих элементов, поэтому $\mathbf{X} \cap \overline{X} = \varnothing$. Кроме того не имеется элементов в множестве J, которые не принадлежали бы ни **X,** ни $\overline{X}$, т.к. те элементы, которые не принадлежат **X** принадлежат $\overline{X}$. Следовательно $\mathbf{X} \cup \overline{X} = \mathbf{J}$.

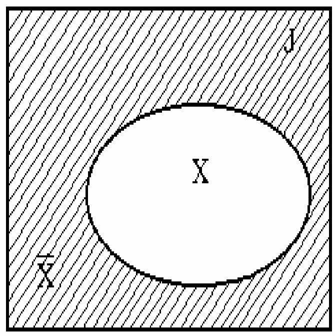


Рис.2. $\overline{X}$ - дополнение множества **X**

Разбиение множества. Некоторые множества можно представить как систему подмножеств. Так, например, множество студентов института составляют систему подмножеств факультетов, либо систему подмножеств курсов.

Рассмотрим некоторое множество **M** и систему множеств $\mathbf{S=\{X_1, X_2,...,X_n\}}$. Система множеств **S** называется разбиением множества **M**, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. Любое множество $\mathbf{X_i}$ (i=1,2,...,n) из **S** является подмножеством множества **M** - $\mathbf{X_i \subset M}$, т.е. $\mathbf{\forall X \in S: X \subset M}$.

2. Любые два множества $\mathbf{X_i}$ и $\mathbf{X_j}$ из **S** являются непересекающимися - $\mathbf{X_i \cap X_j} = \varnothing$, если $i \neq j$, т.е. $\forall \mathbf{X_i \in S}$ и $\forall \mathbf{X_j \in S}$ $(i \neq j)$: $\mathbf{X_i \cap X_j} = \varnothing$.

3. Объединение всех множеств, входящих в разбиение, равно множеству **M**–

$$\bigcup_{i=1}^{n} X = M.$$

Тождества алгебры множеств. С помощью различных операций над множествами из множеств можно составлять различные алгебраические выражения. Пусть в результате некоторых операций над одними и теми же множествами **X,Y,Z** получены новые множества **U** и **V**, содержащие одни и те же элементы. Выражение **U=V** представляет собой тождество алгебры множеств.

Рассмотрим наиболее важные тождества алгебры множеств.

1. $\mathbf{X \cup Y = Y \cup X}$	
2. $\mathbf{X \cap Y = Y \cap X}$	Коммутативные
3. $\mathbf{X \Delta Y = Y \Delta X}$	законы
4. $\mathbf{X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z}$	Ассоциативные
5. $\mathbf{X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z}$	законы
6. $\mathbf{(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)}$	Дистрибутивные
7. $\mathbf{(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)}$	законы
8. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$	Тождества
9. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$	де Моргана

Все приведенные тождества могут быть легко доказаны, например, с помощью диаграмм Эйлера-Венна. В качестве примера рассмотрим доказательство дистрибутивного закона (тождество 6).

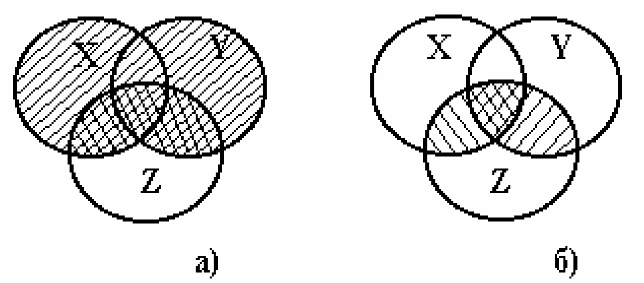


Рис.3. Геометрическая иллюстрация тождества 6.

На рис.3а двойная штриховка соответствует выражению $(X \cup Y) \cap Z$, на рис.3б заштрихованная область равна $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Из диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и то же множество.

1.3. Упорядоченное множество и прямое произведение множеств

Упорядоченным множеством или кортежем называется такое множество, в котором каждый элемент занимает определенное место. Число элементов кортежа называется длиной кортежа. Для обозначения кортежа используются круглые скобки. Например, $\mathbf{A=(a_1, a_2, a_3)}$ - кортеж длины 3. Частным случаем кортежа является кортеж длины 1 - **(a)** и пустой кортеж длины 0, обозначаемый ( ) или $\wedge$. В отличие от простого множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы.

Упорядоченное множество, элементами которого являются вещественные числа, можно рассматривать как координаты точки. Так, кортеж длины 2 можно рассматривать как точку на плоскости, либо вектор, проведенный из начала координат в данную точку. Кортеж длины 3 - точка, либо вектор в трехмерном пространстве, кортеж длины n - точка, либо вектор в n-мерном пространстве.

Прямое произведение множеств. Прямым произведением множества **X** на множество **Y** называется множество таких упорядоченных пар **(x,y)**, что $x \in X$, а $y \in Y$. Обозначается прямое произведение следующим образом: $X \times Y$. $X \times Y = \{(x,y):\ x \in X$ **и** $y \in Y\}$.

Например: $X=\{1,2\}$, $Y=\{a,b\}$, $X \times Y=\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$.

Как следует из определения, прямое произведение множеств не обладает свойством коммутативности, т.е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Если элементами множеств **X** и **Y** являются действительные числа, то элементы прямого произведения удобно изображать в виде точек, лежащих на плоскости и имеющих соответственно координаты **x** и **y**. Операция прямого произведения множеств может быть применена и к большему числу множеств. Прямым произведением множеств $X_1, X_2, \dots, X_k$ называется множество, состоящее из кортежей длины k, первая компонента которых принадлежит X_1, вторая X_2, и т.д. Прямое произведение множеств обладает свойством дистрибутивности относительно операций объединения и пересечения:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Проекции множества. Рассмотрим сначала проекции кортежа. Проекцией кортежа на первую ось является первый элемент кортежа, проекцией на вторую ось - второй элемент и т.д. Пусть элементами множества **M** являются кортежи одинаковой длины. Тогда проекцией **M** на какую-либо ось будет множество проекций кортежей из **M** на ту же ось.

Пример. Пусть $M=\{(a,b,c), (x,x,x), (1,2,1)\}$.

Тогда $Пр_1 M=\{a,1,x\}$; $Пр_{2,3} M=\{(b,c), (2,1), (x,x)\}$.

Если $M=X \times Y$, то $Пр_1 M=X$; $Пр_2 M=Y$.

Если $Q \subseteq X \times Y$, то $Пр_1 Q \subseteq X$; $Пр_2 Q \subseteq Y$.

1.4. Соответствия

Пусть заданы два множества **X** и **Y** . Если каким-либо элементам $\mathbf{x \in X}$ сопоставляются некоторые элементы $\mathbf{y \in Y}$, образуя пары $\mathbf{(x,y) \subseteq X \times Y}$, то говорят, что между множествами **X** и **Y** установлено соответствие. Чтобы задать соответствие, нужно указать множество **X**, множество **Y** и множество $\mathbf{Q \subseteq X \times Y}$, определяющее закон, по которому осуществляется соответствие. Таким образом, соответствие **q** представляет собой упорядоченную тройку множеств $\mathbf{q=(X,Y,Q)}$, где $\mathbf{Q \subseteq X \times Y}$. Очевидно, что $\mathbf{Пр_1Q \subseteq X}$ и $\mathbf{Пр_2Q \subseteq Y}$.

Множество **X** называется областью отправления соответствия.

Множество **Y** - областью прибытия соответствия.

Множество **Q** - графиком соответствия.

$\mathbf{Пр_1Q}$ - областью определения соответствия.

$\mathbf{Пр_2Q}$ - областью значений соответствия.

Пример: $\mathbf{X=\{x:0 \le x \le 10\},\ x \in R}$, **R** - множество вещественных чисел; $\mathbf{Y=\{a,b,c,d,e.\}}$ Одним из возможных соответствий между элементами **X** и **Y** может быть $\mathbf{Q=\{(1,a),(5,a),(2,b),(5,d)\}}$. Как видно из примера не обязательно, чтобы все элементы из **X** и из **Y** участвовали в соответствии. Кроме того, одному и тому же элементу из **X** могут соответствовать несколько элементов из **Y**, а один и тот же элемент из **Y** может сопоставляться с разными элементами из **X.**

Для каждого соответствия $\mathbf{q=(X,Y,Q),\ Q \subseteq X \times Y}$ можно построить обратное соответствие, которое определяется следующим образом:

$$\mathbf{q^{-1}=(Y,X,Q^{-1})}, \text{ где } \mathbf{Q^{-1} \subseteq Y \times X.}$$

<u>Отображение.</u> Если в некотором соответствии $\mathbf{q=(X,Y,Q),\ Q \subseteq X \times Y}$ область определения совпадает с областью отправления $\mathbf{Пр_1Q=X}$, то такое соответствие называется отображением. Отображение обозначают следующим образом: $\mathbf{Г:X \to Y}$, где $\mathbf{Г \subseteq X \times Y}$ - график отображения **X** в **Y.**

Множество тех элементов $\mathbf{y \in Y}$, которые сопоставляются с каким-либо элементом $\mathbf{x \in X}$ при отображении $\mathbf{Г:X \to Y}$, называется образом элемента **x** и обозначается **Гx**. Очевидно $\mathbf{Гx \subseteq Y}$.

Множество тех элементов $\mathbf{x \in X}$, с которыми сопоставляется какой-либо элемент $\mathbf{y \in Y}$, называется прообразом элемента **y**: $\mathbf{Г^{-1}y \subseteq X.}$

Пример. Пусть $\mathbf{X=\{1,2,3\}}$; $\mathbf{Y=\{a,b,c,d,e\}}$. Рассмотрим отображение **X** в **Y**, график которого имеет вид: $\mathbf{Г=\{(1,a),(1,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,d)\}}$. Образами в этом отображении являются:

$Г_1=\{a,b\}$ - образ элемента 1;

$Г_2=\{c\}$ - образ элемента 2;

$Г_3=\{a,b,d\}$ - образ элемента 3;

Прообразы:

$Г^{-1}a=\{1,3\}$ - прообраз элемента a;

$Г^{-1}b=\{1,3\}$ - прообраз элемента b;

$Г^{-1}c=\{2\}$ - прообраз элемента c;

$Г^{-1}d=\{3\}$ - прообраз элемента d;

$Г^{-1}e=\varnothing$ - прообраз элемента e.

Однозначное отображение или отображение, при котором образ каждого элемента есть одноэлементное множество, называется функцией. Для функции принято обозначение $\mathbf{f: X \to Y}$. Значение **y** в любой из пар $\mathbf{(x,y) \in f}$ называется функцией от данного **x** и записывается в виде $\mathbf{y = f(x)}$. Символ **f** при определении функции используется в двух смыслах: 1) **f** является множеством, элементами которого являются пары **(x,y)**, участвующие в соответствии; 2) **f(x)** является образом **x**, т.е. **f(x)=y.**

Однозначное отображение (функция), при котором прообраз каждого элемента также есть одноэлементное множество, называется взаимно однозначным, или инъекцией.

Если в функции область прибытия совпадает с областью значений, то она называется сюрьективной или сюрьекцией.

Сюрьективная инъекция называется биекцией. Таким образом, биекция есть взаимно однозначное отображение, в котором участвуют все элементы одного множества и все элементы другого множества.

Если в соответствии рассматривается множество функций с одной стороны и множество чисел с другой стороны, то оно называется функционалом. Например,

$$\mathbf{J(x)}=\int_a^b f(x)dx \ .$$

Соответствие, установленное между двумя множествами, элементами которых являются функции, называется оператором. Например,

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{df(x)}{d(x)} \text{ - оператор дифференцирования.}$$

Отношения. Некоторые отображения, заданные между элементами одного и того же множества, называются отношениями. Для задания отношения нужно указать множество **X,** между элементами которого вводится отношение, и закон, по которому один элемент из **X** сопоставляется с другим. Например, отношение (X,Γ), где $\Gamma \subseteq X^2$.

Пусть $y \in X$ есть образ элемента $x \in X$ при задании отношения (X,Γ). Тогда говорят, что элемент **y** находится в отношении **Г** к элементу **x,** и записывают это в виде $y\Gamma x$.

Отношения характеризуются определенными свойствами. Перечислим важнейшие из них.

1. Рефлексивность. Пусть задано некоторое отношение **Г** на множестве **X.** Если любой элемент $x \in X$ находится в том же отношении к самому себе, то это свойство называется рефлексивностью. Его можно записать следующим образом: $x\Gamma x$ - истинно.

2. Антирефлексивность. Это свойство выражается следующим образом: $x\Gamma x$ - ложно.

3. Симметричность. Это свойство заключается в том, что при рассмотрении двух элементов, связанных некоторым отношением, обладающих свойством симметричности, неважно, какой элемент рассматривать первым, а какой вторым, т.е. $x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x$.

4. Антисмметричность. Это свойство заключается в следующем. Если два элемента **x** и **y** находятся в отношении, обладающим этим свойством, причем $x\Gamma y$ - истинно и $y\Gamma x$ - истинно, то из этого обязательно следует, что $x=y$: $x\Gamma y$ и $y\Gamma x \rightarrow x=y$.

5. Несимметричность. Это свойство определяется следующим образом. Если $x\Gamma y$ - истинно, то $y\Gamma x$ - ложно и наоборот.

6. Транзитивность. Свойство транзитивности означает, что если два элемента находятся в некотором отношении с этим свойством с третьим элементом, то это же отношение существует и между ними. В общем виде это свойство записывается следующим образом: $x\Gamma y$ и $y\Gamma z \rightarrow x\Gamma z$.

Виды отношений. В зависимости от того, какими свойствами обладают отношения, их делят на виды.

1. Отношение эквивалентности. Отношением эквивалентности называется такое отношение, которое обладает следующими свойствами: *рефлективность, симметричность, транзитивность.*

Отношение эквивалентности тесно связано с операцией разбиения множества на систему подмножеств. При этом каждое подмножество состоит из элементов в чем то подобных, эквивалентных друг другу, обладающих каким-либо общим свойством.

Пример: отношение "быть на одном курсе" на множестве студентов факультета; отношение равенства на множестве чисел; отношение подобия на множестве треугольников и т.д.

2. Отношение толерантности. Отношение толерантности удовлетворяет свойствам *рефлективности* и *симметричности*. В отличие от эквивалентности толерантность не обладает свойством транзитивности. Эквивалентность можно рассматривать как частный случай толерантности.

Пример: на множестве кортежей одинаковой длины толерантность можно задать различными способами, например, наличием в паре кортежей хотя бы одной общей компоненты.

3. Отношение нестрогого порядка. Это отношение обладает следующими свойствами: *рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.*

Примеры: отношение "больше или равно" или "меньше или равно" на множестве чисел; отношение нестрогого включения на множествах; отношение "произойти не позже" или "произойти не раньше" на множестве состояний динамической системы.

4. Отношение строгого порядка. Это отношение определяется следующими свойствами: *антирефлексивность, несимметричность, транзитивность*.

Примеры: отношение "больше" или "меньше" на множестве чисел; отношение строгого порядка на множествах; отношение "произойти раньше" или "произойти позже" на множестве состояний динамической системы и т.п.

Оба отношения - нестрогого порядка и строгого порядка - определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Множество, на котором определено отношение порядка, называют упорядоченным. Множество совершенно (линейно, просто) упорядочено, если для любых двух его элементов имеет место $\mathbf{x\Gamma y}$ или $\mathbf{y\Gamma x}$ ($\mathbf{\Gamma}$ - отношение порядка). В общем случае может оказаться, что для некоторых пар $(\mathbf{x,y})$ ни одно из соотношений $x<y$ и $\mathbf{y<x}$ не имеет места (такие элементы называют несравнимыми). Тогда говорят, что множество частично упорядочено. Примером частичного порядка является отношение нестрогого включения на множестве подмножеств некоторого множества. Среди всех подмножеств одного и того же множества имеются такие, что ни одно из соотношений $\mathbf{X\subseteq Y}$ и $\mathbf{Y\subseteq X}$ для них не имеет места.

5. Отношение доминирования. Это отношение определяется следующими свойствами: *антирефлексивность, несимметричность.*

Например: на множестве спортивных команд отношение "выиграть матч".

1.5. Конечные и бесконечные множества. Мощность множества

Множества бывают конечные и бесконечные, счетные и несчетные. В конечном множестве число элементов конечно. Бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Для сравнения множеств между собой вводят понятие мощности множества. Для конечных множеств понятие мощности соответствует числу элементов множества. Бесконечные множества можно сравнивать по мощности путем установления взаимнооднозначного соответствия между элементами одного и другого множества.

Два множества **M** и **N,** называются эквивалентными по мощности (обозначение **M~N**), если между их элементами можно установить биекцию.

Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Рассмотрим несколько примеров счетных множеств.

1. Множество всех целых чисел. Установим биекцию между множеством всех целых чисел и множеством всех натуральных чисел. Для этого расположим элементы этих множеств друг под другом попарно следующим образом

0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	.	.	.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	.	.	.

Этим самым биекция установлена, значит эквивалентность этих множеств доказана.

2. Множество всех рациональных чисел. Каждое рациональное число записывается однозначно в виде несократимой дроби: $\alpha=p/q$, $q>0$. Назовем сумму $|\mathbf{p}|+\mathbf{q}$ высотой рационального числа $\boldsymbol{\alpha}$. Число дробей с данной высотой конечно. Например, высоту 1 имеет только число 0/1. Высоту 2 - числа 1/1 и -1/1. высоту 3 - числа 2/1, 1/2, -2/1 и -1/2 и т.д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т.е. будет установлена биекция между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Среди всех бесконечных множеств существуют такие, которые не являются счетными - это несчетные множества. Между счетным множеством и несчетным множеством биекцию провести нельзя, в последнем всегда элементов “больше”. Покажем, что множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.

Пусть множество $P=[0,1]$ счетно, т.е. все точки этого отрезка можно последовательно пронумеровать: $x_1,x_2,\dots, x_n,\dots$ Разделим отрезок [0,1] на три равных отрезка. Тогда по крайней мере один из отрезков не содержит точки $\mathbf{x}_1$. Точка $\mathbf{x}_1$ может принадлежать либо одному отрезку либо двум, если она лежит на их границе. Отрезок $\mathbf{A}_1$, который не содержит точки $\mathbf{x}_1$, снова разделим на три равных отрезка. По крайней мере один из них $\mathbf{A}_2$ не содержит точки $\mathbf{x}_2$. Отрезок $\mathbf{A}_2$ который не содержит x_2, снова разделим на три равных отрезка и т.д. В результате получим последовательность вложенных один в другой отрезков $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots, \mathbf{A}_n$. Пусть $\mathbf{x}_k$ - точка, которая принадлежит всем этим отрезкам. Тогда, с одной стороны, $\mathbf{x}_k\in[0,1]$ и в силу счетности точек отрезка входит в последовательность $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots, \mathbf{x}_n,\dots$ С другой стороны, точка $\mathbf{x}_k$ не может совпасть ни с одной из точек этой последовательности, поскольку отрезки $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2\dots$ так построены, что ни одна из точек счетного множества $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots, \mathbf{x}_n,\dots$ им не принадлежит. Из этого следует, что принятое допущение о том, что множество $\mathbf{P}=[0,1]$счетное неверно, т.е. множество несчетно.

Несчетные множества тоже можно сравнивать между собой путем построения биекции. Если биекцию удается построить, то этим самым доказывается эквивалентность множеств.

Рассмотрим примеры. Множества точек на любых двух отрезках эквивалентны между собой. На рис.4 показано, как можно установить биекцию между двумя различными отрезками **ab** и **cd**.

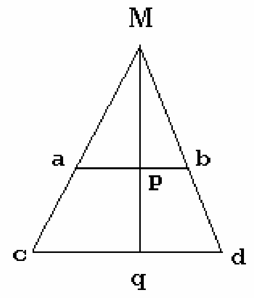


Рис.4. Построение биекции между элементами множеств **ab** и **cd**

Множество точек в интервале 0,1 эквивалентно множеству всех точек на прямой. Биекцию можно установить, например, с помощью функции

$$y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2},\qquad -\infty<x<\infty,\ 0<y<1$$

Из приведенных примеров следует, что множество точек любого отрезка эквивалентно множеству точек бесконечной прямой; любые отрезки эквивалентны между собой.

Нетрудно установить из приведенных примеров, что всякое бесконечное множество (счетное и несчетное) эквивалентно своему истинному подмножеству (бесконечному).

Например, натуральных чисел оказывается “столько же” сколько и всех целых, сколько всех четных, нечетных, рациональных и т.д. На любом отрезке можно выделить часть его, а затем построить биекцию между отрезком и его частью, т.е. часть оказывается эквивалентной целому. Это свойство характерно для любого бесконечного множества. Мощность бесконечного множества точек на прямой называется мощностью континуума.

Пусть **M** - некоторое множество и пусть 2^m - множество - степень **M**. Тогда 2^m имеет мощность большую, чем мощность исходного множества **M**. Если рассмотреть множество-степень счетного множества, то оказывается, что его мощность равна мощности континуума. Для любого множества мощности континуума можно рассмотреть его множество-степень и мощность этого нового множества будет больше мощности континуума. Затем можно рассмотреть опять множество-степень этого нового множества и опять его мощность будет больше. Таким образом, не существует верхней границы мощности множеств, подобно тому как не существует “самого большого” числа.

<u>Литература.</u>

1. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов.- М.:Энергоатомиздат, 1987.- 496 с.;ил.

2. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.-К.: Техника, 1975-799с.:ил.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.:Наука,1972.-495 с.;ил.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

2.1. Основные определения

Графом $\mathbf{G(X,U)}$ называется упорядоченная пара множеств: $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U \subseteq X^2}$. Элементы множества $\mathbf{X}$ называются вершинами графа, элементы множества $\mathbf{U}$, представляющие собой пары $\{\mathbf{x_i, x_j}\} \in \mathbf{U}$ называются ребрами графа, либо, если пары упорядочены $(\mathbf{x_i, x_j}) \in \mathbf{U}$, то они называются дугами.

Геометрически граф можно представить в виде множества точек $\mathbf{X}=\{x_1, x_2,..., x_n\}$ и множества линий, соединяющих эти точки. Точки представляют собой вершины графа, а линии, их соединяющие - ребра или дуги. Если указывается направление, то линии называются дугами, а граф называется ориентированным или направленным. Если направление не указывается, то линии называются ребрами, а граф - неориентированным (ненаправленным).

Граф определяет некоторое отношение между элементами множества $\mathbf{X}$. То, что элемент $\mathbf{x_j \in X}$ находятся в отношении $\mathbf{\Gamma_{ij}}$ к элементу $\mathbf{x_i \in X}$, отображается на графе соединением элементов $\mathbf{x_i}$ **и** $\mathbf{x_j}$ линией (дугой или ребром).

Аналитически любой ориентированный граф описывается системой алгебраических уравнений и наоборот, любая система алгебраических уравнений может быть представлена в виде направленного графа. Например, граф на рис.5. определяет следующую систему уравнений:

$x_1=\Gamma_{71}x_7$; $x_4=\Gamma_{14}x_1+\Gamma_{24}x_2$; $x_8=\Gamma_{78}x_7+\Gamma_{48}x_4+\Gamma_{98}x_9$;
$x_2=\Gamma_{12}x_1+\Gamma_{52}x_5$; $x_5=\Gamma_{85}x_8+\Gamma_{25}x_2$; $x_9=\Gamma_{89}x_8$.
$x_3=\Gamma_{23}x_2$; $x_6=\Gamma_{56}x_5+\Gamma_{96}x_9$;

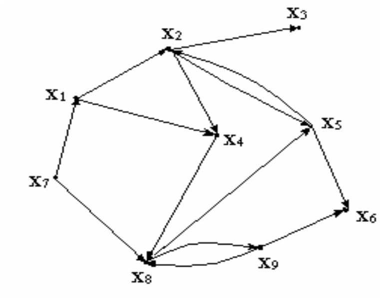


Рис.5. Ориентированный граф

В неориентированном графе для любых двух вершин $\mathbf{x_i, x_j \in X}$ справедливо $\mathbf{\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}}$.

Две вершины $\mathbf{x_i, x_j \in X}$ называются смежными, если они определяют ребро (дугу).

Два различных ребра (дуги) называются смежными, если они имеют общую вершину.

Вершина $\mathbf{x_i}$ инцидента ребру (дуге) $\mathbf{U_j}$, если она является началом или концом ребра (дуги) . Аналогично ребро (дуга) $\mathbf{U_j}$ инцидентно вершине $\mathbf{x_j}$, если оно входит или выходит из этой вершины.

Число ребер (дуг) инцидентных некоторой вершине $\mathbf{x_j}$, называются степенью вершины и обозначают $\rho(\mathbf{x_j})$. Для графа на рис.5 можно записать $\rho(\mathbf{x_1})=3$, $\rho(\mathbf{x_2})=5$ и т.д.

Вершину, неинцидентную никакому ребру (дуге), называют изолированной. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называют нуль-графом и обозначают $\mathbf{G_0}$.

Граф называют однородным степени **t**, если степени всех его вершин равны **t**.

Граф, в котором, перемещаясь по ребру (дугам) из вершины в вершину, можно попасть в каждую вершину, называют связным. Граф, состоящий из отдельных фрагментов, называют несвязным, состоящим из отдельных компонентов связности.

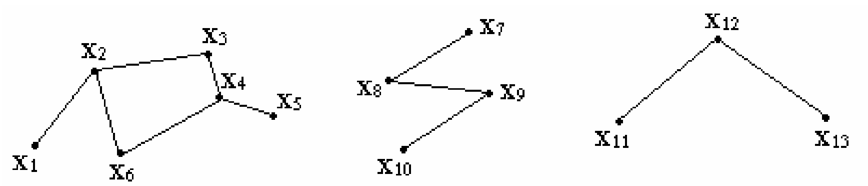


Рис.6. Несвязный граф

Число, равное разности между числом вершин графа **n** и числом компонент связности **P**, называют рангом графа **R(G)=n-P**. На рис.6 **n**=13, **P**=3, **R(G)**=10.

При изображении графа в виде геометрической фигуры допускается произвольное расположение вершин и ребер графа, т.е. один и тот же граф может иметь различную геометрическую реализацию. Два графа называются изоморфными, если они имеют одинаковое число вершин и если каждой паре вершин, соединенных ребром (дугой), в одном графе соответствует такая же пара вершин, соединенных ребром (дугой), в другом графе. На рис.7 показан пример изоморфных графов.

Последовательность ребер, получаемая при переходе от одной вершины графа к другой, называют цепью.

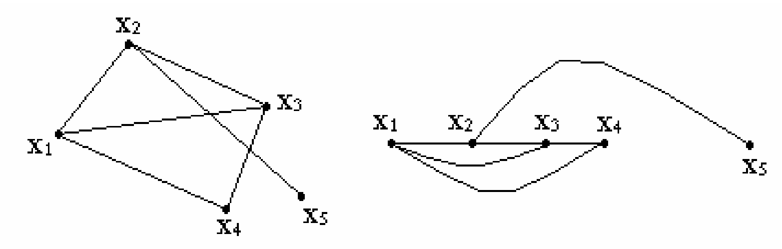


Рис.7. Пример изоморфных графов

Замкнутая цепь называется циклом. Причем каждое ребро цикла может войти в цикл не более одного раза. Цикл считают простым, если в нем нет повторяющихся вершин, и сложным, если такие имеются. Цикл называют элементарным, если он не содержит в себе никаких других циклов.

<u>Эйлеров цикл</u> - это цикл, в котором содержатся все ребра графа. Граф, имеющий такой цикл, называют эйлеровым графом. Достаточным условием наличия в конечном связном графе эйлерова цикла является четность степеней всех его вершин.

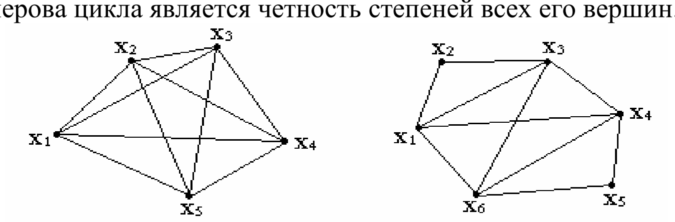


Рис.8. Примеры эйлеровых графов

<u>Гамильгонов цикл</u> - это цикл, который содержит все вершины графа, причем каждая вершина входит в цикл один раз. На рис.9 приведены примеры гамильтоновых графов, т.е. графов, содержащих гамильтоновы циклы

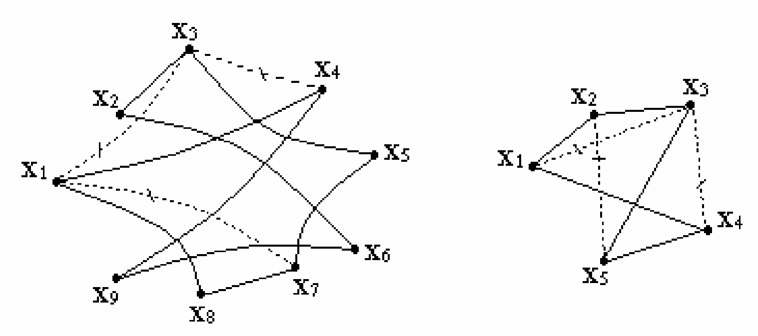


Рис.9. Примеры гамильтоновых графов

2.2. Способы задания графов

<u>1. Список ребер (дуг) графа.</u> В списке указываются все смежные вершины графа. Список удобно представлять в форме таблицы, в которой отмечаются парами смежные вершины. Причем, если граф ориентированный, то в каждой паре на первом месте указывается номер вершины, из которой дуга выходит, а на втором месте номер вершины, в которую дуга входит. Если в графе есть изолированные вершины, то они должны быть указаны отдельно. На рис.10 приведен список дуг графа, изображенного графически на рис.5.а)

1	1	2	2	2	4	5	5	7	7	8	8	9	9
2	4	3	4	5	8	2	6	1	8	5	9	6	8

Рис.10. Задание графа таблицей

2. Матрицы графа. Различают несколько видов матриц графа:

Матрица смежности. Если задан граф **G(X,U),** то ему можно поставить в соответствие квадратную матрицу смежности

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{nxn}, \text{ n - число вершин графа.}$$

Общий элемент матрицы для неориентированного графа равен

$$\mathbf{a}_{i,j} = \begin{cases} m(x_i, x_j), & \text{если} \quad m(x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{если} \quad m(x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

где $m(x_i,x_j)$ - кратность ребер между вершинами $\mathbf{x_i}$ и $\mathbf{x_j}$.

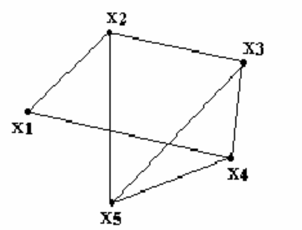
Для ориентированного графа общий элемент матрицы равен

$$\mathbf{a}_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга выходит из вершины } \mathbf{x_i} \text{ и входит в вершину } \mathbf{x_j} \\ 0, \text{ если такой дуги нет.} \end{cases}$$

На рис. 11а приведен пример неориентированного графа и его матрица смежности, а на рис.11б ориентированного графа и его матрицы смежности. Для неориентированного графа матрица смежности симметрична относительно главной диагонали. Кроме того, сумма единиц в каждом i-том столбце или строке соответствует степени вершины $\mathbf{x_i}$.

A=

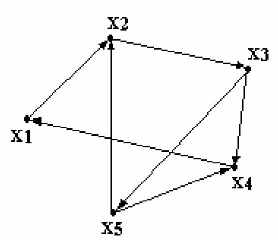
	x1	x2	x3	x4	x5
x1	0	1	0	1	0
x2	1	0	1	0	1
x3	0	1	0	1	1
x4	1	0	1	0	1
x5	0	1	1	1	0



а)

A=

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	0	1	0	0	0
x2	0	0	1	0	0
x3	0	0	0	1	1
x4	1	0	0	0	0
x5	0	1	0	1	0



б)

Рис.11 а) Неориентированный граф и его матрица смежности;
б) Ориентированный граф и его матрица смежности.

Матрица инцидентности. Эта матрица представляет собой прямоугольную матрицу $S=\|S_{ij}\|_{nxr}$, **n -** число вершин, **r -** число ребер (дуг). Строки матрицы соответствуют вершинам, а столбцы - ребрам (дугам) графа **G(X,U).**

$$\mathbf{S}_{i,j}=\begin{cases}1, \text{если } \mathbf{u}_j \text{ инцидентна } \mathbf{x}_i\ ,\\ 0, \text{если } \mathbf{u}_j \text{ неинцидентна } \mathbf{x}_i\end{cases}$$

Эта матрица может быть записана как для ориентированного графа, так и для неориентированного. Для ориентированного графа, если k-ая ветвь заходит в i-ую вершину, то на пересечении i-ой строки и k-го столбца матрицы записывается +1. Если k-ая ветвь выходит из i-ой вершины, то на пересечении k-го столбца и i-ой строки записывается -1. Правильность составления матрицы легко проверить: число единиц в i-ой строке матрицы равно степени вершины $\mathbf{x_i}$ графа, а число единиц в каждом столбце - двум, т.к. каждое ребро (дуга) соединяет две вершины графа.

Матрица длин. Это квадратная матрица $D=\|d_{ij}\|_{nxn}$ общий элемент которой равен

$$\mathbf{d}_{ij}=\begin{cases}L_{ij}, & \text{если } \mathbf{x}_i \text{ и } \mathbf{x}_j \text{ смежны},\\ 0, & \text{если } \mathbf{x}_i \text{ и } \mathbf{x}_j \text{ не смежны}.\end{cases}$$

где L_{ij} - длина ребра ($\mathbf{x_i}$, $\mathbf{x_j}$).

		1	2	3	4	5	6	7
	x_1	-1						1
	x_2	1	-1			1		
S=	x_3		1	-1			-1	
	x_4			1	-1			-1
	x_5				-1	-1	1	

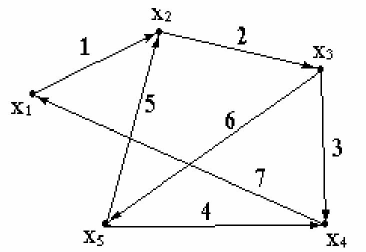


Рис. 12. Граф и его матрица инцидентности

Над графами, также как и над множествами, можно выполнять операции объединения, пересечения, вычитания.

2.3. Операции над графами

Объединение графов. Пусть заданы два графа $\mathbf{G_1(X_1,\Gamma_1)}$ и $\mathbf{G_2(X_2,\Gamma_2)}$.

Объединение этих двух графов **G(X,Г)** определяется следующим образом:

$\mathbf{G(X,\Gamma)=G_1(X_1,\Gamma_1)\cup G_2(X_2,\Gamma_2)}$, при этом

$\mathbf{X=X_1\cup X_2,\ \forall x_i\in X[\Gamma x_i=\Gamma_1 x_i\cup \Gamma_2 x_i]},$

т.е. отображение для каждой вершины графа **G(X,Г)** равно объединению отображений этой вершины для исходных графов. На рис. 13 показан пример объединения двух графов, где

$\mathbf{X= X_1\cup X_2 = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}};$

$\mathbf{\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1\cup \Gamma_2 x_1 = \{x_2,x_5,x_3,x_7\}},$

$\mathbf{\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2\cup \Gamma_2 x_2 = \{x_1,x_3,x_5\}}$ **и т.д.**

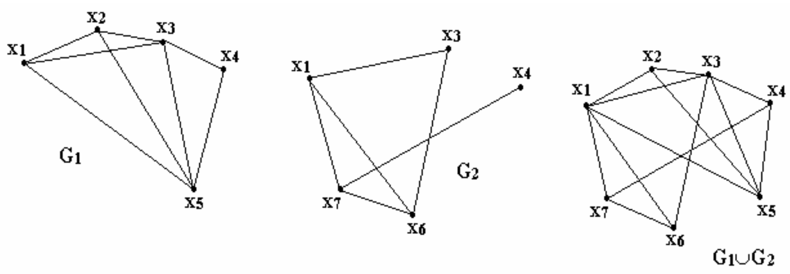


Рис. 13. Объединение графов

Пересечение графов. $\mathbf{G(X,\Gamma)=G_1(X_1,\Gamma_1)\cap G_2(X_2,\Gamma_2)}$. Вершинами графа $\mathbf{G(X,\Gamma)}$ является пересечение вершин исходных графов: $\mathbf{X=X_1\cap X_2}$. Отображение для каждой вершины графа $\mathbf{G(X,\Gamma)}$ получается в результате пересечения отображений этой вершины для исходных графов: $\mathbf{\forall x_i\in X[\Gamma x_i=\Gamma_1 x_i\cap\Gamma_2 x_i]}$. (см. рис. 14).

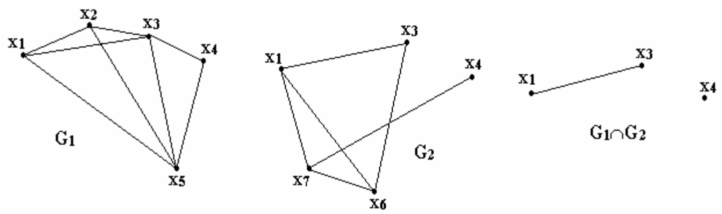


Рис. 14. Пересечение графов

$$\mathbf{X=X_1\cap X_2=\{x_1,x_3,x_4\}},$$

$$\mathbf{\Gamma x_1=\Gamma_1 x_1\cap\Gamma_2 x_1=\{x_3\}} \text{ и т.д.}$$

Вычитание графов. $\mathbf{G(X,\Gamma)=G_1(X_1,\Gamma_1)\backslash G_2(X_2,\Gamma_2)}$. Вершинами графа $\mathbf{G(X,\Gamma)}$ является вершины графа $\mathbf{G_1(X_1,\Gamma_1)}$, за исключением вершин, общих для исходных графов: $\mathbf{X=X_1\backslash X_2}$.

Отображение для каждой вершины графа $\mathbf{G(X,\Gamma)}$ является пересечение множества вершин этого графа и отображения той же вершины в графе $\mathbf{G_1(X_1,\Gamma_1)}$:

$$\mathbf{\forall x_i\in X[\Gamma x_i=X\cap\Gamma_1 x_i]}.$$

В примере на рис. 15 $\mathbf{X=X_1\backslash X_2=\{x_2,x_5\}}$; $\mathbf{\Gamma x_2=X\cap\Gamma_1 x_2=\{x_5\}}$ и т.д.

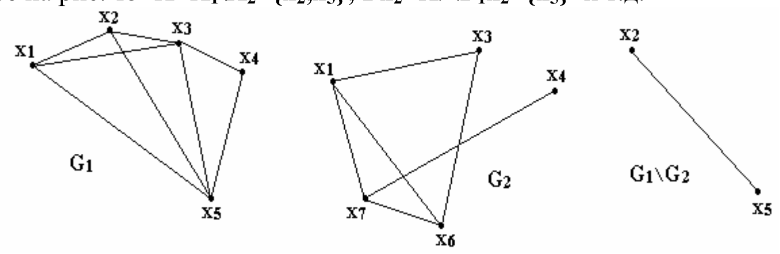


Рис. 15. Вычитание графов

2.4. Характеристические числа графов

Цикломатическое число. Пусть задан граф без петель. Цикломатическим числом графа называют величину $\mathbf{V(G)=r\text{-}n+P}$, где $\mathbf{n}$ - число вершин графа, $\mathbf{r}$ - число его ребер, $\mathbf{P}$ - число компонент связности. Так как $\mathbf{n\text{-}P=R(G)}$ - ранг графа, то $\mathbf{V(G) = r\text{-}R(G)}$.

Цикломатическое число соответствует тому наименьшему количеству ребер в графе, которые нужно исключить из графа, чтобы получить дерево.

Хроматическое число. Пусть задан граф без петель: **G(X,Г).** Разобьем множество его вершин на **К** непересекающихся подмножеств так, чтобы любые две смежные вершины $x_i, x_j \in X$ принадлежали разным подмножествам ,т.е. чтобы ребра графа **G(X,Г)** соединяли вершины из разных подмножеств: $\forall x_i \in X\ [x_i \in Xs \rightarrow Гx_i \notin Xs]$. Отметим все вершины **X** индексами 1,2,...,**К** (т.е. раскрасим вершины К цветами), причем вершины внутри каждого подмножества **X** помечают одним индексом (раскрашивают одним цветом). Подмножества формируют таким образом, чтобы концы любого ребра графа имели различные индексы. Наименьшее возможное число подмножеств, получаемое в результате такого разбиения вершин графа **G(X,Г),** называют хроматическим числом графа, **К(G),** а граф **G(X,Г)** называют К-хроматическим.

Особое значение имеет бихроматический граф или двудольный граф, для которого **К(G)**=2. Согласно теореме Кенига обыкновенный граф является бихроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины. Если граф - дерево, т.е. в нем нет циклов, то он является бихроматическим графом.

Определение хроматического числа осуществляется с помощью сравнительно сложных алгоритмов. Для простых связных графов оценить число К(G) можно следующим образом. Сначала выбираем вершину с минимальной степенью и пометим (раскрасим) ее, затем произведем раскраску вершин, смежных с данной и т.д. Например, для графа, изображенного на рис.16, выбираем вершину x_3, для которой $\rho(x_3)=1$, и пометим ее красным цветом. Вершину x_2 можно раскрасить в синий цвет, а вершины x_1 и x_5 - в красный (они не смежны с x_3). Вершины x_6 и x_8 можно раскрасить в синий цвет.

Оставшиеся вершины x_4 и x_7 раскрасим в зеленый цвет. Всего использовано 3 цвета. Значит **К(G)**=3.

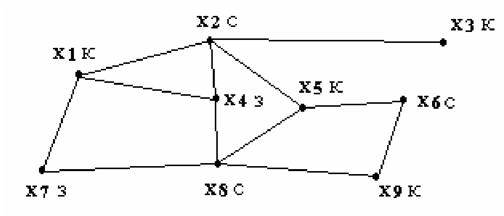


Рис. 16. Определение хроматического числа графа

2.5. Плоские графы

Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все его ребра пересекаются только в вершинах графа. Планарность является внутренним свойством графа и не обязательно проявляется при произвольном его изображении.

Максимальное число некратных ребер у плоского графа $r_{max}=3(n-2)$. Если число таких некратных ребер графа $r \le n+2$, то такой граф заведомо плоский. Таким образом, можно записать условия для предварительного исследования планарности графа:

$r>3(n-2)$ - граф заведомо не плоский,

$r \le n+2$ - граф заведомо плоский.

Если число некратных ребер графа находится в интервале **n**+2<**r**≤3(**n**-2), то для выяснения его планарности требуются специальные исследования.

Согласно теореме Понтрягина-Куратовского граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, изоморфного с точностью до вершин степени два одному из графов Понтрягина-Куратовского. Графы Понтрягина-Куратовского первого и второго типов приведены на рис. 17. Эти графы заведомо не плоские и имеют минимум одно пересечение ребер.

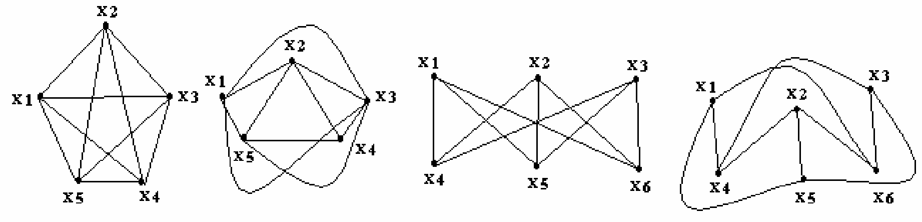


Рис. 17. Графы Понтрягина-Куратовского

Литература

1. Деньдобренько В.Н., Малика А.С. Автоматизация конструирования РЭА.-М.: Высшая школа, 1980.-361 с.;ил.

2. Коршунов Ю.А. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов, - М.:Энергоатомиздат,1987. -496 с.;ил.

3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - К.: Техника, 1975.-766с.;ил.

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

3.1. Элементарные логические функции

Одним из основных понятий в математической логике является понятие высказывания. Под высказыванием понимается всякое предложение, относительно которого имеет смысл утверждать о его истинности или ложности. Например, 8 - четное число, 2 больше 10, сегодня воскресенье, и т.д.

Из простейших высказываний путем соединения их с помощью логических связок можно составлять новые, более сложные высказывания. Истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих высказываний и тем, какими логическими связками они соединены.

Абстрагируясь от конкретного содержания высказывания можно рассматривать его как некоторую величину, которая может иметь какое-либо одно значение из двух возможных значений: истина или ложь. При этом сложное высказывание, составленное из простых высказываний, в математической логике рассматривается как некоторая функция от высказываний-аргументов. Множество значений, которые может принимать функция, тоже состоит из двух элементов: истина и ложь.

В дальнейшем высказывания будем обозначать прописными буквами латинского алфавита. Значение истинности обозначают через 1, а значение лжи через 0.

Логика, которая оперирует лишь с объектами (высказывания, функции), принимающими одно из двух возможных значений, называется двузначной или булевой. Простые высказывания называются логическими или булевыми переменными, а их функции - логическими или булевыми функциями, либо функциями алгебры логики (ФАЛ).

Булева функция, зависящая от **n** аргументов, называется **n**-местной и является полностью заданной, если указаны ее значения для всех наборов значений аргументов. Так как число возможных значений каждого аргумента равно 2, то при числе аргументов **n** количество различных наборов значений аргументов равно 2^n. Каждому набору может соответствовать одно из двух возможных значений функций. Следовательно, количество различных булевых функций от **n** переменных равно 2^{2^n}.

Функции одной и двух логических переменных называются элементарными.

<u>Логические функции одной переменной.</u> Для одной переменной число функций равно 4. Все эти функции F_1, F_2, F_3, F_4 представлены в таблице 1, которая называется таблицей истинности логических функций. Значение функций F_1 и F_2 не зависят от значения аргумента X . Это константы F_1=1 и F_2=0. Значение функции F_3 повторяют значения аргумента X, F_3 = X. Наконец, значения функции F_4 противоположны значениям аргумента.

Таблица 1

x	F1	F2	F3	F4
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

Функции F_1, F_2, F_3 являются тривиальными и практического интереса не представляют. Функция F_4 называется отрицанием или инверсией и обозначается $\overline{X}$.

Таблица 2.

X	1	0	1	0	Название функции	Обозначение	«Замечательные» свойства				
Y	1	1	0	0			1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	Константа 0	0	X			X	X
1	0	0	0	1	Стрелка Пирса	$X\downarrow Y$					
2	0	0	1	0	Запрет по Y	$X\Delta Y$	X				
3	0	0	1	1	Инверсия Y	$\overline{Y}$			X		X
4	0	1	0	0	Запрет по X	$Y\Delta X$	X				
5	0	1	0	1	Инверсия X	$\overline{X}$			X		X
6	0	1	1	0	Сумма по модулю 2	$X\oplus Y$	X				X
7	0	1	1	1	Штрих Шеффера	X/Y					
8	1	0	0	0	Конъюнкция, умножение	$X\cdot Y$, $X\wedge Y$ X&Y	X	X		X	
9	1	0	0	1	Эквивалентность	$X\sim Y$		X			
10	1	0	1	0	Переменная X	X	X	X	X	X	X
11	1	0	1	1	Импликация от Y к X	$Y\rightarrow X$		X			
12	1	1	0	0	Переменная Y	Y	X	X	X	X	X
13	1	1	0	1	Импликация от X к Y	$X\rightarrow Y$		X			
14	1	1	1	0	Дизъюнкция, сложение	X+Y, $X\vee Y$	X	X		X	
15	1	1	1	1	Константа 1	1		X		X	X

Логические функции двух переменных. Для двух переменных число всех возможных функций равно $2^4 = 16$. Полный набор функций двух переменных, их обозначения и названия приведены в табл.2. Из таблицы видно, что восемь функций могут быть получены из других восьми путем применения операции отрицания.

Некоторые логические функции обладают определенными свойствами, получившими название “замечательные” свойства. Всего различают пять “ замечательных” свойств. В табл.2 эти свойства отмечены номерами: 1- свойство сохранять нуль, 2-свойство сохранять единицу, 3- самодвойственность, 4-монотонность, 5-линейность. Более подробно об этих свойствах сказано дальше.

3.2. Принцип суперпозиции. Законы и тождества алгебры логики

Выражения, построенные из конечного числа логических переменных, знаков логических функций, а также констант 0 и 1 называют булевыми формулами. Каждая булева формула может рассматриваться как некоторая булева функция от логических переменных, значение которой на каждом наборе переменных можно получить, если подставить значения переменных (0 или 1) на этом наборе в формулу и произвести указанные логические операции.

В логическую формулу вместо любой ее буквы можно подставить как независимую переменную, так и переменную, являющуюся функцией других переменных. В этом заключается принцип суперпозиции, т.е. подстановки булевых функций вместо аргументов в другую булеву функцию. С помощью принципа суперпозиции любая булева функция может быть представлена как некоторая комбинация функций двух переменных, полный набор которых представлен в табл.2.

Могут быть построены различные логические функции **A(X,Y,Z,...)** и **B(X,Y,Z,...)** от одних и тех же логических переменных **X,Y,Z,...** которые имеют одни и те же значения на всех одинаковых наборах переменных, т.е. **A(X,Y,Z,...) = B(X,Y,Z,...)**

Такое соотношение называется логическим тождеством. Для проверки тождества можно строить таблицы истинности для левой и для правой частей и сравнивать значения функций на всех наборах переменных.

Например, рассмотрим тождество $\mathbf{(X \rightarrow Y) + \overline{X}Y = \overline{X} + Y}$. Построим таблицу истинности для левой и для правой частей выражения и сравним их значения на всех наборах переменных **X** и **Y** (табл.3). Из таблицы видно, что это выражение представляет собой тождество.

Таблица 3

X	Y	$\overline{X}$	$X \rightarrow Y$	$\overline{X}Y$	$(X \rightarrow Y)+\overline{X}Y$	$\overline{X}+Y$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1

Рассмотрим важнейшие тождества алгебры логики.

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{X \cdot X = X,} & X \cdot X \cdot X \ldots X = X \\ \mathbf{X + X = X,} & X + X + X \ldots X = X \end{array}\right\} \text{Законы идемпотентности.}$$

$$\left.\begin{aligned} X+Y &= Y+X \\ X\cdot Y &= Y\cdot X \end{aligned}\right\}$$ Коммутативные законы.

$$\left.\begin{aligned} (X\cdot Y)\cdot Z &= X\cdot(Y\cdot Z) \\ (X+Y)+Z &= X+(Y+Z) \end{aligned}\right\}$$ Ассоциативные законы.

$$\left.\begin{aligned} (X+Y)\cdot Z &= X\cdot Z+Y\cdot Z \\ (X\cdot Y)+Z &= (X+Z)\cdot(Y+Z) \end{aligned}\right\}$$ Дистрибутивные законы.

$\mathbf{X + 1 = 1,} \qquad \mathbf{X + 0 = X}$
$\mathbf{X \cdot 1 = X,} \qquad \mathbf{X \cdot 0 = 0.}$

$\mathbf{X + \overline{X} = 1.}$ Закон исключенного третьего.
$\mathbf{X \cdot \overline{X} = 0.}$ Закон противоречия.

$\overline{X\cdot Y} = \overline{X}+\overline{Y}$,
$\overline{X+Y} = \overline{X}\cdot\overline{Y}$. Законы де Моргана.

$\overline{\overline{X}} = X$. Закон двойного отрицания.

Рассмотрим еще несколько тождеств, в которых логические выражения, содержащие различные функции, приравниваются к выражениям, содержащим лишь функции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

$$\mathbf{X \oplus Y = \overline{X}\cdot Y + X\cdot\overline{Y}.}$$
$$\mathbf{X \to Y = \overline{X} + Y.}$$
$$\mathbf{X \sim Y = X\cdot Y + \overline{X}\cdot\overline{Y}.}$$

Если некоторая логическая функция тождественно равна единице, то она называется тавтологией. Если нулю - противоречием.

3.3. Способы задания логической функции

Существует ряд способов задания логической функции. Рассмотрим важнейшие из них.

1. Формула, указывающая последовательность логических операций, которые нужно произвести над высказываниями - аргументами, чтобы получить значение функции. Например, $\mathbf{F(X_1, X_2, X_3) = X_1\cdot \overline{X}_2 \to X_3}$.

2. Таблица истинности. В таблице указываются значения функции в зависимости от значений истинности аргументов. Если функция зависит от n аргументов, то число всех наборов аргументов равно 2^n.

В таблице истинности указываются все наборы и значение функции на каждом наборе.

3. Числовой способ задания функции. Каждой независимой переменной-аргументу функции ставится в соответствие число 2^k (k = 0, 1, 2,...). Аргументы функции записываются в виде упорядоченного множества, например, $\mathbf{F(X_1, X_2, X_3)}$. При этом переменная, записанная крайней справа, получает коэффициент $2^0 = 1$, переменная, стоящая рядом слева, получает коэффициент $2^1=2$ и т. д. Так, для функции $\mathbf{F(X_1, X_2, X_3)}$ независимые переменные получают следующие коэффициенты: $\mathbf{X_3}$-1, $\mathbf{X_2}$-2. $\mathbf{X_1}$-4. Для каждого набора независимых переменных определяется число номер **N** по формуле

$$\mathbf{N = 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3}$$

При задании функции указывают номера тех наборов, на которых функция равна единице, и перед списком номеров единичных наборов ставят знак дизъюнкции. Можно также указать те номера наборов, на которых функция равна нулю, но при этом перед списком нулевых наборов ставят знак конъюнкции. Например, функция, заданная таблицей истинности (табл.4) может быть записана следующим образом: **F(X,Y,Z)** = $\vee(0,1,4,7) = \wedge(2,3,5,6)$

Таблица 4

N	X	Y	Z	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

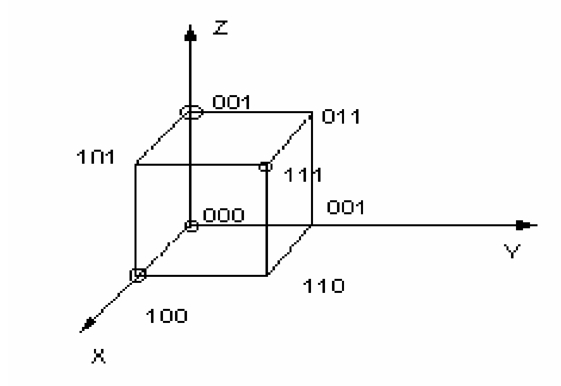


Рис.18. Геометрический способ задания логической функции

4. Геометрический способ задания логической функции. Для функции **n** - независимых логических переменных рассматривается единичный **n**- мерный куб. Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных. Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе. На рисунке единичные наборы помечают, например, кружками. (рис.18).

5. Логическая схема, представляющая собой условное графическое обозначение логических функций. На рис.19 показаны графические обозначения некоторых элементарных логических функций. На рис.20 показан пример логической схемы.

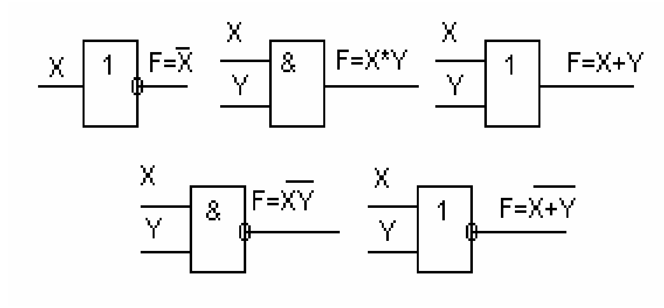


Рис.19. Графические обозначения элементарных логических функций.

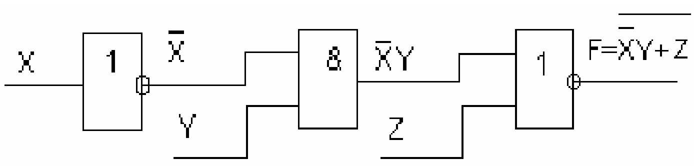


Рис.20. Логическая схема.

3.4. Конституенты единицы и нуля. Составление логической формулы по таблице истинности

Конъюнкция любого количества различных независимых переменных, входящих в нее в утвердительной или инверсной форме не более одного раза, называется элементарной конъюнкцией. Например, $ABC\overline{D}$, X , $\overline{X}Y$. Выражения (A+B)C, $ABC\overline{A}$, $\overline{XY}Z$ не являются элементарными конъюнкциями.

Дизъюнкция любого количества различных независимых переменных, входящих в нее в утвердительной или инверсной форме не более одного раза, называется элементарной дизъюнкцией. Например, A+B+C+D, A+B. Выражения AB+C+D, $\overline{A+B}+C$, $A+\overline{A}+B$ не являются элементарными дизъюнкциями.

Пусть задана некоторая логическая функция **n** независимых переменных $\mathbf{F(X_1,X_2,...,X_n)}$. Элементарная конъюнкция, в которую входят все **n** независимые переменные, называется конституентой единицы.

Элементарная дизъюнкция, в которую входят все **n** независимые переменные, называется конституентой нуля.

Очевидно, для функции **n** независимых переменных общее число всех конституент единицы также как и общее число всех конституент нуля равно 2^n.

Пример. Для функции трех переменных $\mathbf{F(X_1,X_2,X_3)}$ выпишем все конституенты единицы и все конституенты нуля.

Конституенты единицы: $X_1X_2X_3$, $\overline{X}_1X_2X_3$, $X_1\overline{X}_2X_3$, $X_1X_2\overline{X}_3$, $\overline{X}_1\overline{X}_2X_3$, $\overline{X}_1X_2\overline{X}_3$, $X_1\overline{X}_2\overline{X}_3$, $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$.

Конституенты нуля: $X_1+X_2+X_3$, $\overline{X}_1+X_2+X_3$, $X_1+\overline{X}_2+X_3$, $X_1+X_2+\overline{X}_3$, $\overline{X}_1+\overline{X}_2+X_3$, $\overline{X}_1+X_2+\overline{X}_3$, $X_1+\overline{X}_2+\overline{X}_3$, $\overline{X}_1+\overline{X}_2+\overline{X}_3$.

Каждая конституента единицы равна единице лишь на одном, вполне определенном наборе значений переменных. Для каждого набора имеется своя конституента, принимающая значение 1 на этом наборе и значение 0 на всех остальных наборах. Например, конституента единицы $\overline{X}_1\overline{X}_2X_3$ равна единице на наборе $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$.

Любая булева функция может быть представлена в виде дизъюнкции всех тех конституент единицы, которые равны единице на тех же наборах, что и данная функция.

Рассмотрим функцию $\mathbf{F(X_1,X_2,...,X_n)}$. Пусть $\mathbf{K_{m1}}$, $\mathbf{K_{m2},...,K_{mi}}$ конституенты единицы, которые равны единице на наборах $\mathbf{m_1, m_2,... m_i}$, совпадающих с единичными наборами функции. Рассмотрим выражение

$$\mathbf{F(X_1,X_2,...,X_n) = K_{m1}+K_{m2}+...,+K_{mi}}. \qquad (1)$$

Покажем, что (1) есть тождество. Действительно, на каждом из наборов с номерами $\mathbf{m_1, m_2,... m_i}$ равна единице только одна конституента, стоящая в правой части (1), а остальные равны нулю. Следовательно, на этих наборах и только на них правая часть

(1) принимает значение, равное единице. Но на этих же наборах и левая часть (1) равна единице, а на остальных она равна нулю. Следовательно, выражение (1) есть тождество. Отсюда следует правило записи формулы булевой функции по заданной таблице истинности.

Чтобы булеву функцию, заданную таблицей истинности, представить в виде дизъюнкции ее конституент единицы, нужно составить дизъюнкцию тех конституент единицы, которые равны единице на тех же наборах, что и данная функция. При этом, если в наборе, для которого F=1, какая-либо переменная равна единице, то ее нужно записать в конституенте единицы в утвердительной форме, если какая-либо переменная равна нулю, то ее нужно записать в конституенте единицы с отрицанием. Такая форма записи логической функции называется - совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

Любую логическую функцию можно также представить в виде конъюнкции тех конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и данная функция.

Чтобы булеву функцию, заданную таблицей истинности, представить в виде конъюнкции ее конституент нуля нужно составить конъюнкцию тех конституент нуля, которые равны нулю на тех же наборах, что и данная функция. При этом, если в наборе, для которого F=0, какая-либо переменная равна единице, то ее нужно записать в конституенте нуля с отрицанием, если какая-либо переменная равна нулю, то ее нужно записать в утвердительной форме. Такая форма записи логической функции называется - совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Пример. Рассмотрим функцию, таблица истинности которой приведена в табл.4. Для этой функции СДНФ и СКНФ имеют вид:

$$\mathbf{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XYZ = \qquad \text{СДНФ}$$

$$= (X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z) \quad \text{СКНФ.}$$

3.5. Полином Жегалкина

.

Советский ученый Жегалкин И.И. (1869-1947) разработал систему логического счисления, основанную на использовании элементарных логических функций конъюнкции, суммы по модулю два и константы 1.

Покажем, что любую логическую функцию можно представить в виде суммы по модулю два всех ее конституент единицы. Действительно, пусть функция имеет конституенты единицы $\mathbf{K_{m1}, K_{m2},...,K_{mi}}$. Рассмотрим выражение

$$\mathbf{F = K_{m1} \oplus K_{m2} \oplus ... \oplus K_{mi}}. \qquad (2)$$

Это выражение аналогично СДНФ (1) и отличается лишь тем, что операции дизъюнкции заменены операциями суммы по модулю 2. Такая замена не нарушает тождества, т.к. на каждом из наборов с номерами $\mathbf{m_1, m_2, ... , m_i}$ равна единице только одна конституента, стоящая в правой части (2), а остальные равны нулю. Но для суммы по модулю 2 справедливы соотношения:

$$0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 = 0; \qquad 0 \oplus 1 = 1.$$

Следовательно (2) также как и (1) является тождеством.

Теорема Жегалкина. Любая логическая функция может быть представлена в виде полинома

$$\mathbf{F(X_1,X_2,...,X_n) = A_0 \oplus A_1X_1 \oplus A_2X_2 \oplus ... \oplus A_nX_n \oplus A_{n1}X_1X_2 \oplus A_{n2}X_1X_3 \oplus ... \oplus}$$
$$\mathbf{\oplus A_NX_1X_2...X_n}$$

где $A_1, A_2, \dots A_N$ константы, равные 0 или 1. При записи конкретной логической функции коэффициенты не пишут, т.к. если $A_i=0$, то $A_iF=0$, если $A_i=1$, то $A_iF=F$.

Чтобы произвольную логическую функцию представить в виде полинома Жегалкина нужно записать ее в виде суммы по модулю 2 всех ее конституент единицы, затем все аргументы, входящие в полученное выражение с отрицанием, заменить на основании соотношения $\overline{X} = X \oplus 1$, раскрыть скобки и привести подобные члены с учетом тождества

$$\mathbf{X \oplus X \oplus \dots \oplus X} = \begin{cases} X, & \text{если } \mathbf{n} \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } \mathbf{n} \text{ четно,} \end{cases}$$

где **n** - количество слагаемых.

Пример. Рассмотрим функцию, заданную таблицей 3.

$$\mathbf{F} = \overline{X}\,\overline{Y} \oplus \overline{X}\mathbf{Y} \oplus \mathbf{XY} = \mathbf{(1 \oplus X)(1 \oplus Y) \oplus (1 \oplus X)Y \oplus XY} =$$
$$\mathbf{= 1 \oplus X \oplus Y \oplus XY \oplus Y \oplus XY \oplus XY = 1 \oplus X \oplus XY.}$$

3.6. Замкнутые классы логических функций

Рассмотрим множество **A** логических функций, обладающих некоторым свойством. Пусть $\mathbf{G(Y_1,Y_2,\dots,Y_k)\in A}$ **и** $\mathbf{F_i(X_1,X_2,\dots,X_n)\in A}$, **i**=1,2,...,**k**. Произведем суперпозицию функций **G** и **F** :

$$\mathbf{G[F_1(X_1,\dots,X_n),\dots,F_k(X_1,\dots,X_n)] = H(X_1,\dots,X_n)}$$

Если $\mathbf{H(X_1,\dots,X_n)\in A}$, то **A** называется замкнутым классом логических функций по отношению к рассматриваемому свойству.

Различают пять «замечательных» свойств, по которым логические функции образуют замкнутые классы.

1. Свойство сохранять нуль. Это свойство заключается в следующем: $\mathbf{F(0,..,0)=0}$. Например, $\mathbf{X_1X_2}$, $\mathbf{X_1+X_2}$, $\mathbf{X_1 \oplus X_2}$.

Примеры функций, не обладающих свойством сохранять нуль: $\mathbf{X_1\rightarrow X_2}$, $\mathbf{X_1\sim X_2}$, $\mathbf{X_1/X_2}$. Докажем замкнутость класса функций, сохраняющих нуль.

Пусть $\mathbf{G(0,\dots,0)=0}$ и $\mathbf{F_i(0,\dots,0)=0}$. Тогда $\mathbf{G[F_1(X_1,\dots,X_n),\dots,F_k(X_1,\dots,X_n)]} = \mathbf{=G[(0,\dots,0),\dots,F_k(0,\dots,0)]=G(0,\dots,0)=0}$, т.е. $\mathbf{H(0,\dots,0)=0}$. Что и требовалось доказать.

2. Свойство сохранять единицу. Это свойство заключается в следующем: $\mathbf{F(1,\dots,1)=1}$.

Например, $\mathbf{X_1X_2}$, $\mathbf{X_1+X_2}$, $\mathbf{X_1\rightarrow X_2}$.

Примеры функций, не обладающих этим свойством: $\mathbf{X_1 \oplus X_2}$, $\mathbf{X_1/X_2}$.

Замкнутость класса функций, сохраняющих единицу, может быть доказана таким же образом, как и замкнутость класса функций, сохраняющих нуль.

3. Самодвойственность. Введем сначала понятие двойственности. Пусть задана функция $\mathbf{F(X_1,X_2,\dots,X_n)}$. Двойственной по отношению к функции **F** называется функция **F***, определяемая следующим образом:

$\mathbf{F^*(X_1,X_2,\dots,X_n)}=\overline{\overline{F}(\overline{X}_1, \overline{X}_2,\dots, \overline{X}_n)}$.

Например, $\mathbf{F = X + Y}$, тогда $\mathbf{F^*}=\overline{\overline{X}_1 + \overline{Y}} = X \cdot Y$.

Самодвойственной функцией называется такая функция, для которой справедливо равенство:

$$\mathbf{F(X_1,X_2,\dots,X_n)}=\overline{F}(\overline{X}_1,\overline{X}_2,\dots,\overline{X}_n).$$

Применив операцию отрицания к левой и правой частям последнего равенства, получим:

$$\overline{F}(X_1,X_2,...,X_n) = F(\overline{X}_1, \overline{X}_2,..., \overline{X}_n).$$

Пример самодвойственной функции:

$$F=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3.$$

Действительно,

$$F^* = \overline{\overline{X}_1\overline{X}_2 + \overline{X}_1\overline{X}_3 + \overline{X}_2\overline{X}_3} = \overline{\overline{X}_1\overline{X}_2} \cdot \overline{\overline{X}_1\overline{X}_3} \cdot \overline{\overline{X}_2\overline{X}_3} = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) =$$
$$= X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = F$$

Доказательство замкнутости класса самодвойственных функций.

Пусть $\overline{G}(Y_1,..., Y_n)$ и $\overline{F}_i(X_1,..., X_n)= F_i(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n)$. Произведем суперпозицию функций **G** и F_i: $\overline{G}[F_1(X_1,..., X_n) ,..., F_k(X_1,..., X_n)] = G[\overline{F}_1(X_1,..., X_n),..., \overline{F}_k(X_1,..., X_n)] = G[F_1(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n),...,F_к(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n)] = H(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n)$,

т.е. $\overline{H}(X_1,...,X_n) = H(\overline{X}_1,..., \overline{X}_n)$.

4. Монотонность. Для того чтобы определить монотонную логическую функцию введем критерий сравнения двух наборов аргументов.

Если значение каждого аргумента одного набора больше или равно значению того же аргумента второго набора, то говорят, что первый набор не меньше второго. При этом предполагается, что $0 \geq 0$; $1 \geq 0$; $1 \geq 1$.

Например, $(1,1,0,1) \geq (0,1,0,1)$. Не всякие наборы являются сравнимыми. Например, наборы (0,1) и (1,0) или (0,1,0,1) и (1,0,1) несравнимы.

Логическая функция называется монотонной, если при любом возрастании набора значение этой функции не убывает. При этом рассматриваются только сравнимые наборы. Примеры монотонных функций: **XY, X+Y**, Примеры функций, не обладающих свойством монотонности: $X \sim Y$, $X \to Y$, $X \oplus Y$. Докажем, что по свойству монотонности функции образуют замкнутый класс.

Пусть **функции** $G(Y_1,..., Y_n)$ и $F_i(X_1,..., X_n)$- монотонные. Произведем суперпозицию функций **G** и **F** :

$$G[F_1(X_1,..., X_n),..., F_k(X_1,..., X_n)] = H(X_1,..., X_n)$$

Найдем значения функций F_i и функции **G** на некотором наборе $X_1,..., X_n$, а затем увеличим этот набор. Так как функции F_i монотонные, то их значения либо увеличатся, либо останутся без изменения. Так как функция **G** монотонная, то ее значение либо увеличится, либо останется без изменения. Из этого следует, что значение функции **H** при увеличении набора либо увеличится, либо останется без изменения, т.е. функция **H** тоже является монотонной, что и требовалось доказать.

5. Линейность. Логическая функция называется линейной, если она может быть представлена полиномом первой степени, т.е. записана в виде $F(X_1,X_2,..., X_n) = A_0 \oplus$

$\oplus A_1X_1 \oplus A_2X_2 \oplus ... \oplus A_nX_n$,

где $A_0, A_1,..., A_n$ - коэффициенты, равные нулю или единице.

Примеры линейных функций: $X \oplus Y$, $X \sim Y = 1 \oplus X \oplus Y$. .

Покажем, что по свойству линейности функции образуют замкнутый класс. Пусть функции $G(Y_1,..., Y_k)$ и $F_i(X_1,..., X_n)$- линейные. Представим их в виде линейных полиномов:

$$G = A_0 \oplus A_1Y_1 \oplus A_2Y_2 \oplus ... \oplus A_kY_k,$$
$$F_i = B_{0i} \oplus B_{1i} \oplus B_{2i} \oplus ... \oplus B_{ni}X_n.$$

Подставив функции F_i вместо аргументов Y_i в функцию **G** получим выражение, в котором постоянные коэффициенты A_i умножаются на линейные функции. При этом получатся снова линейные функции. Приведя подобные члены, получим функцию $H(X_1,..., X_n)$ в виде линейного полинома.

Из этого следует, что по свойству линейности функции образуют замкнутый класс.

Рассмотрим пример. $G = 1 \oplus Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$; $\mathbf{F_1=X_1 \oplus X_2 \oplus X_3}$; $\mathbf{F_2=X_2 \oplus X_3}$; $\mathbf{F_3=1 \oplus X_3}$. Произведем суперпозицию функций **G** и $\mathbf{F_i}$:

$$\mathbf{G=1 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus 1 \oplus X_3 = X_1 \oplus X_3}.$$

3.7. Функционально полные системы элементарных булевых функций

Система элементарных булевых функций называется функционально полной (или же полная система функций), если произвольную булеву функцию можно представить суперпозицией функций этой системы. Полная система функций образует базис. Минимальным базисом называется такой, в котором при удалении хотя бы одной функции, образующей этот базис, нарушается его полнота.

<u>Теорема о функциональной полноте.</u> Для того, чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы эта система включала:

хотя бы одну функцию, не сохраняющую нуль;

хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;

хотя бы одну несамодвойственную функцию;

хотя бы одну немонотонную функцию;

хотя бы одну нелинейную функцию.

Доказательство этой теоремы основано на том, что суперпозиция любого числа функций, образующих замкнутый класс, представляет собой функцию этого же класса. Можно предположить, что наибольшее число функций, образующих базис, равно пяти. Однако ввиду того, что многие булевы функции удовлетворяют одновременно нескольким требованиям, предъявляемым теоремой о функциональной полноте, количество независимых булевых функций, образующих минимальный базис, меньше пяти.

В функционально полную систему элементарных логических функций двух аргументов в соответствии с теоремой о функциональной полноте должны входить такие функции, которые совместно перекрывают клетками без крестиков колонки 1-5 табл. 2. Из функций, представленных в табл. 2, можно составить различные функционально полные системы. Рассмотрим некоторые из них.

1. **F=X/Y**. Эта функция не обладает ни одним из "замечательных" свойств, следовательно, она одна образует минимальный базис.

2. $\mathbf{F=X \downarrow Y}$. Так же как и "штрих Шеффера" эта функция не обладает ни одним из указанных свойств и поэтому образует минимальный базис.

3. $\mathbf{F_1=X \rightarrow Y}$ и $\mathbf{F_2=0}$, или $\mathbf{F_1=Y \rightarrow X}$ и $\mathbf{F_2=0}$.

4. $\mathbf{F_1=X \oplus Y}$, $\mathbf{F_2=X \cdot Y}$, $\mathbf{F_3=1}$. Функции этого базиса входят в полином Жегалкина.

Из всего многообразия возможных функционально полных систем булевых функций в технике наибольшее распространение получил базис, содержащий три функции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Этот базис не является минимальным, но использование всех трех указанных функций совместно с константами 0 и 1 позволяет сравнительно легко строить сложные логические устройства на электронных элементах.

3.8. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы булевых функций

Различают две основные формы представления логических функций в базисе И, ИЛИ, НЕ - дизъюнктивную и конъюнктивную. Форма определяется той операцией, которая выполняется последней. При этом очередность выполнения операций следующая: сначала выполняют те операции, которые заключены в скобки, затем отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию. Например, $F_1=X_1X_2(X_3+X_4)$, $F_2=X_1X_2X_3+X_4$. F_1 - конъюнктивная, F_2 - дизъюнктивная форма.

Дизъюнкцию элементарных конъюнкций называют дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Конъюнкцию элементарных дизъюнкций называют конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Любая булева функция может быть представлена как в ДНФ, так и в КНФ. Для того, чтобы произвольную функцию представить в ДНФ или в КНФ нужно:

1. Пользуясь соответствующими тождествами алгебры логики перевести заданную функцию в базис **И, ИЛИ, НЕ**.

2. Используя законы де-Моргана и дистрибутивные законы преобразовать функцию в нужную форму.

При преобразованиях логических формул может возникнуть необходимость перейти от конъюнктивной формы к дизъюнктивной и наоборот. В первом случае задача сводится к раскрытию скобок, что аналогично соответствующей операции в алгебре чисел.

При переходе от дизъюнктивной формы к конъюнктивной нужно использовать второй дистрибутивный закон, не имеющий места в алгебре чисел:

$$AB+C=(A+C)(B+C).$$

Например, преобразуем функцию F_2 из предыдущего примера в **КНФ**:

$$X_1X_2X_3+X_4=(X_1+X_4)(X_2X_3+X_4)=(X_1+X_4)(X_2+X_4)(X_3+X_4).$$

Любая булева функция может быть представлена как в **СДНФ** так и в **СКНФ**. Как записать ту или иную форму по таблице истинности уже было сказано ранее. Рассмотрим теперь, как можно получить эти формы записей булевых функций, не прибегая к таблице истинности, а путем аналитических преобразований заданной формулы.

Пусть булева функция задана в **ДНФ**. Для преобразования ее в **СДНФ** нужно каждую элементарную конъюнкцию, в которой не хватает каких-либо переменных данной функции (например, X_i, X_k, X_n) умножить на выражение, тождественно равное единице $(X_i+\overline{X}_i)(X_k+\overline{X}_k)(X_n+\overline{X}_n)$, а затем раскрыть скобки. После приведения подобных членов получим дизъюнкцию элементарных конъюнкций, каждая из которых содержит все переменные данной функции, т.е. является конституентой единицы, а все выражение - СДНФ. Например,

$$X_1X_2+X_2X_3=X_1X_2(X_3+\overline{X}_3)+X_2X_3(\overline{X}_1+X_1)=X_1X_2X_3+X_1X_2\overline{X}_3+\overline{X}_1X_2X_3.$$

Пусть булева функция задана в **КНФ**. Для преобразования ее в **СКНФ** нужно к каждой элементарной дизъюнкции, в которой не хватает каких-либо переменных данной функции (например, X_i,X_k,X_n) прибавить выражение, тождественно равное нулю $X_i\overline{X}_i+X_k\overline{X}_k+X_n\overline{X}_n$, а затем проделать последовательно преобразования по второму дистрибутивному закону. В результате получится конъюнкция элементарных дизъюнкций, каждая из которых будет содержать все переменные данной функции, т.е. конъюнкция конституент нуля - **СКНФ**. Пример:

$$F=(X_1+X_2)(X_2+X_3)=(X_1+X_2+X_3\overline{X}_3)(X_2+X_3+X_1\overline{X}_1)=$$
$$(X_1+X_2+X_3)(X_1+X_2+\overline{X}_3)(\overline{X}_1+X_2+X_3).$$

3.9. Минимизация булевых функций

Задача минимизации булевой функции состоит в том, чтобы найти эквивалентную ей формулу, имеющую минимальную сложность. Под сложностью формулы понимают количество входящих в нее букв. Наиболее хорошо разработаны методы минимизации белевых функций, представленных в **ДНФ**. Эти методы основаны на понятии простой импликанты.

Если некоторая булева функция **φ** равна нулю на тех же наборах, на которых равна нулю другая функция **F**, а также и на некоторых других наборах, то говорят, что функция **φ** входит в функцию **F** и является ее импликантой. Условие вхождения записывается следующим образом: $\varphi \subset F$. Например, рассмотрим функцию $F = X \oplus Y$. Ее импликантами являются функции $G_1 = X\overline{Y},\ G_2 = \overline{X}Y,\ G_3 = 0.$

Простыми импликантами булевой функции F называют такие элементарные конъюнкции, которые сами входят в данную функцию, но ни какая собственная часть этих конъюнкций в функцию F не входит. Собственной частью называют произведение, полученное путем исключения из данного произведения одного или нескольких сомножителей. Например, произведение $X\overline{Y}Z$ имеет такие собственные части: $X\overline{Y},\ \overline{Y}Z,\ XZ,\ X,\ Y,\ Z.$

Например, для $F = X \oplus Y$ $\overline{X}Y \subset F,\ X\overline{Y} \subset F,\ \overline{X} \not\subset F,\ Y \not\subset F,\ X \not\subset F,\ \overline{Y} \not\subset F.$ Значит $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$ являются простыми импликантами функции F.

Простые импликанты представляют собой самые короткие элементарные конъюнкции, входящие в данную булеву функцию.

Любая булева функция может быть представлена в виде дизъюнкции всех своих простых импликант. Дизъюнкция всех простых импликант называется сокращенной ДНФ булевой функции. Существует несколько алгоритмов получения сокращенной ДНФ булевой функции. Одним из наиболее хорошо разработанных является метод Квайна.

<u>Метод Квайна</u>. Этот метод основан на преобразовании СДНФ с помощью операции неполного склеивания и поглощения.

Операция склеивания (полного) определяется соотношением

$$XY + X\overline{Y} = X.$$

Говорят, что два члена **XY** и $X\overline{Y}$ склеиваются по переменной **Y**.

Операция неполного склеивания определяется формулой

$$XY + X\overline{Y} = X + XY + X\overline{Y}.$$

В правой части кроме члена **X**, получающегося в результате склеивания, записываются оба члена, участвующие в склеивании.

Операция поглощения определяется соотношением

$$X + XY = X.$$

<u>Теорема Квайна.</u> Если в **СДНФ** булевой функции провести все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то получится сокращенная ДНФ этой функции, т.е. дизъюнкция всех ее простых импликант.

Действительно, пусть **F** задана в **ДНФ**; например, $F=F_1+F_2+F_3$. Предположим, что F_1, F_2, и F_2, F_3 попарно склеиваются, т.е. $F_1+F_2=G_1$, $F_2+F_3=G_2$, тогда $G_1+G_2= F_1+F_2+F_3=F$.

Покажем, что $G_1, G_2 \subset F$. Действительно, из того, что $F=0$ следует, что $G_1=0$ и $G_2=0$. Если $F=1$, то может быть либо $G_1=0$ и $G_2=1$, либо $G_1=1$ и $G_2=0$, либо $G_1=1$ и $G_2=1$. Значит G_1 и G_2 равны нулю на всех тех наборах, на которых равна нулю функция **F** и на некоторых других наборах.

Практически сокращенную **ДНФ** удобно находить в такой последовательности.

Провести в **СДНФ** все возможные операции неполного склеивания конституент единицы и все возможные операции поглощения.

Затем провести все возможные операции неполного склеивания и поглощения членов с (**n**-1) буквой.

Провести все возможные операции неполного склеивания и поглощения членов с числом букв, равным (**n**-2) и т. д.

Пример.

$$F=\overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}+\overset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4}+\overset{3}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4}+\overset{4}{\bar{x}_1x_2x_3x_4}+\overset{5}{x_1x_2x_3\bar{x}_4}+$$

$$+\overset{6}{x_1x_2x_3x_4}$$

Проводим все возможные операции неполного склеивания и поглощения с четырехбуквенными конъюнкциями. Результат вносим в таблицу:

Номера склеиваемых конъюнкций	Результат склеивания
1 - 2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
1 - 3	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$
2 - 4	$\bar{x}_1x_3x_4$
3 - 4	$\bar{x}_1x_2x_4$
4 - 6	$x_2x_3x_4$
5 - 6	$x_1x_2x_3$

Записываем сокращенную формулу, в которую должны войти конъюнкции, полученные в результате склеивания, и те исходные конституенты единицы, которые не склеились:

$$F=\overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4}+\overset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4}+\overset{3}{\bar{x}_1x_3x_4}+\overset{4}{\bar{x}_1x_2x_4}+\overset{5}{x_2x_3x_4}+\overset{6}{x_1x_2x_3}.$$

В полученном выражении выполняем снова все возможные операции склеивания и поглощения:

1 - 4	$\bar{x}_1x_4$
2 - 3	$\bar{x}_1x_4$

Первый и четвертый, второй и третий члены попарно склеиваются. Пятый и шестой члены остаются. Таким образом, получим:

$$F=\bar{x}_1x_4+x_2x_3x_4+x_1x_2x_3$$

В этом выражении нет членов, которые склеиваются, поэтому оно является сокращенной дизъюнктивной нормальной формой. Для того, чтобы найти минимальную дизъюнктивную форму, можно воспользоваться импликантной матрицей. В импликантной матрице столбцы помечаются конституентами единицы заданной функции, а строки - импликантами, полученными в результате склеивания (табл. 5).

Таблица 5.

Простые импликанты	Конституенты единицы					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_4$	+	+	+	+		
$x_2x_3x_4$				+		+
$x_1x_2x_3$					+	+

Если импликанта является собственной частью некоторой конституенты единицы, то клетка матрицы, соответствующей этой импликанте и конституенте единицы, помечается крестиком. Чтобы получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму заданной функции, нужно найти минимальное число импликант, которые совместно накрывают крестиками все колонки импликантной матрицы. В приведенном примере минимальная дизъюнктивная форма заданной функции имеет вид

$$F = \overline{X}_1 X_4 + X_1 X_2 X_3 .$$

Может оказаться, что функция имеет несколько различных минимальных форм одинаковой сложности.

<u>Карты Карно (Вейча).</u> Карта Карно представляет собой прямоугольник, разделенный на клетки, число которых равно числу всех возможных наборов независимых переменных заданной логической функции. Для функции двух переменных карта содержит 4 клетки, для функции 3 переменных - 8 клеток и т.д.

Рассмотрим карту для двух переменных (рис. 21). Каждая клетка карты соответствует конституенте единицы.

	X_1	$\overline{X}_1$
X_2	X_1X_2	$\overline{X}_1X_2$
$\overline{X}_2$	$X_1\overline{X}_2$	$\overline{X}_1\overline{X}_2$

Рис. 21. Карта Карно для функции 2-х переменных

	X_1	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_1$	X_1
X_2	$X_1X_2X_3$	$\overline{X}_1X_2X_3$	$\overline{X}_1X_2\overline{X}_3$	$X_1X_2\overline{X}_3$
$\overline{X}_2$	$X_1\overline{X}_2X_3$	$\overline{X}_1\overline{X}_2X_3$	$\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$	$X_1\overline{X}_2\overline{X}_3$
	X_3		$\overline{X}_3$	

Рис. 22. Карта Карно для функции 3-х переменных

С добавлением переменной карта удваивается. На рис. 22 показана карта Карно для функции 3 переменных.

При построении карты можно пользоваться следующим правилом: карта Карно для функции **n** переменных получается из карты для функции **n**-1 переменных, если последнюю удвоить путем добавления к ней точно такой же, расположенной симметрично относительно длинной грани. При этом одна половина новой карты помечается новой буквой в утвердительной форме, а вторая половина - той же буквой, но с отрицанием. На рис. 23 показана карта Карно для функции 4-х переменных, полученной из карты, изображенной на рис. 22. В правильно размеченной карте любые две рядом расположенные клетки соответствуют склеивающимся конституентам единицы. Кроме того, любые две клетки, расположенные по краям карты симметрично слева и справа, либо вверху и внизу, тоже соответствуют склеивающимся конституентам единицы.

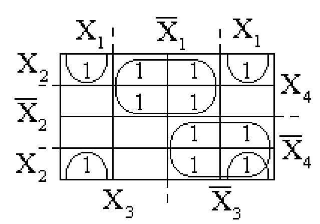


Рис. 23. Карта Карно для функции 4-х переменных

Минимизация заданной логической функции с помощью карты Карно проводится в такой последовательности.

1. Заданная функция преобразуется в **СДНФ**.

2. Каждая конституента единицы заданной функции отмечается единицей в соответствующей клеточке карты Карно.

3. Единицы, расположенные рядом, или симметрично на краях карты, покрываются правильными прямоугольниками. При этом выполняются следующие требования:

- число единиц, покрываемых одним прямоугольником, должно быть равно 2^k, где **k** - целое число;
- каждый прямоугольник должен покрывать как можно больше единиц, а количество покрывающих прямоугольников должно быть как можно меньше;
- одна и та же единица может быть покрыта несколько раз разными прямоугольниками.

4. Для каждого прямоугольника, покрывающего единицы, записываем конъюнкцию, в которую должны войти буквы, являющиеся общими для единиц, накрытых этим прямоугольником.

5. Записываем минимальную **ДНФ**, в которую должны войти конъюнкции, соответствующие всем накрывающим прямоугольникам. Если в карте оказались единицы, стоящие изолировано от других, и не покрытые никакими прямоугольниками, то в результирующую дизъюнкцию добавляются полностью соответствующие конституенты единицы.

6. Если есть возможность, сокращаем полученную формулу путем вынесения общих членов за скобки.

Пример. Рассмотрим функцию четырех переменных. Пусть **СДНФ** заданной функции имеет вид:

$$F = \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3X_4 + \overline{X}_1\overline{X}_2X_3X_4 + \overline{X}_1X_2\overline{X}_3X_4 + \overline{X}_1X_2X_3X_4 + X_1X_2X_3\overline{X}_4 +$$
$$+ X_1X_2\overline{X}_3X_4 + X_1X_2X_3X_4 + X_1X_2\overline{X}_3\overline{X}_4 + X_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 + \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 +$$
$$+ \overline{X}_1X_2\overline{X}_3\overline{X}_4.$$

Каждую конституенту единицы приведенной функции отмечаем единицей в соответствующей клеточке карты Карно (см. Рис. 23). Для наглядности прямоугольники, покрывающие единицы, отмечаем овальными линиями. Минимальная ДНФ данной функции имеет вид: $F = \overline{X}_3\overline{X}_4 + \overline{X}_1X_4 + X_1X_2$.

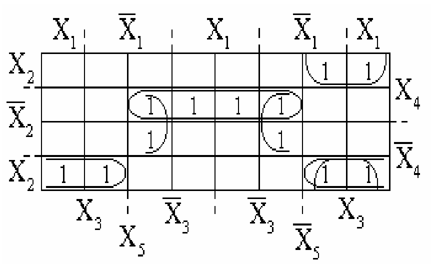


Рис. 24. Карта Карно для функции 5-ти переменных

Карта Карно для функции пяти переменных показана на рис. 24. Для функции шести переменных — на рис. 25. Карты Карно для функций пяти и шести переменных имеют следующие особенности. Склеивающимся конъюнкциям соответствуют единицы, расположенные внутри карты симметрично относительно центральных осей симметрии.

Пример. Пусть функция пяти переменных представлена единицами, отмеченными на карте Карно на рис. 24. В результате покрытия получим следующую минимальную **ДНФ**:

$$F = \overline{X}_2\overline{X}_3X_4 + \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3 + X_2X_3\overline{X}_4 + X_2X_3\overline{X}_5 =$$
$$= \overline{X}_2\overline{X}_3(X_4 + \overline{X}_1) + X_2X_3(\overline{X}_4 + \overline{X}_5).$$

Минимизацию функции шести переменных рассмотрим на примере функции, отмеченной единицами в карте на рис. 25. В результате покрытия получим:

$$F = X_1X_4X_6 + X_1\overline{X}_5X_6 + \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4 = X_1X_6(X_4 + \overline{X}_5) + \overline{X}_2\overline{X}_3\overline{X}_4.$$

При выписывании импликанты, получающейся в результате покрытия единиц в карте Карно, можно для контроля пользоваться следующими зависимостями: ***l*=n-k**, **m**=$2^{\mathbf{k}}$, где ***l*** - число букв в импликанте, полученной в результате покрытия, **m** – число единиц, покрытых данным прямоугольником, **k** - число букв, поглощенных в результате склеивания, **n** - число независимых переменных в функции.

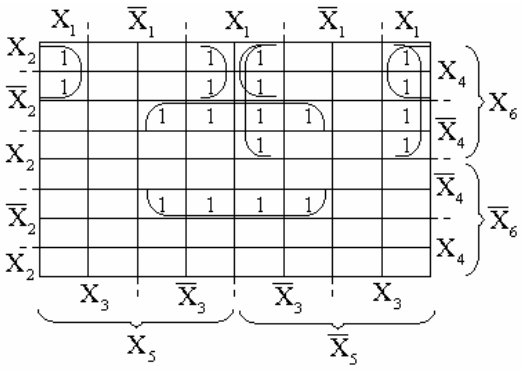


Рис. 25. Карта Карно для функции 6-ти переменных

3.10. Минимизация не полностью определенных булевых функций

В устройствах автоматики дискретного действия могут применяться такие схемы, для которых некоторые комбинации сигналов на входы никогда не подаются. Такие комбинации называются запрещенными или нейтральными. При проектировании такого устройства на запрещенных наборах можно выбирать значение функции произвольно (т.к. в реальной схеме эти наборы быть не могут). Выбрать значения функции на запрещенных наборах нужно таким образом, чтобы функция была наиболее простой.

Рассмотрим метод получения минимальной **ДНФ** не полностью определенной булевой функции. Пусть булева функция $\mathbf{F(X_1,X_2,...,A_n)}$ не определена на **P** наборах

Таблица 6

X_1	X_2	X_3	F	φ_0	φ_1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	-	0	1
1	1	0	-	0	1
1	1	1	-	0	1

Таблица 7

Импли-канты	$\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$	$\bar{X}_1X_2X_3$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3$
$\bar{X}_2\bar{X}_3$	*		*
X_2X_3		*	
X_1			*

аргументов. Будем называть полностью определенную функцию φ эквивалентной функции **F**, если ее значения совпадают со значениями функции **F** на тех наборах, в которых функция **F** определена. Введем две эквивалентные функции φ_0 и φ_1. Пусть φ_0 равна нулю на всех запрещенных наборах, φ_1 равна на этих наборах единице. Минимизация функции **F** по методу Квайна сводится к следующему. Для функции φ_1 нужно выполнить все операции склеивания и поглощения и найти все простые импликанты. Затем составить импликантную матрицу, в которой должны быть конституенты единицы, взятые из функции φ_0 (они те же, что и в исходной не полностью определенной функции **F**), и простые импликанты, полученные по функции φ_1. Из импликантной матрицы нужно выбрать минимальное число импликант, которые накрывают все конституенты единицы.

Пример. Пусть не полностью определенная функция трех аргументов задана таблицей истинности (табл.6). Эквивалентная ей функция φ_1 имеет вид:

$$\varphi_1 = x_1\overset{1}{\overline{x}}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overset{2}{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overset{3}{\overline{x}}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overset{4}{x}_2x_3 + x_1\overset{5}{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overset{6}{x}_2x_3$$

Проводим операции неполного склеивания и поглощения:

1 - 3 – $\overline{x}_2\overline{x}_3$	3 - 5 – $x_1\overline{x}_3$
2 - 6 – x_2x_3	4 - 6 – x_1x_3
3 - 4 – x_1x_2	5 - 6 – x_1x_2

В результате получим:

$$\varphi_1 = \overset{1}{\overline{x}_2\overline{x}_3} + \overset{2}{x_2x_3} + \overset{3}{x_1\overline{x}_2} + \overset{4}{x_1\overline{x}_3} + \overset{5}{x_1x_3} + \overset{6}{x_1x_2}$$

Снова проводим операции неполного склеивания и поглощения:

3 - 6 - x_1

4 - 5 - x_1

Результат этого этапа:

$$\varphi_1 = \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_2x_3 + x_1$$

Больше ничего не склеивается, значит полученное выражение представляет собой дизъюнкцию всех простых импликант заданной функции. Для выяснения, нет ли в полученном выражении "лишних" импликант, строим импликантную матрицу, в которую заносим конституенты единицы по эквивалентной функции φ_0 (см. Табл. 7). Из матрицы следует: $F = \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_2x_3.$

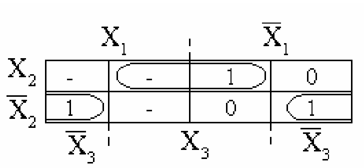


Рис. 26. Карта Карно для не полностью определенной булевой функции

Решение подобной задачи с помощью карты Карно рассмотрим на примере той же функции, заданной табл. 6. Карта Карно для этой функции показана на рис. 26. На карту нанесены единицы и нули для обязательных наборов и проставлены прочерки на нейтральных наборах. Заполняем нейтральные наборы либо единицами, либо нулями таким образом, чтобы заданные единицы совместно с добавленными накрывались наибольшим по площади правильным прямоугольником. В результате покрытия получим:

$$F = x_1 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_2x_3.$$

3.11. Синтез схем со многими выходами

Закон функционирования комбинационной схемы, имеющей **n** входов и **m** выходов, записывается системой из **m** булевых функций от **n** переменных. Такую схему можно представить в виде набора **m** не связанных между собою подсхем, каждая из которых реализует только одну функцию системы. Каждую подсхему можно реализовать по минимальной **ДНФ** соответствующей функции. Однако такой подход к построению комбинационных схем не рационален с точки зрения затрат оборудования.

Минимизация систем со многими выходами заключается в нахождении таких выражений для совокупности булевых функций, в которых наиболее полно используются члены, общие для нескольких функций.

Один из методов упрощения схем заключается в том, что одни булевы функции выражаются через другие.

Таблица 8

№	X_1	X_2	X_3	F_1	F_2
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	1

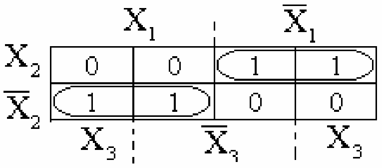


Рис.27. Карта Карно для определения F_1

Таблица 9

№	X_1	X_2	X_3	F_1	F_2
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	-
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	-
4	0	1	0	0	-
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	-
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	-
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	-
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	-
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	-

Пример. Функции $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ заданы таблицей 8. Будем считать функцию $\mathbf{F_1}$ функцией трех аргументов, а функцию $\mathbf{F_2}$ - функцией четырех аргументов: $\mathbf{X_1, X_2, X_3, F_1}$. Минимальную **ДНФ** для функции F_1 находим с помощью карты Карно (рис. 27):

$$F_1 = X_1\overline{X}_2 + \overline{X}_1X_2.$$

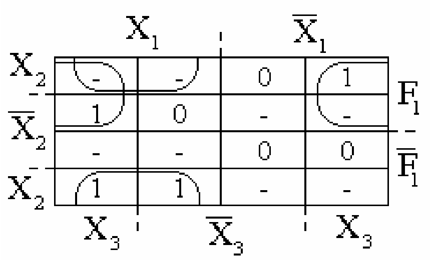


Рис. 28. Карта Карно для определения F_2

Для определения функции $\mathbf{F_2}$ строим таблицу истинности следующим образом (см. табл.9). Рассматриваем набор с номером 0. При $\mathbf{X_1=X_2=X_3}=0$ $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ равны нулю. В последней колонке таблицы ставим в строке $\mathbf{X_1=X_2= =X_3=F_1}=0$ $\mathbf{F_2}=0$. На наборе №1 (Табл.9) $\mathbf{F_1}=1$, что не соответствует заданному условию (табл.8), поэтому ставим в последней колонке прочерк (запрещенный набор). Значения функции $\mathbf{F_2}$ на остальных наборах определяются аналогично. Далее определяем минимальную **ДНФ** для функции $\mathbf{F_2}$ с помощью карты Карно (рис. 28).

$$\mathbf{F_2 = X_3F_1 + X_1X_2}.$$

Нужно проверить два варианта: $\mathbf{F_1(X_1, X_2, X_3, F_2)}$ и $\mathbf{F_2(X_1, X_2, X_3, F_1)}$ и выбрать тот из них, который лучше с точки зрения минимума сложности всего устройства. В данном примере второй вариант не дает выигрыша.

Литература

1. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. - К.: Техника, 1975.- 766 с.; ил.
2. Вавилов Е. П., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин. - М.: Советское радио, 1963.-437с. ил.
3. Вавилов Е. П., Егоров Б. М. Синтез схем на пороговых элементах. - М.: Советское радио, 1970.-367с.

4. КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

4.1. Основные понятия и определения

Различают два типа дискретных устройств автоматики. В устройствах первого типа выходные сигналы в каждый момент времени однозначно определяются входными сигналами в этот же момент времени и не зависят от того, какие значения принимали входные сигналы в предшествующие моменты времени. В устройствах этого типа отсутствуют элементы памяти. Такие устройства получили название комбинационные.

Устройства второго типа характеризуются наличием элементов памяти. В этих устройствах сигналы на выходе зависят не только от входных сигналов в данный момент времени, но и от того, какие значения входные сигналы принимали в предшествующие моменты времени. Устройства второго типа получили название автоматов. ”Память” автомата определяется различными внутренними состояниями, которые он может принимать под воздействием входных сигналов и сохранять их при изменении последних.

Автоматом называют дискретный преобразователь информации, способный принимать различные состояния, переходить под воздействием входных сигналов из одного состояния в другое и выдавать выходные сигналы.

Если множество состояний автомата, а также множества входных и выходных сигналов конечны, то автомат называют конечным автоматом. Все реальные автоматы конечны.

Информацию, поступающую на вход автомата, и преобразованную (выходную) информацию принято кодировать конечной совокупностью символов. Эту совокупность называют алфавитом, отдельные символы, образующие алфавит, - буквами, а любые конечные упорядоченные последовательности букв данного алфавита - словами в этом алфавите. Например, в алфавите $\mathbf{X=\{x_1,x_2\}}$, словами будут: $\mathbf{(x_1)}$, $\mathbf{(x_2)}$, $\mathbf{(x_1x_1)}$, $\mathbf{(x_2x_1x_2)}$ и т.д.

Процесс дискретного преобразования информации автоматом можно описать с помощью алфавитных операторов.

Алфавитным оператором **F** называют любое соответствие (функцию) между словами входного и выходного алфавитов.

Автоматы функционируют в дискретные моменты времени, которые обычно обозначают натуральными числами $\mathbf{t}=0,1,2,...,n$. В каждый момент дискретного времени на вход автомата поступает один сигнал (буква), фиксируется определенное состояние автомата и с выхода снимается один сигнал.

Реальные автоматы могут иметь несколько входов и несколько выходов. В некоторых случаях удобно заменить такие автоматы автоматами с одним входом и одним выходом. Для этого достаточно закодировать соответствующим образом входные и выходные сигналы исходного автомата. Если, например, автомат имеет два входа, на каждый из которых подаются сигналы 0 или 1, то все возможные комбинации входных сигналов можно закодировать четырьмя буквами: (0,0)=$\mathbf{X_1}$, (0,1)=$\mathbf{X_2}$, (1,0)=$\mathbf{X_3}$, (1,1)=$\mathbf{X_4}$. При этом автомат, имеющий два входа, можно рассматривать как автомат с одним входом, на который подаются сигналы в четырехбуквенном алфавите.

Для того, чтобы задать конечный автомат, нужно указать:

- множество возможных входных сигналов $\mathbf{X=\{x_1,x_2,...,x_m\}}$;
- множество возможных выходных сигналов $\mathbf{Y=\{y_1,y_2,...,y_k\}}$;
- множество возможных внутренних состояний автомата $\mathbf{A=\{\mathit{a}_1,\mathit{a}_2,...,\mathit{a}_n\}}$;
- функцию переходов, определяющую состояние автомата $\boldsymbol{a}\mathbf{(t+1)}$ в момент дискретного времени **t+1** в зависимости от состояния автомата $\boldsymbol{a}\mathbf{(t)}$ и значения входного сигнала **X(t)** в момент времени **t**;
- функцию выходов, определяющую зависимость выходного сигнала автомата **y(t)** от состояния автомата и значения входного сигнала в момент времени t. Кроме того на множестве состояний автомата фиксируют одно из внутренних состояний в качестве начального состояния.

Существует два типа конечных автоматов. Для автоматов первого типа функции переходов и выходов имеют вид:

$$\boldsymbol{a}\mathbf{(t+1)=f[\boldsymbol{a}(t),x(t)]}, \qquad \mathbf{y(t)=\varphi[\boldsymbol{a}(t),x(t)]}.$$

У автоматов этого типа выходной сигнал в данном такте определяется внутренним состоянием и входным сигналом в данном такте. Такие автоматы получили название ***автоматы Мили.***

Автоматы второго типа отличаются тем, что выходной сигнал такого автомата в данном такте определяется только внутренним состоянием автомата в этом же такте. Функции переходов и выходов для автомата второго типа, заданные на множестве входных сигналов $\mathbf{X=\{x_1,x_2,...,x_m\}}$, множестве внутренних состояний $\mathbf{B=\{b_1,...,b_n\}}$ и множестве выходных сигналов $\mathbf{Y=\{y_1,...,y_k\}}$ имеют вид:

$$\mathbf{b(t+1)=f[b(t),x(t)]}, \qquad \mathbf{y(t)=\varphi[b(t)]}.$$

Такие автоматы называются ***автоматами Мура.***

Функции переходов и выходов можно задать таблицами переходов и выходов, либо графом автомата. На рис.29 приведены таблицы переходов и выходов автомата Мили.

Таблица переходов

Состояние / Вход. сигнал	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_2	a_3	a_3
x_2	a_0	a_0	a_0	a_0

Таблица выходов

Состояние / Вход. сигнал	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	y_2	y_2	y_1	y_2
x_2	y_2	y_2	y_2	y_3

Рис.29. Таблица переходов и выходов автомата Мили

В клетку таблицы переходов, находящуюся на пересечении столбца с буквой $\boldsymbol{a_i}$ и строки с буквой $\mathbf{x_j}$, записывается состояние автомата $\mathbf{f(\boldsymbol{a_i},x_j)}$, в которое он переходит из состояния $\boldsymbol{a_i}$ при подаче на вход сигнала $\mathbf{x_j}$. Аналогично записывается в таблице выходов сигнал y, который формируется автоматом при таком переходе.

При построении графа автомата вершины графа отождествляются с внутренними состояниями автомата. Каждая ветвь отмечается входным сигналом, вызывающим в автомате соответствующий данной ветви переход, и выходным сигналом, который возникает при этом переходе. На рис.30 приведен граф автомата, соответствующий автомату Мили, заданному таблицами на рис.29.

Для автомата Мура функции переходов и выходов можно задать одной таблицей, которая называется отмеченной таблицей переходов. Отмеченная таблица переходов автомата Мура строится также, как и таблица переходов автомата Мили, но над символами каждого внутреннего состояния записываются выходные сигналы, которые автомат выдает в данном состоянии. На графе автомата Мура значения выходных сигналов записываются около узлов. На рис.31 и32 приведены в качестве примера отмеченная таблица переходов и граф автомата Мура.

Работу автомата при произвольной последовательности входных сигналов можно проследить с помощью ленты автомата. Лента автомата представляет собой таблицу, в которой указываются такты работы автомата, значения входного сигнала в каждом такте и значения внутреннего состояния и выходного сигнала в каждом такте.

Пример ленты автомата, заданного таблицами переходов и выходов, приведенными на рис. 29, показан на рис. 33.

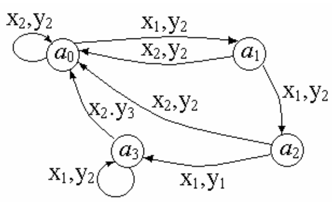


Рис.30. Граф автомата Мили

Вых.сигнал		Y_2	Y_2	Y_2	Y_1	Y_2	Y_3
Состояние		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
Входной сигнал	X_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_4	b_1
	X_2	b_0	b_0	b_0	b_5	b_5	b_0

Рис.31. Отмеченная таблица переходов автомата Мура

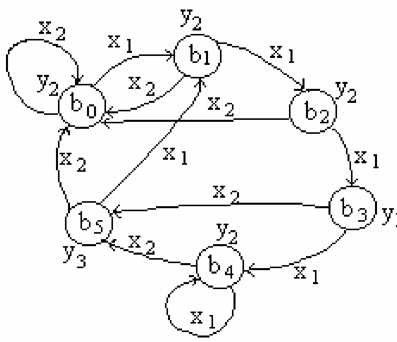


Рис.32. Граф автомата Мура

Такт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вход. сигнал	x_1	x_2	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_1	x_2	x_2	x_2
Состояние	a_0	a_1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
Выход. сигн.	y_2	y_2	y_2	y_2	y_1	y_3	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2

Рис. 33. Лента автомата

Два автомата, у которых совпадают как входные, так и выходные алфавиты, называются эквивалентными, если для любого входного слова выходное слово одного автомата совпадает с выходным словом другого автомата. При этом перед подачей входного слова оба автомата должны находиться в начальных состояниях.

Для любого автомата Мили существует эквивалентный ему автомат Мура и наоборот.

4.2. Переход от автомата Мили к эквивалентному автомату Мура и наоборот

Пусть конечный автомат Мили имеет функцию переходов $\boldsymbol{f_a(a, x)}$ и функцию выходов $\boldsymbol{f_b(a, x)}$. Найдем функцию переходов $\boldsymbol{f_b(b, x)}$ и выходов $\boldsymbol{\varphi_b(b)}$ автомата Мура, эквивалентного заданному автомату Мили. Поставим в соответствие каждой паре, включающей состояние $\boldsymbol{a_i}$ и входной сигнал $\mathbf{x}_j$ автомата Мили, состояние $\mathbf{b}_{ij}$ автомата Мура. Кроме того, в множестве состояний автомата Мура включим начальное состояние $\boldsymbol{a_0}$ автомата Мили, обозначив его через $\mathbf{b_0}$. Для автомата Мили, заданного таблицами переходов и выходов на рис. 29, такое соответствие можно представить в виде таблицы кодирования (см. рис. 34). Таблицу переходов эквивалентного автомата Мура строим в такой последовательности.

1. Выписать из таблицы кодирования состояния автомата Мили и соответствующие каждому состоянию множества состояний автомата Мура:

Входн. сигнал	Состояние			
	a_0 b_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1 b_{01}	a_2 b_{11}	a_3 b_{21}	a_3 b_{31}
x_2	a_0 b_{02}	a_0 b_{12}	a_0 b_{22}	a_0 b_{32}

Рис. 34. Таблица кодирования

$\boldsymbol{a_0}=\{\mathbf{b_0, b_{02}, b_{12}, b_{22}, b_{32}}\}$,

$\boldsymbol{a_1}=\mathbf{b_{01}}$,

$\boldsymbol{a_2}=\mathbf{b_{11}}$,

$\boldsymbol{a_3}=\{\mathbf{b_{21}, b_{31}}\}$.

2. Если состояние $\mathbf{b}_{ij}$ входит в множество, соответствующее состоянию $\boldsymbol{a_p}$, то в колонку таблицы переходов автомата Мура для состояния $\mathbf{b}_{ij}$ следует записать состояния, находящиеся в колонке для $\boldsymbol{a_p}$ (таблицы кодирования). Например, колонки таблицы переходов автомата Мура с состояниями $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_{02}}$, $\mathbf{b_{12}}$, $\mathbf{b_{22}}$, $\mathbf{b_{32}}$ совпадают с колонкой для $\boldsymbol{a_0}$ таблицы кодирования, колонка $\mathbf{b_{01}}$ – с колонкой для $\boldsymbol{a_1}$ и т.д.

Чтобы отметить выходными сигналами состояния достаточно наложить таблицу выходов автомата Мили на таблицу кодирования состояний автомата Мура и каждое состояние отметить тем выходным сигналом, с которым оно совпадает. Таблица переходов автомата Мура приведена на рис. 35.

Входн.	y_2	y_2	y_2	y_2	y_2	y_1	y_2	y_2	y_3
сигнал	b_0	b_{01}	b_{02}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}
x_1	b_{01}	b_{11}	b_{01}	b_{21}	b_{01}	b_{31}	b_{01}	b_{31}	b_{01}
x_2	b_{02}	b_{12}	b_{02}	b_{22}	b_{02}	b_{32}	b_{02}	b_{32}	b_{02}

Рис. 35. Таблица переходов автомата Мура

Обратная задача перехода от автомата Мура к эквивалентному автомату Мили решается следующим образом. Таблицы переходов автомата Мили и эквивалентного ему автомата Мура совпадают. Таблица выходов автомата Мили составляется так, что в каждую клетку таблицы записывается выходной сигнал, которым отмечено состояние, расположенное в данной клетке. При этом граф автомата Мили отличается от графа автомата Мура только тем, что выходные сигналы из каждого узла переносятся на все ветви, которые входят в данный узел.

Эквивалентные автоматы, полученные по рассмотренным алгоритмам, могут иметь "лишние" внутренние состояния. Число состояний автомата может быть минимизировано.

Могут быть автоматы, на входы которых некоторые последовательности сигналов никогда не подаются. Такие последовательности называют запрещенными входными словами, а автоматы с запрещенными входными словами называют частичными автоматами. Граф частичного автомата имеет вершины, у которых количество выходящих ветвей меньше количества букв входного алфавита. При синтезе производят доопределение частичного автомата так, чтобы соответствующая ему схема содержала минимальное число элементов.

4.3. Минимизация числа состояний конечного автомата

Пусть некоторый конечный автомат имеет “лишние” внутренние состояния. Минимизация количества его состояний означает определение эквивалентного ему конечного автомата с минимальным количеством состояний.

Пусть в числе возможных состояний конечного автомата есть несколько состояний, обладающих таким свойством: произвольному входному слову соответствует некоторое выходное слово, не зависящее от того, в каком из указанных состояний находился конечный автомат в исходный момент. В этом случае можно считать, что все указанные состояния по существу одинаковы и лишь в разных случаях обозначены по-разному. Такие состояния можно объединить, обозначив одним символом.

Минимизация производится в несколько этапов. Первый этап минимизации количества состояний заключается в том, что просматриваются таблицы выходов и переходов и в верхней строке обеих таблиц (строка исходных состояний) выявляются такие состояния, которым соответствуют одинаковые столбцы как в таблице выходов, так и в таблице переходов. Эти состояния объединяются, т.е. в обеих таблицах вычеркиваются все одинаковые столбцы как в таблице выходов, так и в таблице переходов, кроме одного, соответствующего какому-либо из выявленных состояний, а в оставшейся части таблицы состояний всем объединяемым состояниям присваивается один и тот же символ. В результате такого преобразования могут снова появиться состояния, которым в обеих таблицах соответствуют одинаковые столбцы.

Если столбцы в таблицах переходов и выходов, соответствующие различным исходным состояниям, содержат прочерки и только поэтому не совпадают, то соответствующие таким столбцам исходные состояния тоже можно объединить.

На втором этапе объединения все состояния объединяются в группы таким образом, чтобы состояниям, входящим в каждую группу, соответствовали одинаковые столбцы в таблице выходов. Каждой такой группе присваивается некоторое обозначение. Запись производится следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \text{символ группы} & \overbrace{}^{z_1} & \overbrace{}^{z_2} & \overbrace{}^{z_3} \\ \text{символ состояния} & a_i, a_j, \dots & a_k, a_l, \dots & a_m, a_n, \dots \end{array}$$

Состояния, входящие в разные группы, наверняка нельзя объединить. Возможность объединения состояний, входящих в одну и ту же группу, нужно исследовать дополнительно. Для этого под каждым состоянием выписывается соответствующий ему столбец из таблицы состояний, однако каждое состояние в этом столбце обозначается не собственным символом, а символом группы, в которую оно входит.

В результате такого переобозначения некоторые не совпадающие друг с другом столбцы таблицы состояний могут преобразоваться в совпадающие друг с другом столбцы групповых символов. Состояния, которым соответствуют такие совпадающие друг с другом столбцы, можно объединить. Далее проводим новую разбивку всех состояний на группы. Каждую старую группу нужно попытаться разбить на новые более мелкие группы. Все новые группы заново обозначаются какими-либо символами. С каждым состоянием, входящим в новые группы, выполняются такие же операции, какие выполнялись ранее с состояниями, входившими в старые группы: выписываются из таблицы переходов столбцы, соответствующие этим состояниям, и каждое состояние в этих столбцах обозначается новым групповым символом.

Пример. Пусть автомат Мили задан таблицами переходов и выходов, приведенными на рис. 36. Проведем минимизацию числа состояний этого автомата.

1 этап. Находим состояния, для которых совпадают столбцы в таблице выходов и в таблице переходов. Такими являются состояния a_3 и a_6. Заменяем a_3=a_6 (состояние a_6 исключаем), рис. 37.

Таблица переходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	a_0	a_1	a_1	a_2	a_3	a_0	a_2
x_2	a_1	a_2	a_6	a_3	a_5	a_1	a_3

Таблица выходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	y_0	y_1	y_1	y_0	y_1	y_1	y_0
x_2	y_0	y_0	y_1	y_0	y_0	y_0	y_0

Рис. 36. Таблицы переходов и выходов автомата Мили до минимизации

2 этап. Группируем состояния в группы таким образом, чтобы в каждой группе были состояния, у которых совпадают столбцы в таблице выходов.

a_1, a_4, a_5 - гр.1 (z_1);

a_0, a_3 - гр. 2 (z_2).

Могут объединятся лишь такие состояния, которые принадлежат одной и той же группе. Для выяснения возможности объединения таких состояний выписываем состояния одной группы, а под ним в столбик состояния из таблицы переходов, заменив обозначение состояния обозначением группы, в которую оно входит. Состояния с одинаковыми столбцами можно объединять.

Таблица переходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	a_0	a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
x_2	a_1	a_2	a_6	a_3	a_5	a_1

Таблица выходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	y_0	y_1	y_1	y_0	y_1	y_1
x_2	y_0	y_0	y_1	y_0	y_0	y_0

Рис. 37. Таблицы переходов и выходов после первого этапа минимизации

$$\begin{array}{ccc} \underline{a_1} & \underline{a_4} & \underline{a_1} \\ z_1 & z_2 & z_2 \\ a_2 & z_1 & z_1 \end{array}, \quad a_4 = a_5.$$

$$\begin{array}{cc} \underline{a_0} & \underline{a_3} \\ z_2 & a_2 \\ z_1 & z_2 \end{array}, \qquad a_0 \neq a_3.$$

Таблицы переходов и выходов автомата после второго этапа минимизации приведены на рис. 38.

Таблица переходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_0	a_1	a_1	a_2	a_3
x_2	a_1	a_2	a_6	a_3	a_4

Таблица выходов

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	y_0	y_1	y_1	y_0	y_1
x_2	y_0	y_0	y_1	y_0	y_0

Рис. 38. Таблицы переходов и выходов после второго этапа минимизации

3 этап. Группируем состояния, у которых одинаковые столбцы в таблице выходов.

(a_0, a_3)=z_1; (a_1, a_4)=z_2.

$$\begin{array}{cc} \underline{a_0} & \underline{a_3} \\ z_1 & a_2 \\ z_2 & z_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} \underline{a_1} & \underline{a_4} \\ z_2 & z_1 \\ a_2 & z_2 \end{array}.$$

Больше ничего не объединяется, полученные таблицы соответствуют автомату с минимальным числом состояний.

4.4. Постановка задачи синтеза автоматов

Задача синтеза конечных автоматов заключается в построении сложного автомата из более простых автоматов, называемых элементарными. Чаще всего применяют элементарные автоматы с двумя внутренними состояниями, которые соединяются между собой с помощью логических элементов.

Различают задачи абстрактного и структурного синтеза дискретных автоматов. Задача абстрактного синтеза заключается в получении таблиц переходов и выходов автомата (либо графа автомата).

При решении задачи структурного синтеза таблицы переходов и выходов автомата считаются заданными. Кроме того, задается или выбирается набор элементарных автоматов и логических схем. В результате синтеза следует получить структурную схему автомата.

4.4.1. Структурно полные системы автоматов. Теорема о структурной полноте

Для синтеза конечных автоматов необходимо выбрать систему элементов, из которых должны строиться заданные автоматы. В большинстве схем дискретного действия в качестве элементов памяти применяются элементарные автоматы Мура с двумя внутренними состояниями (0 и 1).

Набор элементарных автоматов и логических элементов называют структурно полным, если из элементов этого набора можно построить любой дискретный автомат.

Введем понятие полноты системы переходов и выходов. Говорят, что автомат обладает полной системой переходов, если для каждой пары его внутренних состояний a_i и a_j найдется хотя бы один входной сигнал, или комбинация входных сигналов для автоматов, имеющих несколько входов, который переводит автомат из состояния a_i в состояние a_j. Это условие должно соблюдаться как при $i \neq j$, так и при $i = j$.

Говорят, что автомат Мура обладает полной системой выходов, если в каждом состоянии автомат выдает выходной сигнал, отличный от сигналов, выдаваемых в других состояниях.

Все реальные автоматы Мура имеют полную систему выходов. Если бы выходные сигналы автомата, соответствующие различным состояниям, совпадали, то состояния автомата были бы физически неразличимы.

Теорема. Для того, чтобы набор элементов был функционально полным для синтеза конечных автоматов, необходимо и достаточно, чтобы он содержал:

- хотя бы один элементарный автомат с двумя различными состояниями, для которых соблюдаются условия полноты переходов и выходов;
- логические элементы, образующие функционально полную систему для синтеза логических схем.

4.4.2. Элементарные автоматы

В большинстве схем современных электронных цифровых машин и других дискретных устройств автоматики в качестве элементов памяти применяются элементарные автоматы, имеющие следующие особенности.

1. Элементарные автоматы являются автоматами Мура и имеют два внутренних состояния.

2. Двум внутренним состояниям элементарного автомата соответствуют два различных выходных сигнала. Обычно обозначают в таких автоматах внутренние состояния и выходные сигналы одинаковыми буквами **Q** и кодируют цифрами 0 и 1.

3. Элементарные автоматы имеют в общем случае несколько физических входов, на каждый из которых могут подаваться сигналы 0 и 1.

<u>Элементарные автоматы с одним входом.</u> Существуют только четыре типа элементарных автоматов с одним входом, которые имеют детерминированную и полную систему переходов.

q(t)	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

а

q(t)	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б

q(t)	Q(t)	Q(t+1)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

в

q(t)	Q(t)	Q(t+1)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г

Рис. 39. Элементарные автоматы с одним входом

На рис. 39 представлены все возможные элементарные автоматы с одним входом, удовлетворяющие условиям детерминированности и полноты системы переходов. В этих таблицах приняты следующие обозначения: **q(t)**- входной сигнал в моменты времени **t, Q(t)** – состояние и выходной сигнал, **Q(t+1)** - состояние и выходной сигнал в момент времени **t**+1. Таблицы **а-в** и **б-г** отличаются друг от друга только способом кодирования входных сигналов **q(t)** и, следовательно, после перекодирования последних полностью совпадают. Таким образом, имеется лишь два принципиально различных элементарных автомата с одним входом.

Элементарный автомат, заданный таблицей **а (в),** представляет собой элемент задержки входных сигналов на один такт. Такой элемент получил название **D**-триггер.

Элементарный автомат, заданный таблицей **б (г),** изменяет свое состояние только при подаче на вход сигнала, равного единице. Такой автомат называется триггером со счетным входом, или **Т**-триггером.

Запишем функции переходов автоматов в аналитической форме. Для автомата, представленного таблицей **а**):

$$\mathbf{Q(t+1)=(q\overline{Q}+qQ)^{t}=q(t)}.$$

Для **Т**-триггера (таблица **б**):

$$\mathbf{Q(t+1)=(\overline{q}Q+q\overline{Q})^{t}}.$$

<u>Элементарные автоматы с двумя входами.</u> Обозначим входы автомата через $\mathbf{q_0}$ и $\mathbf{q_1}$. Автомат функционирует следующим образом: если на входе $\mathbf{q_0}$ действует сигнал, равный единице (нулю), а на входе $\mathbf{q_1}$ - равный нулю (единице), то автомат переходит в состояние нуль (единица) независимо от его состояния в предыдущий момент времени. Если на вход автомата подаются импульсные сигналы, закодированные так, что код 0 означает отсутствие импульса, то комбинация входных сигналов $\mathbf{q_0=0,\ q_1=0}$ не может изменить состояние автомата. В этом случае в первой и второй строках таблицы переходов (рис. 40) код состояния **Q(t+1)** должен совпадать с кодом состояния **Q(t).** Следует также учитывать, что на практике встречаются схемы автоматов, которые под воздействием некоторых комбинаций входных сигналов работают неустойчиво (чаще всего $\mathbf{q_0=1}$, $\mathbf{q_1=1}$). Такие комбинации считают запрещенными и специальными схемами на входе такого автомата их появление исключают. Автомат подобного типа.

q_0	q_1	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	-
1	1	1	-

Рис.40. Таблица переходов **R-S**-триггера

получил название **R-S**-триггер. Вход $\mathbf{q_0}$ обычно обозначают буквой **R**, а вход $\mathbf{q_1}$ - буквой **S**. Для представления функции переходов автомата в аналитической форме в виде функции алгебры логики воспользуемся картой Карно (рис. 41). Проставив в пустых клетках карты единицы, получим:

$$\mathbf{Q_t(t+1) = (q_1 + \bar{q}_0 Q)^t}$$

Запрещение подачи на вход одновременно сигналов $\mathbf{q_0}$=1 и $\mathbf{q_1}$=1 можно записать в виде равенства $\mathbf{q_0 q_1 = 0}$.

Отметим, что подобный триггер может быть переведен из состояния **Q(t) =** 0 в состояние **Q(t+1)** = 0 двумя различными комбинациями входных сигналов: $\mathbf{q_0}$=0, $\mathbf{q_1}$=0 и $\mathbf{q_0}$=1, $\mathbf{q_1}$=0. Переход из состояния **Q(t)=**1 в состояние **Q(t+1)=**1 также может быть вызван двумя комбинациями входных сигналов: $\mathbf{q_0}$=0, $\mathbf{q_1}$=0 и $\mathbf{q_0}$=0, $\mathbf{q_1}$=1.

	q_1	q_1	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_1$
q_0	-	-	0	0
$\bar{q}_0$	1	1	1	0
	$\bar{Q}$	Q	Q	$\bar{Q}$

Рис. 41. Карта Карно **R-S** - триггера

Автоматы, которые могут переходить из одного состояния в другое или в то же самое состояние под влиянием нескольких комбинаций входных сигналов, называют автоматами с избыточной системой переходов.

На рис.42 приведена таблица переходов триггера с двумя входами, у которого отсутствуют запрещенные комбинации входных сигналов. Если на вход этого триггера подать комбинацию сигналов $\mathbf{q_0}$=1, $\mathbf{q_1}$=1,

q_0	q_1	Q(t)	Q(t+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Рис.42. Таблица переходов **J-K**-триггера

	q_1	q_1	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_1$
q_0	1	0	0	0
$\bar{q}_0$	1	1	1	0
	$\bar{Q}$	Q	Q	$\bar{Q}$

Рис.43. Карта Карно **J-K**-триггера

то он изменит свое состояние. Такой триггер получил название **J-K**-триггер. Для **J-K**-триггера вход q_0 обозначается буквой **K,** а вход $\mathbf{q_1}$ - буквой **J**.

По логической функции переходов элементарного автомата может быть построена его логическая схема.

. Так, для **R-S**-триггера логическая функция переходов имеет вид:

$$\mathbf{Q(t+1) = (S + \bar{R}Q),} \qquad \mathbf{RS = 0}.$$

Построим схему триггера на элементах **И-НЕ**. Для перевода заданной функции в базис **И-НЕ** сделаем двойное отрицание правой части и преобразуем по правилу де Моргана:

$$\mathbf{Q(t+1)} = \overline{\overline{\mathbf{S} + \overline{\mathbf{R}}\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{S}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{R}}\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{S}}\mathbf{P}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{P} = \overline{\overline{\mathbf{R}}\mathbf{Q}}$$

Логическая схема **R-S**-триггера, построенная по последнему выражению, показана на рис. 44. Элемент 1 в схеме обеспечивает условие **RS=0**.

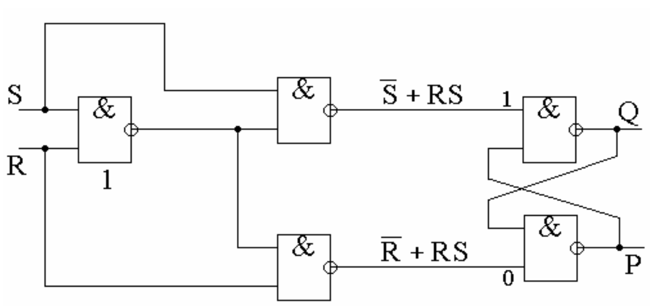


Рис. 44. Логическая схема **R-S**-триггера на элементах **И-НЕ**

По способу записи информации триггерные устройства делятся на асинхронные и тактируемые. В асинхронных триггерах запись информации осуществляется непосредственно с поступлением информационных сигналов на его входы. Запись информации в тактируемых триггерах, имеющих информационные и тактовые входы, осуществляется только при подаче разрешающего, тактового импульса. На рис. 45 показана схема тактируемого **R-S-**триггера на элементах **И-НЕ**. На схеме **R, S -** информационные входы, **C -** тактовый вход.

Условные изображения некоторых триггеров показаны на рис. 46.

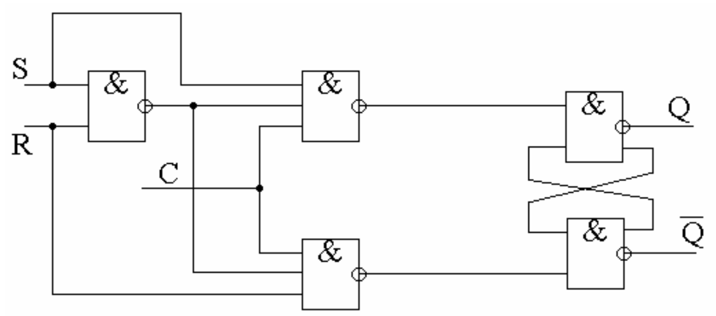


Рис. 45. Тактируемый R-S-триггер

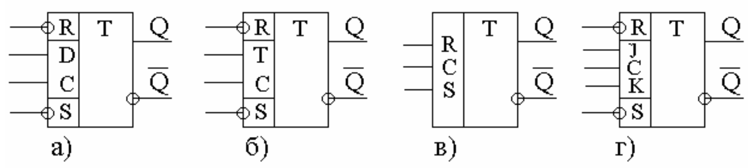


Рис. 46. Условные обозначения триггеров: а **- D**, б **- T**, в **- R-S**, г **- J-K**

4. 4. 3. Структурный синтез конечных автоматов

В инженерной практике используются различные методы структурного синтеза конечных автоматов, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Ниже рассмотрен наиболее простой метод, получивший название канонического. Согласно этому методу структурный синтез автомата проводится в такой последовательности.

1. Кодирование входных, выходных сигналов и состояний автомата.
2. Выбор элементов памяти.
3. Запись уравнений функций выходов и возбуждения автомата.
4. Построение структурной схемы автомата.

Рассмотрим последовательно этапы структурного синтеза автомата на примере конечного автомата Мили, заданного таблицами переходов и выходов на рис. 29.

Кодирование. Входной, выходной сигналы и состояния автомата кодируются двоичными векторами. Пусть **n** - число входных сигналов. Тогда число двоичных векторов $\mathbf{k_{вх}}$, необходимых для кодирования входных сигналов, определяется как ближайшее большее целое число от $\mathbf{log_2 n}$. Так, при **n**=3, $\mathbf{log_2 3}$=1,58, следовательно $\mathbf{k_{вх}}$=2. Аналогично определяется число $\mathbf{k_{вых}}$ двоичных векторов для кодирования выходных сигналов и число $\mathbf{k_{сост.}}$ - для кодирования состояний.

Далее составляют таблицы кодирования. В таблицах указываются все сигналы и соответствующие им двоичные векторы.

В качестве примера составим таблицы кодирования для автомата, заданного таблицами на рис. 29. Определим количество двоичных векторов для кодирования.

Входные сигналы: $\mathbf{n_{вх}}$=2, $\mathbf{log_2 2}$=1, $\mathbf{k_{вх}}$=1.

Выходные сигналы**:** $\mathbf{n_{вых}}$=3, $\mathbf{log_2 3}$=1,58, $\mathbf{k_{вых}}$=2.

Число состояний: $\mathbf{n_{сост.}}$=4, $\mathbf{log_2 4}$=2, $\mathbf{k_{сост.}}$ =2.

Таблицы кодирования показаны на рис. 47.

Входн. сигн.	Код β
x_1	0
x_2	1

Вых. сигн.	Код ω_1	ω_2
y_1	0	0
y_2	0	1
y_3	1	0

Сост.	Код Q_1	Q_2
a_0	0	0
a_1	0	1
a_2	1	0
a_3	1	1

Рис. 47. Таблицы кодирования

После того, как составлены таблицы кодирования, составляют структурные таблицы переходов и выходов (рис. 48). Эти таблицы строятся на основании исходных таблиц переходов и выходов (рис. 29). В каждой клетке таблицы переходов, расположенной на пересечении строки входного сигнала $\mathbf{x}_i$ и столбца состояния $\mathbf{a}_j$ вписывают код состояния, в которое автомат переходит из состояния $\mathbf{a}_j$ под воздействием входного сигнала $\mathbf{x}_i$, а в таблице выходов **-** код выходного сигнала, который при этом переходе появляется на выходе автомата.

Выбор элементов памяти. При каноническом методе структурного синтеза в качестве элементов памяти используют элементарные автоматы Мура, обладающие полной системой переходов и выходов. Такими автоматами являются триггеры **D, T, R-S, J-K**.

Обобщенная структурная схема автомата. Обобщенные структурные схемы автомата Мура и автомата Мили показаны на рис. 49. Количество элементов памяти автомата должно быть равно числу компонент вектора его состояний. Каждому переходу

Входн. сигн. x	Код входн. сигн. β	Сост. автом. и коды сост. (Q_1, Q_2)							
		a_0		a_1		a_2		a_3	
		0	0	0	1	1	0	1	1
x_1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0

а)

Входн. сигн. x	Код входн. сигн. β	Сост. автом. и коды сост. (Q_1, Q_2)							
		a_0		a_1		a_2		a_3	
		0	0	0	1	1	0	1	1
x_1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
x_2	1	0	1	0	1	0	1	1	0
		ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2	ω_1	ω_2

б)

Рис. 48. Структурные таблицы: а) переходов; б) выходов

автомата из одного состояния в другое должно соответствовать переключение одного из элементов памяти. Переключения осуществляются комбинационной схемой функции возбуждения, подключаемой к информационным входам элементарных автоматов. Для выработки выходных сигналов автомата служит своя комбинационная схема.

<u>Составление уравнений функций возбуждения и выходов автомата.</u> Для составления уравнений функций возбуждения строят структурную таблицу функций возбуждения автомата.

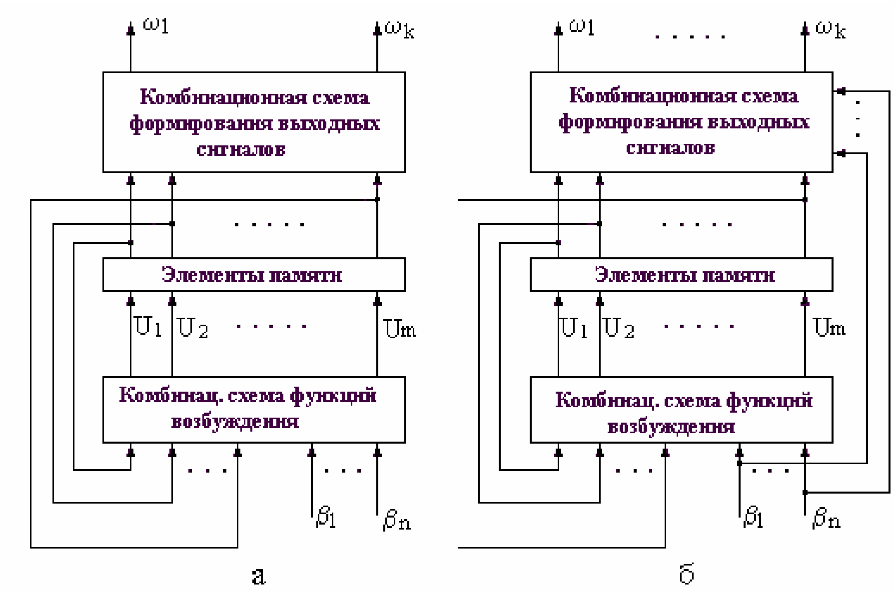


Рис. 49. Обобщенная структурная схема:
а) автомата Мура; б) автомата Мили

Эта таблица строится на основании структурной таблицы переходов и выходов и выбранных элементов памяти.

Предположим, что для рассматриваемого примера в качестве элементов памяти выбраны **Т**-триггеры. Таблица функций возбуждения показана на рис. 50. Таблица строится следующим образом. В верхней строке таблицы указаны коды состояний автомата, как и в таблицах на рис. 48.

Код входн.	Коды состояний (Q_1, Q_2)							
сигн. β	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2	u_1	u_2

Рис. 50. Таблица функций возбуждения для **Т**-триггеров

В крайней левой колонке указаны коды входных сигналов. Рассмотрим клетку таблицы, стоящей на пересечении строки β=0 и столбца (**Q_1, Q_2**)=(0, 0). Из таблицы переходов следует, что под воздействием входного сигнала β=0 автомат из состояния (0, 0) переходит в состояние (0, 1). Для выбранных элементов памяти (Т-триггер) это означает, что первый триггер не изменил своего состояния, а второй триггер изменил свое состояние. Чтобы переключение триггеров соответствовало этому условию, сигнал на входе первого триггера должен быть равен нулю (**U_1**=0), а сигнал на входе второго триггера должен быть равен единице (**U_2**=1). Подобным же образом заполняются остальные клетки таблицы.

На основании таблицы функций возбуждения составляют таблицы истинности функций возбуждения, а затем определяют минимальные формы этих функций (рис. 51).

β	Q_1	Q_2	u_1	u_2	ω_1	ω_2
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

а)

	β		$\overline{\beta}$	
Q_1	1	1	0	0
$\overline{Q}_1$	0	0	1	0
	$\overline{Q}_2$	Q_2		$\overline{Q}_2$

б)

	β		$\overline{\beta}$	
Q_1	0	1	0	1
$\overline{Q}_1$	0	1	1	1
	$\overline{Q}_2$	Q_2		$\overline{Q}_2$

в)

Рис. 51. а) Таблица истинности функций возбуждения и функций выхода:
б) карта Карно для функции u_1; в) карта Карно для функции u_2

Для получения таблицы истинности функций выхода воспользуемся структурной таблицей выходов. Таблица истинности составляется следующим образом. В таблице рис. 48 для комбинации β=0**,** **Q_1**=0, **Q_2**=0 значения векторов выходного сигнала следующие: **ω_1**=0, **ω_2**=1. В таблице истинности (рис. 51, а) в строке β=0, **Q_1**=0, **Q_2**=0 вносим значения **ω_1**=0, **ω_2**=1 и т.д.

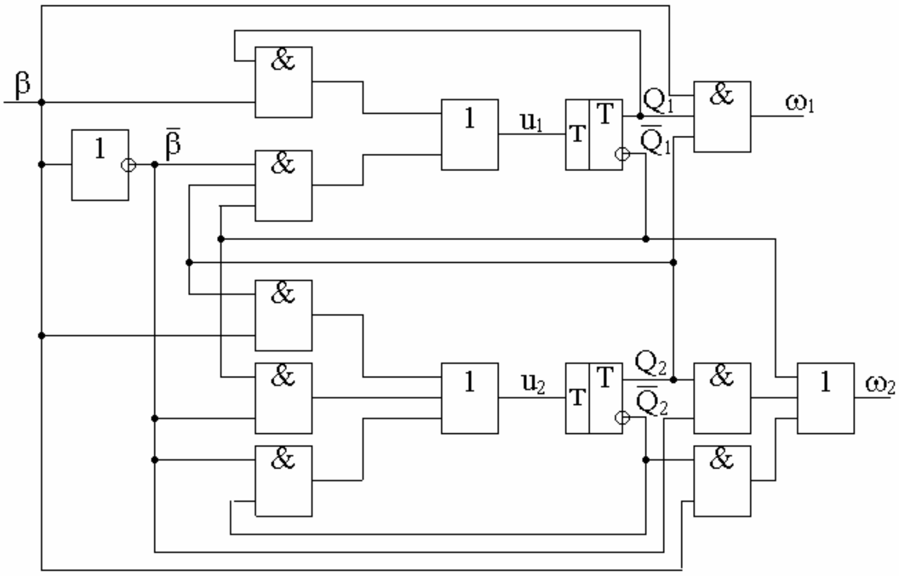


Рис. 52. Функциональная схема автомата, выполненного на **Т**-триггерах

Функции возбуждения и функции выходов для рассматриваемого примера равны:

$$\mathbf{U_1 = \beta Q_1 + \bar{\beta}\bar{Q}_1 Q_2;} \quad \mathbf{U_2 = \beta Q_2 + \bar{\beta}(\overline{Q_1} + \overline{Q_2});} \quad \mathbf{\omega_1 = \beta Q_1 Q_2;}$$

$$\mathbf{\omega_2 = \overline{Q_1} + \beta\overline{Q_2} + \bar{\beta} Q_2.}$$

Функциональная схема автомата на **Т**-триггерах показана на рис. 52.

Рассмотрим еще один пример структурного синтеза того же автомата, но с использованием в качестве элементов памяти **R-S**-триггеров. Исходные таблицы переходов и выходов те же, что и в первом примере.

Код входн. сигн. β	Коды состояний (Q_1, Q_2)							
	a_0 - (0 0)		a_1 - (0 1)		a_2 - (1 0)		a_3 - (1 1)	
0	-0	01	01	10	0-	01	0-	0-
1	-0	-0	-0	10	10	-0	10	10
	R_1S_1	R_2S_2	R_1S_1	R_2S_2	R_1S_1	R_2S_2	R_1S_1	R_2S_2

Рис. 53. Таблица функций возбуждения для R-S-триггеров

Таблица функций возбуждения приведена на рис. 53. Таблица составляется следующим образом. Рассмотрим клетку таблицы, стоящей на пересечении строки β=0 и столбца (**Q₁, Q₂**)=(0, 0). Из таблицы переходов (рис. 29) следует, что под воздействием входного сигнала $\mathbf{x_1}$ (β=0) автомат из состояния $\boldsymbol{a_0}$-(0,0) переходит в состояние $\boldsymbol{a_1}$-(0,1). Элемент памяти $\mathbf{T_1}$ из состояния 0 переходит в состояние 0. Для **R-S**-триггера переход 0-0 возможен при условии **R**=0, **S**=0 или при условии **R**=1 и **S**=0 (см. рис. 40). Из этого следует, что на входе **R** сигнал может быть любой (0 или 1), а на входе **S** сигнал должен быть равен нулю. Поэтому в клетке (β=0, $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{a_0}$) для $\mathbf{R_1S_1}$ проставляем на первом месте прочерк, что означает неопределенность, а на втором месте 0. Элемент памяти $\mathbf{T_2}$ из состояния 0 переходит в состояние 1. Из табл. На рис. 40 видим, что переход 0-1 для **R-S**-триггера происходит при подаче на его входы сигналов **R**=0 и **S**=1, поэтому в клетке (β=0, $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{a_0}$) на втором месте проставляем 01 и т.д.

β	Q_1	Q_2	R_1	S_1	R_2	S_2	ω_1	ω_2
0	0	0	-	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	-	0	1	0	0
0	1	1	0	-	0	-	0	1
1	0	0	-	0	-	0	0	1
1	0	1	-	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	-	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1	0

а)

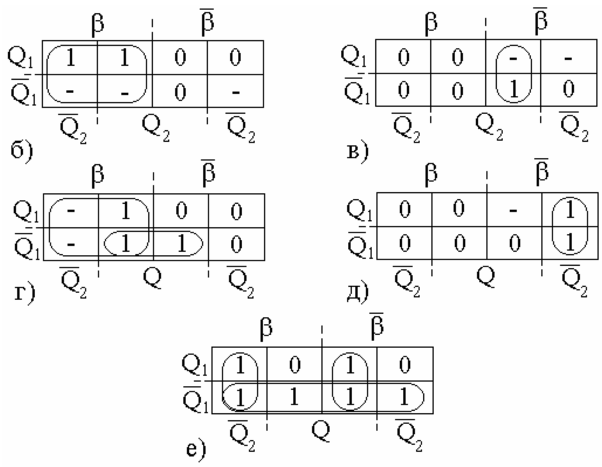


Рис. 54. а) Таблицы истинности для R_1, S_1, R_2, S_2, ω_1, ω_2;
Карты Карно для функции: б) R_1; в) S_1; г) R_2; д) S_2; е) ω_2.

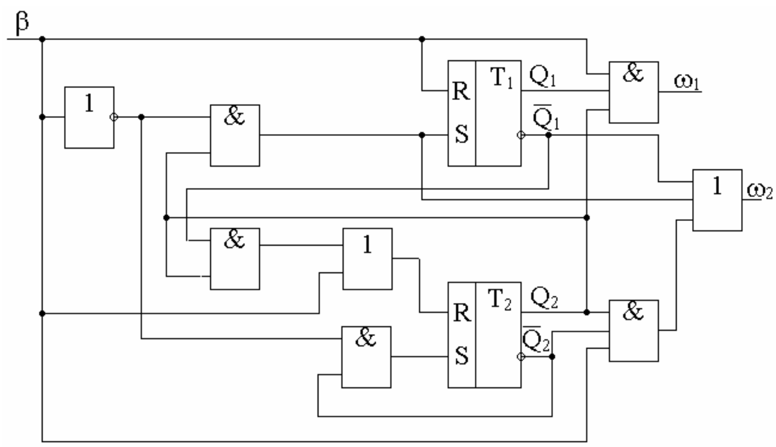


Рис. 55. Структурная схема автомата на **R-S**-триггерах

По таблице функций возбуждения и по структурной таблице выходов (рис. 48 б) строим таблицу истинности для функции $\mathbf{R_1, S_1, R_2, S_2, \omega_1, \omega_2}$ (рис. 54).

Минимальные формы функций возбуждения и функций выходов:

$$R_1 = \beta; \quad S_1 = \bar{\beta} Q_2; \quad R_2 = \beta + \overline{Q_1} Q_2; \quad S_2 = \bar{\beta}\overline{Q_2}; \quad \omega_1 = \beta Q_1 Q_2.$$

$$\omega_2 = \overline{Q_1} + \beta\overline{Q_2} + \bar{\beta}Q_2 = \overline{Q_1} + \beta\overline{Q_2} + S_1.$$

Функциональная схема автомата, выполненного на **R-S**-триггерах, показана на рис. 55.

Литература

1. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. - К.: Техника, 1975. - 766с.; ил.
2. Вавилов Е. Н., Портной Г. П. Синтез схем электронных цифровых машин.- М.: Советское радио, 1963. - 437 с. ил.
3. Вавилов Е. Н., Портной Г. П. И др. Синтез схем на пороговых элементах. - М.: Советское радио, 1970. - 367 с. ил.
4. Прикладная теория цифровых автоматов /К. Г. Самофалов, А. М. Романкевич, Р. Н. Валуйский и др. - К.: Высш. шк., 1987.-375 с.
5. Электронные промышленные устройства: Учеб. Для вузов /В. И. Васильев, Ю. М. Гусев, В. Н. Миронов и др. - М., 1988. - 303 с.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Случайные величины и их основные характеристики

Случайная величина - это величина, которая в результате испытаний принимает различные случайные значения из множества возможных значений (но только одно в данном испытании). Для полной характеристики случайной величины необходимо знать все значения, которые она может принимать, и вероятности каждого из этих значений.

Случайные величины могут быть дискретными либо непрерывными.

Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения дискретны.

Случайная величина называется непрерывной, если она может принять любое значение из некоторого определенного интервала.

5.1.1. Интегральный закон распределения (функция распределения)

Важной характеристикой случайной величины является функция распределения.

Функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина принимает значение, меньшее некоторого заданного значения **X.** $F(X)=P(x<X)$,

где **x**- текущее значение случайной величины **X**.

Рассмотрим дискретную случайную величину, представляющую собой число очков на верхней грани игральной кости при ее случайном бросании. Как видно из рис.56 функция распределения этой случайной величины является ступенчатой функцией. Величина ступеньки на каждом значении случайной величины равна вероятности этого значения величины.

Для дискретной случайной величины функция распределения представляет собой ступенчатую неубывающую функцию. Скачки функции соответствуют значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

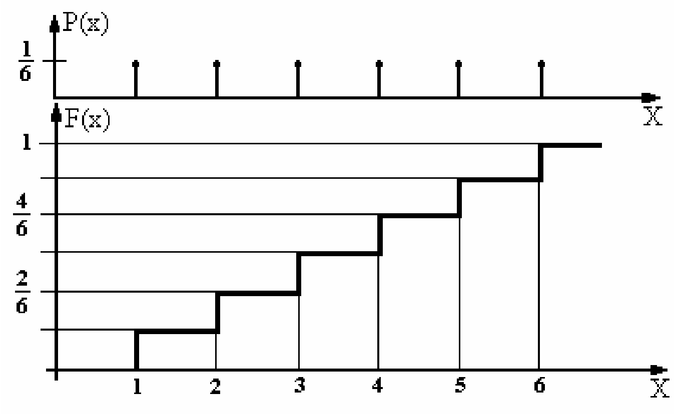


Рис.56. Функция распределения

По мере увеличения числа возможных значений число скачков увеличивается, сами скачки уменьшаются. В пределе для бесконечного числа возможных значений (непрерывная случайная величина) функция распределения становится непрерывной.

Свойство функции распределения

Для любой случайной величины $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$.

Для непрерывной случайной величины **F(X)** есть монотонная неубывающая функция от **X**.

Вероятность того, что случайная непрерывная величина примет определенное числовое значение **X**, бесконечно мала. Вероятность того, что она окажется в некотором промежутке $X_1<X<X_2$, будет иметь конечное значение.

Так как $F(X_1)=P(x<X_1)$ и $F(X_2)=P(x<X_2)$, то $F(X_2)-F(X_1)=P(X_1\leq x<X_2)$.

5.1.2. дифференциальный закон распределения (плотность вероятности)

Плотностью вероятности **f(x),** либо дифференциальным законом распределения называется величина

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x).$$

$$f(x)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{F(X+\Delta x)-F(X)}{\Delta x}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{P(X\leq x<X+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Из последнего выражения видно, **что** $f(x)\Delta x$ представляет собой с точностью до малых высшего порядка вероятность для случайной величины **x** находиться в бесконечно малом интервале $(X<x<X+\Delta x)$. Очевидно, что $P(X<x<X+dx)=f(x)dx$.

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями $X_1<x<X_2$ определяется формулой:

$$P(X_1 < x < X_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Кроме того

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(X).$$

5.1.3. Моменты случайных величин и их свойства

Начальным момента порядка **k** случайной величины **X**, определенной в области $-\infty<X<\infty$ (а<**X**<в в частном случае) и имеющей плотность вероятности **f(x)** называется число, определяемое следующим образом:

$V_k = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f(X)dx$ - для непрерывной случайной величины;

$V_k = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^k P(X_i)$ - для дискретной случайной величины.

$V_1 = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dx = M(X) = mx = \widetilde{x}$ - среднее значение (математическое ожидание) случайной величины.

$V_2 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(X)dx = M(X^2) = \widetilde{x^2}$ - средний квадрат случайной величины.

$\sqrt{V_2^2}$ - среднеквадратическое значение случайной величины **X**.

Центральным моментом порядка **k** случайной величины **X** называется число

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \widetilde{x})^k f(x)dx.$$

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k = \sum_{i=1.}^{\infty} (x_i - \widetilde{x})^k P(x_i).$$

Центральный момент порядка **k** случайной величины есть математическое ожидание **k**- ой степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Наибольшее значение имеет центральный момент второго порядка, называемый дисперсией.

$$\mu_2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \widetilde{x})^2 f(x)dx = \widetilde{(x - \widetilde{x})^2} = M\left[(x - \widetilde{x})^2\right]$$

$\sqrt{D_x} = \sigma_x$ - среднеквадратичное отклонение.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: **M(C)=C**.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: **M(CX)=CM(X).**

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: **M(XY)=M(X)M(Y).**

Замечание: две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняла другая величина.

4. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

5. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Свойства среднеквадратичных отклонений

1. Пусть случайная величина **U** равна сумме независимых случайных величин X_1, X_2 ... X_n. Определим связь между дисперсией случайной величины **U** и дисперсиями слагаемых $X_1 \ldots X_n$.

Имеем

$$U = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (1)$$

Учитывая, что среднее суммы случайных величин равно сумме их средних, можно записать

$$\tilde{U} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_n \qquad (2)$$

Отнимаем (2) из (1):

$$U - \tilde{U} = (X_1 - \tilde{X}_1) + (X_2 - \tilde{X}_2) + \ldots + (X_n - \tilde{X}_n) \qquad (3)$$

Возведем в квадрат (3) и возьмем среднее для левой и правой частей:

$$\widetilde{(u - \tilde{u})^2} = \widetilde{(x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (x_2 - \tilde{x}_2)^2 + \ldots + 2(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) + \ldots}$$

Рассмотрим выражение $\widetilde{(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j)}$. Раскрыв скобки и воспользовавшись свойством среднего, получим:

$$\widetilde{(X_i - \tilde{X}_i)(X_j - \tilde{X}_j)} = \widetilde{X_i X_j} - \widetilde{\tilde{X}_i X_j} - \widetilde{X_i \tilde{X}_j} + \widetilde{\tilde{X}_i \tilde{X}_j} = \tilde{X}_i \tilde{X}_j - \tilde{X}_i \tilde{X}_j - \tilde{X}_i \tilde{X}_j + \tilde{X}_i \tilde{X}_j = 0$$

Следовательно

$$D_u = D_{x1} + D_{x2} + \ldots + D_{xn}. \qquad (4)$$

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Взяв корень квадратный от левой и правой частей (4), получим:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \ldots + \sigma_{xn}^2}.$$

Эта формула часто применяется в измерительной технике и автоматике для вычисления среднеквадратичных ошибок.

2. Пусть имеется **n** случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ с одинаковыми средними значениями $\tilde{X}$ и с одинаковыми законами распределения. Тогда их среднее арифметическое

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$$

тоже будет случайной величиной с тем же самым средним значением $\tilde{Y} = \tilde{X}$, но среднеквадратическое отклонение его будет в $\sqrt{n}$ раз меньше, чем для каждой из составляющих (для независимых случайных величин).

Докажем, что $D_y = D_x/n$. Имеем:

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{и} \quad \tilde{Y} = \tilde{X}.$$

Отнимем от левой части $\tilde{Y}$, а от правой - $\tilde{X}$:

$$Y - \tilde{Y} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{\tilde{X} \cdot n}{n} = \frac{(X_1 - \tilde{X}) + (X_2 - \tilde{X}) + \ldots + (X_n - \tilde{X})}{n}.$$

Возводим в квадрат обе части равенства и возьмем средние значения для левой и правой частей. В результате получим:

$$\widetilde{(y - \tilde{y})^2} = \frac{\widetilde{(X_1 - \tilde{X})^2} + \widetilde{(X_2 - \tilde{X})^2} + \ldots + \widetilde{(X_n - \tilde{X})^2}}{n^2}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ - это отдельные значения случайной величины **X**. При расчете дисперсий их можно обозначить через **X**.

$$\widetilde{(y-\tilde{y})^2} = \frac{\widetilde{(x_1-\tilde{x})^2}+\ldots+\widetilde{(x_2-\tilde{x})^2}}{n^2} = \frac{n\,\widetilde{(x-\tilde{x})^2}}{n^2}, \text{ т.е. } D_Y = \frac{D_x}{n}.$$

Например, если производится **n** измерений одной и той же физической величины, то их среднее арифметическое **Y**, хотя тоже является случайной величиной, имеет во много раз меньше среднеквадратичное отклонение, т.е. всегда надежнее, чем каждое измерение в отдельности. Среднее арифметическое большого числа взаимно независимых величин обладает во много раз меньшим рассеянием, чем каждая из этих величин в отдельности.

5.2. Векторные случайные величины

При совместном изучении нескольких случайных величин их рассматривают как систему случайных величин, либо как случайный вектор, компонентами которого являются отдельные случайные величины. Система двух случайных величин (**X, Y**) геометрически интерпретируется как случайный вектор на плоскости **X0Y** (рис.57), направленный из начала координат в точку (**X, Y**) или как случайная точка на плоскости **X0Y** с координатами (**X, Y**). Система трех случайных величин может рассматриваться как вектор в трехмерном пространстве, система **n** случайных величин - как вектор в **n**-мерном пространстве. Далее ограничимся рассмотрением системы двух случайных величин.

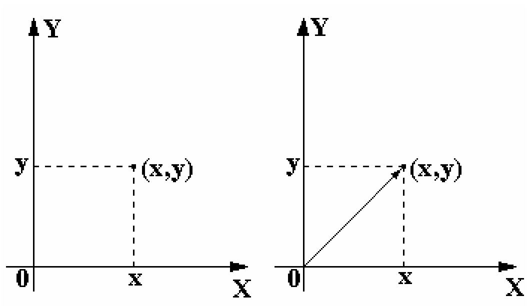


Рис.57. Двумерный случайный вектор

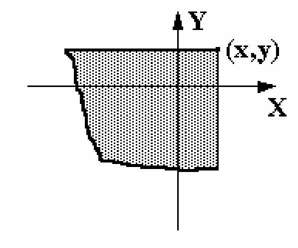


Рис.58. Двумерная функция распределения - вероятность попадания случайной точки в заштрихованную область

5.2.1. Функция распределения двумерного случайного вектора

Функция распределения системы двух случайных величин (двумерного случайного вектора)- это вероятность совместного выполнения двух неравенств **X<x** и **Y<y**

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y).$$

Геометрически - это вероятность попадания случайной точки **(X,Y)** в бесконечный квадрат с вершиной **(x,y),** лежащий левее и ниже ее (рис.58). Определим общие свойства функции распределения системы двух случайных величин.

1. Функция распределения **F(x,y)** является неубывающей функцией двух аргументов, т.е.

$$F(x_2,y) \geq F(x_1,y) \text{ при } x_2>x_1;$$

$$F(x,y_2) \geq F(x,y_1) \text{ при } y_2>y_1.$$

2. Повсюду на -∞ функция распределения равна нулю:

$$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0.$$

3. При одном из аргументов, равном ∞, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,\infty)=F_1(x);\ F(\infty,y)=F_2(y).$$

4. Если оба аргумента равны ∞, функция распределения системы равна единице:

$$F(\infty,\infty)=1.$$

Для системы двух случайных величин можно поставить задачу о вероятности попадания случайной точки (**X,Y**) в некоторую область на плоскости **X0Y**. Чтобы упростить задачу, будем рассматривать область в виде прямоугольника: (рис.59):

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) = F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

(нижняя и левая границы включены в прямоугольник, а верхняя и правая - не включены).

5.2.2. Функция плотности вероятности двумерного случайного вектора

Рассмотрим систему двух случайных величин **X, Y**. На плоскости **X0Y** выделим прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке с координатами (**x,y**) (рис.60). Вероятность попадания в этот прямоугольник равна:

$$P[x \le X < (x+\Delta x),\ y \le Y < (y+\Delta y)] = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y).$$

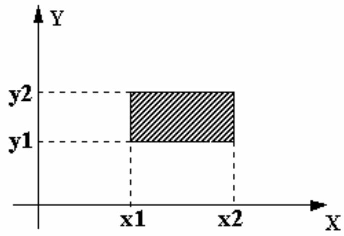


Рис.59

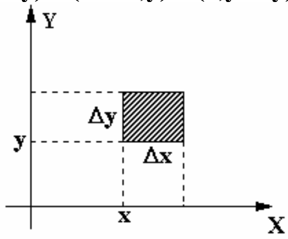


Рис.60

Разделим эту вероятность на площадь прямоугольника и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$;

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)-F(x, y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x \Delta y} = F''_{x,y}(x,y).$$

Если **F(x,y)** непрерывна и дифференцируема, то правая часть представляет собой вторую смешанную частную производную функции **F(x,y)** по **x** и по **y**:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{x,y}(x,y).$$

Функция **f(x,y)** называется плотностью распределения (плотностью вероятности) системы случайных величин.

Для системы случайных величин элемент вероятности **f(x,y) dxdy**- вероятность попадания случайной точки в элементарный прямоугольник со сторонами **dx, dy**, примыкающий к точке (**x,y**). Эта вероятность равна объему элементарного параллелепипеда, ограниченного сверху поверхностью **f(x,y)** и опирающегося на элементарный прямоугольник **dxdy.** Вероятность попадания случайной точки в произвольную область **D** равна интегралу элементов вероятности по всей области **D**.

$$P[(x,y) \in D] = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный абсциссами X_1, X_2 и ординатами Y_1, Y_2 равна

$$\mathbf{P}(\mathbf{x_1} < \mathbf{X} < \mathbf{x_2}, \mathbf{y_1} < \mathbf{Y} < \mathbf{y_2}) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy}.$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy}.$$

Рассмотрим основные свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности системы случайных величин - функция неотрицательная

$$\mathbf{f(x,y)}\geq 0.$$

Это ясно из того, что плотность вероятности есть предел отношения двух неотрицательных величин: вероятности попадания в прямоугольник и площади прямоугольника.

2. Двойной интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности системы двух случайных величин равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy} = 1;$$

3. Одномерные плотности вероятности по двумерной плотности можно определить с помощью следующих формул:

$$\mathbf{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f(x,y)dy}, \qquad \mathbf{f(y)} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f(x,y)dx}.$$

Зависимые и независимые случайные величины. При изучении системы случайных величин часто возникает необходимость выяснить характер взаимной зависимости этих величин.

Случайная величина **Y** называется независимой от случайной величины **X**, если закон распределения величины **Y** не зависит от того, какое значение приняла случайная величина **X.** Зависимость величин всегда взаимная. Если величина **Y** не зависит от **X**, то и величина **X** не зависит от **Y**. Зависимость между случайными величинами можно охарактеризовать с помощью условных законов распределения.

Условным законом распределения величины **Y**, входящей в систему **XY** называется ее закон распределения при условии, что другая величина **X** приняла определенное значение. Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью вероятности. Условная функция распределения случайной величины **y** обозначается **F(y/x)**. Условная плотность вероятности **- f(y/x).**

Для независимых случайных величин $\mathbf{f(x,y)=f(x)\cdot f(y)}$.

5.2.3. Моменты системы случайных величин

Начальный момент порядка **k** случайной величины **X** может быть определен по формуле

$$\mathbf{M}[\mathbf{X^k}] = \widetilde{\mathbf{X^k}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{X^k f(x,y)dxdy}.$$

Для величины **Y**:

$$\mathrm{M}[\mathbf{Y^k}] = \widetilde{\mathbf{Y^k}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{Y^k f(x,y)dxdy}.$$

Центральные моменты порядка **k** определяются формулами:

$$M\left[\left(X-\tilde{X}\right)^k\right]=\overline{\left(X-\tilde{X}\right)^k}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(X-\tilde{X}\right)^k f(x,y)dxdy.$$

$$M\left[\left(Y-\tilde{Y}\right)^k\right]=\overline{\left(Y-\tilde{Y}\right)^k}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Y-\tilde{Y}\right)^k f(x,y)dxdy.$$

Например, средние значения для каждой из величин **X** и **Y** равны:

$$\tilde{X}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Xf(x,y)dxdy, \qquad \tilde{Y}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Yf(x,y)dxdy.$$

Дисперсии величин **X** и **Y** могут быть подсчитаны по формулам:

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(X-\tilde{X}\right)^2 f(x,y)dxdy, \qquad D_y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Y-\tilde{Y}\right)^2 f(x,y)dxdy.$$

Смешанным моментом порядка **r, s** системы случайных величин **X, Y** называется математическое ожидание величины $x^r y^s$:

$$M\left[x^r\cdot y^s\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^r\cdot y^s\cdot f(x,y)dxdy.$$

Очевидно, что при **s**=0, либо **r**=0 формула дает моменты случайной величины **X** и **Y** по отдельности.

Смешанным центральным моментом порядка **r, s** случайных величин **X, Y** называется математическое ожидание величины $\left(x-\tilde{x}\right)^r\cdot\left(y-\tilde{y}\right)^s$:

$$\mu_{rs}=M[\left(x-\tilde{x}\right)^r\cdot\left(y-\tilde{y}\right)^s].$$

Очевидно, что при **s**=0 или **r**=0 формула дает центральные моменты случайных величин **X** и **Y** по отдельности.

Особую роль играет центральный смешанный момент первого порядка μ_{11}, который называется корреляционным моментом:

$$K_{xy}=M[\left(x-\tilde{x}\right)\cdot\left(y-\tilde{y}\right)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\tilde{x}\right)\left(y-\tilde{y}\right)\cdot f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy-\tilde{x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)dxdy-\tilde{y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)dxdy+$$

$$+\tilde{x}\tilde{y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\widetilde{xy}-\tilde{x}\cdot\tilde{y}-\tilde{x}\cdot\tilde{y}+\tilde{x}\cdot\tilde{y}=\widetilde{xy}-\tilde{x}\cdot\tilde{y}.$$

Коэффициентом корреляции случайных величин **X,Y** называется безразмерная величина

$$R_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}=\frac{K_{xy}}{\delta_x\delta_y}.$$

Важным свойством коэффициента корреляции является следующее:

$$|R_{xy}|\le 1.$$

Коэффициент корреляции и корреляционный момент независимых случайных величин равен нулю. Случайные величины **X** и **Y** называются коррелированными, если их корреляционный момент отличен от нуля. Они называются некоррелированными, если $K_{xy}=R_{xy}=0$. Независимые величины всегда некоррелированы. Зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. При ряде обычных законов распределения понятия некоррелированные и независимые совпадают. В частности, для того, чтобы две величины, подчиненные нормальному закону, были взаимно независимы, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{R_{xy}}$=0.

Величина $\mathbf{R_{xy}}$ определяет степень коррелированности (связанности) случайных величин. Если абсолютное значение $|\mathbf{R_{xy}}|=1$, то случайные величины являются полностью коррелированными. При этом случайные величины **X** и **Y** связаны между собой линейной зависимостью. Знак $\mathbf{R_{xy}}$ определяет характер связанности случайных величин. Положительный знак $\mathbf{R_{xy}}$ означает, что при отклонении одной из случайных величин от ее математического ожидания другая случайная величина будет иметь в среднем тенденцию к отклонению от своего математического ожидания по знаку в ту же сторону, что и первая случайная величина. Эта тенденция будет проявляться тем сильнее, чем ближе к единице будет значение $\mathbf{R_{xy}}$. Наоборот, отрицательное значение $\mathbf{R_{xy}}$ означает, что при отклонении одной из случайных величин от ее математического ожидания другая случайная величина будет иметь в среднем тенденцию к отклонению от своего математического ожидания по знаку в другую сторону по сравнению с первой случайной величиной. Эта тенденция будет проявляться тем сильнее, чем ближе к -1 будет значение $\mathbf{R_{xy}}$.

5.3. Случайные функции. Многомерные законы распределения

Случайной функцией (процессом) называется функция, значения которой при каждом данном значении аргумента являются случайной величиной. В результате опытов случайная функция принимает различные конкретные формы - это реализации случайной функции. Случайную функцию можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин, зависящих от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров. Случайные функции времени называются стохастическими процессами. Случайный процесс не есть определенная кривая (рис.61). Это такая функция времени, значения которой в каждый момент времени являются случайной величиной. Предсказать протекание одной реализации случайного процесса нельзя. Можно сделать лишь предсказание статистического характера относительно множества реализаций, протекающих в одинаковых условиях, т.е. случайный процесс может быть оценен некоторыми вероятностными характеристиками, например, законами распределения. Так как при каждом данном значении аргумента **t** значение случайной функции **x(t)** является случайной величиной, то полной вероятностной характеристикой этого значения является его закон распределения, который называется одномерным законом распределения. Этот закон зависит от **t** как от параметра и может быть задан одномерной плотностью вероятности **f(x,t).** Это функция времени, ибо вероятностное распределение с течением времени может меняться.

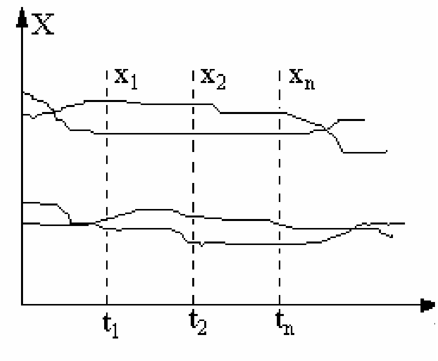


Рис.61. Реализации случайного процесса

Произведение **f(x,t)dx** дает вероятность того, что в момент времени **t** величина **X** находится в интервале (**x<X<x+dx**). Эту величину можно найти приближенно экспериментальным путем, если наблюдать в момент времени **t** ряд систем, находящихся в одинаковых условиях. Для каждого данного **t** в отдельности будет свой закон распределения, причем для каждого из них

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx = 1.$$

Одномерный закон распределения случайной функции является достаточной характеристикой случайной функции для тех задач, в которых значения случайной функции при различных значениях аргумента рассматриваются изолированно друг от друга. Для того, чтобы определить связь между возможными значениями случайной функции **x(t)** в различные моменты времени, вводится двумерный закон распределения, который задается двумерной плотностью вероятности: $f(x_1,x_2,t_1,t_2)$. Это характеристика системы двух случайных величин $x(t_1)$, $x(t_2)$- двух сечений случайной функции **x(t)** в произвольные моменты времени t_1 и t_2.

5.4. Характеристики случайных функций

Для случайных функций вводят простейшие основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. Для случайных величин числовые характеристики представляют собой некоторые числа. Характеристики случайных функций в общем случае - функции.

Математическим ожиданием (средним по множеству или по ансамблю) случайной функции **X(t)** называется такая функция, значения которой при каждом данном значении аргумента **t** равна математическому ожиданию значений случайной функции **x** при этом **t**:

$$\tilde{x}(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(x,t)dx$$

Таким образом, для нахождения $\tilde{x}(t)$ случайной функции необходимо задать ее одномерный закон распределения. Математическое ожидание случайной функции представляет собой некоторую среднюю линию, около которой группируются и относительно которой колеблются все возможные реализации случайной функции. Это есть среднее значение, определенное на основании наблюдений над многими однотипными системами, находящимися при одинаковых условиях в одни и те же моменты времени. Эта величина зависит от момента времени **t**, для которого она определяется, и иногда называется статистическим средним.

Дисперсия случайной функции. Дисперсией случайной функции **X(t)** называется неслучайная функция **Dx(t),** значения которой для каждого значения аргумента **t** совпадает со значением дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) - \widetilde{x(t)} \right]^2 \cdot f(x,t) \cdot dx$$

Эта функция характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно математического ожидания.

Для описания тесноты связи между значениями случайной функции в различные моменты времени t_1,t_2 служит корреляционная функция.

Корреляционная функция. Корреляционной функцией случайного процесса **X(t)** называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t_1,t_2)$, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной

$$Kx(t_1,t_2) = M[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)]$$

где $\overset{\circ}{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1)$, $\overset{\circ}{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2)$.

Раскрыв символ математического ожидания, получим:

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_x(t_1))\cdot(x_2 - m_x(t_2))\cdot f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\cdot dx_1 \cdot dx_2.$$

Положим $t_1 = t_2$, тогда

$$K_x(t,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 \cdot f(,x,t)^2 \cdot dx \cdot dx = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2(t)\right] = Dx(t),$$

т.е. при равенстве аргументов корреляционная функция превращается в дисперсию случайной функции.

В качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и корреляционную функцию.

Поскольку корреляционный момент двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти величины, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов:

$$Kx(t_1,t_2)= Kx(t_2,t_1).$$

Вероятностные характеристики, определенные как средние по множеству реализаций, характеризуют случайный процесс в целом. Различают еще характеристики, как средние по времени, которые характеризуют одну какую-либо реализацию случайного процесса.

Пусть $X_1(t)$ - одна реализация процесса. Тогда ее среднее значение по времени будет равно:

$$\bar{x}_1 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1(t)dt.$$

Таким же образом можно определить и все другие вероятностные характеристики для одной реализации. Например, средний квадрат $X_1(t)$ равен:

$$\bar{x}_1^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_1^2(t)dt.$$

Дисперсия одной реализации случайного процесса равна:

$$\overline{Dx_1} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x_1(t) - \overline{x_1}]^2 \cdot dt.$$

5.5. Операции над случайными функциями

5.5.1. Суммирование случайной и детерминированной функций

Пусть к случайной функции **X(t)** прибавляется неслучайное слагаемое **φ(x):**

$$Y(t)=X(t)+ \varphi(t),$$

где **Y(t)-** новая случайная функция.

Посмотрим, как изменяется математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса. Пусть случайная функция **X(t)** имеет одномерную функцию плотности вероятности **f(x,t).** Если к случайной величине добавить неслучайную **X(t)+ +φ(t),** то закон распределения не изменится. Действительно, **φ(t)** означает, что при заданном **t - φ(t)** имеет вполне определенное значение. Поэтому при одном и том же **t** значения **X(t)** и **X(t)+φ(t)** будут иметь одну и ту же вероятность. От прибавления в момент **t** постоянной величины к **X(t)** закон распределения только лишь сместится по оси **X.**

$$f(y,t)=f[x+\varphi),t].$$

Рассмотрим выражение

$$Y(t)=X(t)+\varphi(t) \qquad (5)$$

где **Y**- случайная величина, **X** - случайная величина, **φ** - константа (при заданном **t**).

Найдем дифференциал от левой и правой частей (5): **dy=dx** (при фиксированном **t**).

Умножаем (5) на **f(y,t)dy** и интегрируем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y,t)\cdot dy=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x+\varphi,t)\cdot dx+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\cdot f(x+\varphi,t)\,dx.$$

Так как пределы интегрирования ±∞, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\varphi,t)\cdot dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx=1.$

Отсюда следует: $m_y=m_x+\varphi(t).$

Итак, при прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое.

Корреляционную функцию случайной функции **y(t)** можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}
Ky(t_1,t_2)&=M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]=M\left[(Y(t_1)-m_y(t_1))\cdot(Y(t_2)-m_y(t_2))\right]=\\
&=M\left[(X(t_1)+\varphi(t_1)-m_y(t_1))\cdot(X(t_2)+\varphi(t_2)-m_y(t_2))\right]=\\
&=M\left[(X(t_1)+\varphi(t_1)-m_x(t_1)-\varphi(t_1))\cdot(X(t_2)+\varphi(t_2)-m_x(t_2)-\varphi(t_2))\right]=\\
&=M\left[(X(t_1)-m_x(t_1))\cdot(X(t_2)-m_x(t_2))\right]=K_X(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, при прибавлении неслучайного слагаемого к случайной функции корреляционная функция случайной функции не меняется.

5.5.2. Интегрирование случайной функции

Пусть $Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau$

Запишем интеграл как предел суммы: $Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\sum_i X(\tau_i)\cdot\Delta\tau.$

Применим к последнему выражению операцию математического ожидания:

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i M[X(\tau_i)]\cdot\Delta\tau=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i m_x(\tau_i)\cdot\Delta\tau=\int_0^t m_x(\tau)\cdot d\tau$$

Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания.

Определим корреляционную функцию **Ky(t₁,t₂).** По определению корреляционной функции

$$K_y(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right],\quad \text{где}\quad \overset{\circ}{Y}(t_1)=\int_0^{t_1}\overset{\circ}{X}(\tau_1)\cdot d\tau_1;\quad \overset{\circ}{Y}(t_2)=\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(\tau_2)\cdot d\tau_2$$

Перемножив последние выражения, получим:

$$\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)=\int_0^{t_1}\overset{\circ}{X}(\tau_1)\cdot d\tau_1\cdot\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(\tau_2)\cdot d\tau_2.$$

Последнее выражение можно переписать в виде двойного интеграла:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(\tau_1)\cdot\overset{\circ}{X}(\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2.$$

Применив операцию математического ожидания и меняя ее в правой части с операцией интегрирования, получим:

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} M\left[\overset{\circ}{X}(\tau_1)\cdot\overset{\circ}{X}(\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2,\right]$$

что дает окончательно $K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1,\tau_2)\cdot d\tau_1\cdot d\tau_2$.

Следовательно, чтобы получить корреляционную функцию интеграла от случайной функции, необходимо дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходной случайной функции - первый раз по одному аргументу, затем по другому.

5.5.3. Дифференцирование случайной функции

Пусть

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

Найдем характеристики случайной функции **Y(t): $m_y(t)$** и **$K_y(t_1,t_2)$.**

Запишем **Y(t)** как предел отношения

$$Y(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

Применяя операцию математического ожидания, получим:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_x(t+\Delta t)-m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}$$

Таким образом, математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Будем искать корреляционную функцию **$K_y(t_1,t_2)$.**

По определению $K_y(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]$.

Подставим выражения для $\overset{\circ}{Y}(t_1)$ и $\overset{\circ}{Y}(t_2)$:

$$Ky = (t_1,t_2) = M\left[\frac{d\overset{\circ}{X}(t_1)}{dt_1}\cdot\frac{d\overset{\circ}{X}(t_2)}{dt_2}\right].$$

Выражение в квадратных скобках представим в виде второй смешанной частной производной:

$$\frac{d\overset{\circ}{X}(t_1)}{dt_1}\cdot\frac{d\overset{\circ}{X}(t_2)}{dt_2} = \frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)}{\partial t_1\cdot\partial t_2}.$$

Так как математическое ожидание производной равно производной математического ожидания, получим:

$$Ky(t_1,t_2) = M\left[\frac{\partial^2\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)}{\partial t_1\cdot\partial t_2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1\cdot\partial t_2}M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t_1\cdot\partial t_2}\cdot Kx(t_1,t_2).$$

Следовательно, чтобы найти корреляционную функцию производной случайного процесса, нужно дважды продифференцировать корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем по другому.

5.5.4. Сложение случайных функций

Если на вход динамической системы поступает не одна случайная функция **$X(t_1)$,** а две или больше, то возникает задача сложения случайных функций. Точнее эту задачу можно определить как задачу определения характеристик суммы по характеристикам слагаемых.

Если складываемые случайные функции не коррелированны между собой, задача решается просто. В случае зависимости функций - слагаемых для решения задачи необходимо знать еще одну характеристику - взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций **X(t)** и **Y(t)** называется неслучайная функция двух аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции **X(t)** и случайной функции **Y(t):**

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\right].$$

Взаимная корреляционная функция, как и автокорреляционная функция, не изменяется при прибавлении к случайным функциям любых неслучайных слагаемых, а значит и при центрировании случайных функций. Из определения следует важное свойство взаимной корреляционной функции: $K_{xy}(t_1,t_2)=K_{yx}(t_2,t_1)$.

Случайные функции **X(t)** и **Y(t)** называются некоррелированными, если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех значениях t_1, t_2. При решении практических задач о некоррелированности случайных функций судят в большинстве случаев не по равенству взаимной корреляционной функции нулю. Наоборот, взаимную корреляционную функцию полагают равной нулю, если на основании соображений о физических свойствах процессов их можно считать независимыми. Если известны математические ожидания и корреляционные функции двух случайных функций **X(t)** и **Y(t),** а так же их взаимная корреляционная функция, то можно определить характеристики суммы этих двух случайных функций:

$$Z(t)=X(t)+Y(t).$$

В соответствии с теоремой сложения математических ожиданий

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t),$$

т.е. математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме их математических ожиданий. Найдем корреляционную функцию

$$K_z(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{Z}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Z}(t_2)\right].$$

Учитывая, что **Z(t)=X(t)+Y(t),** после подстановки получим:

$$K_z(t_1,t_2)=M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t_1)+\overset{\circ}{Y}(t_1)\right)\cdot\left(\overset{\circ}{X}(t_2)+\overset{\circ}{Y}(t_2)\right)\right]=$$

$$=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right]+M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]+M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right]+M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right].$$

или

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+K_{xy}(t_1,t_2)+K_{yx}(t_1,t_2).$$

Если случайные функции **X(t)** и **Y(t)** не коррелированны, выражение $Kz(t_1,t_2)$ принимает вид: $Kz(t_1,t_2)=Kx(t_1,t_2)+Ky(t_1,t_2)$.

Корреляционная функция суммы двух не коррелированных случайных функций равна сумме их корреляционных функций.

5.6. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если все плотности вероятности не зависят от изменения начала отсчета времени, т.е. если имеют место равенства

$$f_1(x,t)=f_1(x,t+\tau);$$

$$f_2(x_1,t_1,x_2,t_2)=f(x_1,t+\tau,x_2,t+\tau)$$

Первое из уравнений означает, что функция f_1 вообще не зависит от **t:** $f_1(x,t)=f_1(x)$. Второе уравнение означает, что f_2 остается неизменной, если разность $t_2-t_1=\tau$ постоянна:

$$f_2(x_1,t_1,x_2,t_2)=f(x_1,x_2,\tau)$$

Итак, вероятностные характеристики стационарного случайного процесса не зависят от начала отсчета времени. Стационарный случайный процесс, это процесс, статистический характер которого неизменен во времени.

5.6.1. Эргодическая теорема

Стационарные случайные процессы обладают эргодическим свойством. Смысл его заключается в том, что все «средние», рассчитанные по множеству реализаций, равны соответствующим «средним», рассчитанным по времени для одной какой-нибудь реализации. Так, например,

$$\widetilde{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_1(x,t) \cdot dx = \bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \cdot dt,$$

$$Dx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \bar{x}\right)^2 \cdot dx = \overline{Dx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(x - \bar{x}\right)^2 \cdot dt,$$

$$\widetilde{X(t)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_1(x) \cdot dx = \overline{x^n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^n \cdot dt.$$

Для многих процессов справедливость этого свойства строго доказана. Для некоторых процессов это свойство не доказано, но есть все основания считать его справедливым.

Физический смысл эргодической теоремы сводится к следующему.

Стационарный случайный процесс неизменен во времени в том смысле, что все плотности вероятности не зависят от начала отсчета времени. Поэтому, взяв два различных, достаточно длинных отрезка одной и той же случайной функции можно их рассматривать как две случайные функции, относящиеся к одной и той же статистической совокупности. Любую бесконечную кривую случайного процесса **X(t)** можно разрезать на сколь угодно большое количество достаточно длинных участков, которые могут рассматриваться как реализации одного и того же процесса.

Эргодическое свойство позволяет существенно упрощать исследование процесса. Поскольку вероятностные характеристики стационарного случайного процесса с течением времени не меняются, то длительное наблюдение случайного процесса на одном объекте дает в среднем такую же картину, как и большое число наблюдений, сделанное в одинаковые моменты времени на большом числе одинаковых объектов.

Таким образом, одна реализация случайного процесса на достаточно большом отрезке времени определяет собой весь случайный процесс со всеми его бесчисленными возможными реализациями.

5.6.2. Корреляционная функция стационарного случайного процесса

Для стационарного случайного процесса удобно рассматривать корреляционную функцию как среднее от произведения двух значений функции, рассчитанное по времени:

$$R(\tau) = M[X(t) \cdot X(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t) \cdot X(t+\tau) \cdot dt.$$

Эту же функцию можно рассчитать как среднее по множеству:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1 \cdot X_2 \cdot f_2(x_1, x_2, \tau) \cdot dx_1 \cdot dx_2.$$

Замечание: ранее рассматривалась корреляционная функция как среднее от произведения двух центрированных значений

$$Kx(t_1, t_2) = \overline{\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_1 + \tau)};$$

при изучении стационарных случайных процессов чаще используют корреляционную функцию, рассчитанную по не центрированным значениям

$$R(\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t+\tau)}.$$

Корреляционная функция стационарного случайного процесса обладает следующими свойствами:

1. Корреляционная функция является четной функцией, т.е. $R(\tau)=R(-\tau)$.
Действительно,

$$R(\tau)=\overline{x(t)\cdot x(t+\tau)}=\overline{x(t-\tau)\cdot x(t)}=\overline{x(t)\cdot x(t-\tau)}=R(-\tau).$$

2. При $\tau=0$ корфункция равна среднему квадрату случайной функции:

$$R(0)=\overline{x(t)\cdot x(t)}=\overline{x^2(t)}=\overline{x^2}.$$

3. При $\tau\to\infty$ корфункция равна квадрату среднего значения случайной функции. Действительно, если τ велико, то величины $x_1=x(t)$ и $x_2=x(t+\tau)$ можно считать независимыми. Тогда $f_2(x_1,x_2,\tau)=f_1(x_1)f_2(x_2)$. Следовательно

$$\lim_{\tau\to\infty}R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot x_2\cdot f_2(x_1,x_2,\tau)\cdot dx_1\cdot dx_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot x_2\cdot f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot dx_1\cdot dx_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\cdot f_1(x_1)\cdot dx_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}x_2\cdot f_2(x_2)\cdot dx_2=\tilde{x}\cdot\tilde{x}=(\tilde{x})^2=(\bar{x})^2.$$

4. Значение корфункции при $\tau=0$ является ее наибольшим значением, т.е. $R(0)\geq R(\tau)$.

Рассмотрим очевидное неравенство:

$$[x(t)-x(t+\tau)]^2\geq 0;$$

$$x(t)^2+x(t+\tau)^2\geq 2x(t)x(t+\tau);$$

$$2R(0)\geq 2R(\tau);\quad R(0)\geq R(\tau).$$

Примеры корфункции. Для постоянной величины $X(t)=A_0$ (например, для постоянного тока)

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A_0^2\cdot dt=A_0^2.$$

Это соответствует полной корреляции. Если случайная функция содержит постоянную составляющую A_0, то корфункция также содержит постоянную составляющую, равную квадрату постоянной составляющей функции.

Для гармонической функции $X(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cdot\sin(\omega t+\varphi)\cdot\sin(\omega t+\omega\tau+\varphi)\cdot dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot A^2\,\frac{1}{2}\left[\int_{-T}^{T}\cos\omega\tau\cdot dt-\int_{-T}^{T}\cos(2\omega t+\omega\tau+2\varphi)\cdot dt\right]=$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{A^2}{2}\left[\frac{\cos\omega\tau\cdot 2T}{1}-\frac{\sin(2\omega T+\omega\tau+2\varphi)+\sin(2\omega T-\omega\tau-2\varphi)}{2\omega}\right]=\frac{A^2}{2}\cdot\cos\omega\tau.$$

Функция $R(\tau)$ имеет тот же период, что и функция $X(t)$, но в отличие от нее является четной и не зависит от φ. Появление в корфункции члена вида $\frac{A^2}{2}\cdot\cos\omega\tau$ указывает на наличие в случайном процессе скрытой периодичности, которая может не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи реализаций случайного процесса.

Пусть к полезному сигналу $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ добавляется шум $y(t)$, не имеющий постоянной составляющей. Рассмотрим корфункцию для сигнала, смешанного с шумом, т.е. для суммы $x(t)+y(t)$.

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)+y(t)]\cdot[x(t+\tau)+y(t+\tau)]\cdot dt=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\cdot x(t+\tau)\cdot dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)\cdot y(t+\tau)]\cdot dt+$$
$$+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\cdot x(t+\tau)\cdot dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\cdot y(t+\tau)\cdot dt=$$
$$=Rx(\tau)+Rxy(\tau)+Ryx(\tau)+Ry(\tau).$$

Сигнал и «шум» не коррелированны между собой (независимые случайные функции), поэтому $\mathbf{R_{xy}(\tau)=R_{yx}(\tau)}=0$. Тогда $\mathbf{R(\tau)=R_x(\tau)+R_y(\tau)}$.

$\mathbf{R_y(\tau)}$ резко спадает при увеличении τ и стремится к нулю при $\tau\to\infty$ т.е. при достаточно больших τ остается лишь одна периодическая функция $\mathbf{R_x(\tau)}$. Следовательно, находя значение $\mathbf{R(\tau)}$ при больших τ можно обнаружить синусоидальный сигнал, «утонувший» в шуме, и узнать его частоту.

5.6.3. Расчет корреляционной функции по экспериментальным данным

Пусть стационарный случайный процесс задан одной реализацией (рис.62). Промежуток времени наблюдения процесса **T** делим на **N** малых интервалов Δ так, чтобы функция **x(t)** мало изменялась на протяжении интервала Δ. $\mathbf{T=N\Delta}$. Будем придавать **t** и τ дискретные значения, кратные Δ: $\mathbf{t=\nu\Delta}$, $\nu=1,2,...$; $\tau=\mu\Delta$, $\mu=0,1,2,....$

Обозначим: $\mathbf{R(\tau) = R(\mu\Delta) = R(\mu)}$, $\mathbf{x(t) = x(\nu\Delta) = x_\nu}$, $\mathbf{x(t+\tau) = x(\nu\Delta+\mu\Delta) = x_{\nu+\mu}}$.

Тогда $R(\mu)=\frac{1}{N-\mu}\sum_{\nu=1}^{N-\mu}X_\nu\cdot X_{\nu+\mu}$.

Так, $R(0)=\frac{1}{N}\left(x_1^2+x_2^2+...+x_N^2\right)$; $R(1)=\frac{1}{N-1}\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+...+x_{N-1}x_N\right)$ и т.д.

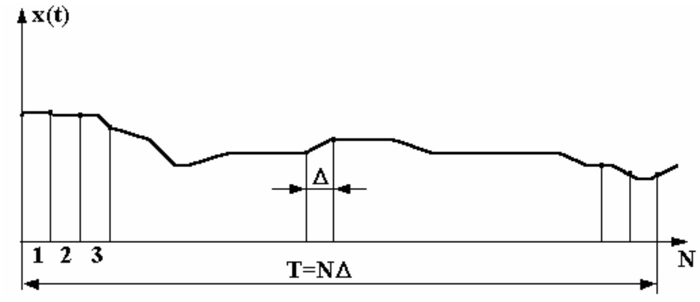


Рис.62

5.7. Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Пусть функция **x(t)** на любом конечном интервале удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|X(t)|dt$ сходится, тогда функцию **X(t)** можно представить в виде

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \qquad (6)$$

где

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (7)$$

Формула (6) называется «обратное преобразование Фурье» или интеграл Фурье, а формула (7)- «прямое преобразование Фурье». Функция $X(j\varpi)$ называется изображением Фурье функции времени $x(t)$.

Интеграл Фурье позволяет представить непериодическую функцию в виде бесконечной суммы гармонических составляющих с непрерывным спектром частот. $X(j\omega)$ представляет собой спектральную плотность амплитуд или частотный спектр функции $X(t)$.

Рассмотрим энергетическую форму интеграла Фурье. Пусть имеется некоторая функция (например, случайная) времени $X(t)$.

Имеем:

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\varpi t}d\omega,\quad \text{где}\quad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\varpi t}dt.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)X(-j\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt\cdot d\omega.$$

Меняем порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\varpi t}dt\cdot d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)e^{-j\varpi t}d\omega\cdot dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)X(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)^2dt.$$

Итак, $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)^2dt.$$

Эта формула выражает энергетическую форму интеграла Фурье и называется формулой Релея. Правая часть представляет собой величину, пропорциональную энергии рассматриваемого процесса. Например, если $x(t)$ представляет собой напряжение на резисторе 1 Ом, то $\int_{-\infty}^{\infty}X(t)^2dt$ представляет собой энергию, выделенную на этом сопротивлении, за бесконечно большой промежуток времени $-\infty<t<+\infty$.

Таким образом, для нахождения энергии рассматриваемого процесса за бесконечный интервал наблюдения с равным основанием можно интегрировать квадрат функции времени в интервале $-\infty<t<+\infty$ или интегрировать квадрат модуля изображения Фурье по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$.

Перейдем к средней мощности процесса. Ее можно получить, если поделить энергию процесса на интервал наблюдения.

Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}X(t)^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(j\omega)\right|^2d\omega.$$

Левая часть представляет собой средний квадрат $X(t)$.

Величина

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X(j\omega)\right|^2=S(\omega)$$

называется спектральной плотностью мощности или просто спектральной плотностью стационарного случайного процесса. Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega=\overline{X^2}.$$

Интегрирование по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$ **S(ω)** дает средний квадрат функции времени **X(t)**. По физическому смыслу спектральная плотность есть величина, пропорциональная средней мощности процесса в интервале частот от ω до **ω+dω.**

S(ω) является четной функцией частоты, т.к. $S(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X(j\omega)\right|^2$.

5.8. Связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией стационарного случайного процесса

Найдем обратное преобразование Фурье для спектральной плотности:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X(j\omega)\right|^2e^{j\omega\tau}d\omega=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)X(-j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-j\omega t}dt\cdot X(-j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}X(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(-j\omega)e^{-j\omega(t-\tau)}d\omega\cdot dt=$$

$$\cdot=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}X(t)X(t-\tau)dt=R(\tau).$$

Следовательно

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)(\cos\omega\tau+j\sin\omega\tau)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$$

(т.к. слева функция вещественная и четная).

Справедливо и прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau=2\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

5.9. Случайные функции и их характеристики (примеры)

Предварительные замечания. Найдем изображение Фурье от δ–функции.

$$S_\delta(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{j\omega t}dt=1,\ \text{ т.к. }\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\delta(x)dx=F(0).$$

Очевидно, справедливо и обратное преобразование Фурье:

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\cdot d\omega,\ \text{ т.е. }\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\cdot d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\omega t\cdot d\omega=\delta(t),$$

а также:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\omega}\cdot d\omega=2\pi\cdot\delta(t);\qquad \int_{0}^{\infty}\cos\omega t\cdot d\omega=\pi\cdot\delta(t).$$

1. Пусть процесс представляет собой постоянную величину $x(t)=A_0$. Как уже было выяснено ранее, корреляционная функция такого процесса равна $R(\tau)=A_0^2$. Найдем спектральную плотность процесса путем прямого преобразования Фурье функции **R(τ):**

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A_0^2e^{-j\omega t}\cdot dt=2\pi A_0^2\delta(\omega).$$

Спектр процесса состоит из единственного пика типа импульсной функции, расположенной в начале координат. Таким образом, если в процессе присутствует только одна частота $\omega=0$, то это значит, что вся мощность процесса сосредоточена на этой частоте, что и подтверждает вид функции **S(ω).** Если случайная функция содержит постоянную составляющую, т.е. среднее значение $\bar{x} \neq 0$, то **S(ω)** будет иметь разрыв непрерывности в начале координат и будет характеризоваться наличием δ–функции в точке $\omega=0$.

2. Для гармонической функции $\mathbf{X=A_0\sin(\omega_0 t+\varphi)}$ корреляционная функция:

$$R(\tau)=\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau.$$

Спектральная плотность равна

$$S(\omega)=2\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau\cdot d\tau=2\int_0^\infty \frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau\cos\omega\tau\cdot d\tau=\frac{A_0^2}{2}\int_0^\infty[\cos\tau(\omega-\omega_0)+$$

$$+\cos\tau(\omega+\omega_0)]d\tau=\frac{A_0^2}{2}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

График **S(ω)** будет иметь два пика типа импульсной функции, расположенных симметрично относительно начала координат при $\omega=+\omega_0$ и $\omega=-\omega_0$. Это говорит о том, что мощность процесса сосредоточена на двух частотах $+\omega_0$ и $-\omega_0$.

Если случайная функция имеет гармонические составляющие, то спектральная плотность имеет разрывы непрерывности в точках $\omega = \pm\omega_0$ и характеризуется наличием двух дельта-функций, расположенных в этих точках.

1.***Белый шум***. Под белым шумом понимают случайный процесс, имеющий одинаковые значения спектральной плотности на всех частотах от $-\infty$ до $+\infty$: $S(\omega)$ = Const.

Примером такого процесса при определенных допущениях являются тепловые шумы, космическое излучение и др. Корреляционная функция такого процесса равна

$$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty C\cdot\cos\omega\tau\cdot d\omega=C\delta(\tau).$$

Таким образом **R(τ)** представляет собой импульсную функцию, расположенную в начале координат.

Этот процесс является чисто случайным процессом, т.к. при любом $\tau\neq0$ отсутствует корреляция между последующими и предыдущими значениями случайной функции. Процесс с такой спектральной плотностью является физически нереальным, т.к. ему соответствуют бесконечно большие дисперсия и средний квадрат случайной величины:

$$R(0)=D=\overline{x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega\to\infty$$

Такому процессу соответствует бесконечно большая мощность и источник с бесконечно большой энергией.

2. Белый шум с ограниченной полосой частот. Такой процесс характеризуется спектральной плотностью вида

$$S(\omega)=C \text{ при } |\omega|<\omega_n,$$
$$S(\omega)=0 \text{ при } |\omega|>\omega_n.$$

где $(-\omega_n, \omega_n)$ полоса частот для спектральной плотности.

Это такой случайный процесс, спектральная плотность которого остается практически постоянной в диапазоне частот, могущих оказать влияние на рассматриваемую систему управления, т.е. в диапазоне частот, пропускаемых системой. Вид кривой **S(ω)** вне этого диапазона не имеет значения, т.к. часть кривой, соответствующая высшим частотам, не окажет влияния на работу системы. Этому процессу соответствует корреляционная функция

$$R(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\cdot d\omega=\frac{C}{\pi}\int_0^{\omega_п}\cos\omega\tau\cdot d\omega=\frac{C}{\tau\pi}\sin\omega_n\tau.$$

Дисперсия процесса равна

$$D=\overline{x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Cd\omega=\frac{C\cdot 2\omega_n}{2\pi}=\frac{C\cdot\Delta\omega}{2\pi}=C\cdot\Delta f.$$

5. Типовой входной сигнал следящей системы. В качестве типового сигнала принимают сигнал, график которого показан на рис.63. Скорость вращения задающего вала следящей системы сохраняет постоянное значение в течение некоторых интервалов времени $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$,...

Переход от одного значения к другому совершается мгновенно. Интервалы времени подчиняются закону распределения Пуассона. Математическое ожидание $\overline{\Omega}=0$, а $\overline{\Omega^2}=D_\Omega\neq 0$.

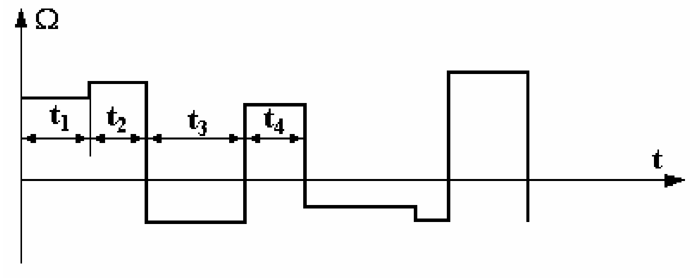


Рис.63. Типовой сигнал

График такого вида получается в первом приближении при слежении **РЛС** за движущейся целью. Постоянные значения скорости соответствуют движению цели по прямой. Перемена знака или величины скорости соответствует маневру цели.

Пусть μ–среднее число перемен скорости за 1 с. Тогда $\mathbf{T=1/\mu}$ будет среднее значение интервалов времени, в течение которых угловая скорость сохраняет свое постоянное значение. Применительно к **РЛС** это значение будет средним временем движения цели по прямой. Для определения корреляционной функции необходимо найти среднее значение произведения

$$R(\tau)=\overline{\Omega(t)\cdot\Omega(t+\tau)}.$$

При нахождении этого значения могут быть два случая.

1. Моменты времени **t** и **t+τ** относятся к одному интервалу. Тогда среднее произведения угловых скоростей будет равно среднему квадрату угловой скорости или дисперсии:

$$R_1(\tau)=\overline{\Omega(t)\cdot\Omega(t+\tau)}=\overline{\Omega^2}=D_\Omega.$$

2. Моменты времени **t** и **t+τ** относятся к разным интервалам. Тогда среднее произведения скоростей будет равно нулю, так как величины **Ω(t)** и **Ω(t+τ)** для разных интервалов можно считать независимыми величинами:

$$R_2(\tau)=\overline{\Omega(t)\cdot\Omega(t+\tau)}=\overline{\Omega(t)}\cdot\overline{\Omega(t+\tau)}=0.$$

Корреляционная функция равна:

$$R(\tau)=P_1R_1(\tau)+P_2R_2(\tau)=P_1R_1(\tau),$$

где, P_1- вероятность нахождения моментов времени t и t+τ в одном интервале, а P_2=1- P_1 вероятность нахождения их в разных интервалах.

Оценим величину P_1. Вероятность появления перемены скорости на малом интервале времени $\Delta\tau$ пропорциональна этому интервалу и равна $\mu\Delta\tau$ или $\Delta\tau/T$. Вероятность отсутствия перемены скорости для этого же интервала будет равна 1-$\Delta\tau/T$. Для интервала времени τ вероятность отсутствия перемены скорости т.е. вероятность нахождения моментов времени t и t+τ в одном интервале постоянной скорости будет равна произведению вероятности отсутствий перемены скорости на каждом элементарном промежутке $\Delta\tau$, т.к. эти события независимые. Для конечного промежутка получаем, что число промежутков равно $\tau/\Delta\tau$ и

$$P_1 \cong \left(1 - \Delta\tau / T\right)^{\tau/\Delta\tau}.$$

Перейдя к пределу, получим

$$P_1 = \lim_{\Delta\tau \to 0}\left(1 - \frac{\Delta\tau}{T}\right)^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = e^{\frac{-\tau}{T}}$$

Тогда

$$R(\tau) = D_\Omega e^{-|\tau|/T} = \overline{\Omega}^2 e^{-|\tau|/T}$$

Знак модуля τ поставлен вследствие того, что это выражение должно удовлетворять четной функции.

$$S_\Omega(\varpi) = \frac{2T \cdot D_\Omega}{1 + \varpi^2 T^2} = \frac{2\mu\, D_\Omega}{\mu^2 + \varpi^2}$$

Формула $S(\omega)$ записана для угловой скорости процесса. Сама кривая перемещения не ограничена предельными условиями и ее нельзя рассматривать как стационарный процесс, ибо ни среднее значение ни дисперсия не есть константы.

6. Нерегулярная качка. Некоторые объекты, например, корабли, самолеты и др., находясь под действием нерегулярного возмущения (волны, атмосферные возмущения и т.д.) движутся по случайному закону. Так как сами объекты имеют определенную, свойственную им частоту колебаний, то они обладают свойством подчеркивать те частоты и возмущения, которые близки к их собственной частоте колебаний. Получающееся при этом случайное движение объекта называется нерегулярной качкой. На практике корреляционную функцию нерегулярной качки часто аппроксимируют выражением

$$R(\tau) = De^{-|\tau|\mu} \cos\beta\ \ \tau$$

где β - резонансная частота, μ - параметр затухания, D- дисперсия. Значения D, μ, β находят путем обработки экспериментальных данных.

Этой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S(\varpi) = \mu D\left[\frac{1}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2}\right].$$

Более точные формулы для аппроксимации:

$$R(\tau) = De^{-\mu|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\mu}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

$$\mathbf{S(\omega) = \frac{\mu}{\beta} \cdot D \cdot \left[\frac{2\beta - \omega}{\mu^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\mu^2 + (\beta + \omega)^2}\right]}.$$

5.10. Прохождение стационарного случайного сигнала через линейную систему

Стационарная линейная система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\mathbf{a_0Y^{(n)}(t)+a_1Y^{(n-1)}(t)+ ... +a_nY(t)=b_0X^{(m)}(t)+ ... +b_mX(t)} \qquad (8)$$

где **X(t)** - входной сигнал, **Y(t)** - выходной сигнал, $\mathbf{a_o, a_1 ... a_n, b_o ... b_m}$ - постоянные коэффициенты. Применим операцию преобразования Лапласа к уравнению (8), приняв нулевые начальные условия:

$$\mathbf{(a_oP^n+a_1P^{n-1}+ ... +a_n)Y(P)=(b_oP^m+b_1P^{m-1}+ ... +b_m)X(P)} \qquad (9)$$

где $Y(P)=\int\limits_0^\infty Y(t)e^{-pt}dt,\ \ X(P)=\int\limits_0^\infty X(t)e^{-pt}dt$ - изображения Лапласа функций **Y(t)** и **X(t).**

Отношение **Y(P)/X(P)=K(P)** называется передаточной функцией системы. Из (9) следует, что

$$K(P)=\frac{b_0P^m+b_1P^{m-1}+...+b_m}{a_oP^n+a_1P^{n-1}+...+a_n}=\frac{Y(P)}{X(P)}. \qquad (10)$$

При подстановке в передаточную функцию P=jω получим комплексную передаточную функцию, представляющую собой отношение изображения Фурье выходного сигнала к изображению Фурье входного сигнала системы:

$$K(j\omega)=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+...+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+...+a_n}=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \qquad (11)$$

где

$$Y(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-j\omega t}dt,\ \ X(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Действительно, для функции времени **X(t),** на которую накладываются ограничения **X(t)=0** при **t<0, X(t)<Me**$^{\alpha t}$ при **t>0**, где **M** и **α** - некоторые положительные постоянные, можно найти изображение Лапласа по формуле

$$X(P)=\int\limits_0^\infty X(t)e^{-pt}dt$$

Для этой же функции изображение Фурье равно

$$X(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

Учитывая ограничения, можно сделать вывод, что если в изображение Лапласа некоторой функции времени вместо **P** подставить **jω,** то получим изображение Фурье той же функции времени. Из уравнения (11) следует:

$$\mathbf{Y(j\omega)=K(j\omega)X(j\omega)}$$

Возьмем модули левой и правой частей последнего уравнения, возведем их в квадрат, разделим на 2**T** и перейдем к пределу при **T**→∞:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|Y(j\omega)\right|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|K(j\omega)X(j\omega)\right|^2.$$

Откуда следует:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|Y(j\omega)\right|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X(j\omega)\right|^2\cdot\left|K(j\omega)\right|^2.$$

или

$$\mathbf{Sy(\omega)=Sx(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2.} \quad (12)$$

При известной передаточной функции системы **K(P)** и известной спектральной плотности **Sx(ω)** стационарного случайного сигнала X(t), действующего на входе системы, по формуле (12) можно найти спектральную плотность стационарного случайного сигнала на выходе системы.

Дисперсия выходного сигнала равна

$$D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(j\omega)\right|^2 S_x(\omega)d\omega. \quad (13)$$

Подынтегральное выражение в формуле (13) имеет вид:

$$\frac{\left|B(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega)\right|^2},$$

где **A(jω)** и **B(jω)** представляют собой полиномы от комплексной переменной **jω.** Обозначим наивысшую степень знаменателя через 2**n**. Наивысшая степень числителя для реальных систем может быть не более 2**n**-2. Для интегрирования по формуле (13) подынтегральное выражение представляют в следующей форме:

$$\frac{\left|B(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega)\right|^2} = \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + ... + b_{n-1}}{\left[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a_n\right]\left[a_0(-j\omega) + ... + a_n\right]}.$$

Откуда

$$D_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)}d\omega = In$$

Интегралы **In** для различных значений n приведены в справочниках и учебниках по теории автоматического управления.

Математическое ожидание $\mathbf{m_y}$ стационарного случайного сигнала **y(t)** на выходе линейной системы с передаточной функцией **K(P)** связано с математическим ожиданием $\mathbf{m_x}$ стационарного случайного сигнала **X(t)** на входе системы следующей формулой:

$\mathbf{m_y=K(0)m_x}$, где **K(0)=K(P)** при **P**=0.

Литература

1. Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1972.- 767 с.; ил.

2. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. - М.: Физматгиз, 1960 с.;ил.