Элементарное введение в теорию экстремальных задач

А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба

Оглавление

Предисловие

Предисловие к своей замечательной книге “Моя система” великий шахматный новатор А. Нимцович начинает словами: “Вообще говоря, я не любитель предисловий”. Мысль простая и понятная. Тем более, что подавляющее большинство читателей подавляющего большинства других книг любят предисловия еще меньше. Последнее неудивительно, поскольку они (предисловия) часто служат попыткой обоснования необходимости прочтения (если угодно, написания) специальной литературы. Тем не менее...

В последнее время в различных областях человеческой деятельности чрезвычайно широкое распространение получили задачи так или иначе, связанные с поиском экстремума. Это привело к парадоксальной ситуации, когда с методами решения подобных задач стало необходимо познакомиться весьма широкому кругу практиков: инженерам, экономистам, вычислителям и т.д.

Еще лет тридцать назад инженеру, экономисту или, например, вычислителю было достаточно трудно ориентироваться в литературе по соответствующей теории и методам, поскольку большинство из имеющихся в то время книг были написаны математиками для математиков. Многие из этих книг, безусловно замечательные, к сожалению остались невостребованными у практиков, поскольку последним оказалось весьма трудно разобраться в многообразии задач, методов и алгоритмов. В результате появились другие книги, расчитанные, главным образом, на инженеров и вычислителей. Эти книги, совершенно непригодные для математиков, оказались также в большинстве своем непригодными и для экономистов. Сказанное, вообще говоря, объясняется тем, что по сложившейся исторически традиции экстремальные задачи для экономистов в то время ограничивали кругом задач линейного программирования: транспортная задача, задача распределения производственной программы, задача производственного планирования и т.д. Поэтому нередко учебники по математическому программированию, расчитанные на экономистов, сводились к механическому описанию симплекс-метода.

Появившаяся в последнее время литература ясно показала, что сегодня одними из основных "потребителей" методов оптимизации стали именно экономисты. При этом экономистов гораздо больше волнуют задачи, которые с математической точки зрения являются задачами математического программирования и оптимального управления. Однако, используемый в книгах по экономике математический аппарат часто содержит неточности, свидетельствующие о довольно поверхностном изучении незнакомого предмета. Как утверждают злые языки, известный людовед и душелюб Евг. Сазонов по этому поводу однажды заметил: "Я слышал, что теперь экономисты решают экстремальные задачи? Это любопытно!" (см. [**1**]).

Возникает естественный вопрос: неужели до настоящего времени не существует книг, способных по возможности удовлетворить и математиков, и широкий круг практиков (в том числе и экономистов)? Ответ на этот вопрос неоднозначен, поскольку подход к методам оптимизации у математиков, вычислителей и иных практиков совершенно различен. Так, математиков в задачах оптимизации, прежде всего, интересуют необходимые и достаточные условия экстремума. Эти условия математики используют для констуирования численных методов оптимизации, отдавая при этом должное вопросам сходимости разработанных методов (последнее особенно относится к специалистам в различных областях вычислительной математики). В соответствие со сказанным для математиков различных специальностей наиболее интересными представляются такие книги, как [**2, 8, 9, 10, 14, 20, 22, 23**].

Вычислители подходят к методам оптимизации с противоположных позиций. Объясняется это тем, что их в первую очередь интересуют методы оптимизации, а не их строгое обоснование и корректность, причем требования, предъявляемые здесь к методам, часто выглядят достаточно специфично. Именно, метод должен быть универсальным, а его практическое применение не должно предполагать большой аналитической работы. Сам метод здесь должен быть доведен до окончательной формулировки алгоритма. Вычислителю желательно также иметь текст готовой программы и сравнительный анализ численых экспериментов использования различных методов. Поэтому еще до недавнего времени многие вычислители отдавали предпочтение книгам типа [**24**]. Что же касается инженеров, экономистов, статистиков и других специалистов-практиков, то их требования во многом пересекаются с требованиями вычислителей. При этом данные требования часто дополняются желанием практиков видеть примеры решения конкретных задач. Все это приводит к тому, что практики обычно отдают предпочтение таким книгам, как [**1, 4, 11, 12, 15, 24**]. И, наконец, специалисты, широко использующие методы линейного программирования, обычно выбирают книги типа [**1, 12, 27**].

Приведенный список литературы, конечно, ни в коей мере не может претендовать на полноту. Среди книг, не вошедших в него, на наш взгляд особо следует выделить книгу [**16**]. Эта книга, расчитанная на широкие круги инженеров, экономистов, статистиков и вычислителей, сталкивающихся с задачами оптимизации, пользуется доброй славой и у математиков. Включенный в эту книгу материал во многом отличается от традиционного. Так, в отличие от большинства других книг по математическому программированию, популярных у практиков, здесь вопросы численных методов органично пересекаются с общей теорией оптимизации. Особенно важным представляется то, что в [**16**] подробно рассмотрена общая теория нелинейного программирования и ее краеугольный камень – теорема Каруша – Джона. Вместе с тем, эта книга не является учебником и может показаться достаточно сложной для первоначального ознакомления с предметом. Поэтому возникает естественное желание иметь книгу, доступную по своему математическому уровню широкому кругу практиков, но при этом по возможности остающуюся достаточно строгой. Именно такую цель преследовали авторы при написании настоящей книги.

Математический аппарат, используемый ниже, мало выходит за рамки стандарного университетского курса математического анлиза, а все необходимые для понимания текста сведения формально содержатся в главе 1. Изложение здесь, как и в главе 2, во многом следует [**16**], поскольку в качестве базовой книги для последующего более глубоко изучения математического программирования авторы рассматривали именно [**16**]. Отметим, что читатель, желающий более глубоко изучить соотвествующий математический аппарат, может прочесть такие книги как, например, [**3, 25, 26**]. Современное же изложение основ математического анализа, необходимое для неформального чтения книги, менее подготовленный читатель может найти, например, в учебнике [**5**].

В соответствие с выбранной стратегией и математическим аппаратом в главе 2 излагаются основы собственно математического программирования. Основная цель, которую преследовали здесь авторы, – попытка изложить весь материал с единых позиций, где в качестве основного приема поиска экстремума служит теорема Каруша – Джона. Эта теорема сформулирована и доказана вполне строго, хотя при этом нельзя сказать, что наилучшим образом. Однако, для понимания доказательства читателю не потребуется никаких дополнительных математических познаний (по крайней мере несодержащихся в данной книге).

Теорема Каруша – Джона, вообще говоря, дает только лишь необходимое условие минимума в задаче нелинейного программировнаия. Достаточные условия в настоящей книге не приведены по двум причинам.

Во-первых, большинство из известных достаточных условий выглядят довольно громоздко, а их доказательство требует введения новых математических понятий. Во-вторых, на практике задача нелинейного программирования часто превращается в задачу выпуклого программирования. Теория выпуклого программирования сейчас продвинута очень далеко и базируется, главным образом, на теореме Куна – Таккера и ее разновидностях, дающих как необходимое, так и достаточное условие минимума.

Доказательство теоремы Куна – Таккера в настоящей книге приведено только для частного случая задачи выпуклого программирования и основано на теореме Каруша – Джона. Это объясняется тем, что доказательство теоремы Куна – Таккера в общем случае требует привлечения достаточно сложного и специфичного математического аппарата – выпуклого анализа. Выпуклый анализ несомненно является оружием огромной созидательной силы (см., например, [**21**]). Однако, также несомненно, что его изучение выходит за рамки вводного курса.

В результате сложилась следующая ситуация. Необходимое условие в задаче нелинейного программирования в книге, как уже отмечалось, доказано строго, хотя и старомодно. Старомодность, однако, здесь, видимо, не очень страшна, поскольку принятый метод доказательства более чем наглядно демострирует основную идею нелинейного программирования – замену задачи с ограничениями задачей без таковых. Ряд важных утверждений, базирующийся на математическом аппарате выпуклого анализа либо не доказан совсем, либо доказан недостаточно полно. Поэтому математики едва ли проявят интерес к настоящей книге, если только не рассматривать ее как вводный курс, предназначенный для самого первоначального ознакомления с предметом.

В еще меньшей степени книга удовлетворит вычислителей и специалистов по вычислительной математике. Из всего многообразия численных методов нелинейного и выпуклого программирования рассмотрено только два – метод Ньютона и метод штрафных функций, причем теорема о сходимости метода Ньютона осталась недоказанной. Однако, авторы и не преследовали целью превращать учебник по математическому программированию в сборник алгоритмов и программ. Доказательство же сходимости метода Ньютона гораздо более уместно отнести к специальному разделу вычислительной математики – численным методам решения систем нелинейных уравнений. Что же касается знаменитого симплекс-метода, то в книге приведено лишь его строгое описание, необходимое для понимания сути этого метода. Вопросы практической реализации симплекс-метода здесь опущены, поскольку в настоящее время не составляет никакого труда найти соотвествующие высококачественные программы, например, в компьютерной сети INTERNET. Сказанное также относится и к методу Ньютона, и ко многим другим замечательным методам математического программирования.

Таким образом, из всего очерченного круга людей, возможно интересующихся математическим программированием, не охваченными остались только инженеры, экономисты, статистики и другие специалисты-практики.

По уровню используемого математического аппарата книга вплоне доступна им всем. Сам подбор материала ориентирован на выработку определенной математической культуры, позволяющей грамотно формулировать экстремальные задачи и определять пути их решения. С этой целью, следуя [**16**], авторы вынесли в упражнения не только простейшие задачи, но и ряд важных утверждений, самостоятельное доказательство которых, как хотелось бы верить, должно привить необходимые навыки и стимулировать читателя к более глубокому изучению предмета.

Заметим теперь, что задачи математического программирования серьезно начали интересовать людей сравнительно недавно – по крайней мере в начале прошлого века. Другие экстремальные задачи, известные как задачи вариационного исчисления, появились, видимо, гораздо раньше. Так, первая из дошедших до нас вариационных задач, связана с легендой об основании Карфагена (см., например, [**28**]).

Согласно “Энеиде” Вергилия тирийцы, предводительствуемые Дидоной, “столько купили земли,... сколько воловьей шкурой могли окружить на прибрежьи”.[1] По этому поводу Л.

[1]Перевод Н. Квашнина-Самарина.

Янг пишет: "Все мы знаем рассказ о том, как Дидона выторговала клочок земли, который она сможет ограничить воловьей шкурой. Никогда не следует недооценивать[2] способности женщины! Аккуратно разрезав шкуру и получив очень длинный и тонкий ремешок, она определила наибольший участок земли, который им можно было ограничить. При этом она решила так называемую изопереметрическую задачу; ее решением оказался круг."

В интерпретации Дидоны изопереметрическая задача состоит в максимизации интеграла (площадь, ограниченая кривой) в классе кривых, для которых другой интеграл (длина кривой) принимает заданное значение. В таком виде изопереметрическая задача были изучена еще Эйлером. Для ее решения Эйлер сформулировал изопереметрическое привило, заключающееся в замене задачи с ограничениями задачей без таковых.

Подобная задача общего вида была рассмотрена Лагранжем. Для ее решения Лагранж ввел метод множителей, который, как он считал, позволит свести задачу с ограничениями к задаче без ограничений. При этом оказалось, что формальное применение метода множителей Лагранжа в известных случаях, увы, приводит к таким "фундаментальным открытиям", как

$$1 = 0 \qquad (!?)$$

(см. пример 1 главы 2 и примеры 6 и 8 главы 3).

Более сотни лет понадобилось человечеству для того, чтобы модифицировать метод Эйлера – Лагранжа тривиальной "заплаткой", как вдруг оказалось, что существуют вариационные задачи, не имеющие в рассматриваемом классе кривых решений. Именно, замена в задаче Лагранжа ограничения типа равенства на ограничение типа неравенства привела к тому, что экстремум в задаче достигался на кривых, получаемых при помощи специальных новой вариации. Эта вариация, известная в настоящее время как вариация Мак-Шейна, приобрела в наши дни огромное значение.

---

[2] Да простят нас феминистки!

Одно из крупнейших математических открытий двадцатого века, высказанное академиком Л.С. Понтрягиным в качестве гипотезы, дает необходимое условие в отпимальном управлении. Это условие, известное как знаменитый принцип максимума Понтрягина, выводится с использованием вариации Мак-Шейна и является краеугольным камнем современной теории оптимального управления (см. [**18**]). При этом принцип максимума естественным образом оказывается модификацией метода множителей Лагранжа, доведенной до совершенства.

Таким образом, необходимое условие как в задаче нелинейного программирования (теорема Каруша – Джона), так и в задаче оптимального управления (принцип максимума Понтрягина) представляют собой проявление одного и того же общего метода множителей Лагранжа. Принимая во внимание тот факт, что задачи вариационного исчисления легко сводятся к задачам оптимального управления и обратно, окончательно получаем, что различные задачи на экстремум решаются, вобще говоря, с единых позиций! Поэтому неудивительно, что в современном мире отчетливо наблюдается тенденция описания различных экстремальных задач одним математическим языком (см., например, [**2, 10, 13, 20**]).

В жизни, как известно, за все приходится чем-то платить. Поэтому попытка описания различных экстремальных задач одним языком предполагает использование совсем нетривиального математического аппарата, свободное владение которым несомненно требует достаточно высокой математической культуры. По этой причине в рамках вводного курса авторы и не предполагали этого сделать, рассмотрев отдельно основы математического программирования и оптимального управления. Что же касается оптимального управления и нужд математиков, инженеров, экономистов, вычислителй и других прикладников, то здесь сложилась следующая ситуация.

Классическое изложение принципа максимума для классической задачи с ограничениями на управления, приведенное в классической книге [**18**], при известном желании доступно и математику, и прикладнику. Сказанное, однако, относится ко всему материалу этой книги, но не к доказательству общего принципа максимума. Данное доказательство, совсем нетривиальное по уровню используемого математического аппарата, оказывается также чрезвычайно громоздким: даже сейчас, спустя почти пятьдесят лет, не найдено (насколько нам известно) строгого доказательства, достуного широкому кругу студентов-математиков. Что же касается более продвинутой задачи со смешанными ограничениями на фазовые координаты и управления, то здесь ситуация существенно усложняется уже на уровне общего понимания предмета (регулярный принцип максимума), а используемый математический аппарат становится угрожающим уже для достаточно широкого круга читателей (см., например, [**7**]). Поэтому инженеры и экономисты обычно отдают предпочтение книгам типа [**6**], отличающимся относительной простотой изложения и большим количеством различных практических примеров и задач. Чистым же вычислителям более близкими покажутся книги типа [**15**], а специалистам в области вычислительной математики – [**7, 23**].

Отдавая должное классике [**18**], настоятельно рекомендуемой для последующего изучения оптимального управления, авторы в рамках вводного курса не могли пройти мимо книги [**28**]. Объясняется это, конечно, не тем, что книга [**28**] написана чрезвычайно живо и увлекательно. Гораздо более важным представляется то обстоятельство, что в [**28**] четко прослеживается следующая более чем важная мысль: разделы теории экстремальных задач, обходящиеся только лишь необходимыми условиями, всегда следует подкреплять "сколь-нибудь общими теоремами существования".

И, наконец, отметим, что изучение всей главы 3 фактически предполагает свободное владение солидным курсом теории обыкновенных дифференциальных уравнений, например, [**17**].

Глава 1

Основы многомерного анализа

Настоящая глава посвящена изложению основных фактов, относящихся к вопросам анализа в многомерных евклидовых пространствах и изучению простейших экстремальных задач в анализе. Данные факты связаны, прежде всего, с топологическими свойствами евклидовых векторных пространств. Объясняется это не тем, что авторы стремились сделать свою книгу "чрезвычайно умной" и, даже, не тем, что любой современный курс анализа начинается с солидной топологической прокладки. Думается, что помимо общей математической культуры знание основ топологии совершенно необходимо для понимания общей теории экстремальных задач.

В §1 содержатся сведения, которые студентам не математических специальностей в курсе анализа часто либо вообще не читаются, либо читаются недостаточно полно. Важнейшее место §1 отводится понятию открытого, замкнутого и компактного множества. Объясняется это тем, что в теории экстремальных задач изучаются функции, часто заданные на компактных множествах, а без четкого представления об открытом и замкнутом множестве невозможно представить себе компактное множество. Поэтому ясное понимание того, что из себя представляют открытое, замкнутое и компактное множество позволяет осознать, например, смысл соответствующих теорем существования.

Помимо топологических и алгебраических структур множеств евклидовых пространств в §1 также рассматриваются вопросы непрерывности и равномерной непрерывности отображений. Важнейшим результатом здесь является теорема

Вейерштрасса о том, что непрерывная числовая функция, заданная на компакте, достигает точной верхней и точной нижней грани. Данная теорема, вообще говоря, существенным образом используется при получении условий существования экстремума. В частности, как будет показано в главе 2, теорема Вейерштрасса оказывается более чем важной при рассмотрении вопроса существования решений задач математического программирования.

Вопросы дифференцирования функций в евклидовых векторных пространствах рассматриваются в §2. Большое внимание здесь уделено понятию производной по направлению или вариации. Объясняется это тем, что это понятие является одним из главных понятий дифференциального исчисления в многомерных евклидовых пространствах, поскольку оно во многом позволяет рассматривать различные проблемы, связанные с экстремальными задачами, с единых позиций. В продолжение этого в §3 изучаются основные свойства дважды дифференцируемых числовых функций.

В §4 главы 1 собственно и изучаются экстремальные задачи в анализе. Здесь приводятся необходимые и достаточные условия существования локального и глобального экстремума числовых функций, причем условие глобального экстремума приводится для выпуклых функций. При этом необходимо отметить, что понятие выпуклой функции и основные свойства выпуклых функций оказываются весьма важными не только при получении условий глобального экстремума, но и широко используются в теории экстремальных задач, например, при изучении задач линейного и выпуклого программирования (см. §4 и §5 главы 2).

§1. Топологические свойства евклидовых пространств

Еще в 1895 году в своем знаменитом мемуаре “Analysis Situs” великий французский математик А. Пуанкаре писал: “Геометрия n измерений занимается изучением действительности; в этом теперь уже никто не сомневается. Тела в гиперпространстве поддаются точным определениям, подобно телам из обычного пространства, и если мы не можем их изобразить, то можем представить себе и изучать” (см. [**19**]).

И, хотя, современный математический язык вместо “Analysis Situs” давно использует термин “топология”, геометрическая интерпретация различных формул по прежнему дает возможность установить связь между формулами и геометрическими образами. Более того, как отмечал А. Пуанкаре, язык геометрии более точен, нежели аналитический, а аналогия с обычной геометрией “может создать ассоциации плодотворных идей и подсказать полезные обобщения”. Образцом связи анализа и геометрии может служить аналитическая геометрия, где геометрические образы в основном рассматриваются на плоскости и в трехмерном пространстве. В анализе, где изучаются свойства, например, функций многих переменных, используется геометрический язык многомерных пространств. Это позволяет соединить мощь анализа и наглядность геометрии. В еще большей степени сказанное относится к теории экстремальных задач.

В §1 рассматриваются простейшие свойства многомерных евклидовых пространств. Эти пространства интерпретируются как объект одновременно аналитический и геометрический. Важнейшими свойствами таких объектов являются топологические свойства, составляющие фундамент современного анализа и современной геометрии.

Евклидовы пространства. Будем называть *n-мерным вектором* последовательность, состоящую из n действительных чисел, называемых координатами вектора. Если обозначить через x некоторый n-мерный вектор, то координаты вектора x будем обозначать через $x^1, \dots, x^n$. При этом будем записывать
$$x = (x^1, \dots, x^n).$$

Совокупность всех n-мерных векторов будем называть *n-мерным векторным пространством.* Сумму двух векторов
$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^n)$$
определим по формуле
$$x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \tag{1}$$

а произведение вектора x на действительное число α – по формуле

$$\alpha x = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n). \tag{2}$$

Тогда разность

$$x - y = (x^1 - y^1, \ldots, x^n - y^n)$$

двух векторов

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad y = (y^1, \ldots, y^n)$$

может быть определена по формуле

$$x - y = (x^1 + (-1)y^1, \ldots, x^n + (-1)y^n).$$

Если R – n-мерное векторное пространство, в котором определены операции сложения векторов (1) и умножения на скаляры (2), то будем говорить, что R – *n-мерное линейное действительное векторное пространство*, и будем обозначать такое пространство через $\mathbb{R}^n$. Отметим, что особую роль в пространстве $\mathbb{R}^n$ играет нулевой вектор $\mathbf{0}$, т.е. вектор, все координаты которого равны нулю.

Помимо перечисленных операций в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести также и операцию скалярного произведения векторов.

Пусть x и y – два произвольных вектора в $\mathbb{R}^n$. Этим векторам можно поставить в соответствие действительное число $\langle x, y\rangle$, называемое *скалярным произведением* векторов x и y и определяемое по формуле

$$\langle x, y\rangle = x^1y^1 + \ldots + x^ny^n.$$

Если вектор x совпадает с вектором y, то скалярное произведение дает *скалярный квадрат*

$$x^2 = \langle x, x\rangle$$

вектора x, который всегда неотрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $x = \mathbf{0}$. *Длина*, или *модуль*, вектора x есть неотрицательное число $|x|$, задаваемое равенством

$$|x| = +\sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{3}$$

Линейное действительное пространство называется *евклидовым векторным пространством*, если в нем определена длина вектора, причем по формуле (3). Поскольку в дальнейшем линейные действительные пространства с иной длиной вектора не рассматриваются, будем обозначать n-мерное евклидово векторное пространство через $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем вектора часто будет удобно называть *точками* пространства $\mathbb{R}^n$. При этом за расстояние между двумя точками x и y в $\mathbb{R}^n$ примем неотрицательное число $|x-y|$.

Пусть x и y – два произвольных вектора пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда имеют место неравенства

$$\langle x, y\rangle^2 \leq x^2 y^2 \tag{4}$$

и

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \tag{5}$$

выражающие важнейшие свойства скалярного произведения и расстояния; первое из этих неравенств называется *неравенством Коши – Буняковского*, а второе – *неравенством треугольника*.

В самом деле, для доказательства неравенства (4) рассмотрим вектор $\alpha x + y$, где α – некоторое действительное число, и составим скалярный квадрат этого вектора:

$$(\alpha x + y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + y^2. \tag{6}$$

Поскольку скалярный квадрат есть величина неотрицательная, то правая часть равенства (6) есть величина неотрицательная при всех значениях α. Поэтому квадратное относительно α уравнение

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + y^2 = 0$$

не может иметь двух различных действительных корней. Следовательно, дискриминант

$$D = \langle x, y\rangle^2 - x^2 y^2$$

этого уравнения есть величина неположительная, откуда и вытекает неравенство (4).

Для доказательства неравенства (5) возведем в квадрат величину $|x+y|$ и запишем

$$|x+y|^2 = x^2 + 2\langle x, y\rangle + y^2.$$

Отсюда в силу неравенства (4) имеем

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \tag{7}$$

Но так как обе величины $|x|$ и $|y|$ неотрицательны, из неравенства (7) непосредственно следует неравенство (5).

Точечные множества и их свойства. Пусть

$$M_1, M_2, \ldots, M_k \tag{8}$$

– произвольная система множеств пространства $\mathbb{R}^n$. Определим множество P, считая, что точка x пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит P тогда и только тогда, когда она принадлежит хотя бы к одному из множеств системы (8). В этом случае множество P называется *объединением* множеств (8), что обозначается

$$P = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k.$$

Определим теперь множество Q, считая, что точка x пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит Q тогда и только тогда, когда она принадлежит к каждому из множеств системы (8). В этом случае множество Q называется *пересечением* множеств (8), что обозначается

$$Q = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k.$$

Пусть теперь M – произвольное множество точек пространства $\mathbb{R}^n$. Определим множество D, считая, что каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству D тогда и только тогда, когда она не принадлежит ножеству M. В этом случае множество D называется *дополнением* к множеству M, что обозначается

$$D = \mathbb{R}^n \setminus M.$$

При этом дополнение D к пространству $\mathbb{R}^n$ называется *пустым* множеством.

Заметим теперь, что дополнение множества D совпадает с множеством M. Далее, пусть

$$D_1, D_2, \ldots, D_k \tag{9}$$

– система множеств, дополнительных к множествам (8), так что D_i является дополнением к множеству M_i. Тогда *дополнение к объединению множеств* (8) *является пересечением множеств* (9) и, наоборот, *дополнение к пересечению множеств* (8) *является объединением множеств* (9).

Перейдем теперь к установлению некоторых простейших топологических свойств евклидовых пространств. Эти свойства непосредственно связаны понятиями открытого и замкнутого множества. Последние понятия, в свою очередь, непосредственно связаны с понятиями окрестности и предельной точки множества.

Пусть a – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть r – произвольное положительное число. Множество S точек из $\mathbb{R}^n$, расстояние которых до точки a меньше, чем r, называется *шаром* радиуса r с центром в a. Всякий шар S с центром в a называется *окрестностью* точки a. Множество G точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для всякой точки $a \in G$ существует ее окрестность, целиком содержащаяся в множестве G.

Пусть M – произвольное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества M, если каждая ее окрестность содержит точку множества M, отличную от a. Множество F точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если каждая его предельная точка принадлежит F.

Теорема 1. *Дополнение к любому открытому множеству замкнуто, а дополнение к любому замкнутому множеству открыто. Более того, объединение любой системы открытых множеств открыто, а пересечение любой системы замкнутых множеств замкнуто. Оказывается также, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, а объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Прежде всего, покажем, что дополнение к любому открытому множеству замкнуто, а дополнение к любому замкнутому множеству открыто.

Пусть G – некоторое множество действительных чисел, а F – его дополнение. Предположим, что G – открытое множество, и покажем, что в этом случае F – замкнутое множество. Для этого обозначим через a некоторую предельную точку множества F и покажем, что $a \in F$.

В самом деле, если точка a не принадлежит множеству F, то $a \in G$. Тогда, поскольку множество G по условию открыто, то существует окрестность $S(a)$ точки a, целиком содержащаяся в G и, следовательно, не содержащая ни одной точки множества F, отличной от a. Последнее, однако, невозможно, поскольку точка a является предельной точкой множества F, т.е. $a \in F$.

Допустим теперь, что множество F замкнуто и докажем, что множество G открыто.

Пусть a – произвольная точка из G. Так как эта точка не может принадлежать множеству F в силу его замкнутости, она также не является предельной точкой для F, т.е. существует окрестность $S(a)$ точки a, не содержащая отличных от a точек множества F. Но точка a не принадлежит множеству F и, потому, вся окрестность $S(a)$ содержится в множестве G. Следовательно, множество G открыто.

Покажем теперь, что объединение G любой системы Σ открытых множеств открыто.

В самом деле, пусть G_k – произвольное множество из системы Σ и пусть a – произвольная точка множества G_k. Поскольку множество G_k открыто, существует окрестность $S(a)$ точки a, целиком содержащаяся в множестве G_k. Но множество G_k само целиком содержится в множестве G и, следовательно, $S(a) \subset G$, т.е. множество G открыто.

Покажем теперь, что пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.

Пусть

$$G_1, G_2, \ldots, G_k$$

– конечная система Δ открытых множеств и пусть a – произвольная точка, принадлежащая к пересечению

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_k$$

множеств системы Δ. Поскольку точка a принадлежит к каждому из множеств G_i системы Δ, а множество G_i открыто, то существует окрестность $S(a, r_i)$ радиуса r_i точки a, целиком содержащаяся в множестве G_i. Обозначим через r – наименьшее из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Тогда окрестность $S(a, r)$ точки a содержится в каждом из множеств G_i выбранной выше системы Δ и, следовательно, принадлежит множеству G. Поэтому множество G открыто.

Переходя теперь от открытых множеств системы Σ или Δ к их дополнениям, получим, что пересечение любой системы замкнутых множеств и объединение любого конечного числа замкнутых множеств также замкнуто. □

Замечание. Легко видеть, что все пространство $\mathbb{R}^n$, а также пустое множество являются одновременно открытыми и замкнутыми. При этом каждое конечное множество F из $\mathbb{R}^n$ замкнуто, поскольку оно вообще не имеет предельных точек и, значит, содержит их все.

Позволим себе привести весьма прозрачную иллюстрацию второй части последнего замечания, заимствованную из книги [**25**].

Пример 1. Будем говорить, что некий человек обладает свойством (P), если его рост больше роста его детей. Тогда, очевидно, любой человек, вообще не имеющий детей, будет обладать свойством (P). Аналогичным образом, любое конечное множество вообще не имеет предельных точек, и потому содержит их все.

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{10}$$

– некоторая бесконечная последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть M – множество точек последовательности (10). Последовательность (10) отличается от множества M не только тем, что ее точки занумерованы, но и тем, что различные точки этой последовательности могут совпадать между собой. Поэтому множество M точек бесконечной последовательности (10) может быть уже конечным.

Последовательность (10) называется *ограниченной*, если существует такое положительное число r, что для каждой точки a_k этой последовательности выполнено неравенство

$$|a_k| < r.$$

Аналогичным образом, произвольное множество E пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует такое положительное число r, что для каждой точки $x \in E$ выполнено неравенство

$$|x| < r.$$

При этом говорят, что последовательность (10) *сходится* к точке $a \in \mathbb{R}^n$, если имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} |a_k - a| = 0. \tag{11}$$

Замечание. Легко видеть, что последовательность (10) ограничена тогда и только тогда, когда ограничены последовательности

$$a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Аналогичным образом, равенство (11) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \to \infty} |a_k^i - a^i| = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Предположим теперь, что M – некоторая часть действительной оси $\mathbb{R}$. Не предполагая ограниченности множества M, предположим теперь, что существует такое действительное число r, что для всех $x \in M$ выполнено неравенство

$$x < r.$$

Тогда существует наименьшее действительное число β_M, для которого еще выполнено неравенство

$$x \leq \beta_M.$$

Такое число β_M называется *точной верхней гранью* множества M, что обозначается

$$\beta_M = \sup_{x \in M} x.$$

Легко видеть, что точная верхняя грань множества M может как принадлежать к множеству M, так и нет.

Пример 2. Предположим, что множество M представляет собой интервал $(0, 1)$. В этом случае

$$\beta_M = \sup_{0<x<1} x = 1$$

не принадлежит M. Если же M – отрезок $[0, 1]$, то

$$\beta_M = \sup_{0\le x\le 1} x = 1$$

уже принадлежит M.

Если существует такое действительное число r, что для всех точек $x \in M$ выполнено неравенство

$$x > r,$$

то существует наибольшее действительное число α_M, для которого еще выполнено неравенство

$$x \ge \alpha_M.$$

Такое число α_M называется *точной нижней гранью* множества M, что обозначается

$$\alpha_M = \inf_{x\in M} x.$$

При этом как и в случае точной верхней грани β_M точная нижняя грань α_M может как принадлежать множеству M, так и нет.

Возвращаясь теперь к ограниченным множествам, заметим, что имеет место следующая фундаментальная

Теорема 2 (Больцано – Вейерштрасс). *Каждое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть E – некоторое бесконечное ограниченное множество на действительной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через M множество всех точек x прямой $\mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: справа от точки x имеется бесконечное множество точек множества E. Множество M непусто, так как оно содержит, например, нижнюю грань α_E множества E. При этом справа от точной верхней грани β_E множества E нет ни одной точки множества M.

Поскольку множество M ограничено и непусто, оно имеет точную верхнюю грань, которую для простоты обозначим через b. Тогда оказывается, что точка b является предельной точкой множества E.

В самом деле, пусть ε – произвольное положительное число и пусть $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ – соответствующая окрестность точки b. Легко видеть, что отрезок $[b-\varepsilon, b]$ содержит по крайней мере одну точку множества M, причем справа от b нет ни одной точки множества M; в частности, точка $b+\varepsilon$ не является точкой множества M. Но так как x есть точка множества M, то справа от x и, следовательно, $b-\varepsilon$ имеется бесконечное множество точек множества E. При этом, однако, поскольку точка $b+\varepsilon$ не принадлежит к множеству M, то справа от $b+\varepsilon$ имеется лишь конечное число точек множества E. Поэтому на интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ содержится бесконечное множество точек множества E. Но так как $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ есть произвольная окрестность точки b, то b есть предельная точка множества E. □

В качестве следствия теоремы Больцано – Вейерштрасса справедлива следующая важнейшая

Теорема 3. *Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Рассмотрим ограниченную числовую последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \tag{12}$$

и, прежде всего, покажем, что из последовательности (12) всегда можно выбрать либо стационарную подпоследовательность (т.е. последовательность, все элементы которой совпадают, начиная с некоторого), либо подпоследовательность, состоящую из попарно различных элементов.

В самом деле, положим $k_1 = 1$ и будем искать в последовательности (12) первый элемент x_{k_2}, не равный x_{k_1}. Если такого элемента нет, то

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = \ldots$$

и последовательность (12) стационарна. Если же такой элемент существует, то будем искать первый элемент x_{k_3}, где $k_3 > k_2 > k_1$, отличный как от x_{k_2}, так и от x_{k_1}. Продолжая действовать аналогичным образом, несложно построить либо бесконечную подпоследовательность

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}, \ldots \quad \lim_{p\to\infty} k_p = \infty \tag{13}$$

последовательности (12), состоящую из попарно различных элементов, либо выбрать конечное число элементов

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s} \tag{14}$$

обладающих тем свойством, что каждый из элементов последовательности (12) совпадает с одним из элементов множества (14). В последнем случае существует некоторая бесконечная подпоследовательность

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots \tag{15}$$

последовательности (12), состоящая из элементов, которые все равны одному и тому же элементу конечного множества (14).

Последовательность (15) стационарна и, следовательно, сходится. Поэтому остается рассмотреть случай, когда в последовательности (12) существует бесконечная подпоследовательность (13), состоящая из попарно различных элементов. Эти элементы образуют бесконечное ограниченное множество, имеющее в силу теоремы 2 предельную точку a. К этой точке, очевидно, и сходится последовательность (13). □

Для точечных множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ справедливы, вообще говоря, теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3. Объединяя эти теоремы в одну, имеем следующую фундаментальную теорему.

Теорема 4. *Из каждой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. При этом всякое ограниченное бесконечное множество E имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Переходя к координатной форме записи, положим

$$a_k = (a_k^1, \ldots, a_k^n), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Если последовательность (10) ограничена, то существует такое положительное число r, что

$$|a_k^i| < r, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Поэтому последовательность

$$a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1, \ldots \tag{16}$$

действительных чисел ограничена и, значит, в силу теоремы 3 из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность совпадает с последовательностью (16). Тогда имеем

$$\lim_{k\to\infty} a_k^1 = a^1,$$

где a^1 – некоторое действительное число.

Заметим теперь, что последовательность

$$a_1^2, a_2^2, \ldots, a_k^2, \ldots \tag{17}$$

также ограничена и потому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что выбранная подпоследовательность совпадает с последовательностью (17). Продолжая действовать аналогичным образом, видим, что из последовательности (10) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_k}, \ldots \quad \lim_{k\to\infty} l_k = \infty, \tag{18}$$

такую, что

$$\lim_{k\to\infty} a_{l_k}^i = a^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Положим

$$a = (a^1, \ldots, a^n).$$

Тогда из равенства (19) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} |a_{l_k} - a| = 0,$$

т.е. из последовательности (10) выбрана сходящаяся подпоследовательность (18), и, таким образом, первая часть теоремы 4 доказана.

Покажем теперь, что всякое ограниченное бесконечное множество E имеет предельную точку.

В самом деле, если множество бесконечно, из него можно выбрать последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, \tag{20}$$

все точки которой попарно различны. Но, если множество E ограничено, то последовательность (20) также ограничена. Поэтому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k}, \dots \quad \lim_{k\to\infty} l_k = \infty, \tag{21}$$

сходящуюся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}^n$. Все точки последовательности (21) по постороению попарно различны. Следовательно, точка a является предельной точкой множества E. $\square$

Во многих ситуациях, например, в теории экстремальных задач, огромную роль играют множества, называемые компактными. Формальное определение компактного множества может быть введено следующим образом.

Множество M точек пространства $\mathbb{R}^n$ называется *компактным*, если каждое его бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую к M. Одно из основных свойств компактных множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ выражает следующая

Теорема 5. *Множество M в пространстве $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что множество M ограничено и замкнуто. Рассмотрим некоторое бесконечное подмножество E множества M. Так как множество E ограничено, то в силу теоремы 4 оно имеет предельную точку a. Точка a, очевидно, является также и предельной точкой множества M. Но множество M замкнуто, а множество

E выбиралось произвольным образом. Поэтому всякое бесконечное подмножество множества M имеет предельную точку, принадлежащую к M, т.е. множество M компактно.

Необходимость. Предположим теперь, что множество M компактно. Предположим также, что оно не является ограниченным. Тогда из M можно выбрать такую последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{22}$$

попарно различных точек, что

$$|a_k| > k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть a – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$. В силу неравенства (5) имеем

$$|a_k| \leq |a_k - a| + |a|,$$

откуда следует, что

$$|a_k - a| \geq k - |a|.$$

Последнее означает, что расстояние от точки a_k до точки a неограниченно возрастает с ростом k. Поэтому любая окрестность точки a содержит лишь конечное число точек множества M, т.е. бесконечное подмножество (22) множества M не имеет предельной точки, принадлежащей M, что противоречит компактности множества M. Сказанное означает, что для доказательства теоремы 5 остается показать, что множество M замкнуто.

Пусть b – предельная точка множества M. Тогда, поскольку каждая окрестность точки b содержит точку множества M, отличную от b, то из M можно выбрать последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_l, \ldots \tag{23}$$

попарно различных точек, сходящуюся к b. Но точка b является единственной предельной точкой множества (23) (см. упражнение 3). Следовательно, бесконечное множество (23) имеет единственную предельную точку b. Эта точка в силу компактности множества M принадлежит M, т.е. множество M замкнуто. □

Замечание. Как уже отмечалось ранее, каждое конечное множество F из $\mathbb{R}^n$ замкнуто. Но каждое конечное множество ограничено и, следовательно, компактно. Поэтому везде в дальнейшем данный тривиальный случай рассматриваться не будет.

Непрерывные отображения. Пусть A и B – два произвольных множества. Говорят, что задано *отображение* f множества A в множество B, если каждой точке $x \in A$ поставлена в соответствие точка $y = f(x)$ множества B. Иначе говоря, отображение f множества A в множество B есть функция, определенная на множестве A и принимающая значения на множестве B. Последнее часто обозначается записью $f\colon A \to B$.

Пусть C – некоторое множество точек из A. Тогда *образом* $f(C)$ множества C при отображении f называется множество всех точек вида $y = f(x)$, где x – произвольная точка множества C. При этом, если D – некоторое множество точек из B, то *прообразом* $f^{-1}(D)$ при отображении f называется совокупность всех точек x из A, таких, что точка $f(x)$ принадлежит D.

Пусть $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ – два евклидовых пространства размерности p и q соответственно, M – некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^p$ и пусть f – отображение множества M в простанство $\mathbb{R}^q$. Отображение f называется *непрерывным* в точке $a \in M$, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для произвольной точки $x \in M$, удовлетворяющей условию $|x-a| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Функция (отображение) f считается непрерывной на всем множестве M, если она непрерывна в каждой точке a этого множества. Функция называется *равномерно непрерывной* на M, если для каждого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что для всяких двух точек x_1 и x_2 множества M, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что равномерно непрерывная на множестве M функция непрерывна на M. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

заданную на интервале $(0, 1)$. Эта функция непрерывна на всем интервале $(0, 1)$, но не равномерно непрерывна. В самом деле, как ни мало бы было число δ, взяв натуральное число N столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{N^2} < \delta,$$

имеем

$$0 < \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} < \delta;$$

в то же самое время,

$$\left| f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{1}{N+1}\right) \right| = 1.$$

Переходя от векторных обозначений к скалярным, положим

$$x = (x^1, \ldots, x^p), \quad f(x) = (f^1(x), \ldots, f^q(x)).$$

Тогда вместо одной векторной функции f векторного переменного x имеем q скалярных функций p скалярных переменных:

$$f^j(x) = f^j(x^1, \ldots, x^p), \quad j = 1, \ldots, q. \tag{24}$$

Легко проверить, что непрерывность векторной функции f вектора x равносильна непрерывности всех функций (24) по совокупности переменных $x = (x^1, \ldots, x^p)$ и обратно; то же самое относится и к равномерной непрерывности.

Связь между непрерывностью, раномерной непрерывностью и компактностью устанавливает следующая

Теорема 6. *Пусть M – компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^p$ и пусть $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ – отображение, непрерывное на M. Тогда отображение f равномерно непрерывно на M, а множество $f(M)$ компактно.*

Доказательство. Прежде всего, докажем, что отображение f равномерно непрерывно. Для этого предположим противное и приведем это предположение к противоречию.

Если отображение f непрерывно, но не равномерно непрерывно, то найдется такое положительное число ε, что для каждого положительного числа δ можно указать две такие точки a и x множества M, для которых из условия $|x-a|<\delta$ следует неравенство

$$|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon.$$

Тогда можно построить бесконечную последовательность

$$(a_1, x_1), (a_2, x_2), \ldots, (a_k, x_k), \ldots$$

пар точек, для которых выполнены условия

$$|f(x_k)-f(a_k)| \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - a_k| = 0. \tag{26}$$

Так как последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{27}$$

содержится в компактном множестве M, то в силу теоремы 4 из нее можно выбрать некоторую подпоследовательность, сходящуюся к точке $a \in M$. При этом для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность совпадает с последовательностью (27).

Поскольку функция f непрерывна в точке a, то существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ выполнено неравенство

$$|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но так как последовательность (27) сходится к точке a, то в силу соотношения (26) найдется столь большое натуральное число k, что $|a_k - a| < \delta$ и $|x_k - a| < \delta$ (см. упражнение 1). Поэтому для данного значения k имеем

$$|f(x_k)-f(a_k)| < |f(x_k)-f(a)| + |f(a_k)-f(a)| < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что противоречит неравенству (25).

Переходя теперь к доказательству компактности множества $f(M)$, рассмотрим некоторое бесконечное подмножество E множества $f(M)$; можно считать, что такое множество существует (см. замечание к теореме 5). Из множества E выберем некоторую бесконечную последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots \tag{28}$$

попарно различных точек. Для каждой точки b_k последовательности (28) выберем такую точку $a_k \in M$, что

$$b_k = f(a_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Точки

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{29}$$

попарно различны и потому имеют предельную точку a в множестве M. Покажем, что точка

$$b = f(a)$$

является предельной точкой множества (29).

В самом деле, пусть V – произвольная окрестность точки b, т.е. шар некоторого радиуса ε с центром в точке b. Поскольку функция f непрерывна в точке a, найдется такое положительное число δ, что для некоторой точки $x \in M$ при $|x - a| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Так как точка a является предельной точкой множества (29), в шаре U радиуса δ с центром в точке a найдутся по крайней мере две различные точки a_k и a_l этого множества (см. упражнение 2). Точки b_k и b_l принадлежат к шару V, и, так как они различны, по крайней мере одна из них не совпадает с точкой b. Поэтому произвольная окрестность V точки b содержит по крайней мере одну точку множества (24), отличную от b, т.е. точка b является предельной точкой множества (24) и, следовательно, множества E.

Таким образом, множество $f(M)$ компактно. $\square$

Важнейшим (в том числе и для теории экстремальных задач) следствием теоремы 6 является следующая

Теорема 7 (Вейерштрасс). *Пусть M – некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – отображение, непрерывное на M. Тогда, если множество M компактно, то функция f достигает на множестве M точной верхней и точной нижней грани.*

Доказательство. Поскольку множество M компактно, то в силу теоремы 6 множество $f(M)$ также компактно. Поэтому точная верхняя $\beta_{f(M)}$ и точная нижняя грани $\alpha_{f(M)}$ множества $f(M)$ принадлежат $f(M)$ (см. упражнение 7). $\square$

Упражнения.

(1) Докажите, что для любых трех векторов a, b и c пространства $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|.$$

(2) Пусть a – предельная точка множества M пространства $\mathbb{R}^n$. Покажите, что каждая окрестность точки a содержит бесконечное множество точек из M.

(3) Используя упражнение 2, покажите, что если последовательность (10) содержит бесконечное множество различных точек, то точка a в формуле (11) является предельной точкой множества точек последовательности (10), причем единственной.

(4) Докажите теорему Коши: последовательность (9) сходится тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k,l\to\infty} |a_k - a_l| = 0.$$

(5) Пусть $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ – два евклидовых векторных пространства и пусть f – непрерывное отображение некоторого открытого множество $G \subset \mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^q$. Покажите, что прообраз $f^{-1}(H)$ любого открытого множества $H \subset \mathbb{R}^q$ является открытым множеством пространства $\mathbb{R}^p$.

(6) Докажите, что непрерывность (равномерная непрерывность) векторной функции f векторного переменного x равносильна непрерывности (равномерной непрерывности) всех функций (20) и обратно.

(7) Пусть M – некоторое компактное множество на действительной прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что точная верхняя грань β_M и точная нижняя грань α_M множества M принадлежат M.

(8) Число A называется пределом числовой функции f при $x \to a$,

$$A = \lim_{x \to a} f(x),$$

если для каждого значения $\varepsilon > 0$ можно указать такое значение $\delta > 0$, что всякий раз, когда $|x - a| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Покажите, что функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

(9) Покажите, что числовая функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда для произвольной последовательности (9), удовлетворяющей условию

$$\lim_{k \to \infty} a_k = a,$$

выполнено также и условие

$$\lim_{k \to \infty} f(a_k) = f(a).$$

§2. Дифференцирование

В §2 рассматриваются вопросы дифференцирования отображений многомерных евклидовых пространств. Важнейшим для теории экстремальных задач здесь является понятие производной по направлению или вариации, поскольку попытка изложения общей теории экстремальных задач с единых позиций во многом базируется собственно на понятии вариации. При этом в отличие от случая функции одного действительного переменного в многомерном случае анализ функции на экстремум проделать гораздо сложнее, поскольку свойства числовых функций, заданных на плоскости, уже существенно отличаются от свойств функций, заданных на действительной прямой (см. §4, упражнения 3–6).

Помимо понятия вариации в §2 вводится понятие производной многомерного отображения. Данная производная оказывается функциональной матрицей, называемой матрицей Якоби.

Дифференцирование числовых функций. Пусть f – отображение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на действительную прямую $\mathbb{R}$, для краткости называемое в дальнейшем *числовой функцией.* Предположим, что в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$ функция f для всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ допускает представление

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \langle k, \Delta x\rangle + R(\Delta x), \tag{1}$$

где k – некоторая точка пространства $\mathbb{R}^n$ и R – некоторая числовая функция. Функция f называется *дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если в представлении (1) выполнено условие

$$\lim_{|\Delta x|\to 0} \frac{|R(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0.$$

Вектор k в формуле (1) называется *производной* или *градиентом* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$ или $\nabla f(x)$. Таким образом, градиент $\nabla f(x)$ дифференцируемой числовой функции f в точке x есть вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемый равенством

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta x\rangle + o(\Delta x). \tag{2}$$

Если размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ равна единице, то формула (2) принимает вид

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \tag{3}$$

где $f'(x)$ – производная функции f в точке x, задаваемая равенством

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

непосредственно вытекающим из равенства (3). Таким образом, в силу равенства (3) числовая функция f скалярного переменного x дифференцируема в точке a, если она допускает *линейную аппроксимацию первого порядка* в этой точке, т.е. если ее приращение

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

удовлетворяет условию

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + o(\Delta x).$$

Аналогичным образом, в силу равенства (2) числовая функция f векторного переменного x дифференцируема в точке a, если ее приращение

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

удовлетворяет условию

$$\Delta y = \langle \nabla f(a), \Delta x \rangle + o(\Delta x).$$

При этом *дифференциалом* dy функции f в точке a называется линейная часть приращения Δy, т.е.

$$dy = \langle \nabla f(a), \Delta x \rangle.$$

Заметим теперь, что в силу формулы (2) градиент ∇f функции f определяется однозначно, причем имеет место равенство

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right), \tag{4}$$

т.е. градиент можно вычислять как непосредственно по определению (2), так и с использованием частных производных по формуле (4).

Пример 4. В качестве одного из примеров вычисления градиента рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle / 2 - \langle b, x \rangle,$$

где A – действительная симметрическая матрица размерности $(n \times n)$ и b – вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда имеет место цепочка равенств

$$f(x + \Delta x) = \langle A(x + \Delta x), x + \Delta x \rangle / 2 - \langle b, x + \Delta x \rangle =$$

$$= \langle Ax, x \rangle / 2 - \langle b, x \rangle + \langle Ax - b, \Delta x \rangle + \langle A\Delta x, \Delta x \rangle / 2 =$$

$$= f(x) + \langle Ax - b, \Delta x \rangle + \langle A\Delta x, \Delta x \rangle / 2.$$

При этом, однако, в силу неравенства Коши – Буняковского

$$\langle A\Delta x, \Delta x \rangle^2 \le |A\Delta x|^2 |\Delta x|^2.$$

Поэтому

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{|\langle A\Delta x, \Delta x \rangle / 2|}{|\Delta x|} = 0$$

и, следовательно, функция f дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\nabla f(x) = Ax - b. \tag{5}$$

Числовая функция f называется *дифференцируемой* на множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема во всех точках Q. Если же числовая функция f дифференцируема во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то говорят просто, что функция f *дифференцируема*.

Легко видеть, что разрывная функция не является дифференцируемой, поскольку, например, в силу формулы (2) имеет место следующая очевидная

Теорема 8. *Если числовая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots \tag{6}$$

– некоторая последовательность точек пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty} \Delta x_k = \mathbf{0}.$$

Поскольку функция f дифференцируема в точке x, то

$$f(x + \Delta x_k) = f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta x_k \rangle + o(\Delta x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Поэтому имеет место цепочка равенств

$$\lim_{k\to\infty} |f(x + \Delta x_k) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |\langle \nabla f(x), \Delta x_k \rangle + o(\Delta x_k)| = 0.$$

Но так как при этом последовательность (6) выбиралась произвольным образом, отсюда непосредственно следует, что функция f непрерывна в точке x (см. §2, упражнение 10). $\square$

Пусть числовая функция f дифференцируема на некотором отрезке $[x, x + y]$, т.е. для всех точек вида $x + \tau y$, где $0 \le \tau \le 1$. Рассмотрим функцию φ действительного переменного τ,

$$\varphi(\tau) = f(x + \tau y),$$

и для всех значений $0 \le \tau \le 1$ вычислим ее производную

$$\varphi'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\varphi(\tau + \Delta\tau) - \varphi(\tau)}{\Delta\tau}. \tag{7}$$

Для этого запишем

$$\frac{\varphi(\tau + \Delta\tau) - \varphi(\tau)}{\Delta\tau} = \frac{\langle \nabla f(x + \tau y), \Delta\tau y\rangle + o(\Delta\tau y)}{\Delta\tau}.$$

Тогда в силу соотношения (7) функция φ дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, причем

$$\varphi'(\tau) = \langle \nabla f(x + \tau y), y\rangle. \tag{8}$$

Пусть f – некоторая числовая функция. Величина

$$f'(x; y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon}$$

называется *производной по направлению* или *вариацией* функции f в точке x по направлению y.

Заметим теперь, что производная по направлению может существовать не только для гладких, но и для негладких функций. Например, для функции

$$f(x) = |x|$$

производная по направлению в точке $x = \mathbf{0}$ имеет вид

$$f(0; y) = |y|.$$

Если функция f имеет в точке x производную по всем направлениям, причем линейную по y, т.е. производную вида

$$f'(x; y) = \langle a, y\rangle,$$

то говорят, что функция f *дифференцируема по Гато* в точке x. Такая функция имеет частные производные. При этом

$$f'(x; e^i) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где e^i – координатные орты и

$$a = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^n}\right).$$

Определенный таким образом вектор a называется *производной Гато* в точке x.

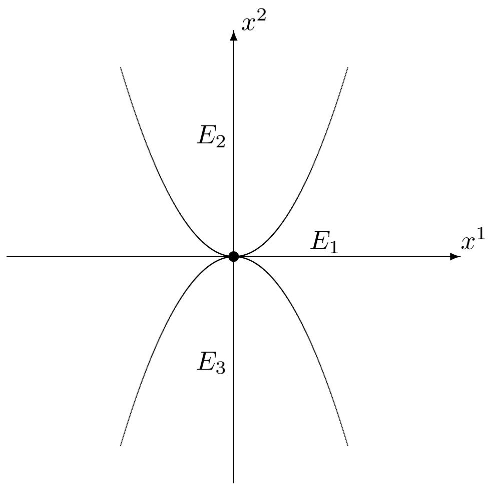

Рис. 1

Из формулы (8) непосредственно следует, что если функция f дифференцируема в точке x, то она дифференцируема и по Гато, причем

$$f'(x, y) = \varphi'(0) = \langle \nabla f(x), y \rangle.$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 5. Пусть $n = 2$. На плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначим через E_1 – действительную прямую $x^2 = 0$, через E_2 – множество точек, удовлетворяющих условию $x^2 \geq (x^1)^2$, а через E_3 – множество точек, удовлетворяющих условию $x^2 \leq -(x^1)^2$. Далее, положим

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

и рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases} \tag{9}$$

(см. рис. 1).

Легко видеть, что функция f, задаваемая равенством (9), дифференцируема по Гато в начале координат. При этом, однако, в точке $x = \mathbf{0}$ данная функция имеет разрыв и, следовательно, не дифференцируема (см. теорему 8).

Замечание. Необходимо отметить, что во многих случаях вместо термина "дифференцируемость" используется термин "*дифференцируемость по Фреше*". Это делается для того, чтобы более четко подчеркнуть отличие дифференцируемости по Гато от дифференцируемости.

Приведем два примера, отражающие достаточно важные свойства дифференцируемых числовых функций.

Пример 6. Если числовая функция f дифференцируема на отрезке $[x, x{+}y]$, то в силу формулы (8) и формулы Ньютона – Лейбница

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

легко получаем представление остаточного члена в равенстве (2) в интегральной форме.

В самом деле, согласно равенствам (8) и (10) имеем

$$f(x+y) = f(x) + \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x+\tau y), y\rangle\,d\tau =$$

$$= f(x) + \langle \nabla f(x), y\rangle + \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x+\tau y) - \nabla f(x), y\rangle\,d\tau. \tag{11}$$

Отсюда в силу равенства (2) получим

$$o(y) = \int\limits_0^1 \langle \nabla f(x+\tau y) - \nabla f(x), y\rangle\,d\tau.$$

Пример 7. Для дифференцируемых числовых функций имеет место теорема о среднем

$$f(x+y) = f(x) + \langle \nabla f(x+\theta y), y\rangle,$$

где θ – некоторое действительное число, удовлетворяющее условию $0 \le \theta \le 1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться формулой (8) и формулой конечных приращений

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(\theta),$$

в которой $0 \le \theta \le 1$.

Дифференцирование векторных функций. Действуя по аналогии с дифференцированием числовых функций, можем ввести понятие дифференцируемости и векторных функций.

Векторная функция $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если найдется такая действительная матрица A размерности $m \times n$, что для всех $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$g(x + \Delta x) = g(x) + A\Delta x + R(\Delta x), \tag{12}$$

в котором $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – векторная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{|R(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0.$$

Матрица A называется *производной* или *матрицей Якоби* отображения g. Как и в случае производной отображения числовой функции обозначать матрицу Якоби будем либо $g'(x)$, либо $\nabla g(x)$.

Функция $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемой* на множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема во всех точках Q. Если же функция g дифференцируема во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то будем говорить просто, что функция g *дифференцируема*.

Действуя по аналогии с формулами (1) и (2), перепишем равенство (12) в следующем виде:

$$g(x + \Delta x) = g(x) + g'(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{13}$$

Равенство (13) означает, что векторная функция g, дифференцируемая в точке x, допускает в этой точке *линейную аппроксимацию*. При этом, как легко видеть, для дифференцируемой функции

$$g(x) = (g^1(x), \dots, g^m(x))$$

элементы матрицы Якоби определяются равенством

$$g'^i_j(x) = \frac{\partial g^i(x)}{\partial x^j}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Приведем два примера, иллюстрирующие свойства дифференцируемых векторных функций.

Пример 8. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – функция, дифференцируемая в точке x, и пусть $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ – функция, дифференцируемая в точке $g(x)$. Тогда, как легко видеть, справедливо следующее цепное правило дифференцирования сложных функций:

$$[h(g(x))]' = h'(g(x))g'(x).$$

Пример 9. Теорема о среднем для векторных функций, вообще говоря, неверна: в общем случае не существует такого действительного числа θ, удовлетворяющего условию $0 \le \theta \le 1$, что

$$g(x+y) = g(x) + g'(x+\theta y)y$$

для некоторой дифференцируемой на отрезке $[x, x+y]$ векторной функции $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. При этом, однако, для дифференцируемой на отрезке $[x, x+y]$ функции $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ справедлива следующая формула, аналогичная формуле (11):

$$g(x+y) = g(x) + \int\limits_0^1 g'(x+\tau y)y\,d\tau =$$

$$= g(x) + g'(x)y + \int\limits_0^1 (g'(x+\tau y) - g'(x))y\,d\tau.$$

Более того, несложно заметить, что найдутся такие действительные числа $\theta_1, \ldots \theta_m$, для которых выполнено равенство

$$g^i(x+y) = g^i(x) + \sum_{j=1}^n g'^i_j(x+\theta_i y)y^j, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (14)$$

При этом именно равенство (14), очевидно, представляет собой аналог теоремы о среднем для дифференцируемых векторных функций.

Условие Липшица. Предположим, что на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ определена векторная функция $g\colon M \to \mathbb{R}^n$. Говорят, что функция g удовлетворяет на множестве M *условию Липшица*, если найдется такое положительное число L, что для всех $x, y \in M$ выполенено неравенство

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|. \tag{15}$$

Легко видеть, что каждая функция, удовлетворяющая на множестве M условию Липшица, непрерывна на этом множестве. Обратное, конечно, неверно. Вместе с тем, если функция g дифференцируема на множестве M и для всех $x \in M$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right| < K, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

где K – некоторое положительное число, то функция g удовлетворяет на множестве M условию Липшица.

Последнее утверждение легко доказать, если использовать понятие нормы матрицы. Напомним, что неотрицательное число α называется *нормой матрицы* A типа $(n \times n)$, если α – наименьшее число, для которого еще выполняется условие

$$|Ax| \leq \alpha|x|,$$

где x – произвольный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Норма матрицы A обычно обозначается через $\|A\|$. При этом, как легко проверить, если A и B две произвольные $(n \times n)$ – матрицы, то

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

и

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Выполнение условия (16), очевидно, влечет за собой неравенство

$$\|g'(x)\| \leq L, \tag{17}$$

справедливое для всех значений $x \in M$, где L – некоторое положительное число, зависящее только от K. Тогда из неравенства (17) и формулы (14) непосредственно следует, что каждая дифференцируемая функция, удовлетворяющая на множестве

M условию (16), удовлетворяет на этом множестве условию Липшица.

Условие Липшица (15) играет огромную роль, например, в теории дифференциальных уравнений. В теории же экстремальных задач чаще используется условие Липшица для функциональных матриц.

Пусть G – функциональная $(n \times n)$ – матрица,

$$G(x) = (g_j^i(x)),$$

где g_j^i – числовые функции, определенные на некотором множестве $M \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что матрица G удовлетворяет на множестве M *условию Липшица*, если найдется такое положительное число L, что для всех точек $x, y \in M$ выполнено неравенство

$$\|G(x) - G(y)\| \leq L|x - y|. \tag{18}$$

Условие (18) существенным образом используется при формулировке и доказательстве теорем сходимости численных методов математического программирования (см. §3 главы 2). Некоторые же простейшие утверждения, связанные с дифференцируемостью функциональных матриц и условием (18), приведены ниже в качестве упражнений 4 и 5.

Упражнения.

(1) Докажите равенство (5) используя координатную форму записи и представление (4).

(2) Докажите, что при $x \neq \mathbf{0}$ функция

$$f(x) = |x|$$

дифференцируема и

$$\nabla f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Более того, докажите, что при $x = \mathbf{0}$ данная функция недифференцируема.

(3) Докажите, что из непрерывности по x производной Гато следует дифференцируемость (если угодно, дифференцируемость по Фреше).

(4) Пусть

$$G(x) = (g_j^i(x))$$

– некоторая функциональная матрица и пусть все функции g^i_j определены и непрерывно дифференцируемы. Покажите, что если все частные производные функций g^i_j ограничены, то матрица G удовлетворяет условию Липшица.

Указание: Используйте теорему о среднем (см. примеры 7 и 9).

(5) Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – дифференцируемая функция и пусть функциональная матрица g' удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[x, x+y]$, т.е.

$$\|g'(u) - g'(v)\| \leq L|x - y|$$

для всех значений $u, v \in [x, x+y]$. Покажите, что в этом случае

$$|g(x+y) - g(x) - g'(x)y| \leq L|y|^2.$$

Указание: Используйте пример 9.

§3. Дважды дифференцируемые функции

В §3 изучаются основные свойства дважды дифференцируемых числовых функций и вторых производных многомерных отображений. Данная производная оказывается функциональной матрицей, называемой матрицей Гессе. Роль матриц Гессе в теории экстремальных задач трудно переоценить, поскольку они часто используется при доказательстве теорем существования и выводе достаточных условий минимума. Кроме того, матрицы Гессе нашли широкое применение и при конструировании различных численных методов минимизации (см. §3 главы 2).

Вторые производные и дифференцируемость. Числовая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *дважды дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в этой точке вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Из данного определения непосредственно следует, что если функция f дважды дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то частные производные (1) определены в некоторой окрестности E точки x и непрерывны в самой точке x (см. теорему 8). Более того, в точке x определены также и вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad i,j = 1,\dots,n$$

этой функции. И, наконец, имеет место следующая[1]

Теорема 9 (Юнг). *Если числовая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^j \partial x^i}$$

для всех $i \neq j$.

Доказательство. Исключительно для простоты обозначений докажем теорему 9 для случая функции двух переменных (см., например, [**5**]).

Положим

$$\Delta^2 f = f(a^1 + h, a^2 + h) - f(a^1 + h, a^2) - f(a^1, a^2 + h) + f(a^1, a^2)$$

и

$$\varphi(x) = f(x, a^2 + h) - f(x, a^2).$$

Тогда имеем

$$\Delta^2 f = \varphi(a^1 + h) - \varphi(a^1).$$

Отсюда согласно теореме Лагранжа о среднем следует, что

$$\Delta^2 f = \varphi'(a^1 + \theta h)h =$$
$$= \left(\frac{\partial f(a^1 + \theta h, a^2 + h)}{\partial x^1} - \frac{\partial f(a^1 + \theta h, a^2)}{\partial x^1}\right) h,$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Поскольку функция

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}$$

дифференцируема в точке (a^1, a^2), имеем

$$\frac{\partial f(a^1 + \theta h, a^2 + h)}{\partial x^1} - \frac{\partial f(a^1, a^2)}{\partial x^1} =$$

---

[1] Вообще говоря, думается, что данную теорему все-таки уместно называть теоремой Янга (см. [**28**]).

$$= \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^1 \partial x^1}\theta h + \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^2 \partial x^1} h + o(h)$$

и

$$\frac{\partial f(a^1 + \theta h, a^2)}{\partial x^1} - \frac{\partial f(a^1, a^2)}{\partial x^1} = \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^1 \partial x^1}\theta h + o(h).$$

Поэтому

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^2 \partial x^1} h^2 + o(h^2). \tag{2}$$

Теперь положим

$$\psi(y) = f(a^1 + h, y) - f(a^1, y).$$

Тогда

$$\Delta^2 f = \psi(a^2 + h) - \psi(a^2).$$

Следовательно, действуя как и при выводе соотношения (2), получим

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^1 \partial x^2} h^2 + o(h^2)$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial^2 f(a^1, a^2)}{\partial x^1 \partial x^2}.$$

□

Матрица

$$H = (h^i_j),$$

где

$$h^i_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

называется *матрицей вторых производных* или *матрицей Гессе* и часто обозначается через $f''(x)$ или $\nabla^2 f(x)$. Из сказанного выше следует, что для дважды дифференцируемых функций матрица H определена однозначно, причем в силу теоремы 9 H — симметрическая матрица.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Следующий пример дополняет теорему 9 и устанавливает второе важнейшее свойство дважды дифференцируемых числовых функций.

Пример 10. Рассмотрим скалярную функцию

$$\varphi(\tau) = f(x + \tau y),$$

где $0 \le \tau \le 1$. Пусть числовая функция f дважды дифференцируема на некотором отрезке $[x, x+y]$. Тогда, действуя как и при доказательстве дифференцируемости функции φ (см. §3, (7)), несложно показать, что эта функция дважды дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причем

$$\varphi''(\tau) = \langle y, \nabla^2 f(x + \tau y) y\rangle.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, для функции φ запишем

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta),$$

где $0 \le \theta \le 1$. Тогда, как легко видеть, найдется такое действительное число θ, удовлетворяющее условию $0 \le \theta \le 1$, что

$$f(x+y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x + \theta y) y, y\rangle.$$

Последнее равенство принято называть *формулой Тейлора* для дважды дифференцируемых числовых функций *с остаточным членом в форме Лагранжа.*

В дальнейшем для нас гораздо большее значение будет иметь *формула Тейлора* для дважды дифференцируемых числовых функций *с остаточным членом в форме Пеано.*

Теорема 10 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Если числовая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то для всех $y \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство*

$$f(x+y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x) y, y\rangle + o(y^2). \qquad (3)$$

Доказательство. Следуя [**5**], докажем теорему 10 в обозначениях, позволяющих переписать равентсво (3) в виде

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{x}-\bar{a}\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}), \bar{x}-\bar{a}\rangle + o(|\bar{x}-\bar{a}|^2).$$

В последних обозначениях положим

$$R(\bar{x}) = f(\bar{x}) - (f(\bar{a}) + \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{x}-\bar{a}\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(\bar{a})(\bar{x}-\bar{a}), \bar{x}-\bar{a}\rangle).$$

Тогда

$$R(\bar{x}) = R(\bar{x}) - R(\bar{a}) = R(\bar{a}+\Delta x) - R(\bar{a}),$$

где $\Delta x = \bar{x} - \bar{a}$. Более того,

$$R(\bar{a}+\Delta x) - R(\bar{a}) = D^1 + \ldots + D^n,$$

где для всех $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} D^i = R(a^1 + \Delta x^1, \ldots, a^i + \Delta x^i, a^{i+1}, \ldots, a^n) - \\ - R(a^1 + \Delta x^1, \ldots, a^{i-1} + \Delta x^{i-1}, a^i, \ldots, a^n) = \\ = g(a^i + \Delta x^i) - g(a^i). \end{aligned}$$

Поскольку функция f дважды дифференцируема в точке a, она также дифференцируема и в некоторой окрестности E этой точки. Поэтому функция R дифференцируема в E. Следовательно, согласно теореме Лагранжа о среднем

$$D^i = \frac{\partial g(a^i + \xi^i \Delta x^i)}{\partial x^i} \Delta x^i,$$

где $0 \leq \xi^i \leq 1$. Поэтому

$$D^i = \frac{\partial R(a + \theta_i)}{\partial x^i} \Delta x^i,$$

где

$$\theta_i = (\Delta x^1, \ldots, \Delta x^{i-1}, \xi^i \Delta x^i, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$R(\bar{x}) = \frac{\partial R(\bar{a} + \theta_1)}{\partial x^i} \Delta x^1 + \ldots + \frac{\partial R(\bar{a} + \theta_n)}{\partial x^i} \Delta x^n. \qquad (4)$$

Заметим теперь, что для всех $i = 1, \ldots, n$ точка $a + \theta_i$ содержится в множестве E. Поэтому

$$\frac{\partial R(\bar{a} + \theta_i)}{\partial x^i} = o(|\bar{x} - \bar{a}|).$$

Отсюда в силу равенства (4) немедленно следует, что

$$R(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^2).$$

$\square$

Таким образом, если функция f дважды дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке она допускает *квадратичную аппроксимацию второго порядка*, т.е. для квадратичной формы

$$F(\Delta x) = f(x) + \langle \nabla f(x), \Delta x \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x) \Delta x, \Delta x \rangle$$

выполнено неравенство

$$|f(x + \Delta x) - F(\Delta x)| = o(\Delta x^2).$$

Упражнения.

(1) Докажите теорему 9 в общем случае.

(2) Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется k раз дифференцируемой в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если она $k-1$ раз дифференцируема в этой точке вместе со своими частными производными $(k-1)$-порядка. Сформулируйте и докажите для такой функции теоремы 9 и 10.

(3) Пусть A – некоторая симметрическая $(n \times n)$-матрица и пусть b – некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle / 2 - \langle b, x \rangle.$$

Покажите, что данная функция дважды дифференцируема и

$$\nabla^2 f(x) \equiv A.$$

(4) Покажите, что при $x \neq \mathbf{0}$ функция

$$f(x) = |x|$$

дважды дифференцируема и

$$\nabla^2 f(x) = I|x|^{-1} - xx^T |x|^{-3},$$

где T означает транспонирование и I – единичная матрица.

§4. Экстремальные задачи в анализе

Экстремальные задачи в анализе – это задачи, связанные с отысканием минимумов и максимумов гладких числовых функций. Как и в случае числовых функций скалярного переменного, в случае гладких числовых функций векторного переменного и необходимые, и достаточные условия экстремума связаны с дифференцированием (по крайней мере в классическом анализе). Более того, в обоих случаях как необходимые, так и достаточные условия, вообще говоря, носят локальный характер. Поэтому для получения условий глобального экстремума приходится накладывать на исследуемую функцию некоторые дополнительные условия, например, условие выпуклости.

Необходимое и достаточное условия минимума. Во избежание возможных разночтений, прежде всего, приведем следующее определение минимума и максимума числовой функции.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – некоторая числовая функция. Точка $x^* \in \mathbb{R}^n$ называется точкой *минимума* (или точкой *локального минимума*), если для всех x из некоторой окрестности E точки x^* выполнено неравенство

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Аналогичным образом, точка $x_1^* \in \mathbb{R}^n$ называется точкой *максимума* (или точкой *локального максимума*), если для всех x из некоторой окрестности E_1 точки x_1^* выполнено неравенство

$$f(x_1^*) \geq f(x).$$

Легко видеть, что если x^* – точка минимума функции f, то эта точка является точкой максимума функции $-f$. Поэтому везде в дальнейшем, если, конечно, особо не будет оговорено противное, условия экстремума для функции f будут отождествляться с условиями минимума функции f.

Для гладких числовых функций необходимое условие минимума дает следующая классическая

Теорема 11 (Ферма). *Пусть x^* – точка минимума числовой функции f. Предположим, что функция f дифференцируема в точке x^*. Тогда*

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\nabla f(x^*) \neq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Так как x^* – точка минимума функции f, для всех x из некоторой окрестности E точки x выполнено неравенство

$$f(x^*) \leq f(x). \tag{2}$$

Пусть τ – некоторое действительное число. Тогда, поскольку функция f дифференцируема в точке x^*, то

$$f(x^* + y) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), y \rangle + o(y)$$

или, что при $y = -\tau \nabla f(x^*)$ эквивалентно,

$$f(x^* - \tau \nabla f(x^*)) = f(x^*) - \tau |\nabla^2 f(x^*)| - o(\tau). \tag{3}$$

Поэтому из соотношений (1) и (3) следует, что при всех достаточно малых положительных τ имеет место неравенство

$$f(x^* - \tau \nabla f(x^*)) < f(x^*),$$

противоречащее неравенству (2). $\square$

Приведенное доказательство, конечно, не единственное. Основное его достоинство состоит в том, что оно иллюстрирует общий принцип вывода необходимых условий в экстремальных задачах. Кроме того, данное доказательство весьма поучительно: если в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$ условие минимума не выполняется, оно (доказательство) показывает, что точку с меньшим значением функции f следует, вообще говоря, искать в направлении

$$y = -\nabla f(x).$$

Несколько усиливая требования относительно гладкости функции f, имеем следующее достаточное условие существования минимума.

Теорема 12. *Пусть в точке x^* для числовой функции f выполнены условия теоремы 11 и пусть в точке x^* функция f дважды дифференцируема. Тогда, если матрица $\nabla^2 f(x^*)$ положительно определена, то x^* – точка локального минимума.*

Доказательство. Пусть y – произвольный вектор единичной длины. Поскольку в точке x^* для функции f выполнены условия теоремы 11, то в силу теоремы 10 имеем

$$f(x^* + \tau y) = f(x^*) + \frac{\tau^2}{2}\langle \nabla^2 f(x^*)y, y\rangle + o(\tau^2), \tag{4}$$

где τ – некоторое действительное число. С другой стороны, если l и L – соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $\nabla^2 f(x^*)$, то, как известно, справедливы неравенства

$$l\langle y, y\rangle \leq \langle \nabla^2 f(x^*)y, y\rangle \leq L\langle y, y\rangle. \tag{5}$$

Поэтому в силу условия $|y| = 1$ из соотношений (4) и (5) следует, что

$$f(x^* + \tau y) \geq f(x^*) + \frac{\tau^2 l}{2} + o(\tau^2). \tag{6}$$

Заметим теперь, что найдется такое достаточно малое положительное число τ_0, что для всех значений $-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$ выполнено неравенство

$$\frac{\tau^2 l}{2} \geq o(\tau^2).$$

Но матрица $\nabla^2 f(x^*)$ положительно определена. Поэтому из неравенства (6) следует, что

$$f(x^* + \tau y) \geq f(x^*).$$

Но выбор направления y выше не играл никакой роли, т.е. x^* – точка минимума. □

Если в точке x^* выполняются условия теоремы 11, но не выполняются условия теоремы 12, то в этой точке, конечно, может и не быть экстремума. При этом для числовых функций скалярного переменного исследование точки x^* на предмет экстремума может быть продолжено с использованием известной техники высших производных. Для многомерного случае такое исследование в принципе возможно. Однако, оно чрезвычайно трудоемко ввиду сложности используемого здесь математического аппарата (см. упражнения 4–6).

Точку x^*, удовлетворяющую условиям теоремы 12, принято называть *невырожденной точкой минимума.* Если в некоторой окрестности точки x^* локального минимума нет других точек локального минимума, то эту точку называют *локально единственной точкой минимума.* Оказывается, что понятия невырожденной точки минимума и локально единственной точки минимума тесно связаны друг с другом.

Теорема 13. *Невырожденная точка минимума x^* дважды дифференцируемой числовой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально единственна.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что по определению дважды дифференцируемой функции для всех значений $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\nabla f(x) = \nabla f(x^*) + \nabla^2 f(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

Поэтому всякий раз, когда величина $|x - x^*|$ достаточно мала

$$|\nabla f(x)| = |\nabla^2 f(x^*)(x - x^*)| + o(|x - x^*|) \geq$$

$$\geq l|(x - x^*)| + o(|x - x^*|) > 0,$$

где l – наименьшее собственное число матрицы $\nabla^2 f(x^*)$ и $x \neq x^*$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности M точки x^* нет стационарных точек функции f, отличных от x^*. Значит, в окрестности M нет точек минимума функции f, отличных от x^*. $\square$

Глобальный минимум. Пусть как и ранее $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – некоторая числовая функция. Точка $x^* \in \mathbb{R}^n$ называется точкой *глобального минимума* функции f, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$f(x^*) \leq f(x).$$

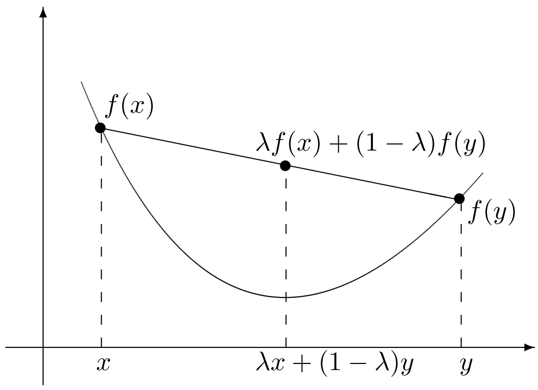

Рис. 2

Аналогичным образом, точка $x_1^* \in \mathbb{R}^n$ называется точкой *глобального максимума* функции f, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$f(x_1^*) \geq f(x).$$

Ясно, что точка глобального минимума (максимума) является точкой локального минимума (максимума); обратное, конечно, неверно. При этом в отличие от локального экстремума исследование функций на глобальный экстремум обычно связывают с понятием выпуклости.

Числовая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любого действительного числа $0 \leq \lambda \leq 1$ имеет место неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{7}$$

Геометрически сказанное означает, что график функции f скалярного переменного x на отрезке $[x, y]$ лежит ниже хорды, соединяющей точки $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$ (см. рис. 2).

В приведенном выше определении выпуклой функции фигурируют две точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ и их выпуклые комбинации

$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$, удовлетворяющие неравенству (7). Аналогичное неравенство, известное как *неравенство Иенсена*, имеет место для любого конечного числа точек и их выпуклых комбинаций. Неравенство Иенсена обычно формулируют в виде следующего предложения, приводимого здесь без доказательства. [2]

Предложение 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– некоторая выпуклая функция. Тогда для всех* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ *и неотрицательных действительных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$*, удовлетворяющих условию*

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1,$$

справдливо неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k).$$

При работе с выпуклыми функциями обычно используют не определение (7), а некоторые другие соотношения, эквивалентные (7). Для гладких функций такие соотношения достаточно просты и вытекают из следующего тривиального предложения.

Предложение 2. *Пусть* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– дифференцируемая функция. Тогда, если функция* f *выпукла, то для всех значений* $x_1 \geq x_2$

$$f'(x_1) \geq f'(x_2)$$

и обратно.

Первое из важнейших свойств выпуклых функций устанавливает следующее

Предложение 3. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– дифференцируемая функция. Тогда, если функция* f *выпукла, то для всех значений* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(x + y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y \rangle$$

и обратно.

---

[2] Относительно доказательства предложений 1–4 и других важных свойств выпуклых функций см., например, [**9, 14, 20**].

Второе из важнейших свойств выпуклых функций устанавливает следующее

Предложение 4. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция. Тогда, если функция f выпукла, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$ матрица $\nabla^2 f(x)$ неотрицательно определена и обратно.*

Замечание. В подавляющем большинстве практических ситуаций проверку выпуклости дважды дифференцируемых функций осуществляют с помощью предложения 4.

Понятие выпуклости играет огромную роль в теории экстремальных задач. В самом деле, теорема 11 гарантирует существование лишь стационарных точек, т.е. точек, в которых $\nabla f(x) = \mathbf{0}$; такая точка, как известно, может быть не только точкой экстремума, но и точкой перегиба или, скажем, седловой точкой. С другой стороны, теорема 12 гарантирует существование лишь локального минимума. Для выпуклых функций, однако, все эти случаи невозможны, поскольку справедлива следующая важнейшая

Теорема 14. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, дифференцируемая в некоторой точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, и пусть*

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Тогда x^* – точка глобального минимума.

Доказательство. Поскольку f – выпуклая функция, в силу предложения 3 для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle.$$

Но в силу условия (8) отсюда следует, что

$$f(x) \geq f(x^*)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. x^* – точка глобального минимума. □

Замечание. Теорема 14 дает необходимое и достаточное условие глобального минимума выпуклой функции. Вместе с тем, следует иметь ввиду, что данная теорема не гарантирует единственность такого минимума.

Упражнения.

(1) Пусть A – некоторая симметрическая $(n \times n)$-матрица и пусть b – некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$. Каким условиям должна удовлетворять матрица A, чтобы функция
$$f(x) = \langle Ax, x\rangle/2 - \langle b, x\rangle$$
имела минимум? Максимум?

(2) Принимая во внимание результаты упражнения 1, найдите необходимое и достаточное условия минимума функции
$$f(x) = \langle Ax, x\rangle/2 - \langle b, x\rangle.$$
Будет ли найденный минимум глобальным?

(3) Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема и пусть эта функция имеет два максимума. Тогда, как легко видеть, f имеет по крайней мере один минимум. Покажите, что в случае дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ это утверждение уже неверно.

(4) Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ четырежды дифференцируема в точке $x^* \in R$ и пусть $f'(x^*) = 0$ и $f''(x^*) = 0$. Покажите, что если $f'''(x^*) = 0$ и $f^{IV}(x^*) > 0$, то x^* – точка минимума, а если $f'''(x^*) = 0$ и $f^{IV}(x^*) < 0$, то x^* – точка максимума.

(5) Предположим, что в условиях упражнения 4 $f^{IV}(x^*) = 0$. Что дальше?

(6) Распространите результаты упражнений 4 и 5 на случай функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Указание: Используйте упражнение 2 §3.

Глава 2

Основы общей теории математического программирования

Настоящая глава посвящена изучению одного из основополагающих разделов теории экстремальных задач – математическому программированию. "Математическое" означает, что оперировать здесь приходится, главным образом, математическим инструментарием, а "программирование" говорит о том, что исследование осуществляется строго по некоторым установленным правилам. И, хотя, термин "математическое программирование" исторически сложился достаточно давно, его, видимо, нельзя считать самым удачным, поскольку он, вообще говоря, может привести к разночтениям. [1]

Открывает главу §1, в котором рассматривается простейшая задача математического программирования – задача на условный экстремум. Данная задача имеет огромное методическое значение, поскольку, несмотря на ее локальный характер, здесь наиболее наглядно демонстрируется общий принцип решения экстремальных задач, заключающийся в сведении задачи с ограничениями к задаче исследования функции на безусловный экстремум. Идея этого принципа принадлежит Лагранжу и потому используемый здесь прием носит название метода множителей Лагранжа.

Непосредственным развитием задачи на условный экстремум является задача нелинейного программирования, рассмотренная в §2. Данная задача является наиболее общей из задач математического программирования. Приведенная в §2

[1]Именно, иногда приходится слышать, что лучшими специалистами в области математического программирования являются специалисты в области компьютерного программирования – вычислители (!?).

теорема Каруша – Джона является органичным обобщением метода множителей Лагранжа, позволяющим, вообще говоря, с единых позиций исследовать экстремальные задачи различной природы. Отметим, что в §2 доказательство теоремы о необходимом условии минимума в задаче нелинейного программирования осуществляется почти теми же методами, что и доказательство аналогичных теорем в задаче на условный экстремум.

Необходимые условия экстремума в задачах математического программирования приводят к некоторым системам уравнений, как правило нелинейных. Поэтому истинным назначением необходимых условий экстремума следует считать не только получение системы уравнений, позволяющей найти минимум. Часто необходимое условие может быть использовано для конструирования некоторых специальных методов, приводящих к эффективным вычислительным процедурам нахождения экстремума. Одна из таких процедур, базирующаяся на использовании метода Ньютона, достаточно подробно описана в §3.

В §4 рассматривается важнейшая из задач математического программирования – задача выпуклого программирования. Использование конкретных особенностей этой задачи (выпуклость функций и множеств, с которыми здесь приходится иметь дело) позволяет получить существенно более законченные результаты, чем результаты §2. В частности, основной результат теории выпуклого программирования – теорема Куна – Таккера в отличие от теоремы Каруша – Джона дает не только необходимое, но и достаточное условия экстремума. Более того, выпуклость функций и множеств позволяет несколько продвинуться в исследовании задачи выпуклого программирования – получить теорему о седловой точке и рассмотреть двойственную задачу.

Частным случаем задачи выпуклого программирования является задача линейного программирования, рассмотренная в §5. Отличительной особенностью этой задачи является то, что здесь необходимое и достаточное условие экстремума (теорема Куна – Таккера) не позволяет свести экстремальную задачу к поиску решения некоторой системы уравнений, как это было в §1–§4. Однако конкретные особенности этой задачи приводят к эффективной вычислительной процедуре – знаменитому симплекс-методу, позволяющему во многих практических случаях легко найти ее решение. Описание симплекс-метода, а также некоторые вопросы его реализации приведены в §6.

И, наконец, заметим, что в §4 и §5 рассматриваются некоторые приложения основных результатов §1–§5 к задаче о распределении ресурсов.

§1. Задача на условный экстремум

В подавляющем большинстве практических ситуаций в различных областях человеческой деятельности исследование функций на экстремум приходится осуществлять с учетом некоторых дополнительных ограничений, учитывающих реальные особенности той или иной экстремальной задачи. Простейшей из таких задач является задача на условный экстремум, т.е. задача, заключающаяся в минимизации числовой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при выполнении условия

$$g(x) = \mathbf{0},$$

где $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – некоторая заданная функция.

Задачу на условный экстремум обычно записывают в следующем виде:

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ g^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{1}$$

Сформулированная таким образом задача, очевидно, представляет интерес только в случае, когда $n > m$, что и предполагается в дальнейшем. При этом необходимо отметить, что хотя задача (1) и является частным случаем общей задачи нелинейного программирования, которая будет рассмотрена в §2, представляется более чем уместным провести ее подробное изучение, поскольку используемые здесь идеи имеют общий характер и более наглядны.

Метод множителей Лагранжа. Пусть

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

– множество точек, называемых *допустимыми* точками в задаче (1). Точка $x^* \in Q$ называется точкой *минимума* (или точкой *локального минимума*) в задаче (1), если для всех $x \in Q$, достаточно близких к x^*, выполнено неравенство

$$f(x^*) \le f(x).$$

Необходимое условие минимума в задаче (1) дает следующая важнейшая для понимания предмета

Теорема 1. *Пусть x^* – точка минимума в задаче* (1) *и пусть функции f и $g^1, \ldots, g^m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности E точки x^*. Тогда найдутся такие действительные числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, не все равные нулю одновременно, что*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Настоящая теорема восходит еще к Лагранжу. Поэтому функцию

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x)$$

будем называть *расширенной функцией Лагранжа*[2] а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – *множителями Лагранжа.*

Условие (2) вместе с системой

$$g^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

образуют систему $n + m$ уравнений относительно $n + m + 1$ неизвестного $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, x^*$. При этом велик соблазн принять

$$\lambda_0^* = 1$$

и, таким образом, замкнуть систему. Последнее, однако, можно делать далеко не всегда.

---

[2]Смысл подобной терминологии станет ясен чуть ниже (см. также гл. 3, §2).

Пример 1. Рассмотрим весьма простую и занимательную задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = x^1$$

при ограничении

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0. \tag{3}$$

Действуя формально, положим

$$L(x^1, x^2, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 x^1 + \lambda_1((x^1)^2 + (x^2)^2)$$

и

$$\lambda_0 = 1.$$

Отсюда в силу теоремы 1 имеем

$$1 + 2\lambda_1 x^1 = 0 \tag{4}$$

и

$$2\lambda_1 x^2 = 0, \tag{5}$$

где $\lambda_1 \neq 0$, поскольку в противном случае ограничение (3) не учитывается функцией L. Дополнив систему (4), (5) уравнением (3), из уравнений (5) и (3) имеем

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Тогда уравнение (4) превращается в равенство

$$1 = 0. \tag{!?}$$

Возникает естественный вопрос: когда же можно записать функцию L в виде

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x)?$$

Ответ на этот вопрос часто связывают с понятием регулярности точки минимума.

Точка $x^* \in Q$ называется *регулярной точкой минимума*, если функции $f, g^1, \ldots, g^m$ дифференцируемы в некоторой ее окрестности E, а вектора $\nabla g^1(x^*), \ldots, \nabla g^m(x^*)$ линейно независимы.

Теорема 2. *Если x^* – регулярная точка минимума, то найдутся такие действительные числа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, что*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Теорему 2 принято называть теоремой о методе множителей Лагранжа, а функцию L – *функцией Лагранжа*. Рассмотренный выше пример 1 показывает, что метод множителей Лагранжа наверняка может быть справедлив лишь при выполнении условия регулярности, поскольку в этом примере точка $x^1 = 0, x^2 = 0$ хотя и была точкой минимума, но не регулярной.

Заметим теперь, что теорема 2 непосредственно следует из теоремы 1. В самом деле, в регулярном случае $\lambda_0^* \neq 0$, так как иначе

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) = \mathbf{0},$$

где, очевидно, множители Лагранжа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ не все равны нулю, что противоречит линейной независимости векторов $\nabla g^1(x^*), \ldots, \nabla g^m(x^*)$. Поэтому, разделив равенство (2) на λ_0^*, с точностью до обозначений получим равенство (6). С другой стороны, если справедлива теорема 2, то справедлива также и теорема 1. Действительно, если вектора $\nabla g^1(x^*), \ldots, \nabla g^m(x^*)$ линейно зависимы, то по определению имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g^i(x^*) = \mathbf{0},$$

где

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i^2 \neq 0.$$

Тогда равенство (2) справедливо при $\lambda_0^* = 0$ и

$$\lambda_i^* = \mu_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, теорема 2 следует из теоремы 1 и обратно, т.е. достаточно доказать одну из теорем 2 или 1. Ниже приводится доказательство теоремы 1.

Замечание. Несложно заметить, что для всех значений $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_j} = g^j(x), \quad j = 1, \dots, m.$$

Поэтому в регулярном случае необходимое условие экстремума для задачи (1) иногда записывают в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial x^i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1. В настоящее время известно несколько доказательств теоремы 1. Здесь приводится доказательство, которое, вообще говоря, нельзя назвать лучшим. Основное его достоинство состоит в том, что используемый при данном доказательстве математический аппарат, не предполагает использования никаких дополнительных сведений, не содержащихся в главе 1.

Пусть ε – некоторое положительное число и пусть U – множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых

$$|x - x^*| \le \varepsilon.$$

Выберем число ε столь малым, что все функции f и $g^1, \dots, g^m$ были непрерывно дифференцируемы на множестве $Q \cap U \subset E$. Наряду с задачей (1) введем в рассмотрение задачу о минимизации функции $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задаваемой равенством

$$f_k(x) = f(x) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{m} (g^i(x))^2 + \frac{1}{2} |x - x^*|^2, \tag{8}$$

где k – некоторое натуральное число.

Функция f_k, очевидно, непрерывна, а множество $Q \cap U$ – компактно. Поэтому согласно теореме 7 главы 1 задача о минимизации функции f_k при всех значениях k имеет на множестве $Q \cap U$ решение x_k, т.е. существует такое $x_k \in Q \cap U$, что

$$f_k(x_k) \le f_k(x^*).$$

Отсюда в силу равенства (8) имеем

$$f(x_k) + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2 \le f(x^*)$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 \le \frac{2}{k}\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2\right).$$

Поскольку для всех значений $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$|x_k - x^*| \le \varepsilon,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k}\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 = 0,$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty} g^i(x_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Выберем некоторую неограниченно возрастающую последовательность

$$k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} k_i = \infty$$

натуральных чисел. Легко видеть, что последовательность

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_i}, \ldots \tag{9}$$

ограничена. Поэтому в силу теоремы 4 главы 1 без какой-либо потери общности можно считать, что существует предел

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = \bar{x},$$

где $\bar{x}$ – некоторая точка множества U. При этом

$$g^i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

и

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2}|\bar{x} - x^*|^2 \le f(x^*). \tag{10}$$

Поскольку x^* – точка минимума на Q, то

$$f(x^*) \le f(\bar{x}).$$

Поэтому из неравенства (10) следует, что

$$\bar{x} = x^*,$$

т.е. предельная точка всякой последовательности вида (9) совпадает с точкой x^*. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

т.е. для всех достаточно больших значений k точка x_k лежит внутри множества U. Но на множестве U

$$\nabla f_k(x_k) = \mathbf{0}$$

или, что эквивалентно,

$$\nabla f(x_k) + k\sum_{i=1}^{m} g^i(x_k)\nabla g^i(x_k) + x_k - x^* = \mathbf{0}. \qquad (11)$$

Положим

$$\lambda_0(k) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2}}$$

и

$$\lambda_i(k) = \frac{kg^i(x_k)}{\sqrt{1 + k^2\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2}}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Тогда равенство (11) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lambda_0(k)\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k)\nabla g^i(x_k) + \lambda_0(k)(x_k - x^*) = \mathbf{0}. \qquad (12)$$

Поскольку, очевидно,

$$\sum_{i=0}^{m}(\lambda_i(k))^2 = 1$$

для всех значений $k = 1, 2, 3, \dots$ то существует такая неограниченно возрастающая последовательность

$$k_1, k_2, \dots, k_j \dots, \quad \lim_{j\to\infty} k_j = \infty \qquad (13)$$

натуральных чисел, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_i(k_j) = \lambda_i^*, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i^*)^2 = 1.$$

Поэтому, переходя в равенстве (12) к пределу при $k \to \infty$ вдоль множества (13), получим равенство (2). □

Замечание. Приведенное доказательство наиболее наглядно эксплуатирует основную идею метода множителей Лагранжа – применение необходимого условия экстремума в задаче без ограничений для получения необходимого условия экстремума в задаче с ограничениями. Для достижения этой цели строится последовательность задач безусловной минимизации (8), отличающихся одна от другой все большим "штрафом"

$$\frac{k}{2} \sum_{i=1}^{m} (g^i(x))^2$$

за нарушение ограничений. Данный метод, известный как *метод штрафных функций*, широко используется в теории экстремальных задач.

Примеры. Прежде всего, приведем два простейших примера использования теоремы 2.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 \tag{14}$$

при ограничении

$$x^1 + x^2 = 1. \tag{15}$$

Положим

$$g(x^1, x^2) = x^1 + x^2 - 1.$$

Тогда, поскольку для всех значений x^1 и x^2

$$\nabla g(x^1, x^2) = (1, 1),$$

то без какой-либо потери общности можно принять

$$L(x^1, x^2, \lambda) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \lambda(x^1 + x^2 - 1).$$

Поэтому в силу теоремы 2 имеем равенства

$$2x^1 + \lambda = 0 \tag{16}$$

и

$$2x^2 + \lambda = 0, \tag{17}$$

которые совместно с уловием (15) образуют замкнутую систему относительно неизвестных x^1, x^2, λ.

Легко видеть, что решение $x^{*1}, x^{*2}, \lambda^*$ системы (15)–(17) имеет вид

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}, \quad \lambda^* = -1.$$

При этом, очевидно, точка

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}$$

является точкой минимума в задаче (14), (15).

Пример 3. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 \tag{18}$$

при ограничении

$$x^1 + x^2 = 1. \tag{19}$$

Действуя как и в примере 2, несложно показать, что для задачи (18), (19) выполнены условия теоремы 2, причем имеют место равенства

$$-2x^1 + \lambda = 0 \tag{20}$$

и

$$-2x^2 + \lambda = 0. \tag{21}$$

Разрешая теперь систему (19)–(21) относительно неизвестных x^1, x^2, λ, запишем

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}, \quad \lambda^* = 1.$$

При этом заменив функцию (18) функцией

$$f_1(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2,$$

в силу примера 2 видим, что точка

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}$$

является точкой максимума.

В заключение приведем пример, показывающий, что минимум функции Лагранжа не обязан совпадать с минимумом исходной задачи с ограничениями (см. [**10**]).

Пример 4. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = (x^2)^2 - x^1 \tag{22}$$

при ограничении

$$x^1 + (x^1)^3 = 0. \tag{23}$$

Легко видеть, что решение задач (22), (23) достигается в точке

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{24}$$

Функция Лагранжа L при этом имеет следующий вид:

$$L(x^1, x^2, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0((x^2)^2 - (x^1)) + \lambda_1(x^1 + (x^1)^3). \tag{25}$$

В силу теоремы 11 главы 1 необходимое условие минимума функции L дают уравнения

$$-\lambda_0 + \lambda_1(1 + 3(x^1)^2) = 0,$$

$$2\lambda_0 x^2 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 \neq 0$ и, следовательно

$$1 + (3x^1)^2 = 0,$$

что невозможно. Поэтому полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда функция (25) примет вид

$$L(x^1, x^2, \lambda) = (x^2)^2 - x^1 + \lambda(x^1 + (x^1)^3). \tag{26}$$

Легко видеть, что ни при каких значениях λ функция (26) в точке (24) не имеет даже локального минимума. Последнее, вообще говоря, еще раз показывает, что формально методом множителей Лагранжа следует пользоваться с большой осторожностью.

Упражнения.

(1) Точка $x^* \in Q$ называется *локально единственной точкой минимума* задачи (1), если для всех $x \in Q$, достаточно близких к x^*, выполнено неравенство
$$f(x^*) < f(x).$$
Покажите, что если x^* – локально единственная точка минимума в задаче (1), то при доказательстве теоремы 1 слагаемое
$$\frac{1}{2}|x - x^*|^2$$
в правой части равенства (8) можно опустить.

(2) Покажите, что если x^* – регулярная точка минимума в задаче (1), то при доказательстве теоремы 1 существует предел
$$\lim_{k\to\infty} kg^i(x_k) = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

(3) Найдите необходимые условия минимума в задаче
$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ Ax = b. \end{gathered}$$

(4) Пользуясь необходимыми условиями минимума, найдите решения следующих задач:
$$\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \to \min, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \tag{A}$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = 1, \tag{B}$$
$$\langle Qx, x\rangle/2 - \langle p, x\rangle \to \min, \quad Ax = b, \tag{C}$$
где Q – симметрическая положительно определенная матрица.

(5) Проверьте, имеют ли данные задачи решения и, если да, найдите эти решения:
$$\sum_{i=1}^{N} -(x_i)^2 \to \min, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \tag{A}$$
$$\sum_{i=1}^{N} -x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = 1. \tag{B}$$

§2. Нелинейное программирование

Задача нелинейного программирования отличается от задачи на условный экстремум наличием дополнительных ограничений, имеющих вид

$$h(x) \leq \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ – некоторая заданная функция, и называемых *ограничениями типа неравенств*. Поэтому ограничения

$$g(x) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

где $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, в задаче нелинейного программирования называются *ограничениями типа равенств*. Таким образом, задача нелинейного программирования заключается в минимизации числовой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при выполнении ограничений (1) и (2).

Задачу нелинейного программирования часто записывают в следующем виде:

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ g^i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r, \end{gathered} \tag{3}$$

объединяя тем самым функцию f, подлежащую минимизации, и ограничения (1) и (2), которые следует учитывать при выполнении минимизации. Как и в случае задачи на условный экстремум, сформулированная таким образом задача (3) нелинейного программирования представляет интерес только в случае, когда $n > m$, что и предполагается в дальнейшем. При этом множество Q точек, для которых выполнены условия (1) и (2) замкнуто, т.е. если множество Q ограничено, то в силу теоремы 7 главы 1 задача (3) будет иметь решение, что также предполагается. Таким образом, исследование задачи (3) сводится к отысканию необходимых и достаточных условий минимума, чему частично и посвящен §2.

Легко видеть, что задача (3) содержит в себе задачу на условный экстремум и потому реалистичнее ее. При этом необходимо отметить, что в каждой из этих задач приходится иметь дело с нелинейными функциями, чем и объясняется термин “нелинейное программирование”.

Теорема Каруша – Джона. Пусть

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : g^i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

– множество точек, для которых выполнены ограничения типа равенств (1), и пусть

$$Q_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : h^i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, r\}$$

– множество точек, для которых выполнены ограничения типа неравенств (2). Пересечение

$$Q = Q_1 \cap Q_2$$

множеств Q_1 и Q_2 дает точки $x \in \mathbb{R}^n$, называемые *допустимыми* точками в задаче (3). Точка $x^* \in Q$ называется точкой *минимума* (или точкой *локального минимума*) в задаче (3), если для всех $x \in Q$, достаточно близких к допустимой точке x^*, выполнено неравенство

$$f(x^*) \le f(x).$$

Необходимое условие минимума в задаче (3) дает следующая важнейшая для теории экстремальных задач

Теорема 3 (Каруш – Джон). *Пусть x^* – точка минимума в задаче* (1) *и функции $f, g^1, \dots, g^m$ и $h^1, \dots, h^r$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности E точки x^*. Тогда найдутся такие действительные числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \dots, \mu_r^*$, не все равные нулю одновременно, что*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^* \nabla h^i(x^*) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

где

$$\lambda_0^* \ge 0$$

и

$$\mu_i^* \ge 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Доказательство. Пусть ε – некоторое положительное число и пусть U – множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых

$$|x - x^*| \le \varepsilon.$$

Выберем число ε столь малым, чтобы все функции $f, g^1, \dots, g^m$ и $h^1, \dots, h^r$ были непрерывно дифференцируемы на множестве

$Q \cap U \subset E$, причем каждая из функций $h^1, \ldots, h^r$ не меняла знак на множестве $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus Q)$. Далее, пусть M – подмножество множества индексов $i = 1, \ldots, r$, таких, что

$$h^i(x) \geq 0$$

на замыкании R множества $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus Q)$. Если множество M пусто, то теорема 3 справедлива в силу теоремы 1, поскольку здесь можно принять

$$\mu_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Исключив этот тривиальный случай, наряду с задачей (3) введем в рассмотрение задачу о минимизации функции $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задаваемой равенством

$$f_k(x) = f(x) + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x))^2\right) + \frac{1}{2}|x - x^*|^2, \tag{5}$$

где k – некоторое натуральное число, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – действительные числа, задаваемые равенством

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i \in M, \\ 0, & i \notin M. \end{cases}$$

Функция f_k, очевидно, непрерывна, а множество R – компактно. Поэтому согласно теореме 7 главы 1 задача о минимизации функции f_k для всех значений k имеет на множестве R решение x_k, т.е. существует такое $x_k \in R$, что

$$f_k(x_k) \leq f_k(x^*).$$

Отсюда в силу равенства (5) имеем

$$f(x_k) + \frac{k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2\right) \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2 \leq f(x^*)$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{k}\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2\right).$$

Поскольку для всех значений $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$|x_k - x^*| \le \varepsilon,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k}\left(f(x^*) - f(x_k) - \frac{1}{2}|x_k - x^*|^2\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2\right) = 0,$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty} g^i(x_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i h^i(x_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Выберем некоторую неограниченно возрастающую последовательность

$$k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} k_i = \infty$$

натуральных чисел. Легко видеть, что последовательность

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_i}, \ldots \tag{6}$$

ограничена. Поэтому в силу теоремы 4 главы 1 без какой-либо потери общности можно считать, что существует предел

$$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = \bar{x},$$

где $\bar{x}$ – некоторая точка множества U. При этом

$$g^i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\alpha_i h^i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

и

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2}|\bar{x} - x^*|^2 \le f(x^*). \tag{7}$$

Поскольку x^* – точка минимума на Q, то

$$f(x^*) \le f(\bar{x}).$$

Поэтому из неравенства (7) следует, что

$$\bar{x} = x^*,$$

т.е. предельная точка всякой последовательности вида (6) совпадает с точкой x^*. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

т.е. для всех достаточно больших значений k точка x_k лежит внутри множества U. Но на множестве U

$$\nabla f_k(x_k) = \mathbf{0}$$

или, что эквивалентно,

$$\nabla f(x_k) + k\left(\sum_{i=1}^{m} g^i(x_k)\nabla g^i(x_k) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h^i(x_k)\nabla h^i(x_k)\right) + \\ + x_k - x^* = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Положим

$$\lambda_0(k) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2\right)}},$$

$$\lambda_i(k) = \frac{kg^i(x_k)}{\sqrt{1 + k^2\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2\right)}},$$

$$i = 1, \dots, m$$

и

$$\mu_i(k) = \frac{k\alpha_i h^i(x_k)}{\sqrt{1 + k^2\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i(h^i(x_k))^2\right)}},$$

$$i = 1, \dots, r.$$

Тогда равенство (8) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\lambda_0(k)\nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(k)\nabla g^i(x_k) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i(k)\nabla h^i(x_k) + \\ + \lambda_0(k)(x_k - x^*) = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Поскольку, очевидно,

$$\sum_{i=0}^{m}(\lambda_i(k))^2+\sum_{i=1}^{r}(\mu_i(k))^2=1$$

для всех значений $k=1,2,3,\dots$, то существует такая неограниченно возрастающая последовательность

$$k_1,k_2,\dots,k_j\dots,\qquad \lim_{j\to\infty}k_j=\infty \tag{10}$$

натуральных чисел, что

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_i(k_j)=\lambda_i^*,\quad i=1,\dots,m$$

и

$$\lim_{j\to\infty}\mu_i(k_j)=\mu_i^*,\quad i=1,\dots,r,$$

где

$$\sum_{i=0}^{m}(\lambda_i^*)^2+\sum_{i=1}^{r}(\mu_i^*)^2=1.$$

Поэтому, переходя в равенстве (9) к пределу при $k\to\infty$ вдоль множества (10), получим равенство (4), в котором по построению

$$\lambda_0^*\geq 0$$

и

$$\mu_i^*\geq 0,\quad i=1,\dots,r.$$

□

Условия дополняющей нежесткости. При доказательстве теоремы 3 использовался тот факт, что в точке x^* минимума некоторые из ограничений типа неравенств обращаются в равенства, а некоторые другие – в строгие неравенства. Чтобы ясно различать указанные два возможных случая, введем следующее определение.

Предположим, что при некотором значении $i=1,\dots,r$ имеет место равенство

$$h^i(x^*)=0.$$

Тогда будем говорить, что *ограничение h^i активно.* Аналогичным образом, если при некотором значении $j = 1, \ldots, r$ имеет место неравенство

$$h^j(x^*) < 0,$$

то будем говорить, что *ограничение h^j неактивно.*

Обозначим через I^* – множество активных ограничений в задаче (3)

$$I^* = \{i\colon h^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, r\}.$$

Просматривая доказательство теоремы 3, несложно заметить, что если $i \notin I^*$, то

$$\mu_i^* = 0.$$

Если же $i \in I^*$, то по определению

$$h^i(x^*) = 0,$$

т.е. в любом случае

$$\mu_i^* h^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{11}$$

Равенства (11) называются *условиями дополняющей нежесткости* и используются следующим образом.

Легко видеть, что условие (4) дает n уравнений относительно $n+m+r+1$ неизвестного $x^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^* \ldots, \mu_r^*$. Дополнив условие (4) уравнениями

$$g^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

и (11), получим систему $n + m + r$ уравнений относительно $n + m + r + 1$ неизвестного $x^*, \lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$. При этом по прежнему велик соблазн принять

$$\lambda_0^* = 1 \tag{12}$$

и, таким образом, замкнуть систему. Последнее, как и в случае задачи на условный экстремум, можно делать далеко не всегда, даже если ограничения типа равенств отсутствуют (см. упражнение 2).

Таким образом, условия дополняющей нежесткости позволяют привести необходимое условие минимума в задаче (3) к системе уравнений, весьма близкой к системе, получавшейся при решении задачи на условный экстремум в §1. Чтобы замкнуть эту систему, нужно получить условия, позволяющие, например, наверняка принять равенство (12).

Замечание. Необходимо отметить, что в условиях теоремы 3 принципиальным является следующий момент: либо

$$\lambda_0^* \neq 0, \tag{13}$$

либо

$$\lambda_0^* = 0.$$

Последнее, конечно, объясняется тем, что множители $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$ определены с точностью до неотрицательного множителя λ_0 и потому при выполнении условия (13) без какой-либо потери общности можно принять равенство (12).

Условия регулярности. Для получения некоторых условий, гарантирующих справедливость условия (13) или, что эквивалентно, (12), по аналогии с §1 введем в рассмотрение функцию

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_r) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i h^i(x), \tag{14}$$

которую будем называть *функцией Лагранжа*. При этом по аналогии с §1 множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_r$ будем называть *множителями Лагранжа*.

Принимая очевидные обозначения, перепишем равенство (14) в следующем эквивалентном виде:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle.$$

Если условие (12) выполняется, то в силу теоремы 3 необходимое условие минимума в задаче дает равенство

$$\frac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которое совместно с условиями

$$g(x) = \mathbf{0}$$

и

$$\mu_i h^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

образует замкнутую систему, решение которой дает искомые значения переменных.

Условия, при которых справедливо равенство (12), принято называть *условиями регулярности*. Простейшее из условий регулярности, которое будем называть *первым условием регулярности*, выглядит следующим образом: *если* x^* *– точка минимума в задаче* (3), *то функции* $f, g^1, \ldots, g^m$ *и* $h^1, \ldots, h^r$ *непрерывно дифференцируемы в некоторой ее окрестности, а вектора*

$$\begin{cases} \nabla g^i(x^*), & i = 1, \ldots, m, \\ \nabla h^i(x^*), & \qquad i \in I^* \end{cases} \tag{15}$$

линейно независимы.

Теорема 4. *Пусть в некоторой точке* x^* *выполнено первое условие регулярности. Тогда найдутся такие* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *и* $\mu^* \in \mathbb{R}^r$, *что*

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

и

$$\mu_i^* h^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{17}$$

где $\mu_i^* \geq 0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что условие (17) есть условие дополняющей нежесткости и выполняется в точке x^* всегда. Далее, для всех $i \notin I^*$ запишем

$$\mu_i^* = 0.$$

Тогда, поскольку вектора (15) линейно независимы, то в силу теоремы 3 следует принять

$$\lambda_0^* \neq 0,$$

например,

$$\lambda_0^* = 1,$$

откуда и следует равенство (16). □

Замечание. Легко видеть, что первое условие регулярности полностью аналогично условию регулярного минимума в задаче на условный экстремум. Другими словами, теорема

4 является очевидным аналогом теоремы 2. При этом следует иметь ввиду, что проверку линейной независимости векторов (15) необходимо проделывать в точке минимума (заранее неизвестной) со всеми вытекающими отсюда последствиями. Все это, однако, не снижает исторической ценности теорем 2 и 4 (а также и теоремы 12), поскольку именно с них собственно и начиналось математическое программирование.

Сформулируем теперь более тонкое условие, которое будем называть *вторым условием регулярности*: *если* x^* – *точка минимума в задаче* (3), *то функции* $f, g^1, \ldots, g^m$ *и* $h^1, \ldots, h^r$ *непрерывно дифференцируемы в некоторой ее окрестности, вектора* $\nabla g^1(x^*), \ldots, \nabla g^m(x^*)$ *линейно независимы и существует такой вектор* $s \in \mathbb{R}^n$, *что*

$$\langle \nabla g^i(x^*), s\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

и

$$\langle \nabla h^i(x^*), s\rangle < 0, \quad i \in I^*.$$

Замечание. Легко видеть, что геометрически второе условие регулярности означает следующее. В точке x^* найдется элемент s касательного пространства к ограничениям типа равенств, который направлен внутрь каждого из множеств

$$h^i(x^*) \le 0, \quad i \in I^*$$

активных в этой точке ограничений.

Теорема 5. *Пусть в некоторой точке* x^* *выполнено второе условие регулярности. Тогда найдутся такие* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *и* $\mu^* \in \mathbb{R}^r$, *что*

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{18}$$

и

$$\mu_i^* h^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{19}$$

где $\mu_i^* \ge 0$.

Доказательство. Как и в случае теоремы 4, заметим, что условие (19) выполняется в точке x^* всегда. Далее, для всех $i \notin I^*$ положим

$$\mu_i^* = 0.$$

Тогда, предположив, что

$$\lambda_0^* = 0,$$

и умножив равенство

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^* \nabla h^i(x^*) = \mathbf{0} \qquad (20)$$

скалярно на s, получим

$$\sum_{i \in I^*} \mu_i^* \langle \nabla h^i(x^*), s \rangle = 0.$$

Отсюда в силу условий $\mu_i^* \geq 0$ и

$$\langle \nabla h^i(x^*), s \rangle < 0, \quad i \in I^*$$

имеем

$$\mu_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Поэтому равенство (20) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g^i(x^*) = \mathbf{0},$$

где в силу теоремы 3 не все $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ одновременно равны нулю. Это, однако, противоречит принятой линейной независимости векторов $\nabla g^1(x^*), \ldots, \nabla g^m(x^*)$ и, значит,

$$\lambda_0^* = 1,$$

откуда и следует равенство (18). $\square$

Замечание. Теорема 5, вообще говоря, выглядит малопривлекательно для практического использования. Однако, как будет показано в §4, из этой теоремы можно получить очень сильное необходимое условие минимума одного важнейшего класса экстремальных задач, в котором помимо условия регулярности будет автоматически выполняться и достаточное условие минимума.

Существование и единственность минимума. В отличие от задачи на условный экстремум, в задаче нелинейного программирования (3) достаточно просто устанавливаются условия существования решения. Объясняется это следующим.

Легко видеть, что множества ограничений как в задаче на условный экстремум, так и в задаче (3) замкнуты. При этом в случае задачи на условный экстремум даже в простейших ситуациях множество Q допустимых точек не ограничено (см. примеры 2 и 3). Это приводит к тому, что вопрос о существовании решения задачи на условный экстремум часто остается открытым. В случае задачи нелинейного программирования (3) дело обстоит несколько иначе: добавление к ограничению (1) ограничения (2) часто приводит к тому, что множество Q допустимых точек становится ограниченным и, следовательно, компактным. Поэтому задача (3) обычно находится в условиях применимости теоремы Вейерштрасса (см. теорему 7 главы 1) и, значит, вопрос о существовании ее решения часто снимается.

Что касается единственности решения задачи (3), то этот вопрос является гораздо более тонким. Как уже отмечалось ранее, в силу теорем 4 и 5 точкой минимума может быть только точка $x \in Q$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \\ g(x) = \mathbf{0}, \\ \mu_i h^i(x) = 0, \quad i = 1,\ldots,r, \end{cases} \tag{21}$$

где неизвестными наряду с x являются λ и μ, причем

$$\mu_i \geq 0. \tag{22}$$

Тогда, если система (21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (22), то в силу теоремы 7 главы 1 и теорем 4 и 5 главы 2 это решение и будет единственной точкой минимума в задаче (3). На практике, однако, единственность решений системы (21) имеет место далеко не всегда, даже если минимум единственный. Последнее, например, объясняется тем, что решение системы (21) не обязано удовлетворять условию (22).

Замечание. Необходимо отметить, что непосредственное применение к системе (21) какой-либо классической теоремы существования и единственности, очевидно, затруднено условием (22).

Пример 5. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 \tag{23}$$

при ограничениях

$$x^1 + x^2 = 1, \tag{24}$$

$$x^1 \geq 0 \tag{25}$$

и

$$x^2 \geq 0. \tag{26}$$

Положим

$$g(x^1, x^2) = x^1 + x^2 - 1, \quad h^1(x^1, x^2) = -x^1$$

и

$$h^2(x^1, x^2) = -x^2.$$

Тогда, поскольку для всех значений x^1 и x^2

$$\nabla g(x^1, x^2) = (1, 1),$$

$$\nabla h^1(x^1, x^2) = (-1, 0)$$

и

$$\nabla h^2(x^1, x^2) = (0, -1),$$

то заметив, что только одно из ограничений (25) или (26) может быть активным, видим, что для задачи (23)–(26) будет выполняться первое условие регулярности. Поэтому без какой-либо потери общности можно принять

$$L(x^1, x^2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \lambda(x^1 + x^2 - 1) +$$
$$+ \mu_1(-x^1) + \mu_2(-x^2).$$

В силу теоремы 4 уравнения (21) для рассматриваемой задачи примут вид

$$\begin{cases} 2x^1 + \lambda - \mu_1 = 0, \\ 2x^2 + \lambda - \mu_2 = 0, \\ x^1 + x^2 = 1, \\ -\mu_1 x^1 = 0, \\ -\mu_2 x^2 = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \tag{28}$$

Легко видеть, что при выполнении условия (28) система (27) имеет единственное решение

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$\lambda^* = -1, \quad \mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 0.$$

При этом, как несложно заметить, множество, задаваемое соотношениями (24)–(26), компактно, поскольку представляет собой отрезок прямой (24), заключенный между точками $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Следовательно, точка (29) является точкой минимума в задаче (23)–(26).

Пример 6. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 \tag{30}$$

при ограничениях (24)–(26). Действуя как и в примере 5, положим

$$g(x^1, x^2) = x^1 + x^2 - 1, \quad h^1(x^1, x^2) = -x^1$$

и

$$h^2(x^1, x^2) = -x^2.$$

Тогда, поскольку для всех значений x^1 и x^2

$$\nabla g(x^1, x^2) = (1, 1),$$

$$\nabla h^1(x^1, x^2) = (-1, 0)$$

и

$$\nabla h^2(x^1, x^2) = (0, -1),$$

то заметив, что только одно из ограничений (25) или (26) может быть активным, видим, что для задачи о минимизации функции (30) при ограничениях (24)–(26) будет выполняться первое условие регулярности. Поэтому без какой-либо потери общности можно принять

$$L(x^1, x^2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + \lambda(x^1 + x^2 - 1) +$$

$$+\mu_1(-x^1) + \mu_2(-x^2).$$

В силу теоремы 4 уравнения (21) для рассматриваемой задачи примут вид

$$\begin{cases} -2x^1 + \lambda - \mu_1 = 0, \\ -2x^2 + \lambda - \mu_2 = 0, \\ x^1 + x^2 = 1, \\ -\mu_1 x^1 = 0, \\ -\mu_2 x^2 = 0, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0. \tag{32}$$

Легко видеть, что при выполнении условия (32) система (31) имеет решения

$$x^{*1} = 0, \quad x^{*2} = 1, \quad \lambda^* = 2, \quad \mu_1^* = 2, \quad \mu_2^* = 0,$$

$$x^{*1} = 1, \quad x^{*2} = 0, \quad \lambda^* = 2, \quad \mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 2$$

и

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2}, \quad \lambda^* = 1, \quad \mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 0.$$

При этом, как уже отмечалось в примере 5, множество (24)–(26) представляет собой отрезок прямой (24), заключенный между точками

$$x^{*1} = 0, \quad x^{*2} = 1 \tag{33}$$

и

$$x^{*1} = 1, \quad x^{*2} = 0. \tag{34}$$

Следовательно, задача о минимизации функции (30) при ограничениях (24)–(26) имеет по крайней мере одно решение, т.е. по крайней мере одна из точек (33), (34) или

$$x^{*1} = \frac{1}{2}, \quad x^{*2} = \frac{1}{2} \tag{35}$$

является точкой минимума. На самом же деле несложно заметить, что каждая из точек (33) и (34) является точкой локального минимума, а точка (35) – точкой локального максимума (см. пример 3).

Упражнения.

(1) Точка $x^* \in Q$ называется *локально единственной точкой минимума* задачи (3), если для всех точек $x \in Q$, достаточно близких к x^*, выполнено неравенство
$$f(x^*) < f(x).$$
Покажите, что если x^* – локально единственная точка минимума в задаче (3), то при доказательстве теоремы 3 слагаемое
$$\frac{1}{2}|x - x^*|^2$$
в правой части равенства (5) можно опустить.

(2) Используя теорему 3, рассмотрите задачу о минимизации функции
$$f(x^1, x^2) = x^2$$
при ограничениях
$$(x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 - 1 \leq 0$$
и
$$(x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 - 1 \leq 0$$
и покажите, что здесь нельзя принять
$$\lambda_0^* = 1.$$

(3) Пусть Q – симметрическая положительно определенная матрица. Найдите минимум функции
$$f(x) = \langle Qx, x\rangle/2 - \langle p, x\rangle$$
при ограничениях
$$A_1 x = b_1$$
и
$$A_2 x \leq b_2.$$

(4) Пусть x_+ – положительная часть вектора $x \in \mathbb{R}^n$, т.е.
$$x_+^i = \max\{0, x^i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Для некоторого натурального числа k положим
$$f_k(x) = f(x) +$$
$$+\frac{K_k}{2} \left. \sum_{i=1}^{m} (g^i(x))^2 + \sum_{i=1}^{r} (h_+^i(x))^2 \right) + \frac{1}{2}|x - x^*|^2, \tag{36}$$
где
$$\lim_{k \to \infty} K_k = \infty.$$

Докажите теорему 3, используя штрафную функцию (36) вместо штрафной функции (5).

(5) Покажите, что если x^* – локально единственная точка минимума в задаче (3), то при доказательстве теоремы 3 в штрафной функции (36) слагаемое

$$\frac{1}{2}|x - x^*|^2$$

можно опустить.

§3. Метод Ньютона в нелинейном программировании

В обычных курсах анализа изучение задач математического программирования как правило заканчивается выводом необходимых и, иногда, достаточных условий экстремума. Дальнейшее их исследование опускается, поскольку считается, что полученные условия позволяют найти решение задачи: "К науке, которую я в настоящий момент представляю, это не имеет отношения".

Данный бессмертный тезис незабвенного предводителя уездного дворянства К. Воробьянинова [3] ни в коей мере не может удовлетворить ни математика, ни экономиста, ни, тем более, вычислителя. Это объясняется тем, что необходимые условия, как в задаче на условный экстремум, так и в задаче нелинейного программирования, приводят к многомерным системам уравнений. Поэтому все (или почти все) задачи, которые удается решить до конца, являются специально подобранными типами примеров, кочующими из одного учебника в другой (см. примеры 2–6). Особенно это относится к задачам нелинейного программирования, поскольку теорема Каруша – Джона (как, впрочем, и приводимая ниже в §4 теорема Куна – Таккера) всегда приводит к нелинейной системе. Поэтому истинное назначение необходимых условий экстремума состоит не столько в получении некоторой системы уравнений, сколько в их использовании для конструирования некоторых специальных методов, приводящих к эффективным вычислительным процедурам нахождения экстремума. К числу одного из

[3] Если угодно, он же И.М. Воробьянинов, он же К.К. Михельсон.

таких наиболее часто употребляемых в нелинейном программировании методов относится знаменитый метод Ньютона и его многочисленные модификации.

Метод Ньютона. Данный метод, являющийся одним из простых и важнейших в идейном смысле, в чистом виде на практике применяется крайне редко. Его основное назначение состоит в том, что он служит некоторым надежным "скелетом" при построении более реалистичных методов.

Метод Ньютона, вообще говоря, связан с проблемой отыскания решений уравнения

$$g(x) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – функция, определенная и дифференцируемая в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через x_0 некоторое приближение к решению x^* уравнения (1). Поскольку функция g дифференцируема в точке x_0, то по определению имеем

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{2}$$

Принимая во внимание уравнение (1), из равенства (2) получим

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Тогда, если считать, что величина $|x - x_0|$ достаточно мала в некоторой окрестности точки x_0, то уравнение (3) приближенно эквивалентно линеаризованному уравнению

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Обозначим через x_1 решение уравнения (4). Тогда можем записать

$$x_1 = x_0 - g'(x_0)^{-1} g(x_0),$$

если, конечно, матрица $g'(x_0)$ невырождена. Продолжая этот процесс итеративно, на k-ом приближении имеем следующее линеаризованное уравнение

$$g(x_k) + g'(x_k)(x - x_k) = \mathbf{0}.$$

Отсюда в предположении, что матрица $g'(x_k)$ невырождена, получим рекуррентную формулу

$$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^{-1} g(x_k). \tag{5}$$

Формула (5) представляет собой один из основных методов отыскания решений уравнения вида (1), известный как *метод Ньютона*. Сходимость метода Ньютона к какому-либо решению уравнения (1) устанавливает следующая теорема, приводимая здесь без доказательства[4]: "К науке, которую я в настоящий момент представляю, это не имеет отношения".

Теорема 6. *Пусть уравнение* (1) *имеет решение* x^*, *такое, что функция* g *дифференцируема в некоторой окрестности* M *точки* x^*, *и пусть функциональная матрица* g' *удовлетворяет условию Липшица на множестве* M. *Тогда, если матрица* $g'(x^*)$ *невырождена, то найдется такое значение* $\varepsilon > 0$, *что при* $|x_0 - x^*| \le \varepsilon$ *метод* (5) *сходится к* x^* *с квадратичной скоростью:*

$$|x_{k+1} - x^*| \le \alpha |x_k - x^*|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где α *– положительное число, не зависящее от* k.

Все условия теоремы 6 существенны и усилить ее утверждение, вообще говоря, нельзя.

Пример 7. Дифференцируемость функции g и невырожденность функциональной матрицы g' используются в самой формулировке метода (5). Вместе с тем, отказ от условия Липшица для g' может привести к снижению скорости сходимости метода.

В самом деле, пусть $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, задаваемая равенством

$$g(x) = x^{3/2}.$$

Тогда при $x \ge 0$

$$g'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

и, как легко видеть, g' не удовлетворяет условию Липшица. При этом метод (5) при $x_0 > 0$ имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{3} x_k^{-1/2} \cdot x_k^{3/2} = \frac{1}{3} x_k.$$

---

[4]См. **[16]**, где приводится обширная библиография и комментарий по этому поводу.

Поэтому

$$x_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k x_0,$$

т.е. метод сходится к точке $x^* = 0$ со скоростью геометрической прогрессии, но не с квадратичной скоростью.

Замечание. Для сходимости метода (5) не требуется ни симметричности, ни положительной определенности матрицы g', как это иногда ошибочно утверждается.

Метод Ньютона в задачах на безусловный экстремум. Рассмотрим задачу о минимизации некоторой числовой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. При этом будем считать, что функция f дважды дифференцируема. Если f – квадратичная функция, т.е. если

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle p, x\rangle,$$

где Q – симметрическая положительно определенная матрица, то решение этой задачи можно получить, используя результаты §4 главы 1 (см. упражнения 1 и 2 к §4 главы 1). Поэтому в общем случае представляется достаточно уместным использовать квадратичные аппроксимации функции f.

Пусть x_k – некоторое приближение к точке x^* минимума функции f. Рассмотрим квадратичную аппроксимацию f_k функции f в точке x_k

$$f_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k\rangle.$$

Если матрица $\nabla^2 f(x_k)$ положительно определена, то функция f_k достигает в пространстве $\mathbb{R}^n$ безусловного минимума. Выберем точку x_{k+1} минимума функции f_k в качестве нового приближения к x^*, т.е.

$$x_{k+1} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_k(x).$$

Тогда имеем

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\nabla f(x_k). \tag{6}$$

Формула (6) представляет собой *метод Ньютона для задачи на безусловный экстремум.* К этому методу можно прийти как изложенным выше путем, так и исходя из того, что точка x^* должна быть решением системы

$$\nabla f(x) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Применяя к уравнению (7) метод (5), получаем формулу (6). Поэтому в силу теоремы 6 главы 2 и теоремы 13 главы 1 имеет место следующая

Теорема 7. *Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности M точки невырожденного минимума x^* и функциональная матрица $\nabla^2 f$ удовлетворяет условию Липшица на множестве M. Тогда найдется такое значение $\varepsilon > 0$, что при $|x_0 - x^*| \leq \varepsilon$ метод* (6) *сходится к точке x^* с квадратичной скоростью.*

Замечание. Легко видеть, что метод (6) пригоден для отыскания не только точек экстремума функции f, но и других стационарных точек, например, седловых. Кроме того, здесь как и в случае теоремы 6, выпуклость функции f здесь не предполагается и в чистом виде не используется.

Метод штрафных функций. Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g^i(x) = 0, &\quad i = 1, \ldots, m, \\ h^i(x) \leq 0, &\quad i = 1, \ldots, r, \end{aligned} \tag{8}$$

считая, что все функции $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$ дважды дифференцируемы. Если для задачи (8) выполнено какое-либо условие регулярности, то соответствующее необходимое условие экстремума приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ g(x) = \mathbf{0}, \\ \mu_i h^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle$$

– функция Лагранжа и неизвестными наряду с $x = (x^1, \ldots x^n)$ являются $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$. При этом должны выполняться условия

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

вообще говоря, означающие, что система (9) может иметь множество решений.

Еще одна неприятная отличительная особенность системы (9) связана со следующими обстоятельствами.

Во-первых, на практике вычисление матрицы вторых производных функций $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$ и ее обращение весьма обременительно, поскольку размерность системы (9) часто достаточно велика, а функции $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$ достаточно сложны.

Во-вторых, условия теоремы 6 имеют локальный характер. Поэтому сходимость метода Ньютона может зависеть от выбора начального приближения. При этом, очевидно, подобрать начальные приближения для векторов λ и μ более, чем затруднительно.

Перечисленные выше обстоятельства во многих практических ситуациях оказываются весьма существенными. Поэтому непосредственное применение метода Ньютона здесь обычно связано с огромной дополнительной работой, если вообще возможно. Ситуация, однако, становится существенно более благоприятной, если несколько изменить исходную задачу. Именно, следуя идеологии, использованной при доказательстве теорем 1 и 3, применим для нахождения решения задачи (8) метод штрафных функций.

Обозначим через h_+ – положительную часть вектора h и заменим задачу (8) последовательностью вспомогательных задач безусловной минимизации

$$f_k(x) = f(x) + \frac{K_k}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}(g^i(x))^2 + \sum_{i=1}^{r}(h^i_+(x))^2\right), \qquad (10)$$

где

$$\lim_{k\to\infty} K_k = \infty.$$

Тогда имеет место следующая теорема, приводимая здесь без доказательства ввиду тривиальности последнего (см. §2, упражнения 5 и 6).

Теорема 8. *Пусть x^* – локально единственное решение задачи* (8) *и пусть функции $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$ дифференцируемы в некоторой окрестности M точки x^*. Тогда для* *каждого достаточно большого значения k в окрестности M найдется точка x_k локального минимума функции f_k. При этом*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

Легко видеть, что в силу теоремы 8 условия сходимости метода (10) более чем скромны – не требуется ни особой гладкости функций $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$, ни выполнения условий регулярности задачи (8). Единственным ограничением является требование локальной единственности минимума. Однако, этот весьма скромный (с практической точки зрения) недостаток с лихвой перекрывается тем, что метод (10) не предполагает задания начального приближения для векторов λ и μ. Более того, на каждом шаге метод штрафных функций дает не только приближение для x^*, но и для векторов λ^* и μ^*, соответствующих x^*. Последнее следует из того обстоятельства, что при выполнении какого-либо условия регулярности справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty} K_k g(x_k) = \lambda_0^* \lambda^*$$

и

$$\lim_{k\to\infty} K_k h_+(x_k) = \lambda_0^* \mu^*,$$

в которых

$$\lambda_0^* = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + K_k^2\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(g^i(x_k))^2 + \sum\limits_{i=1}^{r}(h_+^i(x_k))^2\right)}},$$

причем последний предел существует (см. доказательство теоремы 3 и упражнение 5 §2). Поэтому метод (10) в некоторых случаях, оговоренных теоремой 6, можно применять в сочетании с методом Ньютона.

Существенным недостатком метода штрафных функций является то, что при больших значениях K_k задача безусловной минимизации становится плохо обусловленной. Последнее приводит к тому, что с ростом k процесс отыскания решений последовательности вспомогательных задач многократно усложняется с вычислительной точки зрения. В качестве второго недостатка метода (10) отметим то, что вспомогательные задачи, вообще говоря, многоэкстремальны. Теорема же 8 только лишь утверждает, что среди минимумов фукнций f_k найдется ко крайней мере один, достаточно близкий к минимуму функции f.

Упражнения.

(1) Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируемая функция и пусть x^* – неподвижная точка отображения g, т.е.

$$x^* = g(x^*) \tag{11}$$

и пусть

$$x_{k+1} = g(x_k) \tag{12}$$

– метод последовательных приближений для уравнения (11). Предположим, что на множестве

$$M = \{x\colon |x - x^*| \le |x_0 - x^*|\}$$

функциональная матрица g' удовлетворяет условию Липшица с постоянной L и матрица $g'(x^*)$ состоит из нулей. Покажите, что если

$$L|x_0 - x^*|^2 < 1,$$

то метод (12) сходится к точке x^*, причем с квадратичной скоростью.
Указание: Используйте равенство

$$x_1 - x^* = g(x_0) - g(x^*) - g'(x^*)(x_0 - x^*)$$

и упражнение 5 §2 главы 1.

(2) Пусть x^* – невырожденная точка минимума гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и пусть $\nabla^2 f$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x^*. Покажите, что в этом случае метод

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x^*)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

локально сходится к x^* с квадратичной скоростью.
Указание: Используйте упражнение 1.

§4. Выпуклое программирование

При использовании теоремы 3 в задаче нелинейного программирования возникают вопросы, ответ на которые требует дополнительного исследования. К числу таких вопросов следует отнести вопрос о том, будет ли найденный минимум глобальным. Ответ на этот вопрос, а также на вопросы, скажем, об условиях регулярности и достаточных условиях, вообще говоря, нетривиален. Однако, существует одна задача математического программирования, в которой ответ на все эти вопросы уже содержится в необходимых условиях экстремума. Эта задача, известная как задача выпуклого программирования, имеет огромное практическое значение, поскольку полученные здесь результаты носят весьма общий и законченный характер.

Задача выпуклого программирования, как будет показано ниже, имеет большое сходство с задачей нелинейного программирования. Одно из важнейших отличий состоит в том, что в задаче выпуклого программирования приходится иметь дело с выпуклыми функциями, заданными на выпуклых множествах.

Выпуклые функции и множества. Ранее в §4 главы 1 изучались выпуклые функции, определенные в пространстве $\mathbb{R}^n$. Последнее условие представляется достаточно обременительным и отказ от него позволяет, вообще говоря, существенно расширить класс доступных для рассмотрения выпуклых функций. Подобное обобщение обычно связывают с понятием выпуклого множества, формальное определение которого имеет следующий вид.

Множество $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если оно целиком содержит каждый отрезок, концы которого лежат в Q. Другими словами, множество $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для точек всех $x, y \in Q$ и любого действительного числа $0 \le \lambda \le 1$ точка $\lambda x + (1-\lambda)y$ принадлежит Q. Некоторые простейшие примеры выпуклых (см. $a), b)$) и невыпуклых (см. $c), d)$) множеств приведены на рис. 1.

Пусть теперь Q – некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть f – некоторая числовая функция, определенная на

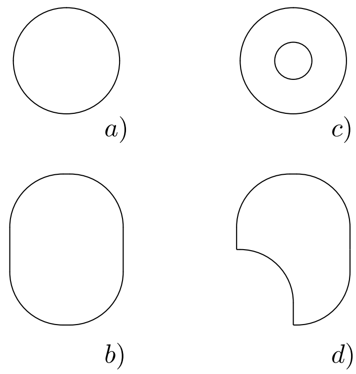

Рис. 1

множестве Q. Функция f называется *выпуклой на множестве* Q, если для всех $x, y \in Q$ и любого действительного числа $0 \le \lambda \le 1$ имеет место неравенство

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1}$$

Множество Q, на котором определена выпуклая функция f, обычно обозначают $D(f)$ и называют *областью определения* f. При этом из неравенства (1) следует, что область определения $D(f)$ выпуклой функции f есть выпуклое множество.

Если множество $D(f)$ компактно, то можно определить *граничную точку* множества $D(f)$ как точку $x \in D(f)$, каждая окрестность которой содержит точки, не принадлежащие $D(f)$. Совокупность всех $D(f)^0$ точеества $D(f)$, отличных от граничных, будем называть *внутренностью* множества $D(f)$.

Математический аппарат, созданный для работы с выпуклыми функциями, заданными на выпуклых множествах, называется *выпуклым анализом*. Выпуклый анализ, созданный сравнительно недавно, представляет собой мощное и, одновременно, удобное средство, позволяющее исследовать на экстремум не только дифференцируемые, но и просто непрерывные выпуклые функции. Использование в полной мере техники выпуклого анализа, однако, требует достаточно высокой математической культуры. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только дифференцируемые функции.

Теорема Куна – Таккера. Рассмотрим задачу выпуклого программирования, т.е. задачу, заключающуюся в минимизации выпуклой функции $f\colon Q \to \mathbb{R}$ при ограничениях типа неравенств

$$h^i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

где $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество и $h^i\colon Q \to \mathbb{R}$ – выпуклые функции.

Действуя по аналогии с §2, запишем эту задачу в следующем виде

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ h^i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, r, \\ x \in Q \end{gathered} \tag{2}$$

и заметим, что задача выпуклого программирования отличается от задачи нелинейного программирования, рассмотренной в §2, не только выпуклостью функций f и $h^1, \ldots, h^r$, но и формальным отсутствием ограничений типа равенств

$$g^i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Более того, в задаче (2) весьма важным оказывается выполнение на множестве Q *условия Слейтера*: найдется такая точка $x_0 \in Q$, что

$$h^i(x_0) < 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Выполнение этих ограничений позволяет говорить об отыскании *глобального минимума* x^* задачи (2), т.е. такой точки $x^* \in Q$, что

$$f(x^*) \le f(x)$$

для всех $x \in Q$. При этом условие глобального минимума оказывается необходимым и достаточным.

Теорема 9 (Кун – Таккер). *Пусть f и $h^1, \ldots, h^r$ – выпуклые функции и пусть Q – выпуклое множество, такое, что*

$$Q \subseteq D(f) \cap D(h^1) \cap \ldots \cap D(h^r),$$

причем на множестве Q выполнено условие Слейтера. Оказывается, что точка $x^* \in Q$ является точкой глобального минимума в задаче (2) тогда и только тогда, когда найдутся такие действительные числа $\mu_1^* \geq 0, \ldots, \mu_r^* \geq 0$, что

$$\mu_i^* h^i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{3}$$

и при $x \in Q$

$$L(x, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*) \geq L(x^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*), \tag{4}$$

где для всех $\mu_1, \ldots, \mu_r$ и $x \in Q$

$$L(x, \mu_1, \ldots, \mu_r) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i h^i(x). \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность. Используя очевидные обозначения, перепишем неравенство (4) в следующем эквивалентном виде:

$$L(x, \mu^*) \geq L(x^*, \mu^*).$$

Необходимость. Доказательство необходимости условий теоремы 9 проведем лишь для случая, когда множество Q представляет собой пространство $\mathbb{R}^n$, а все функции $f, h^1, \ldots, h^r$ дифференцируемы. [5]

Пусть x^* – точка минимума в задаче (3). Поскольку все функции $h^1, \ldots, h^r$ выпуклы и выполнено условие Слейтера, то, приняв

$$s = x - x^*,$$

получим второе условие регулярности (см. §2). Поэтому в силу теоремы 5 выполняются оба условия (3) и (4), причем функция L имеет вид (5). Что же касается глобальности минимума, то она непосредственно следует из выпуклости функций $f, h^1, \ldots, h^r$.

В самом деле, пусть

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n \colon h^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r\}$$

и

$$S = D(f) \cap S_1 \cap \ldots \cap S_r.$$

---

[5] Относительно доказательства в общем случае см., например, [**16**].

Каждое из множеств S_i, как легко видеть, выпукло. Следовательно, множество S также выпукло (см. упражнение 2). Тогда, поскольку все функции $f, h^1, \ldots, h^r$ выпуклы в пространстве $\mathbb{R}^n$, они также выпуклы и на множестве S (см. упражнение 3). Поэтому функция L, очевидно, выпукла и в пространстве $\mathbb{R}^n$, и на множестве S. Следовательно, согласно предложению 3 главы 1 для всех $x \in S$ имеет место неравенство

$$L(x, \mu) \geq L(x^*, \mu) + \langle \nabla L(x^*, \mu), x - x^* \rangle.$$

Но в силу теоремы 5

$$\nabla L(x^*, \mu^*) = \mathbf{0},$$

причем выполнены условия (3). Тогда поскольку

$$f(x) \geq f(x^*)$$

для всех $x \in Q$, то выполнено также и условие (4). $\square$

Каждую точку x, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} h^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r, \\ x \in Q, \end{gathered}$$

будем называть *допустимой точкой* в задаче выпуклого программирования. Далее, функцию L, как и в задаче на условный экстремум, здесь будем называть *функцией Лагранжа*, а числа $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$ – *множителями Лагранжа.* По причинам, которые будут указаны ниже, вектор x называют вектором *прямых переменных*, а вектор μ^* – вектором *двойственных переменных.* И, наконец, как и в случае теоремы Каруша – Джона, в условиях теоремы Куна – Таккера условия (3) называются *условиями дополняющей нежесткости*, а ограничения, удовлетворяющие условию

$$h^i(x^*) = 0,$$

– *активными ограничениями.* При этом, если

$$h^j(x^*) < 0,$$

т.е. если *ограничение* h^j *неактивно*, то, очевидно, можем принять

$$\mu_j^* = 0.$$

Если для задачи (3) выполнены условия теоремы Куна – Таккера, то точку x^* называют *регулярной точкой минимума в регулярной задаче* выпуклого программирования. Таким образом, теорема Куна – Таккера утверждает, что в случае регулярной точки минимума найдутся такие неотрицательные множители Лагранжа μ^*, удовлетворяющие условию дополняющей нежесткости, что при $\mu = \mu^*$ функция L достигает минимума на множестве Q в точке x^*. При этом, как и ранее, задача с ограничениями фактически сводится к задаче без ограничений.

Замечание. Если условие Слейтера не выпоняется, то допустимое множество может оказаться слишком "тощим". В этом случае теорема 9 может и не быть верной.

Пример 8. Рассмотрим задачу о минимизации функции

$$f(x^1, x^2) = x^2$$

при ограничениях

$$(x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 - 1 \le 0$$

и

$$(x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 - 1 \le 0.$$

Легко видеть, что допустимое множество в этой задаче состоит из одной точки $(0, 0)$. Поэтому условие Слейтера здесь не выполняется.

Если к данной задаче применить теорему Каруша – Джона, то в условиях этой теоремы нельзя принять

$$\lambda_0^* = 1$$

(см. §2, упражнение 2). Следовательно, функцию Лагранжа здесь нельзя строить по формуле (5) и потому теорема 9 здесь неверна.

Часто теорему Куна – Таккера записывают в несколько ином виде, используя при этом понятие седловой точки.

Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ и $P \subseteq \mathbb{R}^r$ – некоторые два множества и пусть $\varphi\colon Q \times P \to \mathbb{R}$ – некоторая числовая функция. Пара $x^* \in Q, y^* \in P$ называется *седловой точкой* функции φ на множестве $Q \times P$, если для всех значений $(x, y) \in Q \times P$ выполнены неравенства

$$\varphi(x^*, y) \leq \varphi(x^*, y^*) \leq \varphi(x, y^*). \tag{6}$$

Другими словами, неравенства (6) означают, что точка x^* является точкой минимума функции φ по x на множестве Q, а точка y^* – точкой максимума по y на P. При этом, если выражения

$$\min_{x \in Q} \max_{y \in P} \varphi(x, y)$$

и

$$\max_{y \in P} \min_{x \in Q} \varphi(x, y)$$

определены, то неравенства (6) эквивалентны цепочке равенств

$$\min_{x \in Q} \max_{y \in P} \varphi(x, y) = \max_{y \in P} \min_{x \in Q} \varphi(x, y) = \varphi(x^*, y^*).$$

Таким образом, существование седловой точки позволяет менять местами операции минимизации и максимизации. Более того, существование седловой точки позволяет дать теореме Куна – Таккера следующую формулировку.

Теорема 10 (Кун – Таккер). *В условиях теоремы* 9 *точка x^* является точкой минимума в задаче* (3) *тогда и только тогда, когда пара (x^*, μ^*) при некотором $\mu^* \geq 0$ является седловой точкой функции L на множестве $Q \times \mathbb{R}^r_+$, где $\mathbb{R}^r_+$ – неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^r$, т.е. для всех значений $(x^*, \mu^*) \in Q \times \mathbb{R}^r_+$*

$$L(x^*, \mu) \leq L(x^*, \mu^*) \leq L(x, \mu^*). \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Если x^* – точка минимума в задаче (6), то в силу теоремы 9 найдется такой вектор $\mu^* \in \mathbb{R}^r_+$, что

$$\langle \mu^*, h(x^*) \rangle = 0$$

и

$$L(x, \mu^*) \geq L(x^*, \mu^*).$$

Но при этом

$$L(x^*, \mu^*) = f(x^*) + \langle \mu^*, h(x^*) \rangle \geq L(x^*, \mu)$$

для всех $\mu \in \mathbb{R}^r_+$, поскольку

$$h^i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Таким образом, пара (x^*, μ^*) является седловой точкой функции L на множестве $Q \times \mathbb{R}^r_+$.

Достаточность. Пусть (x^*, μ^*) – седловая точка. Тогда

$$L(x^*, \mu) \le L(x^*, \mu^*),$$

откуда следует, что

$$\langle \mu, h(x^*) \rangle \le \langle \mu^*, h(x^*) \rangle$$

для всех $\mu \in \mathbb{R}^r_+$. Последнее, очевидно, возможно лишь тогда, когда

$$h^i(x^*) \le 0, \quad i = 1, \dots, r$$

и

$$\langle \mu^*, h(x^*) \rangle = 0.$$

Поэтому для любого допустимого значения x

$$L(x^*, \mu^*) = f(x^*) \le L(x, \mu^*) = f(x) + \langle \mu^*, h(x) \rangle = f(x),$$

т.е. x^* – точка минимума в задаче (3). $\square$

Теорема двойственности. Легко видеть, что в формулировку теоремы 10 прямые и двойственные переменные входят симметричным образом. Поэтому можно ожидать, что подобная симметрия существует и для экстремальных задач, т.е. что неравенства (7) являются условием минимума не только для исходной задачи, но и условием максимума для некоторой другой экстремальной задачи относительно двойственных переменных. Такую задачу можно получить из следующих соображений.

Пусть

$$\varphi(x) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}^r_+} L(x, \mu).$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & h^i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \infty, & \qquad\qquad h^i(x) > 0. \end{cases}$$

Поэтому исходная задача (3) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varphi(x) \to \min,\\ x \in Q.\end{gathered} \tag{8}$$

Действуя аналогичным образом, поменяем роль переменных и операций минимизации и максимизации. Для этого положим

$$\psi(\mu) = \inf_{x \in Q} L(x, \mu)$$

и рассмотрим задачу о максимизации

$$\begin{gathered}\psi(\mu) \to \max,\\ \mu \in \mathbb{R}^r_+.\end{gathered} \tag{9}$$

Полученная таким способом задача (9) называется *двойственной*, а задача (8) *прямой*. При этом имеет место следующая теорема, известная как теорема двойственности выпуклого программирования.

Теорема 11. *Справедливы следующие соотношения двойственности:*

(1) *Для всех значений $x \in Q$ и $\mu \in \mathbb{R}^r_+$*

$$f(x) \geq \psi(\mu) \tag{10}$$

всякий раз, когда

$$h^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{11}$$

(2) *Если прямая задача регулярна, то μ^* – решение задачи* (9), *причем*

$$f(x^*) = \psi(\mu^*). \tag{12}$$

(3) *Если для допустимых x^* и μ^* выполнено неравенство* (11), *то x^* – решение прямой задачи, а μ^* – двойственной.*

Доказательство. Последовательно докажем утверждения 1, 2 и 3.

(1) Если $x \in Q, \mu \in \mathbb{R}^r_+$ и выполнены неравенства (11), то, очевидно,

$$f(x) \geq f(x) + \langle \mu, h(x) \rangle =$$

$$= L(x, \mu) \geq \inf_{x_1 \in Q} L(x_1, \mu) = \psi(\mu).$$

(2) Пусть x^* – решение прямой задачи, и μ^* – соответсвующие множители Лагранжа, то в силу теоремы 10

$$\psi(\mu^*) = L(x^*, \mu^*) \geq L(x^*, \mu) \geq$$
$$\geq \inf_{x \in Q} L(x, \mu) = \psi(\mu)$$

для всех значений $\mu \in \mathbb{R}^r_+$. Поэтому μ^* – решение двойственной задачи и, следовательно,

$$L(x^*, \mu^*) = f(x^*).$$

Поэтому имеет место равенство (12).

(3) Пусть $x^* \in Q, \mu^* \in \mathbb{R}^r_+$ и пусть выполнены неравенства (11). Тогда в силу неравенства (10) для произвольных допустимых x и μ

$$f(x^*) \geq \psi(\mu^*).$$

Но согласно равенству (12) при этом

$$f(x^*) = \psi(\mu^*),$$

т.е.

$$f(x) \geq \psi(\mu^*) = f(x^*) \geq \psi(\mu).$$

□

В отличие от теорем 9 и 10 теорема двойственности 11 может оказаться чрезвычайно полезной в следующей достаточно типической ситуации.

Если размерность n вектора x существенно больше числа r, то размерность r двойственной задачи существенно ниже размерности n прямой. Более того, неравенство (10) позволяет получить оценку снизу для минимума прямой задачи. Поэтому в ряде случаев, например, в задачах линейного программирования (см. §5) двойственный подход оказывается достаточно эффективным.

Пример 9. Ряд важных задач в различных областях человеческой деятельности (поиск неисправностей, обнаружение цели, планирование эксперимента и т.д.) естественым образом укладывается в следующую простую схему, связанную с приводимой ниже экономической задачей, известной как задача об оптимальном распределении ресурсов. Предположим, что имеется некоторый ресурс и его следует наилучшим образом распределить между n объектами. При этом эффективность использования ресурсов на i-ом объекте характеризуется функцией f^i.

С математической точки зрения данная задача представляет собой задачу о минимизации функции

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f^1(x^1) + \ldots + f^n(x^n) \tag{13}$$

при ограничениях

$$x^1 + \ldots + x^n = 1 \tag{14}$$

и

$$x^i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Обозначим через Q – множество точек, для которых выполнено условие (14) и предположим, что все функции $f^1, \ldots, f^n$ выпуклы. Составим функцию Лагранжа

$$L(x^1, \ldots, x^n, \lambda) = f(x^1, \ldots, x^n) + \lambda(x^1 + \ldots + x^n - 1),$$

где λ – некоторое действительное число, и введем в рассмотрение одномерные числовые функции

$$\psi^i(\lambda) = \inf_{x^i \geq 0}(f^i(x^i) + \lambda x^i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Тогда

$$\psi(\lambda) = \inf_{x \geq \mathbf{0}} L(x, \lambda) = \psi^1(\lambda) + \ldots + \psi^n(\lambda) - \lambda, \tag{17}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Поскольку при этом Q – по определению, очевидно, выпуклое множество, то в силу теоремы 10 каждая точка максимума функции ψ является множителем Лагранжа для задачи (13)–(15).

Таким образом, для нахождения решения x^* исходной задачи следует прежде всего построить функции (16), затем найти точку максимума λ одномерной вогнутой функции (17). После этого величину x^* определяют как

$$x^* = \arg\min_{x^i \geq 0}(f^i(x^i) + \lambda^* x^i).$$

Подобную процедуру часто можно осуществить простыми средствами. Например, если

$$f^i(x^i) = \frac{a^i}{2}(x^i - b^i)^2,$$

где $a^i > 0$, то

$$\psi^i(\lambda) = -\left(\frac{1}{2a^i}(a^i b^i - \lambda)_+^2\right) + \frac{a^i(b^i)^2}{2},$$

где

$$(a^i b^i - \lambda)_+ = \max\{0, a^i b^i - \lambda\}.$$

Поэтому

$$\psi'(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a^i}(a^i b^i - \lambda)_+\right) - 1,$$

т.е. $\psi'(\lambda)$ – кусочно-линейная функция.

Заметим теперь, что корни уравнения

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a^i}(a^i b^i - \lambda)_+\right) - 1 = 0$$

легко найти следующим способом. Во-первых, следует упорядочить числа $a^i b^i$. Во-вторых, следует последовательно вычислять величины $\psi'(a^i b^i)$ до тех пор, пока выражение $\psi'(a^i b^i)$ не переменит знак. После этого величину λ^* можно найти с помощью линейной интерполяции.

Классическая формулировка теоремы Куна – Таккера. Для восстановления исторической справедливости, рассмотрим случай, когда задача (2) имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g^i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h^i(x) &\le 0, \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned} \tag{18}$$

где функции $f, g^1, \dots, g^m, h^1, \dots, h^r$ – выпуклые функции, определеные в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть x^* – некоторая точка пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть I^* множество активных ограничений задачи (18) в этой точке. Предположим, что все функции $f, g^1, \dots, g^m$ и $h^1, \dots, h^r$

непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x^*, а вектора

$$\begin{cases} \nabla g^i(x^*), & i = 1, \ldots, m, \\ \nabla h^i(x^*), & i \in I^* \end{cases} \tag{19}$$

линейно независимы. Тогда имеет место следующая

Теорема 12. *Точка x^* является точкой глобального минимума в задаче* (18) *тогда и только тогда, когда найдутся такие действительные числа $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^* \ge 0, \ldots, \mu_r^* \ge 0$, что*

$$\begin{cases} g^i(x^*) = 0, & i = 1, \ldots, m, \\ \mu_i^* h^i(x^*) = 0, & i = 1, \ldots, r \end{cases} \tag{20}$$

и

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^* \ldots, \mu_r^*)}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_r) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i h^i(x).$$

Доказательство. Достаточность. Применяя к функции L теорему 14 главы 1, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$L(x, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*) \ge L(x^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*).$$

Отсюда в силу условий (20) при этих x можем записать

$$f(x) \ge f(x^*).$$

Необходимость. Поскольку $f, g^1, \ldots, g^m$ и $h^1, \ldots, h^r$ – дифференцируемые выпуклые функции, согласно предложению 3 главы 1 для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$L(x, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*) \ge L(x^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*) +$$
$$+ \langle \nabla L(x^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*), x - x^* \rangle.$$

С другой стороны, несложно заметить, что, что если x^* – точка минимума в задаче (18), то линейная независимость векторов (19) представляет собой первое условие регулярности для этой задачи (см. §2). Поэтому необходимость условий теоремы 12 непосредственно следует из теоремы 4. $\square$

Замечание. Теорема 12 представляет собой классический вариант теоремы Куна – Таккера для классической задачи выпуклого программирования (18). Ее формулировка столь проста и элегантна, что, как тонко заметил Л. Янг, ее в скором будущем наверняка будут изучать уже в средней школе (см. [**28**]). Единственый недостаток этой теоремы – необходимость проверки линейной независимости векторов (19) в точке минимума, заранее неизвестной. Это, впрочем, недостаток всех теорем, использующих какие-либо условия регулярности (см. теоремы 2, 4 и 5).

Упражнения.

(1) Покажите, что выпуклая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке множества $D(f)^0$.

(2) Покажите, что пересечение конечного числа выпуклых множеств само есть выпуклое множество.

(3) Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество и пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция. Покажите, что функция f выпукла на множестве Q.

(4) Докажите, что если множество

$$Q_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \le \alpha\}$$

непусто и ограничено для некоторого действительного числа α с выпуклой функцией $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $Q_\alpha \subset D(f)^0$, то множество Q_α ограничено при всех значениях $\alpha < \infty$.

(5) Пользуясь теоремой Куна – Таккера, найдите решения следующих задач:

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 \to \min, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i \le 1, \tag{A}$$

$$\langle Qx, x\rangle/2 - \langle p, x\rangle \to \min, \quad Ax \le b, \tag{B}$$

где Q – симметрическая положительно определенная матрица.

(6) Напишите задачи, двойственные к задачам

$$\langle c, x\rangle \to \min, \quad |x| \le 1$$

и

$$\langle c, x\rangle \to \min, \quad |x|^2 \le 1.$$

(7) Покажите, что прямые задачи в упражнении 6 эквивалентны, хотя задачи, двойственные к ним, различны.

(8) Пусть все функции $f, h^1, \ldots, h^r$ выпуклы, а множество Q выпукло и замкнуто. Предположим, что для множества S,

$$S = \{x \in Q\colon h^i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, r\},$$

выполнены условия

$$S \subset D(f)^0, S \subset D(h^1)^0, \ldots, S \subset D(h^r)^0$$

и множество

$$R = \{x \in S\colon f(x) \leq \alpha\}$$

непусто и ограничено для некоторого значения α. Покажите, что в этом случае задача (3) имеет по крайней мере одно решение.

Указание: Используйте упражнения 1 и 4.

§5. Линейное программирование

Задачи линейного программирования возникли достаточно давно и в первую очередь были связаны с задачами оптимального планирования в экономике, в частности, оптимального производственного планирования. Оказалось, что задачи линейного программирования представляют достаточно большой интерес сами по себе и, более того, имеют огромное практическое значение в экономических, технических и других прикладных проблемах.

Математическая теория задач линейного программирования проста, красива и в настоящее время, видимо, может считаться полностью завершенной. Базируется эта теория на основных результатах теории выпуклого программирования и, вместе с тем, на некоторых важных результатах выпуклого анализа. Ниже, собственно, приводятся основы теории линейного программирования.

Общие положения. Задача линейного программирования является частным случаем задачи выпуклого программирования, когда минимизируемая функция и ограничения линейны. Другими словами, задача линейного программирования заключается в минимизации функции

$$f(x) = \langle c, x \rangle$$

при ограничениях

$$\langle a_i, x\rangle \le b^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Принимая очевидные обозначения, перепишем эту задачу в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ Ax \le b, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, A – прямоугольная $(m \times n)$-матрица, c и b – вектора в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Во многих практических ситуациях на координаты вектора x накладывается условие неотрицательности. При этом часто оказывается удобно не вводить эти ограничения в матрицу A, а выделять их отдельно. В этом случае задача линейного программирования записывается в виде

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ Ax \le b, \\ x \ge \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{2}$$

Линейная функция скалярного переменного, конечно, не достигает на действительной прямой $\mathbb{R}$ ни максимума, ни минимума. Ситуация, однако, в корне меняется, если искать минимум (или максимум) такой функции на отрезке: решение в этом случае обязательно лежит в одной из крайних точек отрезка. Это обстоятельство оказывается существенно важным и в многомерном случае, поскольку приводит к эффективной процедуре нахождения решения задачи (1).

Определим множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ как множество решений системы линейных неравенств

$$\langle a_i, x\rangle \le b^i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

т.е.

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle a_i, x\rangle \le b^i, \quad i = 1, \dots, m, \}.$$

Определенное таким способом множество называется *многогранным множеством* или *симплексом*. При этом соотношения (3) задают *грани* множества Q. Определим теперь вершину (или крайнюю точку) множества Q.

Точка x называется *крайней точкой* многогранного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$, если она не является внутренней точкой какого-либо отрезка, целиком лежащего внутри Q. Оказывается, что крайние точки многогранных множеств можно легко описать алгебраически.

Предложение 1. *Крайними точками любого многогранного множества Q являются те и только те точки, для которых имеется ровно n линейно независимых активных ограничений.*

Доказательство. Пусть x_0 – некоторая точка множества Q. Обозначим через I_0 – множество активных ограничений в этой точке:

$$I_0 = \{i = 1, \ldots, m \colon \langle a_i, x \rangle = b^i\}.$$

Если среди векторов a_i, где $i \in I_0$, менее n линейно независимых, то система однородных уравнений

$$\langle a_i, s \rangle = \mathbf{0}, \quad i \in I_0$$

имеет нетривиальное решение s_0. Тогда вектора

$$x_1 = x_0 + \gamma s_0$$

и

$$x_2 = x_0 - \gamma s_0$$

при всех достаточно малых значениях $\gamma > 0$ также принадлежат Q. Следовательно, точка

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

не может быть крайней точкой множества Q.

Предположим теперь, что среди векторов a_i, где $i \in I_0$, имеется n линейно независимых векторов. Для некоторых векторов $x_1 \in Q$ и $x_2 \in Q$ обозначим через x_0 вектор

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Тогда при $i \in I_0$

$$b^i = \langle a_i, x_0 \rangle = \frac{\langle a_i, x_1 \rangle + \langle a_i, x_2 \rangle}{2} \leq \frac{b^i + b^i}{2} = b^i.$$

Поэтому

$$\langle a_i, x_1 \rangle = \langle a_i, x_2 \rangle = b^i.$$

Но система

$$\langle a_i, x\rangle = b^i, \quad i \in I_0$$

не может иметь двух различных решений, поскольку ее ранг равен n. Последнее означает, что $x_1 = x_2$, т.е. x_0 – крайняя точка множества Q. □

Из предложения 1 непосредственно следует, что число крайних точек многогранного множества конечно. С геометрической точки зрения представляется уместным называть крайние точки *вершинами* многогранного множества. Тогда предложение 1 показывает, что вершина многогранного множества есть 0-мерная грань этого множества и число таких вершин конечно. При этом следует иметь ввиду, что многогранное множество может вообще не иметь вершин. Существование же вершин оказывается весьма важным для задачи линейного программирования, поскольку имеет место следующее предложение, приводимое здесь без доказательства.[6]

Предложение 2. *Если допустимое многогранное множество Q не содержит прямых, а решение задачи* (1) *существует, то среди ее решений найдется вершина множества Q. Более того, если решение задачи* (1) *единственно, то оно достигается именно в вершине.*

Условия экстремума. Предложение 2 хотя и указывает на то, где следует искать решение задачи линейного программирования, но, очевидно, не дает непосредственного конструктивного способа поиска решения. Последнее обстоятельство оказывается особенно важным, поскольку даже в случае задач небольшой размерности число вершин может оказаться огромным и полный их перебор становится делом совершенно нереальным.

Как уже отмечалось ранее, задача (1) (или (2)) является частным случаем задачи выпуклого программирования. При

[6] См., например, [**16**].

этом целевая функция и ограничения определены и дифференцируемы в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому представляется уместным провести анализ этой задачи на экстремум с помощью результатов, приведенных ранее в §4. Для этого, прежде всего, заметим, что ограничения в этой задаче имеют специальный вид, позволяющий отказаться от требования выполнения условия Слейтера. Поэтому из теоремы 9 немедленно вытекает следующее условие минимума в задаче (1).

Теорема 13. *Для того, чтобы точка $x^* \in Q$ была решением задачи* (1) *необходимо и достаточно существование множителей Лагранжа $\mu^* \in \mathbb{R}^m_+$, таких, что*

$$\langle \mu^*, Ax^* - b\rangle = 0$$

и

$$c + A^T\mu^* = \mathbf{0},$$

где T – операция транспонирования.

По аналогии с теоремами 9 и 10 из теоремы 13 следует необходимое и достаточное условие экстремума в терминах седловой точки.

Теорема 14. *Для того, чтобы точка $x^* \in Q$ была решением задачи* (1) *необходимо и достаточно существование такого вектора $\mu^* \in \mathbb{R}^m_+$, что для всех значений $(x,\mu) \in Q \times \mathbb{R}^m_+$ выполнены неравенства*

$$L(x,\mu^*) \geq L(x^*,\mu^*) \geq L(x^*,\mu),$$

где

$$L(x,\mu) = \langle c, x\rangle + \langle \mu, Ax - b\rangle.$$

Продолжая применять результаты §4 к задаче линейного программирования, выпишем задачу, двойственную к задаче (1), и сформулируем соответствующую теорему двойственности. Для этого, прежде всего, положим

$$\psi(\mu) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,\mu) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} (\langle c + A^T\mu, x\rangle - \langle b,\mu\rangle).$$

Тогда имеем

$$\psi(\mu) = \begin{cases} -\infty, & \langle c + A^T\mu, x\rangle \neq 0, \\ -\langle b,\mu\rangle, & \langle c + A^T\mu, x\rangle = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача, двойственная к задаче (1), представляет собой задачу о максимизации функции

$$F(\mu) = -\langle b, \mu\rangle$$

при ограничениях

$$\langle c + A^T\mu, x\rangle = 0$$

и

$$\mu \geq \mathbf{0},$$

или, что эквивалентно, задачу

$$\begin{gathered} \langle b, \mu\rangle \to \min, \\ \langle c + A^T\mu, x\rangle = 0, \\ \mu \geq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{4}$$

Другими словами, задача (4) представляет собой специальный вариант задачи линейного программирования, который всегда может быть сведен к задаче (1) и обратно.

При этом из теоремы 11 немедленно вытекает следующая

Теорема 15. *Решения (x^*, μ^*) пары двойственных задач* (1) *и* (4) *существуют или не существуют одновременно. При этом для всех допустимых значений x и μ справедливо неравенство*

$$\langle c, x\rangle \geq \langle b, \mu\rangle, \tag{5}$$

причем равенство в (5) *имеет место тогда и только тогда, когда $x = x^*$ и $\mu = \mu^*$.*

Каноническая форма задачи линейного программирования. Легко видеть, что сформулированные выше теоремы 13 и 14 не дают ничего принципиально нового для поиска решения задачи (1). Вместе с тем, теорема 15 и предложения 1 и 2 наводят на мысль о целесообразности изучения следующей новой задачи

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ Ax = b, \\ x \geq \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{6}$$

весьма близкой к задаче (2).

Задача (6) известна как *каноническая форма задачи линейного программирования.* Она всегда может быть получена из задачи (2) и, обратно, задача (6) всегда может быть сведена к задаче (2).

В самом деле, в задаче (2) введем новые вспомогательные переменные $y \in \mathbb{R}^m_+$ и запишем

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ Ax + y = b, \\ x \geq \mathbf{0}, \quad y \geq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда, полагая

$$z = (x, y), \quad g = (c, \mathbf{0})$$

и

$$H = (A \,|\, E),$$

где E – единичная $(m \times n)$-матрица, можем переписать задачу (7) в следующем виде

$$\begin{gathered} \langle g, c\rangle \to \min, \\ Hz = b, \\ z \geq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

очевидно, совпадающим с (6) с точностью до обозначений.

Обратно, перепишем задачу (6) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ \langle a_i, x\rangle = b^i \quad i = 1, \ldots, m, \\ x \geq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{8}$$

Но так как каждое из равенств

$$\langle a_i, x\rangle = b^i$$

эквивалентно, например, двум неравенствам

$$\langle a_i, x\rangle \leq b^i$$

и

$$-\langle a_i, x\rangle \leq b^i.$$

Поэтому задача (8) превращается в задачу

$$\begin{gathered} \langle c, x\rangle \to \min, \\ \langle a_i, x\rangle \leq b^i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ -\langle a_i, x\rangle \leq b^i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x \geq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

очевидно, представляющую собой задачу вида (2).

Важность канонической формы задачи линейного программирования трудно переоценить, поскольку именно форма (6) приводит к эффективной вычислительной процедуре решения задачи (2), известной под названием симплекс-метода и состоящей в оптимальном просмотре последовательности вершин многогранного множества (см. §6).

Пример 10. В качестве одного из возможных приложений продолжим разбор примера 9. Именно, предположим, что в задаче об оптимальном распределении ресурсов, заключающейся в минимизации функции

$$f(x^1, \dots, x^n) = f^1(x^1) + \dots + f^n(x^n) \tag{9}$$

при ограничениях

$$x^1 + \dots + x^n - 1 = 0 \tag{10}$$

и

$$x^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

все функции f^i линейны. В этом случае минимум функции (9) достигается в одной из вершин симплекса заданного ограничениями (10) и (11). Этих вершин, очевидно, всего n, и они имеют вид

$$\{1, 0, \dots, 0\},$$

$$\{0, 1, 0, \dots, 0\}, \dots$$

$$\dots, \{0, 0, \dots, 0, 1\}.$$

Поэтому достаточно просто найти величину

$$j = \arg \min_{1 \leq j \leq n} f_n^j(\lambda)$$

и выбрать в качестве решения $x_j^* = 1$ и $x_i^* = 0$ при $i \neq j$.

Таким образом, в случае линейных функций весь ресурс следует сосредоточить на одном объекте, хотя, как известно, нельзя хранить все яйца в одной корзине. Последнее достаточно красноречиво говорит о реалистичности некоторых линейных моделей экономики.

Упражнения.

(1) Докажите, что каждая крайняя точка множества Q является также его граничной точкой.
(2) Покажите, что открытое множество не имеет крайних точек.
(3) Покажите, что задача, двойственая к задаче (2) имеет вид

$$\begin{gathered}\langle b, \mu\rangle \to \min, \\ c + A^T\mu \geq \mathbf{0}, \\ \mu \geq \mathbf{0}.\end{gathered}$$

(4) Для задачи (2) сформулируйте и докажите аналоги теорем 13–15.

§6. Симплекс-метод

Как уже отмечалось ранее, решение задачи линейного программирования достигается в одной из вершин многогранного множества. С другой стороны, предложение 1 позволяет отыскать такую вершину посредством нахождения решения некоторой системы линейных уравнений. Поскольку число таких вершин конечно, то решение задачи линейного программирования, вообще говоря, можно найти за конечное число шагов путем перебора вершин. При этом каждый из шагов включает в себя составление некоторой системы линейных уравнений (отыскание вершины) с последующим отысканием решения этой системы.

Симплекс-метод использует ту же идею, но реализует ее гораздо более тонко. Во-первых, просмотр вершин ведется таким образом, что значения целевой функции монотонно убывают. Это позволяет сразу существенно сократить перебор, поскольку отбрасываются вершины со значением целевой функции, большим уже найденного. Во-вторых, перебор ведется по соседним вершинам. Поэтому система линейных уравнений на новом шаге мало чем отличается от предыдущей. Последнее позволяет существенно сократить вычисления посредством использования специальных экономичных методов решения подобных систем.

Общие положения. Симплекс-метод всегда применяют для задач линейного программирования, записанных в канонической форме

$$\begin{aligned} \langle c, x\rangle &\to \min, \\ Ax &= b, \\ x &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

где, как и ранее, $x \in \mathbb{R}^n$, A – прямоугольная $(m \times n)$-матрица, c и b – вектора в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно.

Обозначим через Q многогранное множество

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b, x \geq \mathbf{0}\}.$$

Тогда, используя технику выпуклого анализа, несложно доказать следующее предложение, весьма важное для реализации симплекс-метода.

Предложение 3. *Предположим, что многогранное множество Q непусто. Тогда Q не содержит прямых, вершинами множества Q являются те точки $x = (x^1, \dots, x^n)$, для которых выполнено неравенство*

$$x^i > 0,$$

а соответсвующие столбцы a^i матрицы A линейно независимы.

Доказательство предложения 3 можно найти, например, в книге [**16**]. Из предложения 3 же следует, что в каждой вершине множества Q могут быть положительны не более, чем m компонент вектора x. Назовем точку x *невырожденной вершиной*, если число положительных компонент в ней равно m. При этом везде в дальнейшем будем считать, что множество Q непусто, а все его вершины невырождены.

Заметим теперь, что в симплекс-методе исторически сложилась весьма специфическая терминология, с небольшими изменениями используемая в различных руководствах по линейному и выпуклому программированию. Именно, допустимую точку часто называют *планом*, вершину – *опорным планом* или *допустимым базисным решением*, а решение задачи (1) – *оптимальным планом.* Столбцы матрицы A, соответствующие положительным компонентам опорного плана в этом случае называют *базисом*. В дальнейшем, однако, следуя книге [**16**] мы не будем чрезмерно злоупотреблять такой терминологией, по возможности стараясь сохранить прежнюю – допустимая точка, вершина и т.д.

Описание симплекс-метода. Предполжим, что на k-ом шаге симплекс-метода получена точка $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$, являющаяся невырожденной вершиной многогранного множества Q. При этом положим

$$I_k = \{i \colon x_k^i > 0\}.$$

Согласно принятой невырожденности точки x_k множество I_k содержит ровно m элементов. Разобъем вектор x_k на две группы

$$x_k = \{u, v\},$$

где $u \in \mathbb{R}^m$ соответствует компонентам x_k^i с индексами из I_k, а $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ – компонентам x_k^i с индексами, не принадлежащими I_k. Тогда система

$$Ax = b$$

может быть переписана в следующем виде

$$A_1 u + A_2 v = b, \tag{2}$$

где A_1 – $(m \times m)$-матрица, столбцы которой являются столбцами a^i матрицы A с индексами из I_k, а A_2 – $(m \times (n-m))$-матрица, составленная из остальных столбцов матрицы A.

Поскольку по предположению x_k – невырожденная вершина, то в силу предложения 1 матрица A_1 невырождена. Поэтому, разрешая систему (2), имеем

$$u = A_1^{-1}(b - A_2 v). \tag{3}$$

Заметим теперь, что целевая функция в задаче (1) может быть записана в следующем виде:

$$\langle c, x \rangle = \langle c_1, u \rangle + \langle c_2, v \rangle,$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^m$ – вектор с компонентами c^i вектора c, соответствующими $i \in I_k$, а $c_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ – вектор с компонентами c^i вектора c, соответствующими $i \notin I_k$. Тогда в силу равенства

(3) целевая функция может быть выражена только через v. Тогда имеем

$$\begin{gathered}\langle c_1, A_1^{-1}(b - A_2 v)\rangle + \langle c_2, v\rangle = \\ = \langle c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1, v\rangle + \langle c_1, A_1^{-1} b\rangle,\end{gathered}$$

где T – операция транспонирования.

Таким образом, исходная задача (1) теперь эквивалентна задаче

$$\begin{gathered}\langle c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1, v\rangle \to \min, \\ A_1^{-1}(b - A_2 v) \geq \mathbf{0}, \\ v \geq \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{4}$$

В задаче (4) вершине x_k соответствует вектор $\{u_k, v_k\}$, в котором

$$u_k > \mathbf{0} \tag{5}$$

и

$$v_k = \mathbf{0}. \tag{6}$$

При этом точка (6) является допустимой точкой для задачи (4), а ограничение

$$A_1^{-1}(b - A_2 v) \geq \mathbf{0} \tag{7}$$

удовлетворяется как строгое неравенство, поскольку

$$A_1^{-1}(b - A_2 v_k) = A_1^{-1} b = u_k > \mathbf{0}.$$

Следовательно, ограничение (7) может быть отброшено как неактивное при анализе точки v_k на оптимальность. Но в задаче

$$\begin{gathered}\langle d, v\rangle \to \min, \\ v \geq \mathbf{0},\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$d = c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1,$$

минимум, очевидно, достигается тогда и только тогда, когда $d \geq \mathbf{0}$, причем

$$\langle d, v\rangle = 0.$$

Таким образом, если

$$d = c_2 - A_2^T (A_1^{-1})^T c_1 \geq \mathbf{0},$$

то точка v является решением задачи (8) и, следовательно, задачи (4). Тогда точка x_k является решением задачи (1). Если же среди компонент вектора d имеются отрицательные (например, d^j), то точка $v = \mathbf{0}$ не является решением задачи (8), поскольку увеличение v^j влечет за собой уменьшение целевой функции в (8).

Рассмотрим случай, когда

$$d^j < 0.$$

Пусть при этом e_j – j-й орт в пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$. Вычислим новый вектор v_{k+1} по формуле

$$v_{k+1} = v_k + \gamma_k e_j,$$

где γ_k – некоторое действительное число, выбираемое из следующих соображений.

С увеличением γ_k целевая функция уменьшается. При этом, однако, может нарушиться ограничение

$$A_1^{-1}(b - A_2 v) \geq \mathbf{0},$$

которое при $v = v_k$ было неактивным. Поэтому γ_k следует определять из условия

$$\gamma_k = \max\{\gamma \geq \mathbf{0} \colon A_1^{-1}(b - \gamma A_2 e_j) \geq \mathbf{0}\}.$$

Если окажется, что

$$\gamma_k = \infty,$$

то, очевидно, задача не имеет решения, поскольку в этом случае

$$\inf_{x \in Q} \langle c, x \rangle = -\infty,$$

Если же

$$\gamma_k < \infty,$$

то получаем новую точку

$$x_{k+1} = \{u_{k+1}, v_{k+1}\},$$

где

$$u_{k+1} = A_1^{-1}(b - \gamma_k A_2 e_j)$$

и

$$v_{k+1} = v_k + \gamma_k e_j.$$

Вновь полученная точка x_{k+1} является допустимой вершиной, поскольку она имеет m положительных компонент (j

компонента из вектора v_k стала положительной в то время как одна из компонент вектора u_{k+1} обратилась в нуль). Поэтому в этой точке можно повторить всю процедуру заново. При этом поскольку

$$\langle c, x_{k+1}\rangle = \langle d, v_{k+1}\rangle = \langle d, v_k\rangle + \gamma_k\langle d, e_j\rangle = \langle c, x_k\rangle + \gamma_k d_j,$$

где по построению $\gamma_k > \mathbf{0}$ и $d_j < \mathbf{0}$, то

$$\langle c, x_{k+1}\rangle < \langle c, x_k\rangle.$$

Таким образом, симплекс-метод обладает свойством монотонности значений целевой функции при переборе вершин. Следовательно, возврат в какую-либо из ранее пройденных вершин здесь невозможен. Но так как число вершин конечно, симплекс-метод сходится за конечное число шагов.

Реализация симплекс-метода. Приведенное выше описание симплекс-метода не претендует на полноту. Чтобы перейти от этого описания к четкому алгоритму нужно, вообще говоря, уточнить ряд вопросов.

A) Прежде всего, рассмотрим вопрос о выборе начального приближения для симплекс-метода. Начальную точку x_0, являющуюся вершиной многогранного множества Q, можно найти с помощью следующего приема, называемого методом искусственного базиса.

Введем дополнительные переменные $z = (z^1, \ldots, z^m)$, играющие роль невязок в ограничениях, и рассмотрим задачу их минимизации

$$\sum_{i=1}^{m} z^i \to \min \tag{9}$$

при ограничениях

$$\langle a_i, x\rangle + z^i = b^i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{10}$$

и

$$x \geq \mathbf{0}, \quad z \geq \mathbf{0}. \tag{11}$$

В этой задаче искомым является вектор $\{x, z\}$ размерности $n+m$, а точка $\{\mathbf{0}, b\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ является вершиной. Последнее объясняется тем, что всегда можно принять

$$b \geq \mathbf{0},$$

чего можно добиться, изменив знак ограничения

$$\langle a_i, x\rangle = b^i;$$

при этом будем считать, что среди компонент вектора b нет нулевых.

Таким образом, для отыскания решения задачи (9)–(11) можно применить симплекс-метод с начальным приближением $\{\mathbf{0}, b\}$. В результате получится либо точка $\{x_0, \mathbf{0}\}$, где x_0 – вершина в исходной задаче (1), либо точка, удовлетворяющая условию

$$z \neq \mathbf{0}.$$

Замечание. Во многих практических ситуациях введение описанного выше дополнительного этапа можно избежать. Например, пусть исходная задача линейного программирования имеет вид

$$\begin{gathered}\langle c, x\rangle \to \min,\\ Ax \leq b,\\ x \geq \mathbf{0},\end{gathered} \tag{12}$$

где $b > \mathbf{0}$. Переводя задачу (12) в каноническую форму, можем записать

$$\begin{gathered}\langle c, x\rangle \to \min,\\ Ax + z = b,\\ x \geq \mathbf{0}, \quad z \geq \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{13}$$

Тогда точка $\{\mathbf{0}, b\}$ является невырожденной вершиной в задаче (13) и, таким образом, применять здесь метод искусственного базиса излишне.

В) Второй вопрос связан с численной реализацией симплекс-метода.

Вообще говоря, существует несколько способов хранения и преобразования используемых в симплекс-методе матриц и векторов. В основном численном варианте, где используется метод обратной матрицы, вычисляется и хранится матрица A_1^{-1}. Выражения же типа $A_2^T(A_1^{-1})^T c_1$ вычисляются путем умножения этой матрицы на соответствующие вектора; при вычислении обратной матрицы A_1^{-1} здесь используется то обстоятельство, что на последовательных итерациях соответствующие матрицы A_1 получаются заменой лишь одного столбца. Поэтому можно обращать эти матрицы рекурентно, используя различные соотношения, хорошо известные специалистам по численным методам линейного программирования. При этом начальное приближение для $A_1^{-1}b$ в методе искусственного базиса не требует вычисления обратной матрицы, поскольку в этом случае A_1 – единичная матрица.

Приводить подробные формулы какой-либо реализации симплекс-метода представляется бессмысленным, поскольку в настоящее время соответсвующие программы, написанные профессионалами высшей квалификации, достигли совершенства с программистской и вычислительной точки зрения. Более того, эти программы сейчас стали общедоступными благодаря компьютерной сети INTERNET. Принимая во внимание тот факт, что в современном мире задачи линейного программирования приходится решать достаточно редко, можно смело утверждать, что простому пользователю вряд ли придется когда-либо заниматься программной реализацией алгоритма симплекс-метода. Что же касается ситуации, когда решение задачи линейного программирования во что бы то ни стало нужно найти вручную, то в этом случае можно воспользоваться одним из многочисленных руководств, в том числе и специальных. [7]

C) Существенные трудности при реализации симплекс-метода связаны с проблемой вырождения.

При описании метода выше делалось предположение о невырожденности всех вершин. Отказ от этого предположения может привести к невозможности обращения матрицы A_1. Опасность подобной ситуации, главным образом, состоит в том, что при вычислениях некоторые компоненты точки x, характеризующей невырожденную вершину, могут оказаться достаточно близкими к нулю. На практике, к счастью, это случается довольно редко.

Замечание. Необходимо отметить, что еще недавно симплекс-метод часто рассматривали как универсальное средство, позволяющее легко найти решение любой задачи линейного

[7] См., например, [**1**, **9**, **12**, **27**].

программирования. Этим и объясняется стремление во что бы то ни стало научиться (чаще научить) решать такие задачи вручную. В настоящее время (во многом в связи с упомянутой проблемой вырождения вершин) данная точка зрения, однако, перестала быть общепринятой.

Глава 3

Основы оптимального управления

Настоящая глава посвящена изучению видимой части айсберга: только так можно говорить о приведенных ниже элементарных основах самого сложного и наиболее интенсивно развивиающегося раздела теории экстремальных задач – оптимального управления.

Формально общие математические основы оптимального управления заложены в середине прошлого века в трудах академика Л.С. Понтрягина и его учеников (см. [**18**]). Известно, что в этот период жизни Л.С. Понтрягин занимался только математическими задачами, имеющими реальное практическое значение. И, хотя, можно лишь догадываться какая из реальных задач привела к принципу максимума, фактически человек начал решать задачи оптимального управления в незапамятные времена.

Открывает главу §1, в котором рассматривается простейшая задача вариационного исчисления. Данная задача имеет исключительно методическое значение, однако именно с нее начинаются многие современные курсы оптимального управления. Объясняется это тем, что простым и естественным образом вводятся основные понятия и приемы, составляющие прообраз общего метода решения других уже реалистичных задач.

Одной из важнейших особенностей простейшей задачи вариационного исчисления является то, что здесь почти сразу приходиться говорить о существовании решения этой задачи. Даная проблема в вариационном исчислении и теории оптимального управления всегда стояла чрезвычайно остро и в наше время не потеряла своей актуальности.

Непосредственным продолжением §1 стал §2, посвященный изучению вариационных задач с ограничениями. Применяемый здесь метод восходит еще к Лагранжу и хорошо известен нам по главе 2: с помощью некоторых множителей, называемых множителями Лагранжа, задача с ограничениями сводится к задаче без таковых – простейшей задаче вариационного исчисления. При этом общая задача вариационного исчисления остается здесь не рассмотренной, поскольку она связывается в дальнейшем с задачей оптимального управления и обратно.

Изложению основ математической теории оптимального управления в посвящен §3. Здесь рассмотрена задача оптимального управления в форме Л.С. Понтрягина и ее важнейших частный случай, известный как задача об оптимальных быстродействиях. Необходимое условие в этих задачах – знаменитый принцип максимума Понтрягина остался в настоящей книге недоказанным. Причина для этого достаточно уважительная: приводить не совсем строгое доказательство авторам не хотелось, а более или менее простое и полностью корректное доказательство (насколько нам известно) в настоящее время не найдено.

В §4 рассмотрены две частные задачи о линейных оптимальных быстродействиях. Задачи эти выбраны не случайно, поскольку метод их решения весьма и весьма поучителен, посколку содержит много тонкостей, знание которых способствует выработке навыков обращения с более реалистичными задачами. Поэтому еще ни один учебник оптимального управления не прошел мимо них.

Задача об оптимальных быстродействиях является одной из первых из дошедших до нас вариационных задач: достаточно вспомнить задачу о брахистохроне Иоганна Бернулли. В наши дни актуальность этой задачи не снизилась. Более того, быстродействия в линейных системах оказались вполне доступными для подробного и продвинутого изучения и полученные здесь результаты в известной мере пригодны для практического использования. В §5 достаточно полно изложена общая теория таких задач, включающая в частности простейшую теорему существования и единственности.

§1. Простейшая задача вариационного исчисления

Как следует из названия, §1 настоящей главы посвящена изучению простейшей задачи вариационного исчисления. Эта задача не является первой из известных вариационных задач: уже упоминавшаяся задача Дидоны появилась гораздо раньше. Вместе с тем, эта задача действительно проста, довольно точно отражает принципы решения вариационных задач и содержит в себе достаточно много тонкостей, знакомство с которыми весьма полезно при изучении вариационного исчисления и оптимального управления.

Постановка задачи. Как вариационное исчисление, так и оптимальное управление оперируют в основном с *функционалами*, которым, вообще говоря, называется любое отображение J произвольного множества M на действительную ось $\mathbb{R}$. Так, если f – некоторая непрерывная числовая функция, то простейший пример функционала имеет вид

$$J(y) = \int\limits_0^1 f(x, y(x))\, dx,$$

где y – любая функция, определенная и непрерывная на отрезке $[0, 1]$.

Замечание. Иногда в определении функционала требуют, чтобы множество M обязательно было функциональным пространством. Последнее излишне, поскольку приводит к замене определения примером.

Простейшая задача вариационного исчисления заключается в минимизации функционала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

в классе $C^1(x_0, x_1)$ функций, определенных и непрывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$. При этом дополнително будем считать, что

$$y(x_0) = x_0, \quad y(x_1) = x_1. \tag{2}$$

Таким образом, принципиальное отличие простейшей задачи вариационного исчисления от задачи на условный экстремум состоит в том, что минимум следует искать среди функций, причем специально оговоренного класса.

Пример 1. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (3)$$

Функция f здесь представляет собой длину кривой y, проходящей через точки (2), т.е. задача о минимизации функционала (3) является задачей об определении кратчайшего расстояния между двумя точками на плоскости.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx.$$

Данная задача является первой из дошедших до нас простейших задач вариационного исчисления. Она восходит еще к Иоганну Бернулли и называется *задачей о брахистохроне.* Смысл ее состоит в следующем: какую форму должна иметь проволочка, чтобы кольцо соскальзывало по ней поддействием только силы тяжести из одной заданной точки в другую за наименьшее время.

Уравнение Эйлера. Пусть y и $\bar{y}$ – две функции, опрелененные на отрезке $[x_0, x_1]$. Разность

$$\delta y = y(x) - \bar{y}(x)$$

называется *вариацией.* При этом говоря о вариации специально оговаривают класс функций, в котором изменяется y. В дальнейшем, пока особо не будет оговорено противное, будут рассматриваться функции класса $C^1(x_0, x_1)$. Соответствующая этому классу функций вариация δy называется *слабой вариацией.*

Если δy – некоторая вариация, то *вариацией функционала* называется разность

$$\delta J = J(y + \delta y) - J(y).$$

Функцию y будем называть *слабой минималью* функционала J, если для всех вариаций δy, для которых величина

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} (|\delta y(x)| + |\delta y'(x)|)$$

достаточно мала, выполнено неравенство

$$J(y) \le J(y + \delta y).$$

В этом случае будем говорить о *слабом минимуме* функционала J.

Замечание. Легко видеть, что приведенное определения минимума функционала полностью аналогично определению минимумам функции, введенного в §4. И в том, и в другой случае говориться о локальности минимума. Что касается добавления слова “слабый” в отношении минимума функционал, то это обстоятельство связано с тем, что пока исследование ведется на слабых вариациях. При этом необходимо отметить, что слабую вариацию легко перепутать с дамой, приятной во всех отношениях: все, казалось бы, прекрасно, однако слабый минимум может быть весьма далек от минимума вообще (см. пример 5).

Переходя теперь к выводу необходимых условий слабого минимума в простейшей задаче вариационного исчисления, обозначим через y некоторую минималь, а через δy – соотвествующую вариацию. Тогда имеем

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')] \, dx \tag{4}$$

Предположив, что функция f дифференцируема по y и y', можем записать

$$f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y') =$$
$$= f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y' + o(\sqrt{(\delta y)^2 + (\delta y')^2}). \tag{5}$$

Тогда, объединив равенства (4) и (5), с учетом того, что y – минималь, имеем неравенство

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} [f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y']\, dx \geq 0. \tag{6}$$

Предположив теперь, что функция f дважды дифференцируема по совокупности переменных, проинтегрируем второе слагаемое в (6) по частям. Проделав это, с учетом условия (2) окончательно получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left[f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right] \delta y\, dx \geq 0. \tag{7}$$

Поскольку неравенство (7) выполняется для всех вариаций δy, для которых величина

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |\delta y(x)|$$

достаточно мала, то рассуждая по аналогии с доказательством теоремы Ферма (см. §4), имеем уравнение

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_x} = \frac{\partial f}{\partial y_x}, \tag{8}$$

которому с необходимостью должна удовлетворять слабая минималь.

Уравнение (8) называется *уравнением Эйлера*. Относительно y – это уравнение второго порядка. Таким образом, задача отыскания функции, подозрительной на минималь, представляет собой двухточечную краевую задачу (8), (2).

Любое решение уравнения Эйлера называется *экстремалью* (если угодно, *слабой экстремалью*). При этом легко видеть, что экстремаль обращает в нуль вариацию δJ функционала $J(y)$ и обратно (см. упражнение 2).

Замечание. Сравнивая доказательство теоремы Ферма и вывод уравнения Эйлера несложно заметить, что идея доказательства полностью совпадает с идеей вывода. Последнее весьма красноречиво говорит о целесообразности (и возможности) единого подхода к экстремальным задачам.

Примеры. Не вдаваясь в детали существования минимума в задачах о кратчайшем расстоянии и брахистохроне, найдем экстремали в этих задачах.

Пример 3. Экстремали функционала (3) находятся совсем тривиально.

В самом деле, уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

или, что эквивалентно,

$$y''=0.$$

Поэтому

$$y=C_1x+C_2,$$

что и следовало ожидать.

Пример 4. Обратившись теперь к задаче о брахистохроне, прежде всего, перепишем уравнение Эйлера в следующем развернутом виде:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}-y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-y''\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}=0$$

или, что в данном случае эквивалентно,

$$\frac{\partial f}{\partial y}-y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-y''\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}=0. \tag{9}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=y'\frac{\partial f}{\partial y}-y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}-y'y''\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y'}.$$

Поэтому, умножив уравнение (9) на y', видим, что уравнение Эйлера здесь приводит к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0.$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}=C. \tag{10}$$

Для удобства направим ось Ox плоскости $\mathbb{R}^2$ как обычно, а ось Oy – вертикально вниз. Тогда в силу (10) уравнение Эйлера в задаче о брахистохроне приводит к уравнению

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C.$$

Поэтому

$$y(1+y'^2) = C_1. \tag{11}$$

Положим

$$y' = \operatorname{ctg} t. \tag{12}$$

Тогда из (11) следует, что

$$y = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t). \tag{13}$$

Действуя формально, запишем

$$dx = \frac{dy}{y'},$$

откуда в силу (12) и (13) имеем

$$dx = \frac{2C_1 \sin t \cos t}{\operatorname{ctg} t}\, dt.$$

Поэтому

$$x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2. \tag{14}$$

Несложно заметить, что соотношения (13), (14) дают уравнения семейства циклоид. Таким образом, экстремалями в задаче о брахистохроне являются циклоиды.

Существование решений. Следуя [**28**], позволим себе привести небольшую математическую шутку.

Парадокс Перрона. Пусть N – наибольшее положительное целое число. Тогда для $N \neq 1$ справедливо неравенство $N^2 > N$. Последнее, однако, противоречит определению числа N как наибольшего положительного целого. Другими словами, $N = 1$.

Несколько ранее по этому поводу великий Кун-цзы заметил: "Очень сложно искать черную кошку в темной комнате. Особенно, если там ее нет." В главах 1 и 2 неоднократно говорилось о том, что прежде чем искать черную кошку, следует позаботиться о ее существовании (по крайней мере в темной комнате). В вариационном исчислении ситуация становиться еще более жесткой. В частности, экстремали могут не иметь к минимуму функционала никакого отношения.

Чтобы пояснить эту мысль, процетируем теперь А. Лебега (см. [**28**]):

"Все мои статьи [по этому предмету] связаны с одной школьной "шуткой". В колледже Бове мы часто доказывали, что в треугольнике одна сторона равна сумме двух других. Рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 1). Если точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон этого треугольника, то

$$BA + AC = BC_1 + C_1A_1 + A_1B_1 + B_1C.$$

С каждым из треугольников BC_1A_1, A_1B_1C поступим так же, как с труегольником ABC. Мы получим ломанную линию, образованную восемью отрезками и равную $BA + AC$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность ломаных линий, которые все меньше и меньше удаляются от стороны BC и имет длину, равную сумме двух сторон первоначально взятого треугольника. Ученики колледжа Бове заключали отсюда, что отрезок BC, являющийся геометрическим пределом ломаных линий, имеет длину, равную сумме длин двух других сторон $BA + AC$."

Данная история непосредственно говорит о том, что длина не является непрерывной функцией. Поэтому уже сейчас довольно наивно было бы утверждать, что уравнение Эйлера является типическим приемом решения подобных задач. Но гораздо более важным представляется то обстоятельство, что на горизонте появляется *бесконечно мелкий зигзаг*, значение которого для вариационного исчисления и оптимального управления трудно переоценить.

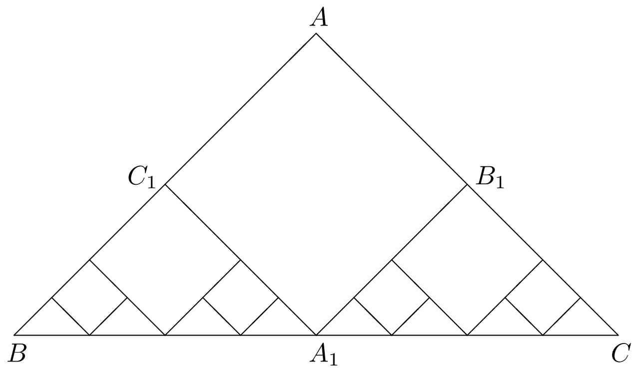

Рис. 1

Пример 5. Следуя [**28**], рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(y) = \int_0^1 (1 + y^2)(1 + (y'^2 - 1)^2)\, dx \tag{15}$$

при ограничениях

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{16}$$

Вдоль оси Ox разобьем отрезок $[0, 1]$ на четное число отрезков длины ε и построим на $[0, 1]$ ломаную, поочередно приняв либо $y' = 1$, либо $y' = -1$ (см. рис. 2). Соответствующая функция y принимает значения на отрезке $[0, \varepsilon]$. Поэтому значение интеграла (15) не превосходит величины $1 + \varepsilon^2$.

С другой стороны, для любой кусочно-дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функции y, удовлетворяющей уловиям (16), для всех значений $0 \leq x \leq 1$ справедливо неравенство

$$(1 + y^2(x))(1 + (y'^2(x) - 1)^2) \geq 1,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$y(x) = 0 \tag{17}$$

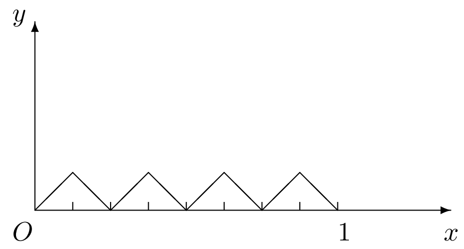

Рис. 2

и

$$y'(x) = \pm 1. \tag{18}$$

Отсюда следует, что точная нижняя грань интеграла (15) равна единице и что достигается она на ломаной y, удовлетворяющей условиям (17) и (18), при $\varepsilon \to 0$.

Описанная в примере 5 кривая y собственно и называется *бесконечно мелким зигзагом.* Очевидно, что даже в простейшей задаче вариационного исчисления класс допустимых функций должен содержать такой зигзаг. Но как быть тогда с уравнением Эйлера?

Упражнения.

(1) Докажите *лемму Дюбуа – Раймона*:
Если для каждой непрерывной функции η

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\eta(x)\,dx = 0,$$

где φ – некоторая фукнция, определенная и непрерывная на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$$\varphi(x) \equiv 0$$

на этом отрезке.

(2) Покажите, что функция y является экстремалью тогда и только тогда, когда она обращает в нуль вариацию δJ функционала $J(y)$.
Указание: Используйте лемму Дюбуа – Раймона.

(3) Пусть $y = (y^1, \ldots, y^n)$ – векторная функция скалярного перменного x. Покажите, что в этом случае уравнения Эйлера для задачи (1), (2) представляют собой систему

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial {y^i_x}'} = \frac{\partial f}{\partial y^i_x}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

называемую *системой Эйлера.*

§2. Вариационные задачи с ограничениями

Как уже отмечалось, Дидона умела решать задачу более сложную, чем простейшая задача вариационного исчисления. Более того, считается, что задача, которую на самом деле решала Дидона, была еще сложней (чем упомянутая в предисловии), поскольку тирийцы "столько купили земли, ... сколько воловьей шкурой могли окружить на прибрежьи" исходя из того, что построенный на этой земле Карфаген должен лежать на берегу моря.

Для решения вариационной задачи, содержащей в себе задачу Дидоны, Лагранж предложил свой знаменитый метод множителей, описание которого приводится ниже. Кроме того, ниже оговариваются детали применения метода множителей Лагранжа, аналогичные тем, что и в главе 2, а также другие, более тонкие.

Задача Лагранжа. Поскольку задача Лагранжа уже совсем близка к современной задаче оптимального управления, будем в дальнейшем использовать соответствующие обозначения.

Пусть t – независимое действительное переменное, имеющее, вообще говоря, физический смысл времени, и пусть $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ – n-мерная действительная функция t. В процессе своего движения точка с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ описывает в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторую кривую, называемую *траекторией.* Скорость движения точки будем обозначать через $\dot{x}$, понимая, естественно, что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

В этом случае пространство $\mathbb{R}^n$ будем называеть *фазовым пространством*, а координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ – *фазовыми координатами.*

В этих обозначениях *задача Лагранжа* представляет собой вариационную задачу о минимизации функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\, dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$g(t, x, \dot{x}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

и

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t, x, \dot{x})\, dt = \alpha, \tag{3}$$

где $g = (g^1, \ldots, g^m)$ и $h = (h^1, \ldots, h^r)$ – соответствующие векторные функции, а α – заданный вектор.

Если ограничение (2) отсутствует, то задача Лагранжа превращается в *изопериметрическую задачу*, являющуюся тривиальным обобщением задачи Дидоны. В любом случае решение задачи (1)–(3) будем искать в классе $C^1(t_0, t_1)$ векторных функций, определенных и непрывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$. При этом (как и ранее) дополнительно будем считать, что

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{4}$$

Метод множителей Лагранжа. Для решения задачи (1)–(3) Лагранж собственно и ввел свой метод множителей, который, как он считал, может свести задачу с ограничениями к задаче без таковых. Трудно сказать, о чем думал Лагранж, но рассуждения здесь ничем не отличаются от соответствующих рассуждений в задаче на условный экстремум.

Действуя как и в §1 гл. 2 введем в рассмотрение новую функцию

$$I(y) = f(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda(t), g(t, x, \dot{x}) \rangle + \langle \kappa, h(t, x, \dot{x}) - \dot{\varphi}(t) \rangle,$$

в которой $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^r)$ – действительные векторные функции времени t, а $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ – r-мерный действительный вектор. Определенную таким образом функцию L будем называть *функцией Лагранжа*. При этом вектора λ и κ здесь играют роль множителей Лагранжа, а функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(t_0) = \mathbf{0}, \quad \varphi(t_1) = \alpha.$$

Для дальнейшего удобства введем в рассмотрение новую функцию Лагранжа

$$L(t, x, \dot{x}, \lambda, \kappa, \varphi) =$$
$$= f(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda(t), g(t, x, \dot{x}) \rangle + \langle \kappa(t), h(t, x, \dot{x}) - \dot{\varphi}(t) \rangle$$

в фазовом пространстве, расширенном добавлением соответствующих новых переменных, с дополнительным ограничением

$$\dot{\kappa} = \mathbf{0} \tag{5}$$

и рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления, заключающуюся в минимизации функционала

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, \lambda, \kappa, \varphi)\, dt.$$

Еcди в последней задаче не принимать во внимание ограничения, то, как заметил Лагранж, уравнения Эйлера для этой задачи дадут систему

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} &= \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, m, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\kappa}_i} &= \frac{\partial L}{\partial \kappa_i}, \quad i = 1, \ldots, r, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^i} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi^i}, \quad i = 1, \ldots, r,
\end{aligned}$$

называемую системой *Эйлера – Лагранжа* (см. §1, упражнение 3). При этом в системе Эйлера – Лагранжа последние три уравнения приводят к уравнениям (2), (5) и

$$\dot{\varphi} = h(t, x, \dot{x}).$$

Замечание. Если вывод уравнения Эйлера аналогичен (по крайней мере идейно) доказательству теоремы Ферма, то внешний вид системы Эйлера – Лагранжа весьма напоминает один из вариантов записи необходимого условия в задаче на условный экстремум в случае, когда в точке минимума выполнено условие регулярности.

Пример 6. Помня о парадоксе Перрона и черной кошке, почему-то убежавшей из темной комнаты, рассмотрим задачу о минимизации функционала (1) при ограничениях (2) и (4) в следующих предположениях (см. [**28**]).

Пусть размерность n фазового пространства $\mathbb{R}^n$ равна двум. В пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (t, x^1, x^2) ось Ox^2 расположим вертикально, а оси Ot и Ox^1 – горизонтально. Возьмем произвольную точку $P = (t_0, x_0^1, x_0^2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим кривую $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$, проходящую через P, имеющую кусочно-непрерывные производные $\dot{x}(t) = (\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t))$, удовлетворяющие условию

$$\dot{x}^2 = \sqrt{1 + (\dot{x}^1)^2}. \tag{6}$$

Для фиксированной точки P любую такую кривую можно определить, если известна ее проекция на плоскость (t, x^1). При этом в силу (6) несложно заметить, что разность коориннат x^2 в концах этой кривой совпадает с длиной ее проекции (см. пример 1). Следовательно, если принять, что проекция является отрезком, то через второй конец $Q = (t_1, x_1^1, x_1^2)$ этой кривой, удовлетворяющей условию (6), нельзя провести никакую другую кривую, удовлетворяющую (6).

Положим

$$g(t, x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2) = \dot{x}^2 - \sqrt{1 + (\dot{x}^1)^2}.$$

Тогда для произвольной функции f в функционале (1) функцию Лагранжа рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

$$L(t, x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \lambda) = \tag{7}$$
$$= f(t, x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2) + \lambda(t)\left(\dot{x}^2 - \sqrt{1 + (\dot{x}^1)^2}\right).$$

Как было отмечено выше, в рассматриваемой задаче существует только одна кривая, удовлетворяющая условию (2) и соединяющая точки (4). В силу едиственности этой кривой именно на ней и только не ней и должен достичаться минимум. Поэтому можно было бы утверждать, что для произвольной функции f с функцией L, заданой равенством (7), с необхолимостью выполняются уравнения Эйлера – Лагранжа. Последнее, однако, представляется более, чем сомнительным.

В самом деле, заметим, что

$$\frac{\partial g}{\partial x^1} = \frac{\partial g}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^1} = -\frac{\dot{x}^1}{\sqrt{1 + (\dot{x}^1)^2}}$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^2} = 1.$$

Поэтому кривая $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$, проекция которой на плоскость (t, x^1) является отрезком, удовлетворяет системе Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial g}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2,$$

для функции g, но не для функции L.

Таким образом, в рассматриваемом примере функция f оказывается не у дел, что весьма красноречиво говорит о корректности формального использования метода множителей.

Поняв теперь (казалось бы), что нужно сделать прежде, чем искать черную кошку в темной комнате, запишем *модифицированную функцию Лагранжа* $\tilde{L}$ в следующем виде

$$\tilde{L}(t, x, \dot{x}, \lambda, \kappa, \varphi) =$$

$$= \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda(t), g(t, x, \dot{x}) \rangle + \langle \kappa(t), h(t, x, \dot{x}) - \dot{\varphi}(t) \rangle,$$

где λ_0 – уже знакомое нам по главе 2 действительное число, принципиально такое, что либо $\lambda_0 = 0$, либо $\lambda_0 = 1$. При этом в силу уравнения (5) и четвертого из уравнений системы Эйлера – Лагранжа можем ввести в рассмотрение более естественную модификацию $\bar{L}$ функции Лагранжа

$$\bar{L}(t, x, \dot{x}, \lambda, \kappa, \varphi) = \tag{8}$$

$$= \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda(t), g(t, x, \dot{x}) \rangle + \langle \kappa, h(t, x, \dot{x}) \rangle,$$

где λ_0 имеет прежний смысл, а $\varkappa$ – некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^r$.

Определенную таким способом функцию $\bar{L}$ будем называть *расширенной функцией Лагранжа.* Теперь можно было бы сфофмулировать необходимые условие для задачи Лагранжа, использующие как модифицированную, так и расширенную функции Лагранжа и аналогичные теореме 1 главы 2. Этого, однако, здесь делать не будем потому, что (к сожалению) не все еще ясно с черной кошкой.

Общая задача вариационного исчисления. Как уже фактически отмечалось ранее, ограничение (3) в задаче Лагранжа не имеет самостоятельного значения, поскольку оно эквивалентно ограничениям

$$\dot{\varphi} = h(t, x, \dot{x})$$

и

$$\varphi(t_0) = \mathbf{0}, \quad \varphi(t_1) = \alpha.$$

Поэтому естественым обобщением задачи Лагранжа можно считать задачу о минимизации функционала

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\, dt \tag{9}$$

при ограничениях

$$g(t, x, \dot{x}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

и

$$h(t, x, \dot{x}) \leq \mathbf{0}, \tag{11}$$

где $g = (g^1, \ldots, g^m)$ и $h = (h^1, \ldots, h^r)$ – соответствующие векторные функции. Решение этой задачи будем искать в классе $\mathcal{C}^1(t_0, t_1)$ кусочно-дифференцируемых векторных функций, определенных отрезке $[t_0, t_1]$. При этом дополнительное условие

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{12}$$

можем опустить, включив его (если это необходимо) в ограничение (10).

Сформулированную таким образом задачу будем называть *общей задачей вариационного исчисления.* По сравнению с задачей Лагранжа эта задача имеет два принципиальных отличия:

(1) Имеется ограничение (11).

(2) Класс функций $C^1(t_0, t_1)$ заменен классом $\mathcal{C}^1(t_0, t_1)$.

Первое из этих отличий определяет собственно рассматриваемую задау. При этом оказывается, что второе отличие непосредственно связано с первым.

В самом деле, как уже отмечалось ранее (см. пример 5), минимум функционала даже в простейшей задаче вариационного исчисления совсем не обязан достигаться на слабых вариациях. В этом смысле второе отличие означает естественный отказ от обязательного использования слабых вариаций. Гораздо более существенным представляется то обстоятельство, что наличие ограничения (11) в задаче (9)–(12) фактически требует отказа от слабых вариаций. Именно, если функция x, минимизирующая функционал (9) при каком-либо значении $t_0 \le \tau \le t_1$ удовлетворяет по крайней мере одному из условий

$$h^i(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то использование слабых вариаций здесь становиться невозможным.

Рассмотреть задачу (9)–(12) на всем множестве возможных вариаций в настоящее время, насколько нам известно, неудалось. Однако уже к середине прошлого века была описана некоторая вариация, позволяющая свободно оперировать с ограничениями вида (11) и названная впоследствии *вариацией Мак-Шейна*.

Построение вариации Мак-Шейна опишем на следующем тривиальном примере.

Пример 7. Рассмотрим задачу о минимизации функционала (9) при ограничениях

$$x_0 \le x \le x_1$$

и (12).

Пусть $x(t)$ – некоторая кривая и пусть $\delta x(t)$ – вариация, определяемая равенством

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t),$$

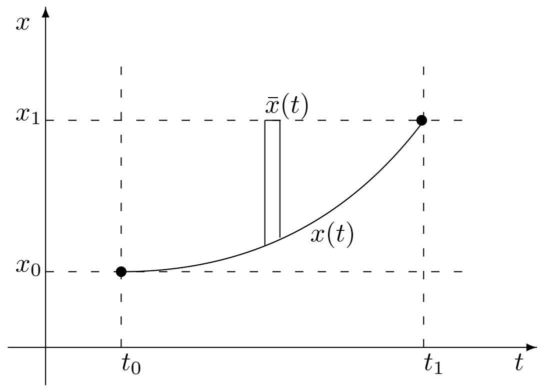

Рис. 3

в котором $\bar{x}(t)$ – кривая, полученная из $x(t)$ "протыканием" последней иголкой до достижения ею ограничения (см. рис. 3). Такая вариация и называется вариацией Мак-Шейна. При этом о величине малости вариации Мак-Шейна судят по малости интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} |\delta x(t)|\, dt.$$

В общем случае вариация Мак-Шейна получается именно "протыканием" абсолютно непрерывной функции иголками, причем обязательно до ограничения. Поэтому эту вариацию иногда называют также *игольчатой вариацией*.

Формулировка необходимого условия минимума в задаче (9)–(12) здесь опускается, поскольку ее всегда можно свести к задаче оптимального управления, изучению которой посвящается оставшаяся часть главы 3.

Упражнения.

(1) Выведите аналог системы Эйлера – Лагранжа для задачи (1)–(4), взятой с расширенной функцией Лагранжа (8).

(2) Решите задачу Дидоны в предположении, что:

(a) Карфаген предполагается построить в пустыне;

(b) Карфаген предполагается построить на берегу моря (уравнение линии берега считается известным, а условие (4) – заданным).

Указание: Используйте построения примера 4.

(3) Рассмотрим задачу о минимизации функционала (1) при ограничениях

$$g(t,x) = \mathbf{0} \tag{13}$$

и (4). Докажите следующую теорему о методе множителей Лагранжа:

Пусть $x^*(t)$ минималь в задаче (1), (13), (4) и пусть вектора

$$\nabla g^i(t, x^*(t)), \quad i = 1, \ldots, m$$

линейно независимы для всех значений $t \in [t_0.t_1]$. Тогда $x^*(t)$ удовлетворяет системе Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где

$$L(t, x, \dot{x}, \lambda) = f(t, x, \dot{x}) + \langle \lambda(t), g(t,x) \rangle.$$

Указание: Используйте теорему о неявной функции.

(4) Докажите теоремы 2 и 4 главы 2 с использованием теоремы о неявной функции.

§3. Принцип максимума Понтрягина

Задача оптимального управления представляет собой современный вариант общей задачи вариационного исчисления. Изначально эта задача возникла из потребностей инженеров и военных и только потом, когда уже была заложены основы математической теории оптимального управления, было установлено, что это задачи именно вариационного исчисления.

В основе теории оптимального управления лежит знаменитый принцип максимума, высказанный в середине прошлого века академиком Л.С. Понтрягиным в качестве гипотезы. Ниже в §3 излагается элементарное введение в принцип максимума Понтрягина.

Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему S, состояние которой в любой момент времени t характеризуется точкой $x(t)$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что эволюция состояний системы S происходит во времени под действием управлений $u(t)$, прилагаемых к S в момент времени t. При этом для простоты будем считать, что пространтсво управлений представляет собой пространство $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что эволюция состояний системы S описывается нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – некоторая векторная функция. Задача управления системой S заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt, \tag{2}$$

в котором f^0 – заданная числовая функция.

Предположим теперь, что все функции $f^0, f^1, \ldots, f^n$ определены и непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial t}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

и

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

При этом считается, что функция управления u принимает значения в некотором подмножестве U пространства $\mathbb{R}^m$.

В таких условиях формулированную выше задачу будем называть *задачей оптимального управления в форме Л.С. Понтрягина*, а множество U – *допустимым множеством*. На практике множество U чаще всего бывает компактным множеством, например, m-мерным кубом; объясняется это тем, что физически обычно U – шкала управления на пульте какого-либо прибора.

Принцип максимума Понтрягина. Прежде всего, еще раз коротко обсудим вопрос о пребывании черной кошки в темной комнате.

Пусть $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ – множество кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$ и принимающих значения в множестве U. Тогда будем говорить, что $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ – *множество допустимых управлений*, если каждой функции $u \in \mathfrak{U}(t_0, t_1)$ соотвествует единственное решение системы (1), принадлежащее к классу $\mathcal{C}^1(t_0, t_1)$ и удовлетворяющее некоторому начальному условияю

$$x(t_0) = x_0.$$

Определенную таким образом функцию u будем называть *функцией управления*, а соотвествующую ей кривую x – *траекторией.*

Очевидно, что говорить о существовании решений $x \in \mathcal{C}^1(t_0, t_1)$ задачи (1), (2) можно говорить только в том случае, когда множество $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ непусто, что и предполагается. Этого, однако, недостаточно.

Функция u^* класса $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ называется *оптимальным управлением*, если для любой другой функции $u \in \mathfrak{U}(t_0, t_1)$ выполнено неравенство

$$J(u^*) \leq J(u).$$

При этом траекторию x^*, соответсвующую оптимальному управлению u^*, будем называть *оптимальной траекторией.*

Легко видеть, что данное определение говорит о *глобальном минимуме* функционала (2), что говорит о еще одном принципиальном отличии задачи оптимального управления от задачи Лагранжа.

Если множество $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ непусто, оно, очевидно, совсем не обязано содержать оптимальное управление u^*. Чтобы гарантировать это, нужно сформулировать для рассмативаемой задачи теорему, аналогичную теореме 7 главы 1. Последнее, однако, далеко выходит за рамки вводного курса. Поэтому в дальнейшем будем считать выполненным некоторое условие существования u^*.

Наряду с фазовым вектором x введем вектор *канонических переменных* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, сопряженных к x. Для этого положим

$$H(t, x, \psi_0, \psi, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(t, x, u), \tag{3}$$

где ψ_0 – некоторое действительное число, а $\psi_1, \ldots, \psi_n$ (как функции времени t) удовлетворяют *сопряженной системе*

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определенная таким способом функция H называется *управляемой функцией Гамильтона*. При этом *функцией Гамильтона* называется функция $\mathcal{H}$, удовлетворяющая условию

$$\mathcal{H}(t, x, \psi_0, \psi) = \max_{u \in U} H(t, x, \psi_0, \psi, u),$$

где по предположению максимум достигается в некоторой точке u^* допустимого множества U.

В силу равенства (3) несложно заметить, что функции x и ψ удовлетворяют *каноноческой* или *гамильтоновой системе*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина). *Если u^* – оптимальное управление в задаче* (1), (2) *и*

$$x^*(t) = (x^{*1}(t), \ldots, x^{*n}(t))$$

– соответствующая траектория, то найдется такое действительное число $\psi_0^* \leq 0$ и такая векторная функция

$$\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)),$$

что:

(1) *Для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$ все величины ψ_0^* и $\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)$ не равны нулю одновременно.*

(2) *Для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$*

$$H(t, x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t)) = \mathcal{H}(t, x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t)).$$

(3) *Функции* x^* *и* ψ^* *удовлетворяют канонической системе* (4).

(4) *На концах траектории* x^* *выполнено условие трансверсальности*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \delta x^{*i} - \mathcal{H}\delta t\right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Доказательство теоремы 1 совсем нетривиально и, потому, здесь опускается (см., например, [**18**]). Отметим только, что в любом случае оно (доказательство) осуществляется с использованием вариаций Мак-Шейна. Отметим также следующие важнейшие обстоятельства.

A) В условиях теоремы 1 величина ψ_0^* не определена и, если принципиально нельзя принять

$$\psi_0^* = -1,$$

то

$$\psi_0^* = 0.$$

B) Если концы $P = (t_0, x_0)$ и $Q = (t_1, x_1)$ траектории x^* закреплены, то условие трансверсальности заменяется условиями

$$x^*(t_0) = x_0$$

и

$$x^*(t_1) = x_1.$$

C) Если точки x_0 и x_1 закреплены, а время перехода из конца P в конец Q свободно, то условие трансверсальности принимает вид

$$[\mathcal{H}\delta t]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

В частности, если конец P закреплен, а конец Q – нет, то

$$\mathcal{H}(t_1, x^*(t_1), \psi_0^*, \psi^*(t_1)) = 0.$$

D) Если конец P закреплен, а в конце Q время t_1 свободно и точка x_1 лежит на гиперповерхности M, имеющей в x_1 касательную гиперплоскость $T_{x_1}M$, то

$$\mathcal{H}(t_1, x^*(t_1), \psi_0^*, \psi^*(t_1)) = 0,$$

а вектор $\psi^*(t_1)$ ортогонален к $T_{x_1}M$.

E) Если конец P закреплен, а в конце Q точка x_1 свободна и время t_1 закреплено, то

$$\psi^*(t_1)) = \mathbf{0}.$$

Пример 8. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t, x^1, x^2, u)\, dt \tag{5}$$

при условии, что эволюция состояний системы S характеризуется уравнениями

$$\dot{x}^1 = u \tag{6}$$

и

$$\dot{x}^2 = \sqrt{1 + (u)^2}. \tag{7}$$

Предположим, что концы P и Q в задаче (5)–(7) закреплены. Тогда, как легко видеть, эта задача представляет собой частный случай задачи, описанной ранее в примере 6. Поэтому здесь, вообще говоря,

$$\psi_0^* = 0.$$

В самом деле, управляемая функция Гамильтона в задаче (5)–(7) имеет вид

$$H(t, x^1, x^2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, u) =$$
$$= \psi_0 f^0(t, x^1, x^2, u) + \psi_1 u + \psi_2 \sqrt{1 + (u)^2},$$

где канонические переменные ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial x^1} \tag{8}$$

и

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Более того, для всех значений $t_0 \le t \le t_1, x^1, x^2, \psi_1$ и ψ_2 оптимальное управление u^* должно удовлетворять условию

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

в развернутом виде имеющему вид

$$\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial u} + \psi_1 + \psi_2 \frac{u}{\sqrt{1+(u)^2}} = 0. \tag{10}$$

Согласно примеру 6 при закрепленных концах P и Q существует единственная кусочно-непрерывная функция u, для которой кривая $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ является соответствующим решением системы (6), (7). Поэтому система (8), (9) также имеет единственное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, соответствующее всем возможным $u(t)$ и $x(t)$, переводящим систему из точки P в точку Q. Поэтому из условия (10) следует, что для всех значений $t_0 \le t \le t_1$

$$\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial u} = \eta(t), \tag{11}$$

где η – фиксированная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$.

Таким образом, окончательно получаем, что при всех значениях $t_0 \le t \le t_1$ равенство (11) выполняется с произвольной функцией f^0 и фиксированной функцией η. Поэтому остается принять

$$\psi_0 = 0.$$

Замечание. Несложный анализ примера 8 показывает, что замена

$$\dot{x} = u$$

всегда позволяет свести общую задачу вариационного исчисления к некоторой задаче оптимального управления. Эта задача (в отличие от задачи (1), (2)), вообще говоря, может содержать дополнительные ограничения на фазовые координаты и управления. Подобные задачи, называемые *задачами оптимального управления со смешанными ограничениями*, чрезвычайно сложны и, потому, здесь только упоминаются (см., например, [**7**]).

Задача о оптимальном быстродействии. Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления, в которой проблема выбора ψ_0^* отсутствует. Для этого, прежде всего, предположим, что все функции f^0 и f явно не зависят от t

и будем называть соответствующую задачу (1), (2) *автономной.*

Одна из основных особенностей автономных задач состоит в том, что в случае, когда левый конец P закреплен, а время работы системы свободно

$$\mathcal{H}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t)) \equiv 0. \tag{12}$$

Это следует из того, что в рассматриваемом случае

$$\mathcal{H}(x^*(t_1), \psi_0^*, \psi^*(t_1)) = 0$$

и того факта, что здесь при доказательстве принципа максимума неизбежно появляется тождество

$$\mathcal{H}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t)) \equiv \text{const}$$

(см., например, [**18**]).

Замечание. Принятое выше требование автономности не накладывает на нас каких-либо существенных ограничений, поскольку введение нового пременного

$$\dot{x}^{n+1} = 1, \quad x^{n+1}(0) = t_0$$

всегда приводит неавтономную задачу к автономной. Более того, большинство встречающихся на практике задач оптимального управления являются автономными.

Предположим теперь, что в автономной задаче с закрепленным левым концом и свободным временем перехода

$$f^0(x(t), u(t)) \equiv 1.$$

Любую такую задачу называют *задачей об оптимальном быстродействии.* Смысл такого назватня вполне понятен, поскольку в этом случае фунцкионал (2) представляет собой время перехода из точки P в точку Q, а простейшим (и древнейшим) примером такой задачи является уже упоминавшаяся ранее задача о брахистохроне.

Согласно принципу максимума Понтрягина в этой задаче функция Гамильтона $\mathcal{H}$ удовлетворяет тождеству (12), а величины $\psi_0^*, \psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)$ не обращаются в нуль одновременно. Поэтому для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$

$$|\psi^*(t)| \neq 0, \tag{13}$$

так как в противном случае наряду с равенством

$$|\psi^*(t)| = 0$$

выполняется также равенство

$$\psi_0^* = 0.$$

Поэтому удалим из задачи ψ_0 (и, соответственно, ψ_0^*), положив

$$\tilde{H}(x, \psi, u) = H(x, \psi_0, \psi, u) - \psi_0$$

и

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \psi) = \mathcal{H}(x, \psi_0, \psi) - \psi_0.$$

Тогда в качестве тривиального следствия теоремы 1 имеет место следующая

Теорема 2. *Если u^* – оптимальное управление в задаче быстродействии и*

$$x^*(t) = (x^{*1}(t), \ldots, x^{*n}(t))$$

– соответствующая траектория, то найдется такая векторная функция

$$\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)),$$

что:

(1) *Для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$ выполнено условие* (13).

(2) *Для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$ имеет место равенство*

$$\tilde{H}(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), \psi^*(t)).$$

(3) *Функция $\tilde{\mathcal{H}}$ удовлетворяет условию*

$$\tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), \psi^*(t)) \equiv \mathrm{const} \geq 0.$$

(4) *Функции x^* и ψ^* удовлетворяют канонической системе*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(5) *Если точка x_1 лежит на гиперповерхности M, имеющей в x_1 касательную гиперплоскость $T_{x_1}M$, то вектор $\psi^*(t_1)$ ортогонален к $T_{x_1}M$.*

Замечание. Теорема 2 выгодно отличается от теоремы 1 в том смысле, что ее условия дают замкнутую систему относительно неизвестных u^*, x^*, ψ^* и t_1.

Упражнения.

(1) Дополните частные случаи B)–E) принципа максимума Понтрягина.

(2) Покажите, что замена

$$\dot{x}^{i+n} = u, \quad i = 1, \dots, m,$$

формально приводит задачу (1), (2) к общей задаче вариационного исчисления.

(3) Используя принцип максимума Понтрягина, решите задачу Дидоны и задачу о брахистохроне.

§4. Две простейшие задачи об оптимальном быстродействии

Задача об оптимальном быстродействии является одной из немногих задач оптимального управления, в которой удается получить более или менее продвинутые результаты. Вместе с тем, эта задача позволяет выработать достаточно типические навыки решения задач со свободным временем перехода и имеет огромное самостоятельное практическое значение. В §4 приведены два простейших частных случая задачи о быстродействии, всегда входивших в “джентльменский набор” любого, изучающего оптимальное управление. Как будет показано, эти частные задачи, хотя и носят ярко выраженный учебный характер, вплотную подводят нас к решению уже реальных задач.

Управление ускорением материальной точки. Рассмотрим материальную точку, движущуюся вдоль оси Ox под действием управления u, удовлетворяющего ограничению

$$|u| \le 1. \tag{1}$$

При этом начальное положение и скорость точки считаются заданными. Требуется найти управление, переодящее точку в начало координат плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами $(x, \dot{x})$ за наименьшее время.

Начнем с самого простого случая, имеющего на первый взгляд исключительно учебный характер.

Пример 9. Предположим, что уравнение движения материальной точки имеет вид

$$\ddot{x} = u. \tag{2}$$

Положим

$$x^1 = x \tag{3}$$

и

$$x^2 = \dot{x}, \tag{4}$$

что позволяет переписать уравнение (2) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = u. \end{cases} \tag{5}$$

Заметим теперь, что управляемая функция Гамильтона $\tilde{H}$ для системы (5) имеет вид

$$\tilde{H}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2, u) = \psi_1 x^2 + \psi_2 u,$$

где канонические переменные ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют сопряженной системе

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку

$$\tilde{\mathcal{H}}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2) = \max_{|u| \le 1} \tilde{H}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2, u),$$

то в силу теоремы 2 видим, что в каждой точке t непрерывности функции u^*

$$u^*(t) = +1, \tag{7}$$

если $\psi_2(t) > 0$,

$$u^*(t) = -1, \tag{8}$$

если $\psi_2(t) < 0$, и $u^*(t)$ не определено, если если $\psi_2(t) = 0$. Последнее будем записывать в виде

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \tag{9}$$

используя для этого обозначение сигнум-функции.

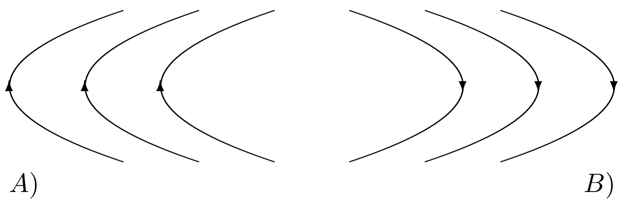

Рис. 4

Для отыскания управления u^* по формуле (9) заметим, что согласно системе (6)

$$\psi_2(t) = C_1 + C_2 t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Поэтому $u^*(t)$ *может переключать свое значение с* $+1$ *на* -1 *или обратно не более одного раза.*

Рассмотрим два случая, в которых управление $u^*(t)$ определено $u^*(t)$.

A) Пусть $u^*(t)$ определено по формуле (7). Тогда система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = +1. \end{cases} \tag{10}$$

Разделив формально первое из уравнений системы (10) на второе, запишем

$$\frac{dx^1}{dx^2} = x^2,$$

откуда непосредственно следует, что

$$x^1 = (x^2)^2 + C,$$

где C – произвольное постоянное.

Таким образом, фазовые траектории системы (10) представляют собой параболы, изображенные на рис. 4, A), где стрелки показывают направление движения во времени t.

В) Пусть теперь $u^*(t)$ определено по формуле (8). Тогда система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -1. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда, рассуждая как и ранее, имеем

$$x^1 = -(x^2)^2 + C,$$

т.е. фазовые траектории системы (11) представляют собой параболы, изображенные на рис. 4, B).

Заметим теперь, что из всего семейства парабол, изображенных на рис. 4, только две проходят через положение равновесия

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0$$

системы (5), причем только одна дуга каждой из них ведет к цели. На рис. 5 изображены дуга AO, соответствующая управлению (7), и дуга BO, соответствующая управлению (8), которые ведут в начало координат без переключений управления. Другими словами, только с кривой AOB можно попасть в начало координат непосредственно. Во всех остальных случаях нужно сначала попасть на AOB и переключить при переходе на эту кривую управление. По этой причине кривую AOB называют *линией переключения.*

Заметим теперь, что (как было показано ранее) в системе (5) при использовании оптимального по быстродействию управления может быть не более одного переключения. Тогда несложный анализ показывает, что выше кривой AOB следует использовать управление (8), а ниже – управление (7).

Замечание. Описанный метод решения задач о быстродействии для систем второго порядка всегда дает оптимальное управление как функцию фазовых координат. Значение такого принципа построения управления, известного как *принцип обратной связи*, трудно переоценить.

Управляемая остановка осцилятора. Действуя как и ранее, рассмотрим несколько более сложную задачу, связанную с управлением осцилятором.

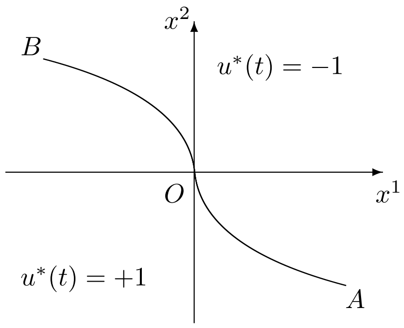

Рис. 5

Пример 10. Уравнение динамики управляемого осцилятора имеет вид

$$\ddot{x} + x = u. \tag{12}$$

Если $u(t) \equiv 0$, то уравнению (12) сответствует уравнение неуправляемого осцилятора

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{13}$$

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами $(x, \dot{x})$ система, описываемая уравнением (13), имеет единственное положение равновесия

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0. \tag{14}$$

Поскольку общее решение уравнения (13) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

при выводе внешней возмущающей силой системы из положения равновесия (14) в ней возникают незатухающие периодические колебания, т.е. задача управления осцилятором заключается быстрейшем “гашении” колебаний посредством перевода материальной точки в положение равновесия (14). При этом на управление u по прежнему наложены ограничения (1).

Используя замену (3), (4), перепишем уравнение (12) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x_1 + u. \end{cases} \tag{15}$$

Заметим теперь, что управляемая функция Гамильтона $\tilde{H}$ для системы (5) имеет вид

$$\tilde{H}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2, u) = \psi_1 x^2 + \psi_2(-x^1 + u),$$

где канонические переменные ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют сопряженной системе

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \tag{16}$$

Поскольку

$$\tilde{\mathcal{H}}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2) = \max_{|u| \le 1} \tilde{H}(x^1, x^2, \psi_1, \psi_2, u),$$

то в силу теоремы 2 видим, что в каждой точке t непрерывности функции u^*

$$u^*(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t), \tag{17}$$

где обозначение сигнум-функции имеет тот-же смысл, что и в примере 9.

Для отыскания управления u^* по формуле (17) введем в рассмотрение уравнение

$$\ddot{\psi} + \psi = 0. \tag{18}$$

Поскольку замена

$$\psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \dot{\psi},$$

приводит уравнение (18) к системе (16), можем записать

$$\psi_2(t) = S_1 \sin t + S_2 \cos t,$$

где S_1 и S_2 – произвольные постоянные. Следовательно, $u^*(t)$ может переключать свое значение с $+1$ на -1 или обратно конечное число раз, зависящее от начального положения системы (15). При этом, однако, *если управление $u^*(t)$ определено, то максимальное время его постоянства равно π.*

Рассмотрим два случая, в которых управление $u^*(t)$ определено.

А) Пусть

$$u^*(t) = +1. \tag{19}$$

Тогда система (15) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 + 1. \end{cases} \tag{20}$$

Наряду с системой (20) введем в рассмотрение систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1, \end{cases} \tag{21}$$

к которой замена (3), (4) приводит уравнение (13). Система (20) отличается от системы (21) тем, что положение равновесия системы (20) находится в точке

$$x^1 = +1, \quad x^2 = 0, \tag{22}$$

а положение равновесия системы (21) – в точке

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{23}$$

Если $x^1 \neq 0$, то разделив формально первое из уравнений системы (21) на второе, запишем

$$\frac{dx^1}{dx^2} = -\frac{x^2}{x^1},$$

откуда следует, что в этом случае

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = (C)^2, \tag{24}$$

где C – любое действительное число. Аналогичным образом, если $x^2 \neq 0$, то разделив формально второе из уравнений системы (21) на первое, запишем

$$\frac{dx^2}{dx^1} = -\frac{x^1}{x^2},$$

откуда следует, что в и этом случае справедливо равнество (24).

Таком образом, на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x^1, x^2) траектории системы (21), отличные от положеия равновесия (23), представляют собой окружности с центром в точке (23) и радиусом C. При этом, как легко видеть, направление движения по этом окружностям совпадает с движением по часовой

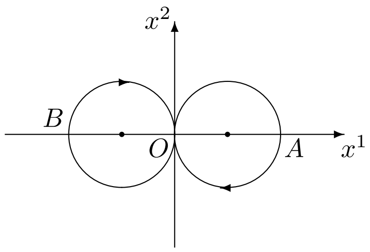

Рис. 6

стрелке. Поэтому уравнение траекторий системы (22) имеет вид

$$(x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 = (C)^2, \tag{25}$$

где направление движения при $C \neq 0$ совпадает с направлением движения по часовой стрелке.

В) Пусть теперь

$$u^*(t) = -1. \tag{26}$$

Тогда система (15) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = -x^1 - 1. \end{cases} \tag{27}$$

Заметим теперь, что положение равновесия системы (27) находится в точке

$$x^1 = -1, \quad x^2 = 0. \tag{28}$$

Поэтому действуя как и при выводе равенства (25), несложно показать, что уравнение траекторий системы (22) задается равенством

$$(x^1 + 1)^2 + (x^2)^2 = (C)^2, \tag{29}$$

в котором направление движения при $C \neq 0$ также совпадает с направлением движения по часовой стрелке.

Из сказанного выше следует, что при использовании оптимального управления (17) только две траектории могут проходит через точку (23) (см. рис. 6). Более того, поскольку

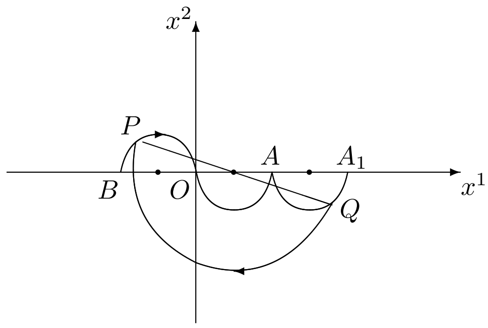

Рис. 7

максимальное время постоянства управления $u^*(t)$ (если $u^*(t)$ определено) равно π, то оптимальному управлению (19) соответствует дуга AO, а оптимальному управлению (26) – дуга BO соотвествующих траекторий. Сказанное означает, что если только с кривой AOB можно попасть в положение равновесия непосредственно без переключений. Поэтому для получения общей картины нужно продолжить оптимальные траектории с этой кривой в направлении, обратном направлению движения по траекториям.

Пусть P – произвольная точка дуги BO (см. рис. 7). Как уже отмечалось, использование в этой точке управления (26) приводит ситему в начало координат быстрейшим образом. Возьмем точку с координатами

$$x^1 = +3, \quad x^2 = 0, \tag{30}$$

и построим дугу AA_1 окружности с центром в точке (30) радиуса, равного единице. Через точку P и точку, соответствующую положению равновесия (22) проведем прямую до пересечения ее с точкой Q дуги AA_1.

Заметим теперь, что время прохождения вдоль дуги PQ по замкнутой траектории из точки P в себя равно 2π. Поскольку максимальное время постоянства управления $u^*(t)$ (если, конечно, $u^*(t)$ определено) равно π, а по построению дуга PQ

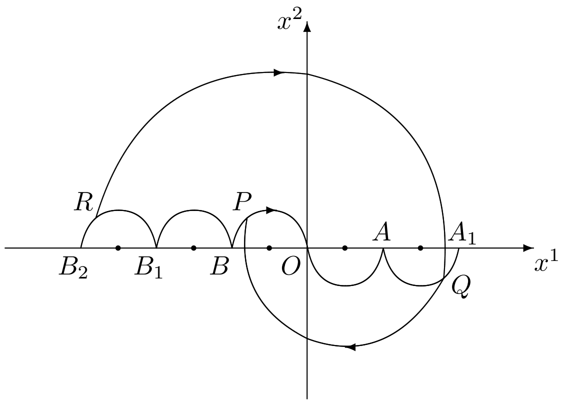

Рис. 8

представляет собой ровно половину соответствующей окружности, то для любой точки на этой дуге оптимальное управление определено и удовлетворяет равенству (19). При этом продолжение оптимальной траектории в направлении, противоположном направлению движения, от точки Q требует переключения управления с (19) на (26) при прохождении через Q. Но так как точка P на дуге выбиралась BO произвольным образом, из сказанного следует, что переключение оптимального управления происходит при прохождении через дугу AA_1 каждой оптимальной траектории.

Возьмем теперь точки с координатами

$$x^1 = -3, \quad x^2 = 0, \tag{31}$$

и

$$x^1 = -5, \quad x^2 = 0. \tag{32}$$

Построим дуги BB_1 и B_1B_2 окружностей с центром в точке (31) и (32) соответственно; при этом радиус каждой из этих окружностей оставим равным, единице (см. рис. 8). Действуя как и при построении точки Q на рис. 7, на рис. (см. рис. 8) прямую, проходящую через точки (28) и Q; пересечение это прямой с дугой B_1B_2 обозначим через R.

Легко видеть, что время прохождения вдоль дуги RQ по замкнутой траектории из точки R в себя равно 2π. С другой стороны, так как по построению максимальное время постоянства управления $u^*(t)$ (если, как и ранее, $u^*(t)$ определено) равно π, а дуга по построению QR представляет собой ровно половину соответствующей окружности, то для любой точки на этой дуге оптимальное управление определено и задается формулой (26). Более того, продолжение оптимальной траектории в направлении, противоположном направлению движения, от точки R требует преключения управления уже с (26) на (19) при прохождении через Q. Но так как выбор точки P, а, следовательно, и точек Q и R выше по существу не играл никакой роли, то переключение оптимального управления происходит всякий раз, когда любая оптимальная траектория проходит через дугу B_1B_2.

Действуя аналогичным образом, построим дугу A_1A_2 и продолжим кривую B_2OA_2 на всю ось Ox^1 (см. рис. 9). Построенное таким образом продолжение состоит из полуокружностей единичного радиуса и разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на две полуплоскости, обладающими следующими свойствами. При движении по любой оптимальной траектории, находящейся в верхней полуплоскости, используется оптимальное управление (26), а при движении по любой оптимальной траектории, находящейся в верхней полуплоскости, – оптимальное управление (19).

Таким образом, линией переключения в рассматриваемой задаче является продолжение кривой B_2OA_2 на ось Ox^1. При этом время между переключениями не превосходит π, а движение по самой линии переключения происходит только по дугам AO и BO, ведущим непосредственно в начало координат. Оптимальное управление на дуге AO определяется по формуле (19), а по дуге BO – по формуле (26). Общее же число переключений зависит от начального состояния системы.

Замечание. Необходимо отметить, что здесь (как и в примере 9) оптимальное управление построено по принципу обратной связи.

Упражнения.

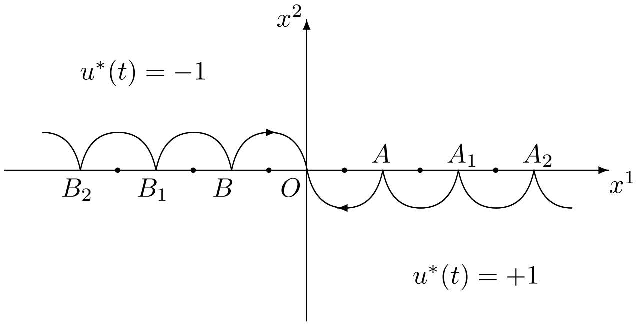

Рис. 9

(1) Предположим, что в условиях примера 9 уравнение движения системы имеет вид

$$a_0\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = u. \tag{33}$$

Решите задачу о быстродействии для системы (33) в предположении, что корни характеристического уравнения

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

действительны, различны и
(a) отрицательны;
(b) положительны.
Указание: Используйте стандартные фазовые портреты системы (см., например, [**17**]).

(2) Решите задачи примеров 9 и 10 в предположении, что систему следует перевести не в положение равновесия, а на окружность

$$(x)^2 + (\dot{x})^2 = C^2$$

извне.

§5. Линейные оптимальные быстродействия

Задача об оптимальном быстродействии, в которой управляемая система линейна, имеет огромное историческое значение, поскольку именно с нее фактически и начиналось оптимальное управление (см. [**18**]). Более того, как уже отмечалось, эта задача во многом определяет методы решения задач со свободным временем перехода и, потому, имеет также огромное методическое значение. И, наконец, несмотря на кажущуюся внешнюю простоту данная задача и в наши дни продолжает иметь огромное практическое значение при конструировании систем управления. Так, задача о быстродействии возникает всякий раз, когда систему, подвергшуюся внешнему возмущению следует быстрейшим образом вернуть в некоторое желаемое состояние. В качестве еще одного традиционного примера отметим также задачу о быстрейшем перехвате цели, движущейся по известной траектории.

Предварительные сведения. Прежде всего, приведем некоторые сведения из геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимые для дальнейшего изложения.

Обозначим через A фиксированную $(n \times n)$-матрицу, элементами которой, вообще говоря, являются достаточное число раз дифференцируемые по времени t функции a^i_j. Далее, пусть A' – матрица, транспонированная к A. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = A\varphi, \tag{1}$$

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \tag{2}$$

в которой считается, что решение $\psi(t)$ не равно нулю тождественно. С решениями системы (1), (2) свяжем пространства Ψ и Π, которые определим следующим образом.

Пространство Ψ является $(n-1)$-мерным подпространством, зависящим от t и состоящим из векторов n-мерного пространства, ортогональных к $\psi(t)$. *Непрерывно дифференцируемым подпространством* назовем собственное подпространство n-мерного пространства, также зависящее от t и состоящее из точек, являющихся линейными комбинациями системы непрерывно дифференцируемых векторов. Если размерность последнего пространства равна $n-1$ для всех значений t, то будем обозначать его через Π. При этом будем писать $v \in \Pi$ и говорить, что *вектор v лежит в пространстве* Π, если он лежит в Π при всех значениях t. Подпространство Π назовем *ковариантным*, если для каждого непрерывно дифференцируемого вектора $v \in \Pi$

$$\dot{v} - Av \in \Pi.$$

Предложение 1. *Подпространство* Π *ковариантно тогда и только тогда, когда оно совпадает с некоторым подпространством* Ψ*. Оказывается, что это может быть тогда и только тогда, когда оно состоит из векторов вида*

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(t)\varphi_k(t), \tag{3}$$

где α_k – скалярные функци, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ – система линейно независимых решений системы (1), *ортогональных к $\psi(t)$ при некотором значении $t = t_0$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что каждое подпространство Ψ ковариантно. В самом деле, для произвольного дифференцируемого вектора $v \in \Psi$ справедлива цепочка равенств

$$0 = \frac{d}{dt}\langle v, \psi\rangle = \langle \dot{v}, \psi\rangle - \langle v, A'\psi\rangle = \langle \dot{v} - Av, \psi\rangle.$$

Поэтому

$$\dot{v} - Av \in \Pi.$$

Далее, для любой пары функций (φ, ψ), удовлетворяющей системе (1), (2)

$$\frac{d}{dt}\langle \varphi, \psi\rangle = \langle A\varphi, \psi\rangle - \langle \varphi, A'\psi\rangle = 0.$$

Другими словами, если равенство

$$\langle \varphi(t), \psi(t)\rangle = 0$$

справедливо при некотором значении $t = t_0$, то оно справедливо для всех значений t, для которых определено решение системы (1), (2). Поэтому $\varphi \in \Psi$ и, значит, каждое из $n-1$ линейно независимых решений $\varphi_k(t)$ системы (1) (такие решения, как известно, всегда существуют) принадлежит Ψ. Сказанное, очевидно, означает, что подпространство Ψ должно состоять из векторов вида (3). Верно также и обратное: если вектора $\varphi_1(t), \ldots \varphi_{n-1}(t)$ подобраны так, что они также ортогональны к $\psi(t)$ при некотором значении $t = t_0$, они ортогональны к $\psi(t)$ при всех значениях t, для которых определено решение системы (1), (2), т.е. система векторов (3) образует подпространство Ψ.

Предположим теперь, что подпространство Π ковариантно. Обозначим через ϖ нормальный к нему единичный вектор. Тогда для любого дифференцируемого вектора $v \in \Pi$

$$\langle \dot{v}, \varpi \rangle + \langle v, \dot{\varpi} \rangle = \frac{d}{dt} \langle v, \varpi \rangle = 0$$

и, следовательно,

$$0 = \langle \dot{v} - Av, \varpi \rangle = -\langle v, \dot{\varpi} \rangle - \langle Av, \varpi \rangle = -\langle v, \dot{\varpi} + A'\varpi \rangle.$$

Другими словами, вектор $\langle \varpi + A'\varpi \rangle$ ортогонален к каждому дифференцируемому вектору $v \in \Pi$. Поэтому этот вектор ортогонален к подпространству Π и, значит, отличается от нормального вектора ϖ только скалярным множителем q.

Подберем скалярную функцию λ времени t так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{d}{dt}(\lambda \varpi) + A'\lambda\varpi = (\dot{\lambda} + q\lambda)\varpi = 0;$$

это, очевидно, можно сделать всегда. Тогда вектор $\lambda\varpi$ равен некотору вектору ψ. Следовательно, подпространство Π совпадает с соотвествующим Ψ. $\square$

Если при некотором значении $t = t_1$ вектор v принажлежит к подпространству Ψ, то будем говорить, что при $t = t_1$ вектор v *пересекает* Ψ, что обозначим через

$$v \in (t_1)\Psi.$$

В общем случае, если задано некоторое натуральное число k, то будем говорить, что при $t = t_1$ вектор v имеет *пересесечение* *порядка* k с подпространством Ψ или *касание порядка* $(k-1)$ с этим подпространством, и писать

$$v =^k (t_1)\Psi,$$

если при $t = t_1$ вектор v $(k-1)$ раз дифференцируем по t и скалярное произведение $\langle v, \psi \rangle$ равно нулю вместе со своими производными по t до порядка $(k-1)$. При этом для определенности положим

$$v \in^k (T)\Psi,$$

где T – множество тех значений t_α, для которых натуральные числа k_α удовлетворяют условиям

$$v \in^{k_\alpha} (t_\alpha)\Psi$$

и

$$\sum_\alpha k_\alpha \geq k.$$

Будем говорить, что $(n-1)$ раз дифференцируемый вектор v является *вектором общего положения*, если не существует такого значения t_0 времени t и такого подпространства Ψ, для которых v имеет пересечение порядка n с подпространством Ψ при $t = t_0$.

Предложение 2. *Для того, чтобы $(n-1)$ раз дифференцируемый вектор v был вектором общего положения, необходимо и достаточно, чтобы для всех значений t_0 вектора*

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k v, \quad k = 0, \ldots, n-1 \tag{4}$$

были линейно независимы при $t = t_0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что для каждого вектора ψ имеет место равенство

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \langle v, \psi \rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k v, \psi \right\rangle. \tag{5}$$

В самом деле, при $k = 1$ это очевидно. При любом же другом значении k справедливость равенства (5) проверяется непосредственно по индукции. Поэтому справедливость предложения 2 следует из того, что линейная независимость векторов (4) при каком-либо значении $t = t_0$ эквивалентна требованию их ортогональности к некоторому вектору ψ при $t = t_0$. □

Значение вектора общего положения для задачи об оптимальном быстродействиии трудно переоценить, поскольку имеет место следующее

Предложение 3. *Если T – ограниченное бесконечное множество значений времени t, то соотношение*

$$v \in^{\infty} (T)\Psi$$

не может выполняться для векторов общего положения.

Доказательство. Предположим противное и приведем это предположение к противоречию.

Пусть v – произвольный вектор общего положения. Если утверждение теоремы 3 неверно, то из множества T можно выбрать последовательность значений

$$t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots,$$

при $l \to \infty$ сходящуюся к некоторому действительному числу t^*. Вдоль этой последовательности по определению

$$\langle v, \psi \rangle = 0. \tag{6}$$

Поэтому равенство (6) выполняется и при $t = t^*$.

Заметим теперь, что по построению между любыми двумя значениями t_l и t_{l+1} находится нуль производной

$$\frac{d}{dt}\langle v, \psi \rangle. \tag{7}$$

Поэтому в силу непрерывности производной (7) последняя равна нулю и при $t = t^*$. Аналогичным образом, при $t = t^*$ равны нулю также все производные порядков до $n - 1$ включительно, т.е. вектор v не является вектором общего положения. □

В частном случае предложение 3 принимает следующий гораздо более тонкий вид.

Предложение 4. *Пусть A – постоянная матрица с действительными собственными числами и v – постоянный вектор. Тогда соотношение*

$$v \in^n (T)\Psi$$

не может выполняться ни для какого множества T, если не выполняется соотношение $v \in \Psi$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что соотношение $v \in \Psi$ эквивалентно равенству

$$\langle v, \psi \rangle = 0. \tag{8}$$

Далее, матрицу A можно преобразовать в вырожденную, положив

$$\tilde{A} = A - \lambda E,$$

где λ – любое собственное число матрицы A и E – единичная матрица. Тогда, если принять

$$\tilde{\psi} = \psi e^{\lambda t},$$

то

$$\left(\frac{d}{dt} + \tilde{A}'\right)\tilde{\psi} = e^{\lambda t}\left(\frac{d}{dt} + A'\right)\psi = \mathbf{0}.$$

Принимая во внимание сказанное для простоты предположим теперь, что матрица A вырождена. Тогда существует постоянный единичный вектор a, такой, что $aA' = \mathbf{0}$ и, следовательно,

$$a\dot{\psi} = -aA'\dot{\psi} = 0.$$

Повернув, если это требуется, оси можно добиться того, что направление вектора a совпало с направлением оси x^1. Обозначим через v_1 и A_1 соответствено $(n-1)$-мерный вектор и $(n-1)\times(n-1)$-матрицу, полученные вычеркиванием из v и A вычеркиванеим первой компоненты и первой строки и столбца. Тогда вектор ψ окажется в $(n-1)$-мерном подпространстве, ортогональном к оси x^1. Поэтому

$$\left(\frac{d}{dt} + A_1'\right)\psi = \mathbf{0} \tag{9}$$

и

$$\left(\frac{d}{dt} + A'\right)\psi = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\langle v, \psi \rangle = \langle v, \dot{\psi} \rangle,$$

то условие (8) выполняется при $n = 1$. Тогда в силу равенств (9) и (10) справедливость утверждения предложения 4 непосредственно проверяется по индукции. □

Задача о линейных оптимальных быстродействиях. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{11}$$

где A и B – постоянные соответственно $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матрицы. При этом считается, что допустимое множество U представляет собой выпуклый многограник, причем начало координат пространства $\mathbb{R}^m$ является его внутренней точкой. Задача заключается в минимизации времени $t_1 - t_0$ перехода системы (11) из заданной точки

$$x(t_0) = x_0 \tag{12}$$

в начало координат пространства $\mathbb{R}^n$; минимизация, как и ранее, осуществляется в множестве $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$ кусочно-непрерывных допустимых управлений.

По вполне понятным причинам сформулированную выше задачу называют задачей о *линейных оптимальных быстродействиях.* Физический смысл данной задачи также прозрачен: систему (11) требуется быстрейшим образом перевести в положение равновесия невозмущенного движения

$$\dot{x} = Ax; \tag{13}$$

при этом оба уравнения (11) и (13) как правило являются уравнениями в вариациях.

Будем называть *ребром* многогранника U каждую из его 1-мерных граней. Основное допущение, которое обычно принимают в задачах о линейных оптимальных быстродействиях, состоит в следующем. Каждый вектор v, определямый равенством

$$v = Bw, \tag{14}$$

где w – направление одного из ребер многогранника U, является вектором общего положения. Это допущение, очевидно, относится только к конечному числу векторов. И, хотя, на практике выполнения данного допущения всегда можно добиться слегка повернув многогранник, последнее (как это ни печально) существенно ограничивает использование приведенных ниже результатов.

Согласно предложению 2 несложно заметить, что (14) будет вектором общего положения, если для каждого направления w вектора

$$Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw \tag{15}$$

будут линейно независимы. Для чего нужна линейная независимость векторов (15), станет ясно чуть ниже. Пока перейдем к выясненю структуры оптимального управления. Для этого, прежде всего, заметим, что здесь сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \tag{16}$$

а управляемая функция Гамильтона –

$$\tilde{H}(x, \psi, u) = \langle \psi, Ax + Bu \rangle.$$

Пусть u^* – оптимальное управление в рассматриваемой задаче и пусть x^* – соответсвующая траектория. Тогда согласно теореме 2 найдется такая векторная функция

$$\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t)),$$

что:

(1) Для всех значений $t_0 \le t \le t_1$ выполнено условие

$$|\psi^*(t)| \ne 0.$$

(2) Для всех значений $t_0 \le t \le t_1$ имеет место равенство

$$\langle \psi^*(t), Ax^*(t) + Bu^*(t) \rangle = \tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), \psi^*(t)),$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \psi) = \max_{u \in U} \langle \psi, Ax + Bu \rangle.$$

(3) Функция $\tilde{\mathcal{H}}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), \psi^*(t)) \equiv \mathrm{const} \ge 0.$$

(4) Функции x^* и ψ^* удовлетворяют канонической системе
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \dot{\psi} = -A'\psi.$$

(5) В конечный момент времени t_1 выполнено условие
$$x(t_1) = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Таким образом, для отыскания u^* требуется, прежде всего, о максимизации функции
$$\langle \psi, Ax + Bu \rangle \tag{18}$$
при ограничении
$$u \in U. \tag{19}$$
Задача (18), (19) представляет собой обычную задачу линейного программироваия. Как отмечалось в главе 2, эта задача (с заменой максимума на минимум и обратно) имеет решение, например, если многогранник U ограничен и имеет непустую внутренность. Более того, решение всегда лежит в одной из вершин многогранника U, т.е. любом фиксированном t значение $u^*(t)$ лежит в одной из вершин U. При этом оказывается, что максимум достигается именно в этой вершине, если только ни на одном из проходящих через нее ребер скалярное произведение
$$\langle \psi^*(t), Ax^*(t) + Bu^*(t) \rangle$$
не равно постоянной.

В самом деле, если принять противное, то вычитанием немедленно получаем, что направление w такого ребра удовлетворяет условию
$$\langle \psi(t), Bw \rangle = 0. \tag{20}$$
Далее, так как Bw – вектор общего положения, то согласно предложению 3 равенство (20) может выполняться только для конечного множества T значений времени t, лежащих между t_0 и t_1. Следовательно, дополнение к T на (t_0, t_1) представляет собой конечное множество попарно непересекающихся интервалов
$$\Delta_1, \ldots, \Delta_k. \tag{21}$$
Поэтому в силу непрерывности функции ψ решение задачи (18), (19) лежит только в одной вершине, когда t принадлежит

к каждому из интервалов множества (21). При этом, очевидно, все моменты переключения оптимального управления u^* лежат в множестве T.

Замечание. Если матрица A имеет только действительне собственые числа, то солгасно предложению 4 оптимальное управление u^* имеет не более чем $(n-1)$ моментов переключения, в которые значения $u^*(t)$ функции u^* перескакавают с одной вершины многогранника U на другую вболь ребра, соединяющего эти вершины и имеющего фиксированное направление w.

Таким образом, общее число переключений не превышает произведения числа $(n-1)$ на число непаралелльных ребер многогранника U. В частности, если U – куб, то число переключений не превосходит $m \cdot (n-1)$. При этом следует иметь ввиду, что в подавляющем большинстве практических ситуаций приведенная выше оценка числа переключений оказывается весьма завышенной. Получить же более тонкие оценки (насколько нам известно) пока не удалось.

Существование и единственность оптимального управления. Любое управление, удовлетворяющее теоремам 1 и 2, будем в дальнейшем называть *подозрительным.* Для установления более тонкой связи между подозрительными и оптимальными управлениями, прежде всего, сформулируем и докажем следующее

Предложение 5. *Пусть u – подозрительное в задаче о линейных оптимальных быстродействиях управление и пусть $\tilde{u}$ – произвольное управление класса $\mathfrak{U}(t_0, t_1)$, переводящее систему* (11) *из точки* (12) *в точку* (17). *Тогда*

$$u(t) = \tilde{u}(t) \tag{22}$$

при всех значениях $t_0 \le t \le t_1$ за исключением, может быть, некоторого конечного множества.

Доказательство. Для простоты обозначений положим

$$v(t) = Bu(t)$$

и

$$\tilde{v}(t) = B\tilde{u}(t)$$

Обозначим через $\Phi(t)$ – $(n \times n)$-матричную функцию времени, определенную на отрезке $[t_0, t_1]$, равную единичной матрице при $t = t_0$, и удовлетворяющую матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi} = -\Phi A.$$

Аналогичным образом, через $\Phi'(t)$ обозначим $(n \times n)$-матричную функцию времени, также определенную на отрезке $[t_0, t_1]$, также равную единичной матрице при $t = t_0$, но удовлетворяющую матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}' = A\Phi'.$$

Тогда поскольку

$$\frac{d}{dt}(\Phi\Phi') = (-\Phi A)\Phi' + \Phi A\Phi'$$

и $\Phi(t_0)\Phi'(t_0)$ – единичная матрица, то для всех значений $t_0 \leq t \leq t_1$ матрица $\Phi'(t)$ является обратной матрицей для $\Phi(t)$.

Заметим теперь, что решение системы

$$\dot{\varphi} = A\dot{\varphi}$$

с начальным условием

$$\varphi(t_0) = x_0$$

имеет вид

$$\varphi(t) = \Phi'(t)x_0. \tag{23}$$

Принимая во внимание принятые выше обозначения, перепишем систему (11) в следующем эквивалентном виде

$$\dot{x} = Ax + v(t) \tag{24}$$

Тогда в силу метода вариации произвольного постоянного и равенства (23) решение уравнения (24) с начальным условием (12) будем искать в виде

$$x(t) = \Phi'(t)\xi(t),$$

где

$$\xi(t_0) = x_0$$

и

$$\Phi'\dot{\xi} = v. \tag{25}$$

Умножив обе части равенства (25) на $G(t)$ слева, получим

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(t)v(t),$$

откуда следует, что решение системы (24) с начальным условием (12) имеет вид

$$x(t) = \Phi'(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(\tau)v(\tau)\,d\tau\right). \tag{26}$$

Заметим теперь, что по аналогии с (26) решение системы

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + v(t)$$

с начальным условием

$$\tilde{x}(t_0) = x_0$$

имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \Phi'(t)\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\tilde{v}(\tau)\,d\tau\right).$$

Но так как по условию предложения 5

$$x(t_1) = \tilde{x}(t_1)$$

отсюда получаем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t)v(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t)\tilde{v}(t)\,dt. \tag{27}$$

Умножим скалярно обе части равенства (27) на постоянный вектор ψ_0. Тогда, принимая во внимание тот факт, что каждое решение $\psi(t)$ системы (16) с начальным условием

$$\psi(t_0) = \psi_0$$

имеет вид

$$\psi(t) = \psi_0\Psi(t),$$

получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [\langle\psi(t), v(t)\rangle - \langle\psi(t), \tilde{v}(t)\rangle]\,dt = 0. \tag{28}$$

Поскольку по предположению u – подозрительное управление, оно максимизирует функцию (18) при ограничении (19). Поэтому возьмем в качестве $\psi(t)$ векторную функцию, сопряженную к траектории $x(t)$, задаваемой равенством (26); в этом случае

$$\tilde{H}(x(t),\psi(t),u(t)) = \langle\psi(t), Ax(t)+Bu(t)\rangle = \tilde{\mathcal{H}}(x(t),\psi(t)),$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}(x,\psi) = \max_{u\in U}\langle\psi, Ax+Bu\rangle.$$

Заметим теперь, что подинтегральное выражение в (28) может быть записано в виде

$$\tilde{H}(x(t),\psi(t),u(t)) - \tilde{H}(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t)), \tag{29}$$

причем по построению

$$\tilde{H}(x(t),\psi(t),u(t)) - \tilde{H}(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t)) \geq 0.$$

Следовательно, равенство (22) выполняется почти всюду на $[t_0,t_1]$. При этом на множестве значений времени t, для которого разность (29) обращается в нуль, а

$$u(t) \neq \tilde{u}(t),$$

максимум в (18) при ограничении (19) достигается не в одной точке. Более того, для этих значений t справедливо равенство (20). Последнее, однако, возможно только лишь для конечного множества значений t. $\square$

Теперь в задаче о линейных оптимальных быстродействиях оказывается возможным очертить ситуацию, когда достаточно усердные поиски черной кошки в темной комнате могут привести успеху.

Теорема 3. *Пусть u – подозритаельное управление, переводящее систему* (11) *из точки* (12) *в точку* (17). *Тогда u – оптимальное управление, причем единственное.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что в формулировке теоремы 3 отождествляются все управления, отличающиеся лишь на некотором конечном множестве значений времени t.

Пусть $\tilde{u}$ – произвольное управление, определенное на отрезке $[t_0, t_2]$, которое переводит систему (11) из точки (12) в точку

$$x(t_2) = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $t_2 \leq t_1$, т.е. что управление $\tilde{u}$ переводит систему (11) в начало координат не медленнее, чем управление u. Продолжим, если потребуется, управление $\tilde{u}$ на отрезок $[t_0, t_1]$, положив

$$\tilde{u}(t) = \mathbf{0}$$

при $t_2 \leq t \leq t_1$; последнее действие вполне корректно, поскольку множество U по условию содержит начало координат пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда согласно предложению 5 данное продолжение при всех значениях $t_0 \leq t \leq t_1$ (за исключением, может быть, некоторого конечного множества) удовлетворяет условию (22). □

Замечание. Теорема 3 дает одно из простейших условий существования минимума, которое одновременно является и условием его единственности. Здесь невольно вспоминается умилительная ситуация, когда некая старушка неуверенными шаркающими шагами спускается в темный подвал, пытаясь найти своего ненаглядного угольного-черного Пушка. Если в подвале еще осталась сметана, весьма возможно, что Пушок окажется единственным его обитателем, ибо, как поется в известной песенке, уже в те стародавние времена "... кота ненавидел весь дом".[1]

Если же подходить к обсуждению этого вопроса более формально, то о силе теоремы 3 достаточно красноречиво говорит весь §4, особенно упражнение 1 (см. также приводимое ниже упражнение 2).

Упражнения.

(1) Предположим, что многогранник U задается системой неравенств

$$|u^i| \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

[1]За исключением, разумеется, старушки!

Рассматрите задачу об оптимальном быстродействии, заключающуюся в переводе системы

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

из точки (12) в точку (17); здесь $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – некоторая векторная, а G – действительная $(n \times m)$-матричная функции, причем и f, и G, считаются определенными и непрерывно дифференцируемыми в пространстве $\mathbb{R}^n$.

(2) Предположим, что в задаче о линейных оптимальных быстродействиях все собственые значения матрицы A имеют неотрицательные действительные части. Покажите, что в этом случае для каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ оптимальное по быстродействию управление существует.

Предметный указатель

Литература

[1] *Абрамов Л.М., Капустин В.Ф.* Математическое программирование. – Л.: ЛГУ, 1976.

[2] *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.

[3] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и функций. – М.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1948.

[4] *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977.

[5] *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2003.

[6] *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968.

[7] *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В.* Необходимое условие в оптимальном управлении. – М.: Наука, 1990.

[8] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

[9] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.

[10] *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: МГУ, 1989.

[11] *Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Сов. радио, 1973.

[12] *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1969.

[13] *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974

[14] *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

[15] *Полак Э.* Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974.

[16] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.

[17] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965.

[18] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко С.В.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961.

[19] *Пуанкаре А.* Избранные научные труды. – Т. II. – М.: Наука, 1972.
[20] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980.
[21] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
[22] *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973.
[23] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.
[24] *Хеммильблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975.
[25] *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. – М.: Мир, 1972.
[26] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1, 2. – М.: Наука, 1972.
[27] *Юдин Д.Б.*, *Гольдштейн Е.Г.* Линейное программирование. Теория и конечные методы. – М.: Физматгиз, 1963.
[28] *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.