МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Линейная алгебра для экономистов

В. А. Артамонов

Москва 1999 год

В. А. Артамонов

Линейная алгебра для экономистов

Для студентов-математиков экономического профиля механико-математических факультетов вузов.

ISBN 5-87597-000-0

Линейная алгебра для экономистов.
М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 126 стр.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 01.09.1999 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 6,75 п.л.
Заказ 7 Тираж 200 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
г. Москва, Ленинские горы.
Лицензия на издательскую деятельность ЛР N 040746, от 12.03.1996 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А.М.Ляпунова.

Оглавление

Предисловие

В основу настоящего издания положен курс лекций, читавшийся автором с 1995 года на втором и третьем курсах механико-математического факультета МГУ для студентов-математиков, специализирующихся на применении математических методов в экономике (специальность МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА (ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ) – 01.01.01.02.) При чтении лекции на втором и третьем курсах программа изменялась. В настоящее издание вошел весь материал, читавшийся в разное время в рамках этого курса. Помимо теоретического материала в издание вошли многочисленные задачи, которые разбирались на семинарах.

Курс знакомит слушателей и читателей с математическими основами линейного программирования: выпуклые множества, аффинные неравенства и теорема Фаркаша, полиэдры и их грани, теоремы Фань Цзы и Вейля, симплекс метод. Затем излагается теорема фон Неймана и ее приложения к теории игр. Далее рассматриваются специальные задачи линейного программирования – транспортная задача и поиск кратчайшего пути на графе. Следующий раздел курса связан с изучением различных норм в алгебрах матриц и изложением теории неотрицательных матриц, включая теорему Перрона и Фробениуса. В последующих разделах рассматривается задача локализации собственных значений, в частности QR-алгоритм. В заключении курса излагается материал статьи, любезно предоставленный автору Е. Е. Демидовым. Этот материал демонстрирует применение, изложенных в курсе материалов для решения задачи оптимального управления портфелем ценных бумаг.

Автор выражает глубокую благодарность В. Н. Латышеву, Е. Е. Демидову, А. Клячко за полезные обсуждения и внимание к работе.

Имеется большой список литературы в рассматриваемой области, изложение которого занимает много места. Поэтому ниже мы приводим лишь некоторые последние публикации, доступные читателю.

Литература

[ABVL] Артамонов В. А., Бетелин В.В., Винберг Э. Б., Латышев В. Н. и др. Практикум по алгебре. / Под. ред. Н. С. Бахвалова, А. И. Кострикина. – М.: Изд. МГУ. - 1983. – 91с.

[ABVGL] Артамонов В. А., Бахтурин Ю. А., Винберг Э. Б., Голод Е. С., Латышев В. Н. и др. Сборник задач по алгебре. Под. ред. А. И. Кострикина. – М: МАИК НАУКА – 1999.

[A1] Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука. - 1973.

[A2] Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. – М.: Изд. МГУ. - 1980.

[B] Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.: Наука. - 1973.

[Bou] Бурбаки Н. Топологичекие векторные пространства. М: Изд. иностр. лит. - 1959.

[VI] Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М.: Факториал, 1998.

[W] Вейль Г. Элементарная теория выпуклых полиэдров. – в сб. Матричные игры. – М.: Физматгиз. - 1961.

[Ven] Вентцель Е. С. Элементы теории игр. – М.: Физматгиз. - 1961.

[Vo] Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука. - 1975.

[DC] Дюбин Г. И., Суздаль В. Г., Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981.

[Z] Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию. – – М.: Наука. - 1968.

[ZA] Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука. - 1967.

[I] Икрамов Х. Д., Сборник задач по линейное алгебре. – М.: Наука. - 1975.

[LB] Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О., Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. – М,:Дело, 2001.

[L] Латышев В. Н. Выпуклые многогранники и линейное программирование. – Ульяновск: Изд. Ульяновск. филиала МГУ. – 1992. – 71с.

[PS] Пападимитриу Ч., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: алгоритмы и сложность. Москва: Мир, 1985.

[PR] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т., Некоторын вопросы теории игр двух лиц. М.:Мир, 1974.

[PSZ] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. – М,: Высш. шкл., Книжный дом "Университет", 1998.

[1] [Pro] Протасов И. А. Теория игр и исследование операций. – М.: Гелиос АРВ, 2003.

[RI] Размыслов Ю. П., Ищенко С. Я. Практикум по вычислительным методам алгебры. – М.: Изд. МГУ. - 1989. – 184с.

[HD] Хорн Д.., Джонсон И. Матричный анализ. – М.: Наука. - 1989.

[2] Харшаньи Джон, Зельтен Рейнхард. Общая теория выбора равновесия в играх. С.-Петербург:Институт "Экономическая школа", 2001.

[CH] Черников С. Н. Линейные неравенства. – М.: Наука. - 1968.

Глава 1

Линейные неравенства

В этой главе все аффинные и линейные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. В них фиксирована евклидова метрика $\rho(X,Y)$, которая превращает аффинные пространства в метрические пространства. Топология в них задается указанной метрикой. Напомним некоторые необходимые определения.

Определение. Пусть A, B – точки аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ размерности n. *Отрезком* $[A,B]$, соединяющим эти точки называется множество всех точек вида $A+\lambda\overrightarrow{AB}$, где $\lambda \in [0,1]$.

Подмножество в $\mathbb{A}^n$ *выпукло*, если вместе с любыми двумя его точками оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Функция $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$ называется *аффинной* или *линейной*, если в некоторой (а, следовательно, и в любой) системе координат в $\mathbb{A}^n$ она имеет вид

$$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

где точка x имеет координаты $x_1, \ldots, x_n$. Другими словами, f задает аффинное отображение $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}$.

Наконец, всюду в дальнейшем мы будем пользоваться следующим определением

Определение. Пусть A, B – прямоугольные вещественные матрицы. Скажем, что $A \geqslant B$ $(A > B)$, если $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ $(a_{ij} > b_{ij})$ для любых элементов a_{ij}, b_{ij} матриц A и B.

1. Теоремы отделимости, конусы и многогранники

Теорема 1.1. *Пусть M – замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{A}^n$ и задана точка $A \in \mathbb{A}^n \setminus M$. Тогда существует такая аффинная функция f, что $f(A) < 0$ и $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in M$. Другими словами, M и A* разделяются *гиперплоскостью $f(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $C \in M$ и $\rho(C, A) = d > 0$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^n$ (замкнутый) шар S радиуса d с центром в A. Тогда $S \cap M$ – замкнутое ограниченное множество. Поэтому найдется такая точка $B \in M$, на которой функция $\rho(A, X),\ X \in M$, достигает минимума $r > 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{A}^n$ ортонормированную систему координат $B, e_1, \ldots, e_n$,

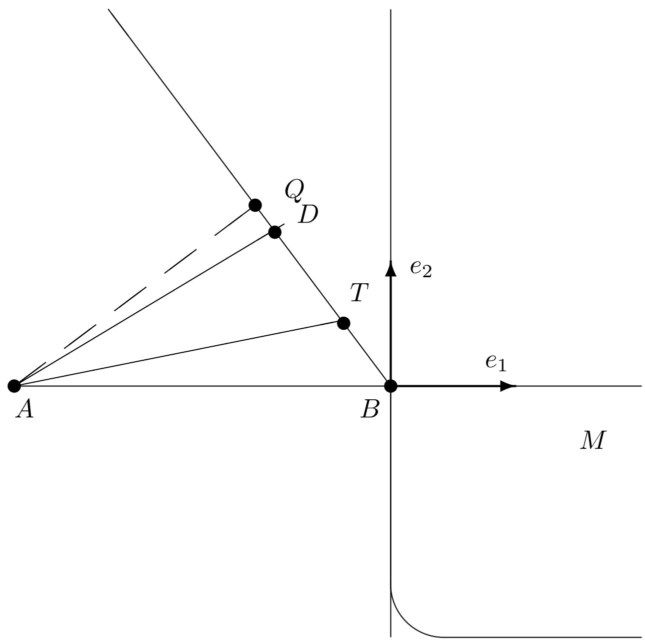

Рис. 1.1

с началом в точке B, причем $e_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Зададим линейную функцию $f(x) = x_1$, где x_1 – первая координата точки x в этой системе координат. Тогда $f(A) = -r < 0$. Предположим, что существует такая точка $D \in M$, что $f(D) < 0$. В треугольнике BAD в этом случае угол $\angle DBA$ острый (см. Рис. 1.1),

$$\cos \angle DBA = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{f(A)f(D)}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BD}\|} > 0.$$

Следовательно, основание Q перпендикуляра, опущенного из A на прямую DB, попадает на луч BD с вершиной в B. На стороне DB возьмем точку T, принадлежащую $(BQ) \cap (BD)$. Тогда $\frac{\pi}{2} > \angle DTA > \angle DBA$, откуда $\rho(A, T) < \rho(A, B)$. При этом $T \in M$ в силу выпуклости M. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть M, N непересекающиеся замкнутые выпуклые подмножества в $\mathbb{A}^n$, причем одно из них компактно. Тогда существует такая аффинная функция f, что $f(x) > 0$ для всех $x \in M$ и $f(y) < 0$ для всех $y \in N$.*

Доказательство. Пусть N компактно и $A \in N$. Из доказательства теоремы 1.1 вытекает существование ближайшей к A точки $B \in M$. Положим $\rho(A) = \rho(A, B)$. Функция $\rho(A)$ непрерывна на N и потому достигает минимума в некоторой точке $A_0 \in N$. При этом $\rho(A_0) > 0$ так как $A_0 \notin M$. Пусть $\rho(A_0) = \rho(A_0, B_0)$, $B_0 \in M$. Остается провести через середину $[A_0, B_0]$ перпендикулярную гиперплоскость. $\square$

Определение 1.3. *Конусом* K в $\mathbb{A}^n$ с вершиной в $O \in \mathbb{A}^n$ называется множество точек в $\mathbb{A}^n$, обладающее следующим свойством: если $A \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$, то $O + \lambda\overrightarrow{OA} \in K$.

Предложение 1.4. *Конус K является выпуклым множеством тогда и только тогда, когда из условия $P, Q \in K$ вытекает, что $O + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \in K$.*

Доказательство. Пусть K выпукло и $P, Q \in K$. По упражнению 1.33 конус K содержит точку $O + (\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ})$ и поэтому содержит точку

$$O + 2(\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}) = O + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}).$$

Обратно, если выполнено указанное условие, то $O + \alpha\overrightarrow{OP}$, $O + (1-\alpha)\overrightarrow{OQ} \in K$ в силу определения 1.3. Таким образом, по предположению

$$O + \alpha\overrightarrow{OP} + (1-\alpha)\overrightarrow{OQ} \in K,$$

т. е. $[P, Q] \subseteq K$. Итак, конус K выпуклый. □

Определение. Конус K с вершиной O *порождается точками* $A_1, \ldots, A_m$, если он состоит из всех точек вида $O + \sum_i \lambda_i\overrightarrow{OA_i}$, где $\lambda_i \geqslant 0$. Конус K *конечнопорожден*, если он порождается некоторым конечным множеством точек.

Предложение 1.5. *Конечнопорожденный конус является замкнутым выпуклым множеством.*

Доказательство. В силу предложения 1.4 конус K является выпуклым. Докажем его замкнутость. Пусть конус K с вершиной в точке O порождается точками $A_1, \ldots, A_m$. Рассмотрим точку

$$O + \lambda_1\overrightarrow{OA_{i_1}} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_{i_k}} \in K, \quad \lambda_j > 0. \tag{1}$$

Предположим, что векторы $\overrightarrow{OA_{i_1}}, \ldots, \overrightarrow{OA_{i_k}}$ линейно зависимы и $\alpha_1\overrightarrow{OA_{i_1}} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{OA_{i_k}} = 0$. Без ограничения общности можно предполагать, что, например, $\alpha_1 > 0$. Выберем индекс t так, чтобы $\theta = \frac{\lambda_t}{\alpha_t}$ было бы минимальным положительным числом среди всех $\frac{\lambda_t}{\alpha_t}$, где λ_t из (1), $\alpha_t > 0$. Тогда в (1) получаем

$$O + \lambda_1\overrightarrow{OA_{i_1}} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{OA_{i_k}} = \\ O + (\lambda_1 - \theta\alpha_1)\overrightarrow{OA_{i_1}} + \cdots + (\lambda_k - \theta\alpha_k)\overrightarrow{OA_{i_k}},$$

причем все коэффициенты $\lambda_j - \theta\alpha_j \geqslant 0$, и один из этих коэффициентов равен нулю. Таким образом, точка (1) лежит в конусе, порожденном $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{t-1}}, A_{i_{t+1}}, \ldots, A_{i_m}$. Отсюда вытекает, что каждая точка из K лежит в некотором конусе $K_{j_1,\ldots,j_s}$, порождаемом точками $A_{j_1}, \ldots, A_{j_s}$, причем векторы $e_1 = \overrightarrow{OA_{j_1}}, \ldots, e_s = \overrightarrow{OA_{j_s}}$ независимы. Дополним эти векторы до базиса $e_1, \dots, e_n$ всего линейного пространства и возьмем точку O в качестве начала координат. Тогда в этой системе координат конусе $K_{j_1,\dots,j_s}$ задается неравенствами и уравнениями $x_1 \geqslant 0, \dots, x_s \geqslant 0$, $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$. Следовательно, конус $K_{j_1,\dots,j_s}$ замкнут. Так как исходный конус K является объединением конечного числа замкнутых конусов, то он сам замкнут. □

Теорема 1.6. *Пусть K – конус с вершиной в O, порождаемый точками $A_1, \dots, A_m$ и точка A не лежит в K. Существует такая линейная функция f, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$, $f(O) = 0$, и $f(A) < 0$.*

Доказательство. По предложению 1.5 конус K выпуклый и замкнутый. По теореме 1.1 существует ближайшая к A точка $B \in K$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис, и $f = x_1$ – линейная функция, построенная в теореме 1.1. Покажем, что $f(O) = 0$. Пусть это не так, т. е. $f(O) > 0$. Рассмотрим плоскость OAB (см. Рис. 1.2). Тогда $\angle OBA$ тупой. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из A на прямую OB пересекает ее в точке C, лежащей на луче OB, причем точки C и O лежат на этом луче по разные стороны от B.

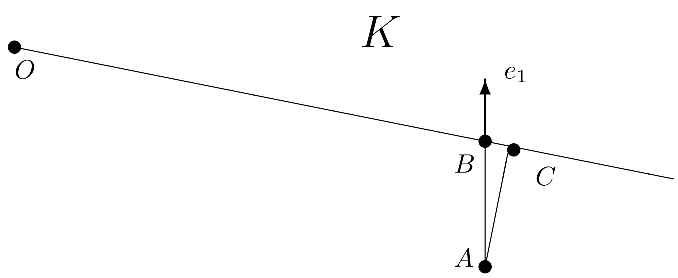

Рис. 1.2

Отсюда $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OB}, \lambda > 1$, и поэтому $C \in K$. Но $|AC| < |AB|$, что противоречит выбору B. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Предложение 1.7. *Пусть K – конус с вершиной O, порожденный точками*

$$A_1, \dots, A_m \in \mathbb{A}^n. \tag{2}$$

Пусть N – компактное выпуклое множество, не пересекающееся с K. Тогда существует такая линейная функция f, что $f(x) > 0$ для всех $x \in K$, и $f(y) < 0$ для всех $y \in N$.

Доказательство вытекает из предложения 1.5 и теоремы 1.2.

Определение. *Выпуклым многогранником, порожденным* точками (2), называется наименьшее выпуклое множество, содержащее эти точки.

Обозначим через $\operatorname{conv}\{A_1, \dots, A_m\}$ множество всех точек вида

$$\left\{O + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{OA_m} \mid \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1\right\},$$

где $O \in \mathbb{A}^n$.

Предложение 1.8. *Пусть M – выпуклый многогранник, порожденный точками из* (2). *Тогда*

$$M = \operatorname{conv}\{A_1, \dots, A_m\}.$$

Доказательство. Положим $N = \operatorname{conv}\{A_1, \dots, A_m\}$. Тогда N содержит все точки A_i при $1 \leqslant i \leqslant m$. Кроме того, оно выпукло. Действительно, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и заданы две точки

$$O + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{OA_m} \in N,$$
$$O + \mu_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_m\overrightarrow{OA_m} \in N,$$

то точка

$$O + [\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\mu_1]\,\overrightarrow{OA_1} + \dots + [\alpha\lambda_m + (1-\alpha)\mu_m]\,\overrightarrow{OA_m}$$

также лежит в N, поскольку все коэффициенты $\alpha\lambda_j + (1-\alpha)\mu_j$ неотрицательны и в сумме дают 1. Итак, $M \subseteq N$.

Докажем обратное включение $N \subseteq M$ индукцией по m. Случай $m = 1$ очевиден, ибо тогда $M = N = \{A_1\}$. Пусть для $m-1$ утверждение доказано. Рассмотрим произвольную точку

$$O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m}$$

из N. Можно считать, что $1 > \lambda_m > 0$. Пусть $\mu = \lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1}$. По предположению $1 > \mu > 0$. В силу индукционного предположения точка

$$O + \frac{\lambda_1}{\mu} \overrightarrow{OA_1} + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\mu} \overrightarrow{OA_{m-1}}$$

лежит в M, поскольку все коэффициенты $\frac{\lambda_j}{\mu}$ неотрицательны и в сумме дают 1. По условию $A_m = O + \overrightarrow{OA_m} \in M$. Следовательно, в силу выпуклости M получаем, что M содержит

$$O + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m \overrightarrow{OA_m} = O + \mu \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \overrightarrow{OA_1} + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\mu} \overrightarrow{OA_{m-1}} \right) + (1-\mu) \overrightarrow{OA_m}.$$

$\square$

Определение. Пусть задана система аффинных (линейных) неравенств

$$f_1(x) \geqslant 0, \dots , f_m(x) \geqslant 0, \tag{3}$$

Эта система *совместна*, если она имеет решение. Аффинное (линейное) неравенство $f \geqslant 0$ является *следствием* (3), если для любого $x \in \mathbb{A}^n$ из того, что выполнено (3) вытекает $f(x) \geqslant 0$.

Теорема 1.9 (Фаркаш)**.** *Аффинное (линейное) неравенство $f \geqslant 0$ является следствием совместной системы аффинных (линейных) неравенств* (3) *тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа $c_0, \dots , c_m$, что*

$$f = c_0 + c_1 f_1 + \dots + c_m f_m.$$

Доказательство. Достаточно показать, что следствие f имеет указанное представление. Зафиксируем систему координат $O, e_1, \dots , e_n$ в $\mathbb{A}^n$. Тогда каждую аффинную функцию $\mathrm{a}(X) = a_0 + \sum_i a_i X_i$ можно отождествить с точкой

$(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть при этом отождествлении функциям

$$f = u_0 + u_1X_1 + \cdots + u_nX_n,$$
$$f_i = a_{i0} + a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n, \quad i = 1, \ldots, m,$$

сопоставляются, соответственно, точки

$$\begin{array}{cccccc} f & \mapsto & (u_0, & u_1, & \ldots, & u_n); \\ f_1 & \mapsto & (a_{10}, & a_{11}, & \ldots, & a_{1n}); \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ f_m & \mapsto & (a_{m0}, & a_{m1}, & \ldots, & a_{mn}). \end{array}$$

Все функции g, представимые в виде $c_0+c_1f_1+\cdots+c_mf_m$, $c_i \geqslant 0$, образуют конус K в $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершиной в нуле, порождаемый точками

$$\begin{array}{cccc} (a_{10}, & a_{11}, & \ldots, & a_{1n}), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m0}, & a_{m1}, & \ldots, & a_{mn}), \\ (1, & 0, & \ldots, & 0) \end{array}$$

Пусть $f \notin K$. По теореме 1.6 существует такая линейная функция $v(y_0, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} v_iy_i$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, что $v(z) \geqslant 0$ для всех $z \in K$ и

$$v(u_0, \ldots, u_n) < 0. \tag{4}$$

В частности, $v(1, 0, \ldots, 0) = v_0 \geqslant 0$. Предположим сначала, что $v_0 > 0$. Для любого $i = 1, \ldots, m$ имеем

$$f_i(v_0^{-1}v_1, \ldots, v_0^{-1}v_n) = v_0^{-1}v(a_{10}, \ldots, a_{1n}) \geqslant 0.$$

Так как f является следствием, то

$$f(v_0^{-1}v_1, \ldots, v_0^{-1}v_n) = v_0^{-1}v(u_0, \ldots, u_n) \geqslant 0,$$

что противоречит (4).

Итак, $v_0 = 0$. При этом

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_jv_j < 0. \tag{6}$$

Так как система неравенств (3) совместна, то существует такой вектор $(x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{A}^n$, что

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i0} + \sum_i a_{ij}x_j \geqslant 0, \quad i = 1, \dots , m. \tag{7}$$

Выберем такое вещественное число $\mu > 0$, что

$$\begin{aligned} &f(x_1 + \mu v_1, \dots , x_n + \mu v_n) = \\ &u_0 + \sum_i u_i x_i + \mu(\sum_i u_i v_i) < 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Это возможно в силу (6). Для любого $i = 1, \dots , m$ по (5) и (7) имеем

$$\begin{aligned} &f_i(x_1 + \mu v_1, \dots , x_n + \mu v_n) = \\ &f_i(x_1, \dots , x_n) + \mu(\sum_j a_{ij} v_j) \geqslant 0, \end{aligned}$$

что противоречит (8). Но тогда $f \geqslant 0$ не является следствием неравенств (3). □

Следствие 1.10. *Система линейных неравенств* (3) *несовместна тогда и только тогда, когда существуют такие неотрицательные числа* $c_0, \dots , c_m$, *что* $c_0 > 0$ *и* $c_0 + \sum_{i=0}^m c_i f_i = 0$.

Доказательство. Пусть $f_i(x) = a_{i0} + \sum_j a_{ij}x_j$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1}$ систему линейных неравенств

$$a_{i0}x_0 + \sum_j a_{ij}x_j \geqslant 0.$$

Она совместна, поскольку нулевой вектор является ее решением. Для любого решения $(x_0, \dots , x_n)$ этой системы имеем $x_0 \leqslant 0$. Действительно, если бы $x_0 > 0$, то набор $(x_0^{-1}x_1, \dots , x_0^{-1}x_n)$ являлся бы решением исходной системы неравенств, что невозможно. Итак, неравенство $-x_0 \geqslant 0$ является следствием исходной системы неравенств. Поэтому в силу теоремы Фаркаша

$$-x_0 = c_0' + \sum_i c_i(a_{i0}x_0 + \sum_j a_{ij}x_j), \quad c_0', c_i \geqslant 0. \tag{9}$$

Сравнивая свободные члены в левой и правой частях (9) получаем $c_0' = 0$. Остается в (9) положить $x_0 = 1$. □

Из теоремы Фаркаша 1.9 и следствия 1.10 вытекает

Следствие. *Пусть A – матрица размера $m \times n$, x – столбец неизвестных высоты n и b – столбец свободных членов высоты m. Тогда либо система неравенств $Ax+b \geqslant 0$ совместна, либо существует такой столбец $c \geqslant 0$ высоты m, что ${}^tAc = 0$ и ${}^tbc < 0$.*

Доказательство. Пусть

$$A = (a_{ij}), \quad {}^tb = (b_1, \ldots, b_m), \quad {}^tx = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$f_i(x) = \sum_j a_{ij}x_j + b_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Система неравенств $Ax + b \geqslant 0$ имеет вид (3). Если эта система несовместна, то существует такой столбец $c =^t (c_1, \ldots, c_m) \geqslant 0$, и положительное число c_0, что

$$0 = c_0 + \sum_i c_i f_i = c_0 + \sum_i c_i(b_i + \sum_j a_{ij}x_j) =$$
$$c_0 + \sum_i b_i c_i + \sum_{ij} c_i a_{ij} x_j = c_0 + {}^tbc + {}^tcAx. \qquad (10)$$

Так как вектор x произволен, то (10) эквивалентно

$${}^tbc < {}^tbc + c_0 = 0, \quad {}^tAc = 0.$$

□

2. Теорема фон Неймана и ее приложения

Предложение 1.11. *Пусть множество $N \subseteq \mathbb{A}^n$ – компактно и выпукло, N' – компактное выпуклое множество аффинных функций на $\mathbb{A}^n$. Предположим, что для любой точки $a \in N$ найдется такая функция $f \in N'$, что $f(a) \geqslant 0$. Тогда существует такая функция $f_0 \in N'$, что $f_0 \mid_N \geqslant 0$.*

Доказательство. Обозначим через K – множество всех линейных функций на $\mathbb{A}^n$, принимающих на N неотрицательные значения. Тогда K является замкнутым выпуклым конусом в линейном пространстве всех линейных функций.

Лемма 1.12. *Пусть $b \in \mathbb{A}^n$ и $f(b) \geqslant 0$ для всех $f \in K$. Тогда $b \in N$.*

Доказательство. Если бы $b \notin N$, то по теореме 1.1 существовала бы такая аффинная функция f, что $f\mid_N \geqslant 0$ и $f(b) < 0$. Эта функция f принадлежит K. Получается противоречие с условием леммы. $\square$

Продолжим доказательство предложения. Предположим, что $K \cap N' = \emptyset$. Выберем в $\mathbb{A}^n$ систему координат O, $e_1, \ldots, e_n$. Каждая аффинная функция f представляется в виде $f(x) = a_0 + \sum_i a_i x_i$. По предложению 1.7 существует такая линейная функция $h(z) = \sum_{i=0}^n b_i z_i$ на пространстве аффинных функций на $\mathbb{A}^n$, что $h(f) = \sum_{i=0}^n b_i a_i \geqslant 0$ для всех $f \in K$ и $h(g) < 0$ для всех $g \in N'$. Так как функция $f = 1$ лежит в K, то $h(1) = b_0 \geqslant 0$.

Если $b_0 > 0$, то рассмотрим точку $b = (b_0^{-1} b_1, \ldots, b_0^{-1} b_n) \in \mathbb{A}^n$. Тогда $f(b) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_0^{-1} b_i a_i = b_0^{-1} h(f) \geqslant 0$ для всех $f \in K$ и $g(b) = b_0^{-1} h(g) < 0$ для всех $g \in N'$. По лемме 1.12 получаем $b \in N$ причем $g(b) < 0$ для всех $g \in N'$, что противоречит условиям предложения.

Предположим теперь, что $b_0 = 0$. В этом случае $h(f) = \sum_{i=1}^n b_i a_i \geqslant 0$ для всех $f \in K$ и $h(g) < 0$ для всех $g \in N'$. В частности, точка $b = (b_1, \ldots, b_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Возьмем точку $z = (z_1, \ldots, z_n) \in N$. Для любого $\mu \geqslant 0$ и любого $f \in K$ получаем

$$f(z + \mu b) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i z_i + \mu \sum_{i=1}^n a_i b_i \geqslant 0.$$

По лемме 1.12 точка $z + \mu b \in N$ для всех $\mu \geqslant 0$. Но это противоречит компактности N, поскольку $b \neq 0$. Следовательно, $K \cap N'$ непусто. $\square$

Предложение 1.13. *Пусть заданы компактные подмножества $N \subseteq A^n$, $M \subseteq A^m$ и $F(x, y)$ – непрерывная функция, где $x \in N$, $y \in M$. Тогда*

$$\max_{x\in N} \min_{y\in M} F(x, y) \leqslant \min_{y\in M} \max_{x\in N} F(x, y)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} F(x, y) &\leqslant \max_{x\in N} F(x, y) \Longrightarrow \\ \min_{y\in M} F(x, y) &\leqslant \min_{y\in M} \max_{x\in N} F(x, y) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\max_{x\in N}\min_{y\in M} F(x,y) \quad \leqslant \quad \min_{y\in M}\max_{x\in N} F(x,y).$$

□

Теорема 1.14 (фон Нейман)**.** *Пусть*

$$F(x,y)=\sum_{i,j} a_{ij}x_i,y_j+\sum_i l_ix_i+\sum_j r_jy_j+c,$$

где

$$x=(x_1,\,\dots\,,x_n)\in\mathbb{A}^n,\qquad y=(y_1,\,\dots\,,y_m)\in\mathbb{A}^m.$$

Предположим, что заданы компактные выпуклые подмножества $N\subseteq A^n$, $M\subseteq A^m$. Тогда

1) $\max_{x\in N}\min_{y\in M}F(x,y)=\min_{y\in M}\max_{x\in N}F(x,y)$;
2) существуют такие точки $x^*\in N$, $y^*\in M$, что для всех $x\in N$, $y\in M$ выполнены неравенства $F(x,y^*)\leqslant F(x^*,y^*)\leqslant F(x^*,y)$.

Доказательство. Положим $e=\max_{x\in N}\min_{y\in M}F(x,y)$. Без ограничения общности можно считать, что $e=0$. По предложению 1.13 имеем

$$\max_{x\in N}\min_{y\in M}F(x,y)=0\leqslant\min_{y\in M}\max_{x\in N}F(x,y).$$

Обозначим через N' множество всех линейных функций $h(x)=-F(x,y)$, $y\in M$. Это множество компактно. Следовательно, по предложению 1.11 найдется такая точка $y^*\in M$, что $F(x,y^*)\leqslant 0$ для всех $x\in N$. В частности,

$$\max_{x\in N}F(x,y^*)\leqslant 0. \tag{11}$$

Отсюда

$$\min\nolimits_{y\in M}\max\nolimits_{x\in N}F(x,y)\leqslant 0= \tag{12}$$
$$\max\nolimits_{x\in N}\min\nolimits_{y\in M}F(x,y)\leqslant\min\nolimits_{y\in M}\max\nolimits_{x\in N}F(x,y),$$

и утверждение 1) доказано.

Аналогичные рассуждения показывают, что существует точка $x^*\in N$, для которой $F(x^*,y)\leqslant 0$ при всех $y\in M$. По (11) и (12) получаем $\max_{x\in N}F(x,y^*)=0$. Аналогично, заменяя F на $-F$ получаем $\min_{y\in M}F(x^*,y)=0$. Поэтому

$$F(x^*,y^*)\leq\max\nolimits_{x\in N}F(x,y^*)=$$

$$\min_{y\in M} F(x^*,y) \leqslant F(x^*,y);$$
$$F(x^*,y^*) \geq \min_{y\in M} F(x^*,y) =$$
$$\max_{x\in N} F(x,y^*) \geqslant F(x,y^*).$$

□

Определение. Точка (x^*, y^*) из теоремы фон Неймана называется *седловой.*

2.1. Конечные антагонистические игры. Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Имеются два игрока со стратегиями $1, \dots, n$ и $1, \dots, m$, соответственно. Задана числовая матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$. Если первый игрок выбирает i-ую стратегию, а второй j-ую, то результатом игры является число a_{ij}. Если это число положительно, то выигрывает первый игрок и результат выигрыша равен a_{ij}. Если это число отрицательно, то выигрывает второй с результатом $-a_{ij}$.

Предположим, что первый игрок выбрал стратегию i. Тогда второй игрок, чтобы нанести первому наибольший урон выбирает стратегию j так, чтобы $a_{ij} = \min_k a_{ik}$. Вообще говоря, второй игрок не знает стратегии первого игрока. Поэтому первый игрок для безопасности и ограничения проигрыша снизу должен выбрать i_1 так чтобы $a_{i_1,j_1} = \max_i \min_j a_{ij}$. Соответственно, второй для ограничения нанесения первому наибольшего гарантированного урона должен выбрать j_2 так, чтобы $a_{i_2,j_2} = \min_j \max_i a_{ij}$. Как показано в предложении 1.13 выполнено неравенство $a_{i_1,j_1} \leqslant a_{i_2,j_2}$.

Предположим, что игроки играют T раз, выбирая при этом разные стратегии. *Смешанной стратегией* первого игрока называется вектор

$$x = {}^t(x_1, \dots, x_m) \geqslant 0, \quad x_1 + \dots + x_m = 1.$$

Величина x_i означает вероятность того, что первый игрок выбрал i-ую стратегию. Аналогичным образом, определяется смешанная стратегия y второго игрока. Таким образом, если игроки придерживались смешанных стратегий x, y,то результатом игры будет число $F(x,y) = T\,{}^t xAy$. Следовательно, если первый игрок будет придерживаться стратегии x^* из теоремы фон

Неймана, то он будет иметь гарантированный выигрыш. В случае отклонения от x^*, при выборе вторым игроком стратегии y^* первый игрок выиграет меньше. Те же рассуждения применимы и ко второму игроку. Поэтому им рекомендуется придерживаться стратегий x^*, y^*.

2.2. Конечные бескоалиционные неантагонистические игры. Предположим, что в игре участвуют d игроков, у каждого из них имеется свое конечное множество стратегий X_i и своя функция выигрыша $H_i : X_1 \times \cdots \times X_d \to \mathbb{R}$. Если i-ый игрок выбрал стратегию $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, то в результате игры его выигрыш составит $H_i(x_1, \ldots, x_d)$. Эта игра называется *бескоалиционной неантагонистической игрой.* Если каждое X_i конечно, то игра конечна. В случае двух игроков игра называется *биматричной.* Действительно, пусть $X_1 = \{1, \ldots, m\}$, $X_2 = \{1, \ldots, n\}$. Составим матрицы $H_1, H_2 \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, где в H_1 (соответственно, в H_2) на месте (i, j) стоит число $H_1(i, j)$ (соответственно, $H_2(i, j)$), равное выигрышу 1-го (соответственно, 2-го) игрока. Таким образом, эта игра задается двумя матрицами. При этом всегда без ограничения общности можно считать, что $H_1, H_2 > 0$.

Как и выше рассматриваются *смешанные стратегии* $p_i = \{p_{ij} \mid j \in X_i\}$, где p_{ij} – вероятность того, что i-ый игрок выбрал j-ую стратегию. Тогда

$$p_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j \in X_i} p_{ij} = 1.$$

В этом случае *средним результатом* или математическим ожиданием выигрыша i-го игрока является

$$H_i(p_1, \ldots, p_d) = \sum_{i_1 \in X_1, \ldots, i_d \in X_d} H_i(i_1, \ldots, i_d) p_{1,i_1} \cdots p_{d,i_d}.$$

Определение. Набор смешанных стратегий $p_1^*, \ldots, p_d^*$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу*, если для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено условие

$$H_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_d^*) \geqslant \\ H_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_d^*) \quad (13)$$

для любой смешанной стратегии p_i. Стратегия p_i^* называется *равновесной*, если она входит в некоторый набор ситуации равновесия по Нэшу.

Набор смешанных стратегий $p_1^*, \dots, p_d^*$ называется *ситуацией равновесия по Парето*, если не существует такого набора $(p_1, \dots, p_d)$, что для каждого $i = 1, \dots, d$ выполнено условие

$$H_i(p_1, \dots, p_d) \geqslant H_i(p_1^*, \dots, p_d^*), \tag{14}$$

причем для некоторого i_0 неравенство (14) строгое.

Теорема 1.15 (Nash)**.** *Любая конечная бескоалиционная игра имеет ситуацию равновесия на Нэшу.*

Доказательство. Множества $P_1, \dots, P_d$ смешанных стратегий игроков являются компактами. Следовательно, и

$$P_1 \times \dots \times P_d \tag{15}$$

является компактом. Зададим отображение Ψ, сопоставляющее каждое точке $(p_1, \dots, p_d)$ из (15) множество $\Psi(p_1, \dots, p_d)$ всех таких $(p_1', \dots, p_d')$ из (15), что

$$H_i(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i', p_{i+1}, \dots, p_d) = \max_{y \in P_i} H_i(p_1, \dots, p_{i-1}, y, p_{i+1}, \dots, p_d)$$

для каждого $i = 1, \dots, d$. Так как функции H_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, полилинейны, то $\Psi(p_1, \dots, p_d)$ является компактом в (15). Если последовательность $(p_1^{(t)}, \dots, p_d^{(t)})$ из (15) имеет предел $(p_1, \dots, p_d)$, и существует последовательность $(q_1^{(t)}, \dots, q_d^{(t)}) \in \Psi(p_1^{(t)}, \dots, p_d^{(t)})$ с предельной точкой $(q_1', \dots, q_d')$, то $(q_1', \dots, q_d') \in \Psi(p_1, \dots, p_d)$.

Лемма 1.16 (Теорема Какутани)**.** *Пусть $S \subset \mathbb{R}^m$ – компактное выпуклое множество и Ψ – отображение, сопоставляющее точкам из S компактные выпуклые подмножества в S. Предлположим, что если имеется последовательность $x_t \in S$, $t \geqslant 1$, сходящаяся к x, и набор элементов $y_t \in \Psi(x_t)$, сходящийся к y, то $y \in \Psi(x)$. Тогда найдется такая точка $x^* \in S$, что $x^* \in \Psi(x^*)$.*

Доказательство. См. [**PR**, Теорема 1.11.5, с. 38-39] □

Завершим доказательство теоремы. По лемме найдется такая точка $(p_1^*, \dots, p_d^*) \in \Psi(p_1^*, \dots, p_d^*)$ из (15), т. е. выполнено (13). $\square$

Приведем без доказательства два результата.

Теорема 1.17 ([**LB**], с. 137)**.** *Смешанная стратегия $(p_1^*, \dots, p_d^*)$ является ситуацией равновесия по Нэшу тогда и только тогда, когда для любого i и любой чистой стратегии $x_i \in X_i$ выполняется неравенство*

$$H_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, x_i, p_{i+1}^*, \dots, p_d^*) \leqslant H_i(p_1^*, \dots, p_d^*).$$

Теорема 1.18. *Если равновесная стратегия p_i^* входит в ситуацию $(p_1^*, \dots, p_d^*)$ и $p_i^*(x_j) > 0$, то*

$$H_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, x_i, p_{i+1}^*, \dots, p_d^*) = H_i(p_1^*, \dots, p_d^*).$$

Далее мы будет рассматривать биматричные игры. Положим $p_1 = p$, $p_2 = q$. Тогда ситуация p^*, q^* является равновесной по Нэшу, если

$$H_1(p^*, q^*) \geqslant H_1(p, q^*), \quad H_2(p^*, q^*) \geqslant H_2(p^*, q) \tag{16}$$

для любых смешанных стратегий p, q.

Теорема 1.19. *Для того, чтобы (p^*, q^*) была бы ситуацией равновесия в биматричной игре с матрицами $A = H_1$, $B = H_2 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа a, b, чтобы*

$$A\,{}^t q^* \leqslant a\,{}^t e, \quad P^* B \leqslant b\, e, \quad p^*(A+B)\,{}^t q^* = a + b,$$

где $e = (1, \dots, 1)$ – строка длины n или m.

Доказательство. Если пара (p^*, q^*) является ситуацией равновесия, то положим $a = p^* A\,{}^t q^*,\ b = p^* B\,{}^t q^*$. Если взять вектор p, в котором на месте i стоит 1, а все остальные координаты равны 1, то в силу (16)

$$\sum_j a_{ij} q_j^* = pA\,{}^t q^* \leqslant p^* A\,{}^t q^* = a.$$

Поэтому $A\,{}^t q^* \leqslant a\,{}^t e$. Аналогично ${}^t B\,{}^t p^* \leqslant b\,{}^t e$. Кроме того, $p^*(A+B)\,{}^t q^* = p^* A\,{}^t q^* + p^* B\,{}^t q^* = a + b$.

Обратно, пусть p^*, q^*, a, b удовлетворяют условиям теоремы. Тогда для любых векторов $x, y \geqslant 0$ с условием $x\,{}^t e = e\,{}^t y = 1$ имеем

$$xA\,{}^t q^* \leqslant ax\,e = a, \quad p^*By \leqslant be\,{}^t y = b,$$
$$xA\,{}^t q^* + p^*B\,{}^t y \leqslant a + b = p^*A\,{}^t q^* + p^*B\,{}^t q^*. \tag{17}$$

В частности, беря $x = p, y = q$ получаем, что $p^*A\,{}^t q^* \leqslant a,\ p^*B\,{}^t q^* \leqslant b$, и $a + b = p^*A\,{}^t q^* + p^*B\,{}^t q^*$ по (17). Поэтому $p^*A\,{}^t q^* = a,\ p^*B\,{}^t q^* = b$. Отсюда $xA\,{}^t q^* \leqslant p^*A\,{}^t q^*$, и $p^*B\,{}^y \leqslant p^*B\,{}^t q^*$. В силу (16) получаем ситуацию равновесия. □

Теорема 1.20. *Для того, чтобы (p^*, q^*) была бы ситуацией равновесия в биматричной игре с матрицами $A = H_1$, $B = H_2 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы p^*, q^*, a, b из предыдущей теоремы являлись бы решением задачи*

$$x(A + B)\,{}^t y - a - b \to \max, \tag{18}$$
$$A\,{}^t y \leqslant a\,{}^t e, \quad xB \leqslant b\,e, \quad x, y \geqslant 0, \quad x\,{}^t e = y\,{}^t e = 1.$$

Доказательство. Если выполнены ограничения из условия теоремы, то $x(A + B)\,{}^t y - a - b \leqslant 0$. Поэтому и максимум неположителен. Пусть (p^*, q^*) – ситуация равновесия и $a = p^*A\,{}^t q^*,\ b = p^*A\,{}^t q^*$. Тогда это решение задачи (18).

Обратно, если задано решение p^*, q^*, a, b задачи (18), то в силу существования точки равновесия по Нэшу получаем, что $p^*(A+B)\,{}^t q^* - a - b = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим выпуклые множества

$$S = \{(x, b) \mid {}^t Bx - b\,{}^t e \leqslant 0,\ e\,{}^t x = 1\},$$
$$T = \{(y, a) \mid Ay - b\,{}^t e \leqslant 0,\ e\,{}^t y = 1\}.$$

Определение 1.21. Точка выпуклого множества M называется *крайней*, если она не лежит внутри любого отрезка, концы которого принадлежат M.

Теорема 1.22. *Всякая ситуация равновесия в биматричной игре является выпуклой комбинацией таких точек (p^*, q^*), что (p^*, b) – крайняя точка в S, а (q^*, a) – крайняя точка T.*

Доказательство. См. [**PR**, теорема 7.4.3. с. 186-187]. □

3. Полиэдры

Определение. *Полиэдром* P называется множество всех точек $x \in \mathbb{A}^n$, удовлетворяющих заданной системе аффинных неравенств (3). *Размерностью* полиэдра P называется размерность наименьшей плоскости, содержащей P. Другими словами, размерность P совпадает с рангом системы векторов $\{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in P\}$.

Если $f_1, \ldots, f_r$ – все аффинные функции из (3), обращающиеся в нуль в точке $A \in P$. Обозначим через Π плоскость, задаваемую уравнениями $f_1 = \cdots = f_r = 0$. *Гранью* Γ_A точки A в P называется $\Pi \cap P$.

Отметим, что каждая грань является полиэдром, поскольку она задается неравенствами (3) и неравенствами

$$-f_1 \geqslant 0, \ldots, -f_r \geqslant 0.$$

Определение 1.23. Грань нулевой размерности называется *вершиной.* Грань размерности 1 называется *ребром.*

Теорема 1.24. *Пусть полиэдр P задается системой неравенств*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leqslant b_1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leqslant b_m \\ & & x_1, & \ldots, & x_n & \geqslant 0, \end{array} \tag{19}$$

$b_1, \ldots, b_m \geqslant 0$*. Тогда начало координат $O = (0, \ldots, 0)$ является вершиной полиэдра P. Если $b_1, \ldots, b_m > 0$, то из O выходит ровно n ребер.*

Доказательство. Заметим сначала, что O удовлетворяет всем ограничениям (19), поскольку $b_1, \ldots, b_m \geqslant 0$. Кроме того, в грани Γ_O выполнены уравнения $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Отсюда в силу определения 1.23 получаем первое утверждение.

Пусть $b_1, \ldots, b_n > 0$. Зафиксируем индекс $1 \leqslant i \leqslant n$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $a_{ji}\varepsilon < b_j$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Тогда точка $B = (0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots, 0)$, где ε стоит на месте i, удовлетворяет всем ограничениям (19), т. е. $B \in P$. Но в B выполнены уравнения $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n$. Поэтому грань Γ_B содержит все точки B с достаточно малых ε и потому $\dim \Gamma_B = 1$. Таким образом, изменяя $i = 1, \dots, n$ получаем n ребер. Так как каждое $b_j > 0$, то вершина O не обращает в равенство не одно из первых m неравенств в (19). $\square$

Следствие 1.25. *Пусть полиэдр M задается системой уравнений и неравенств*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = b_1 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = b_m \\ & & & & x_1, & \dots & x_n & \geqslant 0, \end{array} \tag{20}$$

где $b_1, \dots, b_m \geqslant 0$. Тогда точка $C = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ является вершиной полиэдра M. Если $b_1, \dots, b_m > 0$, то из C выходит n ребер.

Доказательство. Так как $b_1, \dots, b_m \geqslant 0$, то точка C удовлетворяет всем условиям (20) и потому лежит в M.

Заметим, что при естественной проекции $\mathbb{A}^n$ на $\mathbb{A}^{n-r}$, $(x_1, \dots, x_{n+m}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, полиэдр M биективно проектируется на полиэдр P из теоремы 1.24. Остается воспользоваться утверждением теоремы 1.24. $\square$

Определение. Пусть x – точка полиэдра P и Π – наименьшая плоскость, содержащая P. Точка x называется *(относительно) внутренней* для P, если некоторая ее окрестность в Π содержится в P.

Теорема 1.26. *В непустом полиэдре есть внутренние точки.*

Доказательство. Пусть полиэдр P имеет размерность s и векторы $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_s}$ линейно независимы, где $A_0, \dots, A_s \in P$. Тогда любая точка

$$A_0 + (1 - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i)\overrightarrow{A_0A_0} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = A_0 + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0$, и $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \leqslant 1$, лежит в P по предложению 1.8. Более того, эта точка является внутренней, если все $\lambda_i > 0$. □

Предложение 1.27. *Точка $A \in P$ является внутренней точкой Γ_A.*

Доказательство. Пусть P задается неравенствами (3), а грань Γ_A, где $A \in P$, задается уравнениями $f_1 = \cdots = f_r = 0$. В этом случае $f_{r+1}(A) > 0, \ldots, f_m(A) > 0$. Пусть $U \subset \mathbb{A}^n$ – множество всех таких точек $B \in \mathbb{A}^n$, что $f_{r+1}(B) > 0, \ldots, f_m(B) > 0$. Тогда U – открытое подмножество в $\mathbb{A}^n$. Если Π – плоскость, задаваемая уравнениями $f_1 = \cdots = f_r = 0$, то $U \cap \Pi \subset P$, т. е. A – внутренняя точка Γ_A. □

Теорема 1.28. *Пусть аффинная функция f достигает экстремума в некоторой внутренней точке полиэдра P. Тогда $f\mid_P = Const$.*

Доказательство. Можно считать, что начало координат O является точкой экстремума f. Кроме того, можно считать, что размерность P совпадает с размерностью всего аффинного пространства. Пусть в некоторой системе координат $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Так как O – точка экстремума, то

$$a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(O) = 0$$

для любого $j = 1, \ldots, m$. Поэтому $f(x) = a_0$. □

Предложение 1.29. *Пусть f – аффинная функция, принимающая неотрицательные значения на полиэдре P, причем $f(A) = 0$ для некоторой точки $A \in P$. Тогда $f\mid_{\Gamma_A} = 0$.*

Доказательство. Точка A является внутренней точкой Γ_A по предложению 1.27. Остается воспользоваться теоремой 1.28. □

Следствие. *Определение грани полиэдра не зависит от системы неравенств, задающих полиэдр.*

Предложение. *Пусть полиэдр P задается системой аффинных неравенств* (3), *а грань* Γ_A, *где* $A \in P$, *задается уравнениями* $f_1 = \dots = f_r = 0$. *Если ранг линейных частей системы* $f_1, \dots, f_r$ *равен* k, *то* $\dim \Gamma_A = \dim P - k$.

Доказательство. Можно считать, что все пространство является минимальной плоскостью, содержащей P. Предположим, что ранг линейных частей системы $f_1, \dots, f_r$ равен k, и Π – плоскость, задаваемая системой уравнений $f_1 = \dots = f_r = 0$. Пусть $U \subset \mathbb{A}^n$ – множество всех таких точек $B \in \mathbb{A}^n$, что $f_{r+1}(B) > 0, \dots, f_m(B) > 0$. Тогда $U \cap \Pi \subset \Gamma_A$, причем

$$\dim \Gamma_A = \dim\langle U \cap \Pi\rangle = \dim \Pi = \dim P - k.$$

$\square$

Теорема 1.30. *Пусть полиэдр P задан системой аффинных неравенств* (3). *Предположим, что* $f_1, \dots, f_r$ *не равны тождественно нулю на* P, *и* $f_{r+1}\,|_P = \dots = f_m\,|_P = 0$. *Обозначим через* Π_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *гиперплоскость, задаваемую уравнением* $f_i = 0$. *Тогда* $\Pi_i \cap P$ *является гранью размерности* $\dim P - 1$ *в* P *для некоторого* i.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что гиперплоскости $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ различны. Пусть A – внутренняя точка в P. Из предложения 1.29 вытекает, что $f_1(A) > 0, \dots, f_r(A) > 0$. Переходя к плоскости, порожденной P можно считать, что эта плоскость совпадает с $\mathbb{A}^n$, и $r = m$. Предположим, что $f_i(x) = a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Обозначим через B_i проекцию A на Π_i. Как известно,

$$|\overrightarrow{AB_i}| = \frac{|f_i(A)|}{\sqrt{a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2}} \tag{21}$$

Пусть U – открытый шар в $\mathbb{A}^n$ с центром в точке A, целиком содержащийся в P. По (21) все точки $X \in \mathbb{A}^n$, равноудаленные от гиперплоскостей Π_i, Π_j, $i \neq j$, образуют пару гиперплоскостей, задаваемых уравнениями

$$\frac{|f_i(X)|}{\sqrt{a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2}} = \frac{|f_i(X)|}{\sqrt{a_{j1}^2 + \dots + a_{jn}^2}}.$$

Объединение всех этих гиперплоскостей по всем парам $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ не покрывает все U. Следовательно, в U существует такая внутренняя точка B, расстояния от которой до $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ различны. Без ограничения общности можно считать, что $A = B$ и $|\overrightarrow{BB_1}| < |\overrightarrow{BB_2}| < \ldots < |\overrightarrow{BB_r}|$.

Лемма. *Точка* B_1 *принадлежит* P.

Доказательство. Пусть $B_1 \notin P$. Тогда существует такое $i = 2, \ldots, n$, что $f_i(B_1) < 0$. Пусть, например, $f_2(B_1) < 0$.

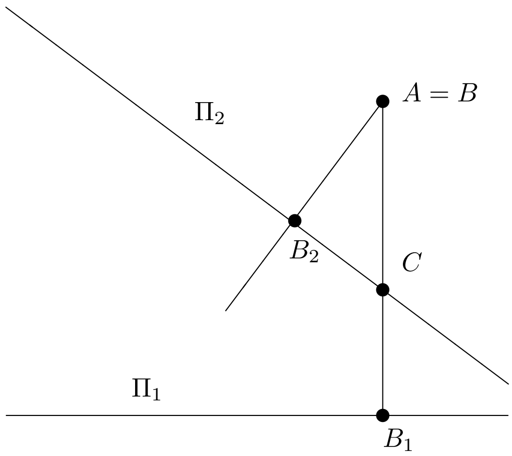

Рис. 1.3

Так как $f_2(B) > 0$, то на интервале (B, B_1) найдется такая точка C, что $f_2(C) = 0$. В этом случае $C \in \Pi_2$, причем (см. Рис. 1.3) $|\overrightarrow{BC}| \geqslant |\overrightarrow{BB_2}|$. Отсюда $|\overrightarrow{BB_1}| > |\overrightarrow{BC}| \geqslant |\overrightarrow{BB_2}|$, что противоречит предположению. □

Завершим доказательство теоремы. Заметим, что $B_1 \notin \Pi_i$, если $i \geqslant 2$. Действительно, если бы $B_1 \in \Pi_i$ для некоторого $i \geqslant 2$, то, в частности, $|\overrightarrow{BB_2}| \leqslant |\overrightarrow{BB_1}|$, что неверно. Таким образом, $f_2(B_1) > 0, \ldots, f_n(B_1) > 0$, т.е. $\Gamma_{B_1} = \Pi_1 \cap P$. При этом

$$\dim \Gamma_{B_1} = \dim \Pi_1 = n - 1 = \dim P - 1.$$

$\square$

Теорема 1.31 (Фань Цзы)**.** *Пусть полиэдр P задается в $\mathbb{A}^n$ системой неравенств* (3)*, причем ранг линейных частей $f_1, \ldots, f_m$ равен r. Если $A \in P$, то $\dim \Gamma_A \geqslant n - r$ и каждая грань в P размерности $d > n - r$ обладает гранью размерности $d - 1$. В частности, $\dim P \geqslant n - r$, и в P имеется грань размерности $\dim P$.*

Доказательство. Переходя к новому базису можно считать, что

$$f_1 = x_1, \ldots, f_r = x_r, \quad f_j = \sum_{i \leqslant r} a_{ji} x_i + c_j, \quad j > r.$$

Обозначим через U подпространство, задаваемое уравнениями $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Пусть $A = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in P$ и $u = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{r}, u_{r+1}, \ldots, u_n) \in U$. Тогда

$$A + u = (x_1^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0 + u_{r+1}, \ldots, x_n^0 + u_n).$$

При этом $x_i^0 \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, r$, и

$$f_j(A + u) = c_j + \sum_{i \leqslant r} a_{ji} x_i^0 \geqslant 0, \quad j > r.$$

Поэтому $A + U \subseteq P$. Если $f_j(A) = 0$ для некоторого $j > r$, то аналогично $f_j(A + U) = 0$, откуда $\Gamma_A \supseteq A + U$, и поэтому $\dim \Gamma_A \geqslant \dim U = n - r$.

Пусть Γ_B – грань точки B в P, $\dim \Gamma_B > n - r$. Тогда не все функции $x_1, \ldots, x_r$ тождественно равны нулю на Γ_B. По теореме 1.30 в Γ_B имеется грань размерности $\dim \Gamma_B - 1$. $\square$

Теорема. *Пусть полиэдр P обладает вершиной и аффинная функция f на P достигает минимума. Тогда этот минимум достигается и в некоторой вершине.*

Доказательство. Пусть $c = \min_P f$ и $f(A) = c$. Тогда A – внутренняя точка грани Γ_A по следствию 1.27. По предложению 1.29 функция f постоянна на Γ_A. Заметим, что Γ_A задается неравенствами, линейные части которых те же, что и в неравенствах, задающих P. Поэтому в силу теоремы Фань

Цзы Γ_A имеет грань меньшей размерности, если Γ_A не вершина. Отсюда вытекает утверждение. $\square$

Теорема 1.32 (Г. Вейль)**.** *Конечнопорожденный конус является полиэдром.*

Доказательство. Пусть конус $K \subseteq \mathbb{A}^n$ с вершиной O порождается точками $A_1, \ldots, A_m$. Можно считать, что $\dim K = n$. Пусть O – начало координат и $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, где $1 \leqslant j \leqslant m$. Заметим, что

$$n = \dim K = \dim\langle\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_m}\rangle = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad (22)$$

Предположим, что $B = (b_1, \ldots, b_n) \notin K$. Рассмотрим аффинные функции

$$\begin{aligned} f_j(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_t a_{jt}x_t, \quad j = 1, \ldots, m. \\ g(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_t b_j x_t. \end{aligned}$$

По теореме Фаркаша неравенство $g \geqslant 0$ не является следствием совместной системы неравенств (3). Следовательно, найдется такая точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{A}^n$, что

$$f_1(z) \geqslant 0, \ldots, f_m(z) \geqslant 0, \quad g(z) = a < 0.$$

Рассмотрим полиэдр P^0, задаваемый системой неравенств

$$f_1 \geqslant 0, \ldots, f_m \geqslant 0, \quad -g + a \geqslant 0. \qquad (23)$$

Полиэдр P^0 непуст, так как он содержит точку z. По теореме Фань Цзы и (22) полиэдр P^0 имеет вершину $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Среди неравенств (23) n линейно независимых функций должны обращаться в нуль. Если n линейно независимых функций среди $f_1, \ldots, f_m$ обращается в точке C в нуль, то в силу определения функций $f_1, \ldots, f_m$, получаем, что точка C – начало координат. В этом случае $-g(C) + a = a < 0$, что невозможно. Итак, только $n-1$ независимая функция среди $f_1, \ldots, f_m$, обращается в нуль. Кроме того, $-g(C) + a = 0$.

Рассмотрим уравнение $h(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$. По построению $n-1$ точка среди $A_1, \dots, A_m$ удовлетворяет этому уравнению. Для остальных точек A_j получаем $h(A_j) > 0$. Кроме того, $h(B) = g(C) = a < 0$. Итак, плоскость Π, задаваемая уравнением $h(x) = 0$ разделяет K и B, причем $\Pi \cap K$ является гранью размерности $n-1$. Тем самым эти грани определяют полупространства, пересечением которых является K. Эти полупространства связаны с выбором $n-1$ независимой точки среди $A_1, \dots, A_m$ и проходят через эти точки и начало координат. □

Теорема. *Конечнопорожденный многогранник является полиэдром.*

Доказательство. Пусть M – многогранник, порожденный точками $A_1, \dots, A_m$, и Π – наименьшая плоскость, содержащая M. Можно считать, что $\Pi = \mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}^{n+1}$ и возьмем точку $O \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \mathbb{A}^n$. Пусть K – конус с вершиной O, порожденный точками $A_1, \dots, A_m$. Заметим, что $K \cap \Pi$ выпукло с содержит точки $A_1, \dots, A_m$. Следовательно, $M \subseteq K \cap \Pi$. Покажем, что $K \cap \Pi \subseteq M$. Выберем в $\mathbb{A}^{n+1}$ систему координат с началом в O и с базисом $e_0, \dots, e_n$, причем $e_0 = \overrightarrow{OA_1}$, и $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_m} \rangle$. Тогда $\Pi = A_1 + \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Рассмотрим точку

$$A = O + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{OA_m} \in K \cap \Pi,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0$. Тогда

$$A = O + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{OA_m} =$$
$$O + (\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i)\overrightarrow{OA_1} + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i \overrightarrow{A_1A_i} \in \Pi =$$
$$A_1 + \langle e_1, \dots, e_n \rangle = O + \overrightarrow{OA_1} + \langle e_1, \dots, e_n \rangle.$$

Отсюда $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ и $A \in M$ по предложению 1.8. Итак, $M = K \cap \Pi$. Поэтому M задается неравенствами, определяющими K и уравнениями, определяющими Π. □

4. Упражнения

Упражнение 1.33. Пусть $X \in \mathbb{A}^n$. Доказать, что $[A, B]$ состоит из всех точек вида $X + \alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB}$, где $\alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1$.

Упражнение 1.34. Доказать, что замыкание выпуклого множества является выпуклым.

Упражнение 1.35. Доказать, что полиэдр является замкнутым выпуклым множеством.

Упражнение 1.36. Доказать, что каждое замкнутое выпуклое множество задается системой линейных неравенств.

Упражнение 1.37. Каждое ли каждое замкнутое выпуклое множество задается конечной системой аффинных неравенств?

Упражнение 1.38. Пусть K – замкнутый конус с вершиной O и L – замкнутый компакт, не пересекающийся с K. Доказать, что существует такая гиперплоскость, задаваемая линейным уравнением $f(x) = 0$, что $f(O) = 0$, $f(y) \geqslant 0$ для всех $y \in K$ и $f(z) < 0$ для всех $z \in L$.

Упражнение 1.39. Пусть X – выпуклое подмножество в $\mathbb{A}^n$, не содержащее точек с положительными координатами. Доказать, что существует гиперплоскость, задаваемая уравнением $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, причем $a_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, и $f(z) \leqslant 0$ для всех $z \in X$.

Упражнение 1.40. Пусть $M = \{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x > 0,\ y \geqslant \frac{1}{x} \}$. Доказать, что M выпукло. Найти ближайшую к $A = (0, 5)$ точку $B \in M$. Найти гиперплоскость, проходящую через точку B и разделяющую A и M.

Упражнение 1.41. Пусть $M = \{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, y \geqslant x^2 \}$. Доказать, что M выпукло. Найти ближайшую к $A = (1, 5)$ точку $B \in M$. Найти гиперплоскость, проходящую через точку B и разделяющую A и M.

Упражнение 1.42. Пусть $M = \{ (x, y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, x^2 + 2y^2 \leqslant 1 \}$. Доказать, что M выпукло. Найти ближайшую к $A = (1, 5)$

точку $B \in M$. Найти гиперплоскость, проходящую через точку B и разделяющую A и M.

Упражнение 1.43. Пусть $M \subseteq \mathbb{A}^n$, причем любую точку $A \in \mathbb{A}^n \setminus M$ можно отделить от M гиперплоскостью. Доказать, что M выпукло и замкнуто.

Упражнение 1.44. Пусть задан конус $K \subseteq \mathbb{A}^n$ с вершиной в начале координат. *Двойственным конусом* K^* называется множество всех таких точек $z = (z_1, \dots, z_n) \in A^n$, что ${}^t z x \leqslant 0$ для всех точек $x \in K$. Доказать, что

1) K^* – выпуклый замкнутый конус;
2) $K^{**} \supseteq K$;
3) $K^{**} = K$, если K – выпуклый замкнутый конус;
4) если K – замкнутый выпуклый конус, не содержащий неотрицательных ненулевых векторов, то K^* содержит положительный вектор.

Упражнение 1.45. Показать, что конечно порожденный многогранник компактен.

Упражнение 1.46. Точка X выпуклого конуса K с вершиной O называется *крайней*, если из условия $X = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ})$, где $Y, Z \in K$, вытекает $\overrightarrow{OY} = \lambda\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OZ} = \mu\overrightarrow{OX}$, где λ, $\mu \geqslant 0$.

Предположим, что конус K выпуклый и замкнутый. Будет ли крайняя точка в K являться угловой и наоборот. Совпадает ли определение крайней точки с определением из главы 1 крайней точки K как выпуклого замкнутого множества?

Упражнение 1.47. Пусть конус K с вершиной O порождается точками $A_1, \dots, A_n$, причем если точки X, $-X = O + \overrightarrow{XO}$ лежат в K, то $X = O$. Доказать, что K порождается крайними точками из множества $A_1, \dots, A_n$.

Упражнение 1.48. Как и в определении 1.21 Точка полиэдра Π называется *крайней*, если она не лежит внутри любого отрезка, концы которого принадлежат полиэдру. Пусть полиэдр $\Pi \subseteq \mathbb{A}^n$ задается системой неравенств (3), где

$$f_i(x) = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Предположим, что $x_0 \in \Pi$ и $f_1(x_0) = \dots = f_r(x_0) = 0$, $r > 0$, и $f_i(x_0) > 0$ при $i > r$. Доказать, что x_0 является крайней точкой $\Pi \iff$ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

равен n.

Упражнение 1.49. Доказать, что каждый полиэдр $\Pi \subseteq \mathbb{A}^n$ содержит конечное число граней.

Упражнение 1.50. Пусть полиэдр P задается неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, где $i = 1, \dots, 5$. Найти все его грани.

Упражнение 1.51. Доказать, что ограниченный полиэдр конечно порожден.

Упражнение 1.52. Доказать, что ограниченный полиэдр имеет вершины.

Упражнение 1.53. Совместна ли система аффинных неравенств

$$1 + 2x - 3y \geqslant 0, \quad 2 + x - 5y \geqslant 0, \quad -x + 10y \geqslant 0. \tag{24}$$

Будут ли неравенства $x+y-10 \geqslant 0, \quad x+y+10 \geqslant 0$ следствиями системы неравенств (24)?

Упражнение 1.54. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ и $K \subseteq \mathbb{A}^n$ – множество всех таких точек X, что $AX \leqslant 0$. Доказать, что следующие условия эквивалентны для K:

1) ранг A равен n;
2) если $X, -X \in K$, то $X = O$.

Упражнение 1.55. Пусть конус K с вершиной $O = (0,0)$ порождается точками $A_1 = (1,2)$, $A_2 = (1,4)$, $A_3 = (2,3)$. Задать K системой аффинных неравенств.

Упражнение 1.56. Пусть многогранник K порождается точками $A_1 = (1,2)$, $A_2 = (1,4)$, $A_3 = (2,3)$, $A_4 = (\frac{4}{3}, 2)$. Задать K системой аффинных неравенств.

Упражнение 1.57. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ и c – столбец высоты m. Доказать, что либо существует такой столбец $y \geqslant 0$ высоты m, что ${}^tAy \geqslant c$, либо существует такой столбец $x \geqslant 0$ высоты n, что $Ax \leqslant 0$, ${}^tcx > 0$.

Упражнение 1.58. Пусть A из упражнения 1.57. Доказать, что существует либо такой столбец $y > 0$ высоты m, что ${}^tAy = 0$, либо такой столбец x высоты n, что $Ax \geqslant 0$, $Ax \neq 0$.

Упражнение 1.59. Пусть задан конечно порожденный конус $K \subseteq \mathbb{A}^n$. Доказать, что

1) двойственный конус K^* конечно порожден;
2) если K^* порождается точками $B_1, \ldots, B_t$ со столбцами координат $b_1, \ldots, b_t$, то K состоит из всех таких точек X со столбцом координат x, что ${}^tb_ix \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, t$.

Глава 2

Элементы линейного программирования

Определение 2.1. Пусть заданы аффинные функции $z(x)$, $f_1(x)$, ... , $f_d(x)$ в $\mathbb{A}^n$. *Задача линейного программирования* состоит в нахождении максимума аффинной функции $z(x)$ при условии

$$f_1(x) \geqslant 0, \ \dots, \ f_d(x) \geqslant 0.$$

Как правило, мы будем предполагать, что ранг линейных частей системы функций $f_1(x)$, ... , $f_d(x)$ равен n. Тогда $d = m + n$, $m \geqslant 0$. Совершая аффинную замену переменных, можно добиться, чтобы $f_1 = x_1$, ... , $f_n = x_n$. Тогда система неравенств имеет вид

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 0, \ \dots, \ x_n \geqslant 0; \\ f_{n+i}(x) = \sum_j a_{ij} x_j \geqslant b_j, \qquad i = 1, \ \dots, \ m. \end{gathered} \tag{25}$$

Необходимо найти $\max z$, где $z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + q$. Заметим, что нахождение $\min z$ эквивалентно нахождению $\max(-z)$.

1. Симплекс-метод. Первый вариант

Запишем систему неравенств (25) в следующей эквивалентной форме. Так как $y_j \geqslant 0$, то существуют такие неотрицательные числа x_{1+n}, ... , x_{m+n}, что неравенства (25) преобразуются в систему линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 0, \ \dots, \ x_d \geqslant 0; \qquad d = n + m \\ \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{j+n} = b_j, \qquad i = 1, \ \dots, \ m. \end{gathered}$$

Таким образом, меняя обозначения, всегда можно считать, что система ограничений, задающих полиэдр M, имеет вид

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0;$$
$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{26}$$

Если в каком-то уравнении из (26) коэффициент $b_i < 0$, то умножим это уравнение на -1. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что $b_1, \ldots, b_m \geqslant 0$. Кроме того, запишем целевую функцию z в виде $z + a_{m+1,1}x_1 + \cdots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}$, где $a_{m+1,j} = -p_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $b_{m+1} = q$.

Изложим алгоритм решения этой задачи, называемый *симплекс-методом.* Он применим в случае *отсутствия вырождения.* Это означает, что в полиэдре M, задаваемом уравнениями и неравенствами (26), из каждой вершины выходят $n - r$ ребер (одномерных граней), где r – ранг матрицы (a_{ij}). Это означает, что в каждой системе координат, если система неравенств имеет вид (26), то $b_1, \ldots, b_m > 0$.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ ВЕРШИНЫ ПОЛИЭДРА M.

ШАГ 1.

Составим матрицу из коэффициентов

x_1	$\ldots$	x_n	
a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
$a_{m+1,1}$	$\ldots$	$a_{m+1,n}$	b_{m+1}

(27)

ШАГ 2.

Если в некотором i-ом уравнении все коэффициентов $a_{ij} \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, то полиэдр M, задаваемый ограничениями (26) пуст. Действительно, в i-ом уравнении левая часть неположительна, а правая равна $b_i > 0$.

ШАГ 3.

Пусть в i-ом уравнении коэффициент $a_{ir} > 0$. Зафиксируем столбец с номером r и среди всех положительных коэффициентов этого столбца выберем тот, на котором достигается

$\min_{j=1}^{m}\left(\dfrac{b_j}{a_{jr}}\right)$. Предположим, что этот минимум достигается на a_{sr}.

Деля s-ое уравнение на a_{sr} можно считать, что $a_{sr} = 1$. Это означает, что все элементы s-ой строки матрицы (27) делятся на a_{sr}. Далее из каждой строки номером $t = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, m+1$ вычитаем s-ую строку, умноженную на a_{tr}. В новой таблице переменная x_r входит в коэффициентом 1 в s-уравнений, в остальные же уравнений и в z она входит с нулевым коэффициентом.

Предложение 2.2. *При указанных преобразованиях, все свободные члены уравнений, т.е. коэффициенты b_i остаются неотрицательными. Если $\min_{j=1}^{m}\left(\dfrac{b_j}{a_{jr}}\right)$ достигается на одном элементе a_{sr} из r-го столбца, то все b_i остаются положительными.*

Доказательство. Свободный член в t-ой строке имеет вид $b_t - a_{t,r}b_s$. Если $t \leqslant m$, то в силу выбора s имеем $\dfrac{b_s}{a_{sr}} = b_s \leqslant \dfrac{b_t}{a_{tr}}$. Поэтому если $a_{t,r} > 0$, то $b_t - a_{t,r}b_s \geqslant 0$. Если $\min_{j=1}^{m}\left(\dfrac{b_j}{a_{jr}}\right)$ достигается на одном элементе a_{sr}, то при $t \neq s$ получаем $b_t - a_{t,r}b_s > 0$.

Если же $a_{t,r} \leqslant 0$, то $b_t - a_{t,r}b_s \geqslant b_t > 0$. □

Таким образом, совершая многократно ШАГ 3 мы можем как и методе Гаусса привести таблицу (27) к ступенчатому виду, т.е. каждое уравнение с номером $j = 1, \dots, m$ является выражением j-го главного неизвестного через свободные. При этом функция в последней строек ненулевые коэффициенты стоят только при свободных неизвестных.

Придадим свободным неизвестным нулевые значения. Тогда значения главных неизвестных равны свободным членам и потому положительны. Таким образом, построенное решение X системы лежит в полиэдре M. По следствию 1.25 решение X является вершиной полиэдра M и из решения X как вершины полиэдра M выходит $n - r$ ребер.

Предложение 2.3. *Пусть все коэффициенты* $a_{m+1,1}, \dots, a_{m+1,n} \geqslant 0$, *причем если неизвестная* x_j *главная, то* $a_{m+1,j} = 0$. *Тогда в точке* X *функция* $z(x)$ *достигает максимума, равного* b_{m+1}.

Доказательство. Заметим, что $z = z(x) = -a_{m+1,1}x_1 - \dots - a_{m+1,n}x_n + b_{m+1}$, причем ненулевые коэффициенты стоят только при свободных неизвестных. Это означает, что для любой точки $u \in M$ имеем $z(u) \leqslant z(X) = b_{m+1}$. Максимальное значение b_{m+1} достигается при нулевых значениях свободных неизвестных. При этом, если главная неизвестная x_j находится в k-ом уравнении, то ее значение равно b_k. □

Предположим теперь, что $a_{m+1,r} < 0$ для некоторого r. В этом случае переходим ко второму этапу (см. ниже ШАГ 4).
ВТОРОЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ $\max z$.
ШАГ 4.

Пусть $a_{m+1,r} < 0$. Рассмотрим коэффициенты при r-ой переменной.

Предложение 2.4. *Если все коэффициенты* $a_{1r}, \dots, a_{mr}$ *матрицы* (27) *отрицательны, то максимума у функции* z *нет.*

Доказательство. Придадим свободной переменной x_r произвольное значение $k > 0$, а всем остальным свободным переменным придадим нулевое значение. Тогда значение главного неизвестного из i-го уравнения равно $b_i - a_{ir}k > 0$. Таким образом, получаем точку $X(k) \in M$. При этом $z(X(k)) = -a_{m+1,r}k$ принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, функция z не имеет минимума на M. □

Пусть $a_{m+1,r} < 0$ и $a_{ir} > 0$ для некоторого $i = 1, \dots, m$. Переходим в ШАГУ 3. Это соответствует выбору новых свободных и главных переменных.

Предложение 2.5. *При каждом преобразовании из ШАГА 3 значение свободного члена* b_{m+1} *увеличивается.*

Доказательство. Как и в предложении 2.2 свободный член в z заменяется на $b_{m+1} - a_{m+1,r}b_s$ для некоторого s. Но $a_{m+1,r} < 0$, а $b_s > 0$. Поэтому $b_{m+1} - a_{m+1,r}b_s > b_{m+1}$. □

Итак, мы совершаем различные выборы свободных и главных переменных, т. е. получаем вершины из M. При этом мы никогда не вернемся к выбранной ранее вершине, поскольку на каждом шаге значение целевой функции z увеличивается. Итак, совершив конечное число шагов, мы перейдем к вершине M, в которой функция z достигает максимума, либо выясним, что задача не имеет решения.

1.1. Пример. Решим задачу линейного программирования

$$z = -2x_1 + x_2 + 3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 7; \\ x_1 + x_2 \leqslant 3; \\ x_1,\, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Запишем ограничения в виде системы системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача линейного программирования имеет вид

$$z = -2x_1 + x_2 + 3 \to \max \tag{28}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3; \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

При этом свободные члены в системе ограничений, являющихся уравнениями, должны быть положительными.

ШАГ 1. Составим таблицу из коэффициентов

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	3	-1	0	7
1	1	0	1	3
2	-1	0	0	3

ШАГ 2. Выбираем переменную x_2, чтобы в столбце коэффициентов, соответствующей этой переменной, присутствовал положительный коэффициент в какой-то строке, кроме последней. Далее во втором столбце выбираем такой коэффициент, чтобы

отношение свободного члена к этому коэффициенту было бы положительным и минимальным. В данном случае берем коэффициент 3 из первой строки. Разделив элементы первой строки на 3, получаем

x_1	x_2	x_3	x_4	
2/3	1	-1/3	0	7/3
1	1	0	1	3
2	-1	0	0	3

Вычтем из остальных строк первую строку, умноженную на соответствующий коэффициент. Как и при решении систем линейных уравнений, получаем

x_1	x_2	x_3	x_4	
2/3	1	-1/3	0	7/3
1/3	0	1/3	1	2/3
8/3	0	-1/3	0	16/3

ШАГ 3. Выбираем теперь третий столбец. Находим аналогичный элемент 1/3 во второй строке. Умножим третью строку на 1. Получаем

x_1	x_2	x_3	x_4	
2/3	1	-1/3	0	7/3
1	0	1	3	2
8/3	0	-1/3	0	16/3

Затем из остальных строк вычитаем вторую, умноженную на соответствующие коэффициенты. Получаем

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	0	1	3
1	0	1	3	2
3	0	0	1	6

Если при этом в последней строке все коэффициенты неотрицательны, то максимальное значение равно последнему элементу 6 в последней строке. При этом главными неизвестными в системе уравнений являются x_2, x_3, а свободными – x_1, x_4. Отсюда $\max f = 6$. Этот экстремум достигается при $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_1 = x_4 = 0$.

2. Симплекс-метод. Второй вариант

В этом разделе изложим другой вариант алгоритма симплекс-метода. Пусть система ограничений, задающих полиэдр M, имеет вид

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0; \\ y_i = f_{n+i}(x) = \textstyle\sum_j a_{ij}x_j + b_j \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m \end{gathered} \tag{29}$$

Необходимо найти $\min z$, где $z = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n + q$. Изложим другой алгоритм решения этой задачи. Он также применим в случае отсутствия вырождения.

ПЕРВЫЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ ВЕРШИНЫ ПОЛИЭДРА M. ШАГ 1.

Составим матрицу из коэффициентов

	x_1	$\ldots$	x_n	
y_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
z	p_1	$\ldots$	p_m	q

(30)

ШАГ 2.

Если все коэффициенты $b_1, \ldots, b_m \geqslant 0$, то точка $O = (0, \ldots, 0)$ является вершиной. В этом случае переходим ко второму этапу (см. ниже ШАГ 6).

ШАГ 3.

Пусть $b_r < 0$ для некоторого r. Если все элементы r-ой строки $a_{r1}, \ldots, a_{rn}$ матрицы (30) неположительны, то система неравенств (29) несовместна и потому задача не имеет решения.

ШАГ 4.

Пусть $b_r < 0$ и $a_{rs} > 0$ для некоторого s. Выберем такой индекс j, чтобы число $-\frac{b_j}{a_{js}}$ было бы положительным и минимальным. В силу отсутствия зацикливания такой индекс j найдется однозначно.

ШАГ 5.

Из j-го уравнения выразим x_s через

$$x_1,\ \dots\ ,x_{s-1}, y_j, x_{s+1}, \dots, x_n, \tag{31}$$

и выразим все остальные функции

$$y_1,\ \dots\ ,y_{j-1},\ y_{j+1},\ \dots\ ,y_m,\ z$$

через неизвестные (31).

Предложение 2.6. *При преобразовании, совершенном в шаге 5, для $i \neq j$ все положительные коэффициенты b_i остаются положительными, а отрицательные – отрицательными. Кроме того, значение свободного члена b_r увеличивается, а свободный член в j-ом уравнении становится положительным.*

Доказательство. Пусть $y_j = a_{j1} + \cdots + a_{jn}x_n + b_j$. Тогда

$$x_s = \frac{y_j}{a_{js}} - \frac{a_{j1}x_1}{a_{js}} - \cdots - \frac{a_{jn}x_n}{a_{js}} - \frac{b_j}{a_{js}}.$$

Если же взять k-ую строку матрицы (30), $k \neq j$, то она имеет вид $y_k = a_{k1} + \cdots + a_{kn}x_n + b_k$. Переписав y_k через неизвестные (31), получаем свободный член

$$b_k + a_{ks}(-\frac{b_j}{a_{js}}). \tag{32}$$

Если $b_k > 0$ и $a_{ks} \geqslant 0$, то

$$b_k + a_{ks}(-\frac{b_j}{a_{js}}) \geqslant b_k > 0.$$

Если $b_k > 0$ и $a_{ks} < 0$, то

$$b_k + a_{ks}(-\frac{b_j}{a_{js}}) > 0$$

в силу выбора j и отсутствия вырождения. Если же $b_k < 0$, то при $a_{ks} < 0$

$$b_k + a_{ks}(-\frac{b_j}{a_{js}}) < b_k < 0.$$

Если $b_k < 0$ и $a_{ks} \geqslant 0$, то

$$b_k + a_{ks}(-\frac{b_j}{a_{js}}) < 0.$$

в силу выбора j и отсутствия вырождения. Кроме того, при $k = r \neq j$ по (32) получаем

$$0 \geqslant b_r + a_{rs}(-\frac{b_j}{a_{js}}) > b_r,$$

поскольку $b_r < 0$ и $a_{rs} > 0$. Кроме того, коэффициент b_j заменяется на $-\frac{b_j}{a_{js}} > 0$. Отсюда вытекает утверждение. □

По предложению 2.6 получаем, что после ШАГА 5 коэффициент b_r увеличивается, причем если $j = r$, то коэффициент b_r становится положительными. При этом от набора $x_1, \dots, x_s, \dots, x_n$ в верхней строке (30) мы перешли у набору $x_1, \dots, y_j, \dots, x_n$. Поскольку в верхней строке (30) могут быть лишь n элементов среди $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, то учитывая, увеличение b_r при каждом шаге, мы через конечное число шагов мы добьемся того, что либо коэффициент b_r становится положительным, либо убедимся, что полиэдр ограничений пуст. При этом по предложению 2.6 общее число положительных коэффициентов в последнем столбце на каждом шаге не уменьшается.

Итак, совершая конечное число шагов вида 2 – 5 можно добиться, чтобы либо все свободные коэффициенты стали бы положительными, либо установили, что задача не имеет решения.

Предположим теперь, что в матрице (30) все коэффициенты $b_i > 0$.

ВТОРОЙ ЭТАП – НАХОЖДЕНИЕ $\min z$.

ШАГ 6.

Если все коэффициенты p_i неотрицательны, то $\min z = q$, так как $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$.

ШАГ 7.

Пусть $p_s < 0$ для некоторого s. Если все коэффициенты s-го столбца $a_{1s}, \dots, a_{ms}$ матрицы (30) неотрицательны, то луч $(0, \dots, 0, \overset{s}{t}, 0, \dots, 0) \in P$, для всех $t \geqslant 0$. При этом $z(0, \dots, 0, \overset{s}{t}, 0, \dots, 0) = tp_s + q$ принимает сколь угодно большие отрицательные значения. Следовательно, функция z не имеет минимума на P.

ШАГ 8.

Пусть $p_s < 0$ для некоторого s и существует $a_{rs} < 0$. Выберем индекс j так, чтобы число $-\frac{b_j}{a_{js}}$ было бы положительным и минимальным. Переходим в шагу 5. Повторяя доказательство предложения 2.6, получаем, что все b_k остаются положительными. Кроме того, коэффициент при y_j в z становится равным $\frac{p_s}{a_{js}} > 0$. Свободный член в z становится равным

$$q + p_s(-\frac{b_j}{a_{js}}) < q,$$

поскольку $p_s < 0, -\frac{b_j}{a_{js}} > 0$.

Итак, совершив конечное число шагов, мы перейдем к вершине M, в которой функция z достигает минимума, либо выясним, что задача не имеет решения.

3. Двойственная задача линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования из определения 2.1, причем ограничения имеют вид (29). Обозначим через b – столбец ${}^t(b_1, \dots, b_m)$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что без ограничения общности можно предполагать, что задача имеют вид

$$^tpx \to \max, \qquad x \geqslant 0, \quad Ax \leqslant b, \tag{33}$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$.

Определение 2.7. *Двойственной задачей* к задаче (33) называется задача

$$^tby \to \min, \qquad {}^tAy \geqslant p, \quad y \geqslant 0. \tag{34}$$

Предложение 2.8. *Двойственная задача к двойственной задаче совпадает с исходной задачей.*

Доказательство. В двойственной задаче имеем ${}^t(-A)y \leqslant -p, \quad y \geqslant 0$, причем необходимо найти $\max(-\,{}^t by)$. Поэтому задача, двойственная к двойственной, имеет вид

$$-\,{}^t px \to \min, \text{ т. е. } {}^t px \to \max,$$
$$(-A)x \geqslant -b, \quad x \geqslant 0.$$

□

Обозначим через P полиэдр, задаваемый неравенствами из (33), а через Q – полиэдр, задаваемый неравенствами из (34).

Предложение 2.9. *Пусть $x \in P$, $y \in Q$. Тогда ${}^t px \leqslant {}^t by$. В частности,* $\max_{x\in P}({}^t px) \leqslant \min_{y\in Q}({}^t by)$.

Доказательство. Пусть $x \in P, y \in Q$. Тогда

$${}^t px \leqslant {}^t yAx \leqslant {}^t yb = {}^t by.$$

Отсюда $\max({}^t px) \leqslant \min({}^t by)$. □

Теорема 2.10. *Пусть полиэдры P, Q непусты. Тогда существуют* $\max_{x\in P}(\,{}^t px)$, $\min_{y\in Q}(\,{}^t by)$ *и они равны.*

Доказательство. Рассмотрим в

$$\mathbb{A}^{n+m} = \{(x,y)\,|\,x \in \mathbb{A}^n,\, y \in \mathbb{A}^m\}$$

полиэдр M, задаваемый неравенствами

$$\begin{aligned} Ax \leqslant b, &\qquad {}^t Ay \geqslant p,\\ {}^t px \geqslant {}^t by, &\qquad x \geq 0,\, y \geqslant 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Неравенства (35) можно записать в следующем виде

$$-\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & -{}^t A\\ -{}^t p & {}^t b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\\ -p\\ 0\end{pmatrix} \geqslant 0,\ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{36}$$

Предположим сначала, что система неравенств (36) несовместна. По второму следствию из теоремы Фаркаша существуют такие неотрицательные векторы $c_1 \in \mathbb{R}^m$, $c_2 \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательное число c_3, что

$$\begin{pmatrix} {}^t A & 0 & -p\\ 0 & -A & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = 0,$$

$$({}^t b, -{}^t p, 0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} < 0,$$

или

$$ {}^t A c_1 = p c_3, \quad A c_2 = b c_3, \quad {}^t b c_1 < {}^t p c_2, \quad c_i \geqslant 0. \tag{37}$$

Если $c_3 = 0$, то

$$A c_2 = {}^t A c_1 = 0, \quad {}^t b c_1 < {}^t p c_2. \tag{38}$$

Пусть $x_0 \in P$, $y_0 \in Q$. Тогда

$$\begin{aligned} {}^t b c_1 = {}^t c_1 b \geqslant {}^t c_1 A x_0 = {}^t x_0 \, {}^t A c_1 = 0; \\ {}^t p c_2 = {}^t c_2 p \leqslant {}^t c_2 \, {}^t A y_0 = {}^t y_0 A c_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда ${}^t p c_2 \leqslant 0 \leqslant {}^t b c_1$, что противоречит (38).

Итак, $c_3 > 0$. По (37)

$$ {}^t A(\frac{c_1}{c_3}) = p, \quad A(\frac{c_2}{c_3}) = b, \quad {}^t b c_1 < {}^t p c_2, \quad c_i \geqslant 0.$$

В этом случае

$$\frac{c_2}{c_3} \in P, \quad \frac{c_1}{c_3} \in Q, \quad {}^t p \frac{c_2}{c_3} > {}^t b \frac{c_1}{c_3},$$

что противоречит предложению 2.9.

Таким образом, полиэдр M непуст. Пусть $(x', y') \in M$. В этом случае $x' \in P, y' \in Q$, причем ${}^t p x' \geqslant {}^t b y'$. Отсюда ${}^t p x' = {}^t b y'$ по предложение 2.9, и для любого $x \in P$ получаем ${}^t p x \leqslant {}^t b y' = {}^t p x'$, т. е. $\max_{x \in P} {}^t p x = {}^t p x'$. Аналогично, $\min_{y \in Q} {}^t b y = {}^t p x' = \max_{x \in P} {}^t p x$. □

Отметим интерпретацию двойственной задачи в терминах сопряженных пространств. Пусть как и выше P – полиэдр, задаваемый неравенствами (33), а Q – полиэдр, задаваемый неравенствами (34). В прямой задаче необходимо найти $\min_{x \in P}({}^t p x)$, а в двойственной — $\max_{y \in Q}({}^t b y)$. Пусть $A = (a_{ij})$ и $O, e_1, \ldots, e_n$ – выбранная система координат в $\mathbb{A}^n$. Пусть V – векторное пространство с базой $e_1, \ldots, e_n$ и V^* – сопряженное пространство. Обозначим через $l_i \in V^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant m$, линейные функции $l_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$.Тогда полиэдр P задается неравенствами $l_1(x) \leqslant b_1, \ldots, l_m(x) \leqslant b_m, \quad x \geqslant 0$. Рассмотрим конус K

с вершиной – нулевой функцией, порождаемый $l_1, \ldots, l_m$. Тогда Q можно отождествить с множеством всех таких линейных функций $f \in V^*$, что $f(e_i) \geqslant p_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Установим связь между точками экстремума прямой и двойственной задач линейного программирования. Справедлива

Теорема 2.11 (Теорема о равновесии). *Пусть в точке $x^* \in P$ достигается максимум ${}^t px$, а в точке $y^* \in Q$ – минимум функции ${}^t by$. Тогда $y_i^*(a_{i1}x_1^* + \cdots + a_{in}x_n^* - b_i) = 0$, где b_i – i-ая координата b.*

Доказательство. Так как $x^* y^* \geqslant 0$, и $-{}^t y^* A \leqslant -{}^t p$, то

$$0 \leqslant {}^t y^*(b - Ax^*) = {}^t y^* b - {}^t y^* A x^* \leqslant {}^t p x^* - {}^t p x^* = 0.$$

Следовательно, ${}^t y^*(b - Ax^*) = 0$. Отсюда вытекает утверждение, поскольку $b \leqslant Ax^*, y^* \geqslant 0$. □

Отметим, что если мы решаем прямую задачу линейного программирования, используя первый вариант симплекс-метода и сводя ограничения к системе линейных уравнений, то мы автоматически получаем точку экстремума двойственной задачи. Действительно, пусть дана прямая задача (33), где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$, x, p – столбцы высоты n и b – столбец высоты m. Введем новые переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0$ и перепишем (33) в виде

$$X \geqslant 0, \quad (A\,E)X = b,$$
$${}^t(p \quad 0)X = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \to \max,$$

где X – столбец ${}^t(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \geqslant 0$. Здесь матрица $(A\,E) \in \mathrm{Mat}(m \times (n+m), \mathbb{R})$ получается из A приписыванием справа единичной матрицы E размера m. Составляем таблицу

z	$x_1, \ldots x_n$	$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$	
0	A	E	b
1	-p	0	0

Мы приводим систему из m линейных уравнений (строки этой таблицы, исключая первую и последнюю) к ступенчатому виду. Одновременно, мы преобразуем с помощью этой системы последнюю строку, соответствующую целевой функции, прибавляя к ней линейную комбинацию строк, соответствующих системе линейных уравнений. Другими словами, к последней строке $(-p, 0, 0)$ прибавляется $y^*(A, E, b)$ для некоторой строки y^*. При этом результат имеет вид $(-p + y^*A, y^*, y^*b)$, где

$$(-p + y^*A,\, y^*) \geqslant 0. \tag{39}$$

Теорема 2.12. *Точка y^* является точкой экстремума двойственной задачи* (34).

Доказательство. Из (39) вытекает, что ${}^tAy^* \geqslant p$, $y^* \geqslant 0$, т. е. y^* является допустимым решением двойственной задачи. Кроме того, значение целевой функции ${}^tby$ двойственной задачи совпадает с ${}^ty^*b$ и равно максимальному значению целевой функции ${}^tpx$ прямой задачи. В силу предложения 2.9 и теоремы 2.10 y^* является точкой экстремума. □

4. Решение матричной игры с помощью линейного программирования

Рассмотрим матричную игру с матрицей $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ из главы 1 § 2. Применим алгоритм симплекс-метода для нахождения седловой точки смешанных стратегий из теоремы 1.14.

Заметим, что если мы прибавим ко всем элемента матрицы A одно и то же число d, то результат игры увеличится на d, но седловые точки не изменятся. Поэтому можно считать, что все элементы матрицы A неотрицательны, причем в матрице $A > 0$ нет нулевых столбцов. Тогда результат игры v лежит в пределах $\max_i \min_j a_{ij} \leqslant v \leqslant \min_j \max_i a_{ij}$ и потому положителен.

Рассмотрим пример игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

В первой строке минимальный элемент равен -1, а во второй – равен 1. Максимальный элемент расположен во второй строке. Следовательно, первый игрок выбирает 2-ю стратегию.

Максимальный элемент в первом втором и третьем столбцах равен, соответственно, 3, 4, 3. Из них минимальный равен 3. Следовательно, второй игрок может выбрать 1-ую или 3-ю стратегии. Тогда результат игры 3 или 1.

Положим $F(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$. Напомним, что если $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ – седловая точка, соответствующая оптимальным стратегиям первого и второго игрока, то для любых стратегий x, y первого и второго игрока имеем

$$F(x,y^*) \leqslant F(x^*,y^*) \leqslant F(x^*,y), \tag{41}$$

В частности,

$$v = \max_{x\in N}\min_{y\in M} F(x,y) = \min_{y\in M}\max_{x\in N} F(x,y) = F(x^*,y^*).$$

Здесь

$$\begin{aligned} N &= \{x \in \mathbb{A}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_i \geqslant 0\},\\ M &= \{y \in \mathbb{A}^m \mid y_1 + \dots + y_m = 1, y_i \geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$f = u_1 + \dots + u_m \to \max \tag{43}$$

$$Au \leqslant \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix} \geqslant 0,$$

Рассмотрим также двойственную к (43) задачу

$$g = t_1 + \dots + t_n \to \min, \tag{44}$$

$${}^tAt \geqslant \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Предложение 2.13. *Полиэдры P, Q, задаваемые, соответственно, неравенствами из* (43), (44)*, непусты. Кроме того, P ограничено. В частности,* $\max_{u\in P} f = \min_{t\in Q} g > 0$.

Доказательство. Заметим, что начало координат O лежит в P, но не лежит в Q. Кроме того, если все координаты t достаточно большие, то $t \in Q$. Поэтому P, Q непусты.

По предположению матрица A неотрицательна и в A нет нулевых столбцов. Поэтому для любого $j = 1, \dots, m$ найдется такой индекс i, что $a_{ij} > 0$, откуда

$$a_{ij}u_j \leqslant \sum_{s=1}^{m} a_{is}u_s \leqslant 1,$$

и поэтому $u_j \leqslant \dfrac{1}{a_{ij}}$. Остается воспользоваться теоремой 2.10. Так как $O \notin Q$, то $\min_{t\in Q} g > 0$. $\square$

Положим $\max_{u\in P} f = \min_{t\in Q} g = \dfrac{1}{v}$. Тогда $v > 0$. Обозначим через u^*, t^* – оптимальные решения задач (43), (44), соответственно. Положим $x^* = vt^*, y^* = vu^*$.

Теорема 2.14. *Точка* (x^*, y^*) *является седловой для рассматриваемой матричной игры с матрицей* $A \geqslant 0$*, не содержащей нулевых столбцов.*

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = v\sum_{i=1}^{m} u_i^* = v\left(\max_{u\in P} f\right) = 1,$$

т. е. $y^* \in M$, где M из (42). Аналогично $x^* \in N$.

По теореме 2.11 получаем $t_i^*(\sum_{j=1}^m a_{ij}u_j^* - 1) = 0$. Домножая на v^2 получаем $x_i^* \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j^* = x_i^* v$, откуда

$$F(x^*, y^*) = \sum_{ij} x_i^* a_{ij} y_j^* = \sum_i x^* v = v, \tag{45}$$

поскольку $x^* \in N$. Кроме того, для любых $x \in N, y \in M$ по (43) и (45)

$$F(x, y^*) = \sum_{ij} x_i a_{ij} u_j^* v \leqslant \sum_i x_i v = v = F(x^*, y^*).$$

Аналогично $F(x^*, y^*) \leqslant F(x^*, y)$. $\square$

Сделаем одно полезное замечание о редукции матрицы A при решении задачи о нахождении седловой точки. Пусть $A_1, \dots, A_m$ – строки матрицы A и $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ – ее столбцы. Если $A_i \geqslant A_j,\ A_i \neq A_j$ для некоторых i, j, то первый игрок, стремясь к наибольшему выигрышу, всегда будет выбирать i-ую стратегию. Таким образом, мы можем исключить j-ую строку из рассмотрения, уменьшив тем самым число строк матрицы A. Аналогично, если $\tilde{A}_i \geqslant \tilde{A}_j$, $\tilde{A}_i \neq \tilde{A}_j$ для некоторых i, j, то второй игрок, стремясь уменьшить выигрыш первого игрока, будет во всех случаях выбирать j-ую стратегию. Таким образом, мы можем исключить из рассмотрения i-ый столбец и уменьшить размер матрицы A.

Рассмотрим решение матричной игры с смешанных стратегиях на примере (40). Прибавим ко всем элементам 1, чтобы матрица A стала бы неотрицательной. Получаем матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

При этом цена игру увеличится на 1. Решая за первого игрока введем переменные t_1, $t_2 \geqslant 0$, получаем задачу

$$\begin{gathered} t_1 + t_2 \to \min, \\ 3t_1 + 4t_2 \geqslant 1, \\ 5t_2 \geqslant 1, \\ 4t_1 + 2t_2 \geqslant 1, \\ t_1,\, t_2 \geqslant 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Решая за второго игрока введем переменные u_1, u_2, $u_3 \geqslant 0$, получаем задачу

$$\begin{gathered} u_1 + u_2 + u_3 \to \max, \\ 3u_1 + 4u_3 \leqslant 1, \\ 4u_1 + 5u_2 + 2u_3 \leqslant 1, \\ u_1,\, u_2,\, u_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Эти задачи двойственны одна другой.

Подробно решим задачу за первого игрока. Запишем задачу (46) в виде

$$\begin{gathered} -t_1 - t_2 \to \max, \\ 3t_1 + 4t_2 - t_3 = 1, \\ 5t_2 - t_4 = 1, \\ 4t_1 + 2t_2 - t_5 = 1, \end{gathered}$$

$$t_1,\, t_2 \geqslant 0.$$

Составим таблицу

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
3	4	-1	0	0	1
0	5	0	-1	0	1
4	2	0	0	-1	1
1	1	0	0	0	0

В первом столбце выбираем третью строку и делим ее на 4. Получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
3	4	-1	0	0	1
0	5	0	-1	0	1
1	1/2	0	0	-1/4	1/4
1	1	0	0	0	0

Далее из всех строк вычитаем третью с соответствующим коэффициентом. Получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
0	5/2	-1	0	3/4	1/4
0	5	0	-1	0	1
1	1/2	0	0	-1/4	1/4
0	1/2	0	0	1/4	-1/4

Выбираем второй столбец и в нем первую строку. Деля ее на 5 и получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
0	1	-2/5	0	3/10	1/10
0	5	0	-1	0	1
1	1/2	0	0	-1/4	1/4
0	1/2	0	0	1/4	-1/4

Из всех строк вычитаем первую с соответствующим коэффициентом. Получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
0	1	-2/5	0	3/10	1/10
0	0	2	-1	-3/2	1/2
1	0	1/5	0	-2/5	1/5
0	0	1/5	0	1/10	-3/10

Выбираем третий столбец и в нем вторую строку. Дели ее на 2 и получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
0	1	-2/5	0	3/10	1/10
0	0	1	-1/2	-3/4	1/4
1	0	1/5	0	-2/5	1/5
0	0	1/5	0	1/10	-3/10

Из всех строк вычитаем вторую с соответствующим коэффициентом. Получаем

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	
0	1	0	-1/5	0	1/5
0	0	1	-1/2	-3/4	1/4
1	0	0	1/10	1/20	3/20
0	0	0	1/10	1/4	-7/20

Решение закончено. Если v – результат игры с матрицей A, то результат игры с матрицей $A_!$ равен $v+1$. При этом

$$\frac{1}{v+1} = -\left(\frac{-7}{20}\right) = \frac{7}{20}.$$

Поэтому $v = \frac{20}{7} - 1 = \frac{13}{7}$. Из последней таблицы видно, что

$$t_1 = \frac{3}{20}, \quad t_2 = \frac{1}{5}.$$

Поэтому

$$x_1 = (v+1)t_1 = \frac{3}{7}, \quad x_2 = (v+1)t_2 = \frac{4}{7}.$$

Аналогично решается игра за второго игрока.

5. Упражнения

Упражнение 2.15. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ не имеет нулевых столбцов, $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – столбец высоты m, c – столбец высоты n. Обозначим через P – полиэдр, состоящий из множества столбцов X с условием $AX \leqslant b, X \geqslant 0$. Доказать, что каждая аффинная функция на P достигает минимума и максимума.

Упражнение 2.16. Пусть полиэдр P задается неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, \quad x_1, \ldots, x_n \geqslant 0,$$

где $b, a_1, \ldots, a_n > 0$. Предположим, что $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, причем все числа $\frac{c_j}{a_j}$ различны и отличны от нуля. Доказать, что существует единственная точка в P, в которой достигает максимум функция $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Упражнение 2.17. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

1) для любых столбцов b, c высоты m, n, соответственно, существует $\max({}^t cx)$, где x удовлетворяет условиям $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$;
2) существуют такие $y \in \mathbb{A}^n$, $p \in \mathbb{A}^m$, что $Ay < 0$, ${}^t Ap > 0, p \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Упражнение 2.18. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ и c – столбец высоты n. Предположим, что существует $\max_{x \in P}({}^t cx)$, где P задается условиями $Ax = 0$, $x \geqslant 0$. Доказать, что максимум достигается на нулевом векторе.

Упражнение 2.19. Найти $\min(x_2-x_3+2x_4+3)$, при условии

$$\begin{cases} -2x_1+x_3+x_4 \geqslant 1, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ -x_2+x_3-x_4 \leqslant 3, \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Упражнение 2.20. Используя теорию двойственности решить задачу

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\dots+nx_n \to \min, \\ x_1 \geqslant 1, \\ x_1+x_2 \geqslant 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1+x_2+\dots+x_n \geqslant n, \\ x_1,\ \dots,\ x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Упражнение 2.21. Являются ли ограниченными многогранники, задаваемые следующими неравенствами:

1) $-3x_1+5x_2 \leqslant 10, \quad 5x_1+2x_2 \leqslant 35, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0;$
2) $-x_1+x_2 \leqslant 2, \quad 5x_1-x_2 \leqslant 10;$
3) $3x_1-x_2 \geqslant 4, \quad -x_1+3x_2 \geqslant 4;$
4) $-3x_1+4x_2 \leqslant 17, \quad 3x_1+4x_2 \leqslant 47, \quad x_1-x_2 \leqslant 4, \quad x_1+x_2 \geqslant 0;$
5) $-x_1+2x_2 \leqslant 6, \quad 5x_1-2x_2 \leqslant 26, \quad x_1+2x_2 \geqslant 10;$
6) $5x_1-2x_2 \geqslant 6, \quad 5x_1-2x_2 \leqslant 36, \quad 2 \leqslant x_1 \leqslant 7.$

Упражнение 2.22. Найти угловые точки многогранников:

1) $x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5=5,$
$x_1+x_3-2x_4=3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0;$
2) $x_1+x_2-x_3=10,$
$x_1-x_2+7x_3=7,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0;$
3) $4x_1+5x_2+x_3+x_4=29,$
$6x_1-x_2-x_3+x_4=11,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0;$
4) $x_1+2x_2+x_3=4,$
$2x_1+2x_2+5x_3=5,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$

Упражнение 2.23. Найти максимальные и минимальные значения линейной функции z на ограниченном многограннике.

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5,$
$2x_1 + x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5;$
2) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12,$
$x_1 - 5x_2 - x_4 + x_5 = -4,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5;$
3) $5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 42,$
$4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + 4x_4 - x_5;$
4) $x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8,$
$4x_2 - 3x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5.$

Упражнение 2.24. Пусть $(x^*, y^*), (x^\circ, y^\circ)$ – седловые точки для функции $F(x, y)$. Доказать, что точки $(x^*, y^\circ), (x^\circ, y^*)$ также седловые. Вывести отсюда, что $F(x^*, y^\circ) = F(x^\circ, y^*) = F(x^*, y^*) = F(x^\circ, y^\circ)$.

Упражнение 2.25. Решить матричную задачу с матрицей
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Глава 3

Специальные задачи линейного программирования

В предыдущей главе описан симплекс-метод решения задачи линейного программирования. Однако число шагов в этом методе может быть довольно большим. Вместе с тем специальные задачи линейного программирования, используемые в практике, обладают рядом особенностей, которые выражаются в специфическом строении матрицы ограничений. Это позволяет существенно упростить общий метод решения и выработать более простые алгоритмы решения рассматриваемых задач. В этой главе мы разберем лишь две такие задачи — транспортную задачу и задачу о нахождении кратчайшего расстояния на графе.

1. Транспортная задача

Пусть в заданных m городах

$$A_1, \ldots, A_m. \tag{47}$$

производится некоторый однородный продукт в количествах $a_1, \ldots, a_m > 0$. Этот продукт перевозится в заданные n городов

$$B_1, \ldots, B_n, \tag{48}$$

где он полностью потребляется в количествах $b_1, \ldots, b_n > 0$. Предполагаются заданными стоимости $c_{ij} \geqslant 0$ перевозок единицы продукта из A_i в B_j.

Назовем *планом перевозок* неотрицательную матрицу $X = (x_{ij})$ размера $m \times n$, в которой $x_{ij} \geqslant 0$ указывается количество продукта, перевозимого из A_i в B_j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Стоимость перевозок является линейной функцией от X,

$$z(X) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}, \quad x_{ij} \geqslant 0. \tag{49}$$

В задаче требуется найти такой план перевозок X, чтобы его стоимость была бы минимальной, весь продукт был бы вывезен из (47) и потребности городов (48) были бы полностью удовлетворены.

Транспортная задача является задачей линейного программирования. Действительно, весь продукт, производимый в (47) вывозится в (48), где он полностью потребляется, причем все потребности удовлетворены. Таким образом, возникают следующие условия

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, &\quad i = 1, \ldots, m; \\ \textstyle\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, &\quad j = 1, \ldots, n; \\ x_{ij} \geqslant 0. & \end{aligned} \tag{50}$$

Требуется в условиях (50) найти минимум функции (49). Ввиду специфичности условий (50) можно предложить более специальный метод потенциалов решения этой задачи.

Назовем план перевозок X *допустимым*, если выполнены условия (50).

Предложение 3.1. *Полиэдр P, задаваемый условиями* (50)*, непуст тогда и только тогда, когда*

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j. \tag{51}$$

Доказательство. Если $X = (x_{ij})$ – допустимый план, то по (50)

$$\sum_i a_i = \sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum_j b_j.$$

Обратно, пусть выполнено условие (51). Построим первоначального плана $X^0 = (x^0_{ij})$ методом *минимального элемента.* Выберем клетку (i, j) с минимальным значением c_{ij}. В эту клетку ставим число $x^0_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Если $x^0_{ij} = b_j$, то в остальные клетки столбца j ставим 0, а число a_i заменяем на $a_i - b_j$. Дуальным образом поступаем, если $x_{ij}^0 = a_i$. Если $a_i \leqslant b_j$, то из A_i весь продукт вывезен в B_j и потребность B_j становится равной $b_j - a_i$. Если же $b_j < a_i$, то в B_j весь необходимый продукт завезен, и в A_i осталось $a_i - b_j$ продукта. Таким образом, число либо пунктов A_t, либо пунктов B_s уменьшилось.

Повторяя эту процедуру, получим первоначальный допустимый план $X^0 = (x_{ij}^0)$. □

Предложение 3.2. *Полиэдр P, задаваемый условиями* (50)*, ограничен.*

Доказательство. Если $X = (x_{ij})$ – допустимый план, то для любых индексов i, j имеем $0 \leqslant x_{ij} \leqslant \min(a_i, b_j)$. □

Следствие 3.3. *Транспортная задача* (50) *имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (51).

Доказательство. По предложению 3.1 полиэдр P допустимых планов непуст. По предложению 3.2 он ограничен. Следовательно, непрерывная функция $z(X)$ достигает на P минимума. □

Теорема 3.4. *Для того, чтобы допустимый план перевозок X был оптимальным необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа (потенциалы) $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$, для которых*

1) $u_i + v_j \leqslant c_{ij}$ при всех i, j;
2) $u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$.

Доказательство. Проверим достаточность. Пусть $X = (x_{ij})$ – допустимый план, и

$$u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$$

из условий теоремы. Предположим, что $Y = (y_{ij})$ – произвольный допустимый план. Из (50) и условий 1), 2) следует, что

$$\begin{aligned} z(Y) &= \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij} \geqslant \sum_{i,j} (u_i + v_j) y_{ij} \\ &= \sum_i u_i \sum_i y_{ij} + \sum_j v_j \sum_i y_{ij} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i u_i a_i + \sum_j v_j b_j \\
&= \sum_i u_i \sum_i x_{ij} + \sum_j v_j \sum_i x_{ij} \\
&= \sum_{i,j} (u_i + v_j) x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = z(X).
\end{aligned}
$$

Проверим теперь необходимость. Рассмотрим задачу, двойственную к транспортной задаче. Для этого положим перепишем ограничения из (50) и целевую функцию в виде

$$
\begin{aligned}
&-z(X) = \sum_{i,j} (-c_{ij} x_{ij}) \to \max, \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = 1, \dots, m; \\
&\sum_{j=1}^{n} (-x_{ij}) \leqslant -a_i, \quad i = 1, \dots, m; \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \quad j = 1, \dots, n; \\
&\sum_{i=1}^{m} (-x_{ij}) \leqslant -b_j, \quad j = 1, \dots, n; \\
&x_{ij} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Тогда по определению 2.7 двойственная задача с переменными

$$w_1, \dots w_m,\ w_1', \dots, w_m',\ s_1, \dots, s_n,\ s_1', \dots, s_n' \geqslant 0$$

к транспортной задаче имеет вид

$$
\begin{gathered}
T' = \textstyle\sum_{i=1}^{m} (w_i - w_i') a_i + \sum_{j=1}^{n} (s_j - s_j') b_j \to \min, \qquad (52) \\
w_i - w_i' + s_j - s_j' \geqslant -c_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \\
w_1, \dots w_m,\ w_1', \dots, w_m',\ s_1, \dots, s_n,\ s_1', \dots, s_n' \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Положим $u_i = w_i' - w_i$, $v_j = s_j' - s_j$. Тогда (52) записывается в виде

$$
\begin{gathered}
u_i + v_j \leqslant c_{ij} \qquad (53) \\
T = -T' = \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \to \max.
\end{gathered}
$$

Как отмечено в предложении 3.2 ограничения (50) задают ограниченный полиэдр P. Следовательно, как отмечено в следствии 3.3 функция $z(X)$ на P достигает минимум в некоторой точке X^0. Заметим, что полиэдр Q, задаваемый неравенствами (53) содержит начало координат, поскольку $c_{ij} \geqslant 0$. Следовательно, Q непусто и по теореме 2.10

$$\begin{aligned}\min(z(X)) &= -\max(-z(X)) = -\min(T') \\ &= \max T = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j.\end{aligned}$$

Пусть в точке $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) \in Q$ достигается максимум. По теореме 2.11 о равновесии получаем $u_i + v_j = c_{ij}$, если $x_{ij}^0 > 0$. □

Перейдем к изложению алгоритма решения транспортной задачи при некоторых ограничениях.

Определение. Транспортная задача называется *вырожденной,* если существуют такие собственные подмножества индексов $G \subset \{1, \ldots, m\}$, $H \subset \{1, \ldots, n\}$, что $\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j$. Другими словами, суммарный запас продукта в пунктах $A_i, i \in G$, совпадает с потреблением в пунктах $B_j, j \in H$.

Далее мы будет предполагать, что рассматриваемая транспортная задача *невырождена.* Для полного обоснования алгоритма в этом случае нам потребуется ряд утверждений.

Предложение 3.5. *Пусть план $X = (x_{ij})$ допустим, и $x_{i_0 j_0} = 0$. Тогда существует такая последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_k$ и последовательность столбцов $j_1, \ldots, j_k, j_0$ матрицы X, что элементы*

$$x_{i_0 j_1},\, x_{i_1 j_1},\, \ldots,\, x_{i_k j_k},\, x_{i_k j_0} \tag{54}$$

отличны от нуля.

Доказательство. Предположим противное, в любой последовательности (54) встречается нулевой элемент. Обозначим через H множество всех таких индексов $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которых найдется последовательность ненулевых элементов

$$x_{i_0 q_1},\, x_{p_1 q_1},\, \ldots,\, x_{p_s q_s},\, x_{p_s j}.$$

Заметим, что $j_0 \notin H$. Через G обозначим множество всех таких индексов $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $x_{ij} \neq 0$ для некоторого $j \in H$. Из определения G вытекает, что если $i \in G$ и $x_{is} \neq 0$, то $s \in H$. Поэтому

$$\sum_{j\in H} b_j = \sum_{i\in G, j\in H} x_{ij} = \sum_{i\in G} a_i.$$

Отсюда

$$\sum_{i\notin G} a_i = \sum_{i\notin H} b_j > 0.$$

Следовательно, $G \neq \{1, \ldots, n\}$, и $H \neq \{1, \ldots, m\}$. Это противоречит невырожденности задачи. $\square$

Определение 3.6. Пусть $X = (x_{ij})$ – допустимый план. *Циклом* в X назовем последовательность ненулевых элементов $x_{p_1q_1}, x_{p_1,q_2}, \ldots, x_{p_s,q_s}, x_{p_s,q_1}$, причем среди первых и среди вторых индексов в этой последовательности имеются нет совпадений.

Предложение 3.7. *Если допустимый план не содержит циклов, то в предложении 3.5 по набору* i_0, j_0 *последовательность* (54) *определена однозначно.*

Доказательство. Пусть кроме (54) существуют еще и последовательность ненулевых элементов

$$x_{i_0j'_1}, x_{i'_1j'_1}, \ldots, x_{i'_tj'_t}, x_{i'_tj_0}.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_kj_k}, x_{i_kj_0}, x_{i'_tj_0}, x_{i'_tj'_t}, \ldots, x_{i'_1j'_1}, x_{i_0j'_1}, x_{i_0j_1}.$$

По условию она не является циклом. Поэтому либо среди первых, либо среди вторых индексов имеются совпадения. Пусть, например, $i_r = i'_s$. Тогда имеется более короткая последовательность ненулевых элементов

$$x_{i_1j_1}, \ldots, x_{i_{t-1}j_{t-1}}, x_{i'_sj'_s}, x_{i'_sj'_{s-1}}, \ldots, x_{i'_1j'_1}, x_{i_0j'_1}, x_{i_0j_1}.$$

Продолжаю этот процесс получаем, что в X имеется цикл, что невозможно. Аналогичная ситуация, если совпадают два вторых индекса. Следовательно, наборы индексов $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_k$ определены однозначно. $\square$

Изложим теперь алгоритм решения невырожденной транспортной задачи.
ШАГ 1. *Построение первоначального плана методом минимального элемента.* В соответствии с предложением 3.1 строим первоначальный план $X^0 = (x_{ij}^0)$.

Предложение 3.8. *План X^0 не содержит циклов. В каждой строке и столбце плана X^0 содержится ненулевой элемент. Всего в X^0 число ненулевых элементов равно $m+n-1$.*

Доказательство. Пусть план X^0 содержит цикл $x_{p_1q_1}, x_{p_1,q_2}, \dots, x_{p_k,q_k}, x_{p_k,q_1}$, из определения 3.6. Выберем в этой последовательности тот элемент, который построен первым. Пусть, например, это $x_{p_1q_1}$. Тогда элементы x_{p_1,q_2}, x_{p_s,q_1}, построены позднее, что невозможно, ибо при построении $x_{p_1q_1}$ либо на месте (p_1,q_2), либо на (p_s,q_1) ставится 0. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

В силу (50) в каждой строке и столбце плана X^0 содержится ненулевой элемент. Последнее утверждение легко проверяется индукцией по $m+n$. □

ШАГ 2. *Построение первоначальной системы потенциалов.* Для каждой из $n+m-1$ клеток (i,j), в которых находится ненулевой элемент из X^0 рассмотрим уравнение

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{55}$$

с неизвестными v_i, u_i. Полученная система состоит из $n+m-1$ уравнений с $n+m$ неизвестными. Если c_{rs} – минимальный элемент и $a_r < b_s$, то неизвестная u_r входит только в одно уравнение (55)

$$u_r + v_s = c_{rs}. \tag{56}$$

Индуктивные соображения показывают, что система (55) без (56) совместна. Из (56) находим u_r. Аналогично рассматривается случай $a_r \leqslant b_s$. Итак, решая систему (55) находим первоначальную системы потенциалов.
ШАГ 3.
Проверяем, удовлетворяет ли построенный план и система потенциалов условиям теоремы 3.4.

Заметим, что условие 2 из теоремы 3.4 выполнено по построению. Остается лишь проверить условие 1). Если оно выполнено, то полученный план оптимален. В противном случае переходим к следующему шагу.

ШАГ 4. *Улучшение плана X.*

Пусть относительно системы потенциалов u_i, v_j план X не оптимален, т. е. не выполнено условие 1) теоремы 3.4. Выберем отклонение

$$\alpha_{i_0 j_0} = u_{i_0} + v_{j_0} - c_{i_0 j_0} > 0. \tag{57}$$

Тогда $x_{i_0 j_0} = 0$ и по предложению 3.5 существует последовательность ненулевых элементов

$$x_{i_0 j_1},\, x_{i_1 j_1},\, \dots ,\, x_{i_k j_k},\, x_{i_k j_0}$$

Расставим во всех выбранных клетках

$$(i_0, j_0),\, (i_0, j_1),\, \dots ,\, (i_k, j_0)$$

последовательно чередующиеся метки метки $+$, -, $+$, …, -. Пусть θ – минимальный среди элементов

$$x_{i_0 j_1},\, x_{i_1 j_2},\, \dots ,\, x_{i_{k-1} j_k},\, x_{i_k j_0},$$

в клетках, помеченных знаком -. В клетках со знаком $+$ число x_{ij} увеличиваем на θ, а со знаком - уменьшаем на θ, т. е.

$$\begin{aligned}
&x'_{i_0 j_0} = x_{i_0 j_0} + \theta = \theta;\\
&x'_{i_0 j_1} = x_{i_0 j_1} - \theta;\\
&x'_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} + \theta;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x'_{i_{k-1} j_{k-1}} = x_{i_{k-1} j_{k-1}} + \theta;\\
&x'_{i_{k-1} j_k} = x_{i_{k-1} j_k} - \theta.
\end{aligned}$$

Для остальных пар индексов положим $x'_{ij} = x_{ij}$. Получаем новый допустимый план $X' = (x'_{ij})$.

Предложение 3.9. *Если допустимый план X не содержал циклов, то и новый план X' не содержит циклов.*

Доказательство. Пусть план X' содержит цикл

$$x'_{p_1,q_1},\, x'_{p_1,q_2},\, \dots ,\, x'_{p_s,q_s},\, x'_{p_s.q_1}.$$

Как и предложении 3.5 можно считать, что все индексы $p_1, p_2, \ldots, p_s$, (соответственно, $q_1, q_2, \ldots, q_s$) различны. Если $x'_{ij} \neq 0$ и $(i,j) \neq (i_0, j_0)$, то $x_{ij} \neq 0$. Так как X не содержит циклов, то среди элементов

$$x_{p_1 q_1},\, x_{p_1,q_2},\, \ldots,\, x_{p_s,q_s},\, x_{p_s,q_1}$$

встречается $x_{i_0 j_0} = 0$. Пусть, например, $(i_0, j_0) = (p_r, q_r)$. Тогда имеем последовательность ненулевых элементов

$$x_{p_r q_{r+1}},\, x_{p_{r+1},q_{r+1}},\, \ldots,\, x_{p_s,q_s},\, x_{p_s,q_1},\, \ldots,\, x_{p_{r-1} q_r},$$

не содержащую $x_{i_0 j_0} \neq 0$. По предложению 3.7 получаем, что

$$(p_r, \ldots, p_s, p_1, \ldots, p_{r-1}) = (i_0, \ldots, i_k),$$
$$(q_{r+1}, \ldots, q_s, q_1, \ldots, q_r) = (j_0, \ldots, j_k).$$

В силу выбора θ один из элементов $x'_{p_{i-1} q_i} = 0$. Следовательно, этот случай невозможен.

Пусть $(i_0, j_0) = (p_{r-1}, q_r)$. Тогда имеем последовательность ненулевых элементов

$$x_{p_{r-1} q_{r-1}},\, x_{p_{r-2},q_{r-1}},\, \ldots,\, x_{p_1,q_1},\, x_{p_s,q_1},\, \ldots,\, x_{p_r q_r},$$

что снова приводит к противоречию. □

Переходим к следующему шагу.

ШАГ 5. *Улучшение потенциалов.*

Положим $v'_{j_0} = v_{j_0} - \alpha_{i_0,j_0}, \quad u'_{i_0} = u_{i_0}$. Если задана пара индексов (i,j), $i \neq i_0$, и существует последовательность индексов

$$p_1 = i \neq i_0,\, p_2 \neq i_0,\, \ldots,\, p_s \neq i_0;$$
$$q_1 = j,\, q_2,\, \ldots,\, q_s = j_0, \tag{58}$$

причем все элементы

$$x'_{p_1,q_1},\, x'_{p_1,q_2},\, \ldots,\, x'_{p_s,q_s} \tag{59}$$

отличны от нуля. В этом случае положим

$$v'_j = v_j - \alpha_{i_0 j_0}, \quad u'_i = u_i + \alpha_{i_0 j_0},$$

где $a_{i_0 j_0}$ из (57). Для всех оставшихся индексов i (соответственно, j) полагаем $v'_j = v_j$, $u'_i = u_i$. В частности, $u'_{i_0} = u_{i_0}$.

Предложение 3.10. *Если $x'_{ij} \neq 0$, то $u'_i + v'_j = c_{ij}$.*

Доказательство. Если $x'_{ij} \neq 0$, и $i \neq i_0$, то, как отмечалось выше, $x_{ij} \neq 0$. Пусть существует последовательность вида (58) со свойством (59). Тогда в силу ШАГА 5

$$u'_i + v'_j = u_i + v_j = c_{ij}.$$

Кроме того, $u'_{i_0} + v'_{j_0} = u_{i_0} + v_{j_0} - \alpha_{i_0 j_0} = c_{i_0 j_0}$. Рассмотрим клетку (i_0, j), $j \neq j_0$, причем $x'_{i_0 j} \neq 0$. Пусть существует последовательность вида (58) со свойством (59) для некоторого $i \neq i_0$. Так как в (59) нет элемента $x'_{i_0 j_0}$, то $x_{p_1 q_1}, x_{p_1, q_2}, \ldots, x_{p_s, q_s}$ отличны от нуля и поэтому имеется последовательность ненулевых элементов

$$x_{i_0 j}, x_{p_1 q_1}, x_{p_1, q_2}, \ldots, x_{p_s, q_s}. \tag{60}$$

Можно считать, по предложению 3.7, что

$$(p_1, \ldots, i, \ldots, p_s) = (i_1, \ldots, i_k),$$
$$(q_1, \ldots, q_s) = (j_1, \ldots, j_k).$$

Но тогда в последовательности (60), как и выше, встречается нулевой элемент, что невозможно. Итак, если $x'_{i_0 j} \neq 0$, где $j \neq j_0$, то $v_j = v'_j$, и поэтому в этой клетке $c_{i_0, j} = v'_j + u'_{i_0}$. $\square$

ШАГ 6.
Проверяем для плана X' и потенциалов u'_i, v'_j выполнение условия 1) из теоремы 3.4.
Если оно не выполнено, то переходим в шагу 4. Если оно выполнено, то оптимальный план построен.

Приведенный алгоритм конечен. Действительно на 4-ом шаге получаем новый план X'. Если $a_{i_0 j_0}$ из (57), то считая $j_{k+1} = j_0$ получаем

$$\begin{aligned} z(X') - z(X) &= \sum_{i,j} c_{ij}(x'_{ij} - x_{ij}) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} c_{i_s j_s}(x'_{i_s j_s} - x_{i_s j_s}) + \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_{s+1}}(x'_{i_s j_{s+1}} - x_{i_s j_{s+1}}) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} c_{i_s j_s}\theta - \sum_{s=0}^{k} c_{i_s j_{s+1}}\theta \\ &= \theta \big[c_{i_0 j_0} + (u_{i_1} + v_{j_1}) + \cdots + (u_{i_{k-1}} + v_{j_{k-1}}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (u_{i_0} + v_{j_1}) - \dots - (u_{i_k} + v_{j_{k+1}})\big] \\
&= \theta\,[c_{i_0 j_0} - (u_{i_0} + v_{j_0})] = -\theta\alpha_{i_0 j_0} < 0.
\end{aligned}
$$

При этом для нового плана X' выполнено условие 2) из теоремы 3.4. Таким образом, число шагов не превосходит числа подмножеств клеток с ненулевыми элементами из допустимого плана X'. Так как значение $Z(X)$ уменьшается, то у нас не возникает повторений.

Изложение алгоритма завершено.

Следствие 3.11. *Если в условии невырожденной транспортной задачи числа $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ являются целыми, то задача имеет целочисленное решение.*

Предложенный алгоритм может быть использован при решении ряда близких задач.

1) Количество производимого в (47) продукта больше количества продукта, потребляемого в (48). Требуется перевести с минимальными затратами из (47) производимый продукт, чтобы полностью удовлетворить потребности в (48).

   Решение задачи сводится к общей транспортной задаче введением пункта B_{n+1} с потреблением $b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j$, причем $c_{i,n+1} = 0$ для всех i.
2) Количество потребляемого в (48) продукта больше количества продукта, производимого в (47). Требуется перевести с минимальными затратами из (47) производимый продукт, чтобы полностью удовлетворить потребности в (48).

   Решение задачи сводится к общей транспортной задаче введением пункта A_{m+1} с производством $a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i b_i$, причем $c_{m+1,j} = 0$ для всех j.
3) Если же имеется запрет на перевозки из A_i в B_j, то полагаем $c_{ij} = \infty$.
4) Если от A_i в B_j имеются фиксированные поставки в количестве d_{ij}, то заменяем a_i, b_j и c_{ij} на $a_i - d_{ij}$, $b_j - d_{ij}$ и ∞. Решая получаемую транспортную задачу и находя оптимальный план $X = (x_{rs})$, мы затем общие затраты $Z(X)$ увеличиваем на $c_{ij}d_{ij}$.

5) Если между A_i и B_j имеются минимальные поставки в количестве d_{ij}, то заменяем a_i, b_j на $a_i - d_{ij}$, $b_j - d_{ij}$. Решая получаемую транспортную задачу и находя оптимальный план $X = (x_{rs})$, мы затем заменяем x_{ij} на d_{ij}.
6) Если от A_i к B_j поставки не должны превышать объем d_{ij}, то мы заменим B_j на два объекта B'_j B''_j, где $b'_j = d_{ij}$, $b''_j = b_j - d_{ij}$. Кроме того, полагаем $c'_{tj} = c_{tj}$, $c''_{tj} = \infty$ для всех $t = 1, \dots, m$.

Случай вырожденной транспортной задачи рассматривается в [**ZA**, с. 218-219].

1.1. Пример. Пусть в пунктах A_1, A_2, A_3, A_4 производится продукт в количествах

$$a_1 = 13,\ a_2 = 7,\ a_3 = 13,\ a_4 = 4.$$

В пунктах B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 потребности составляют

$$b_1 = 5,\ b_2 = 9,\ b_3 = 9,\ b_4 = 5,\ b_5 = 9.$$

Матрица C стоимостей перевозок единицы товара имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти оптимальный допустимый план перевозок $X \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$

ШАГ 1. Строим первоначальный план X^0 методом минимального элемента. Наименьшее значение c_{ij} равно $c_{11} = 2$. В эту клетку ставим $\min(a_1, b_1) = \min(13, 5) = 5 = b_1$. При этом a_1 заменяем на $a'_1 = a_1 - 5 = 8$, а во все остальные клетки первого столбца ставим нули. Далее минимальное значение $c_{24} = 2$, причем $\min(a_2, b_4) = 5 = b_4$. Поэтому в клетку ставим 5, все остальные элементы четвертого столбца заполняем нулями, и полагаем $a'_2 = a_2 - 5 = 2$. В незаполненных клетках минимальное значение c_{ij} равно 3, например, $c_{23} = 3$. Ставим в эту клетку $\min(a'_2, b_3) = \min(2, 9) = 2$. При этом заменяем b_2 на $b'_2 = b_2 - 2 = 7$ и заполняем пустые клетки второй строки нулями. Продолжая этот процесс, получаем первоначальный план

X^0, имеющий вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ШАГ 2. Строим первоначальную систему потенциалов. Для этого решаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &u_1 + v_1 = 2, \quad u_1 + v_2 = 4, \quad u_1 + v_3 = 5, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_2 + v_3 = 3, \quad u_2 + v_4 = 2, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_3 + v_3 = 5, \qquad\qquad\qquad u_3 + v_5 = 7, \\ &\qquad\quad u_4 + v_2 = 3. \end{aligned}$$

Возьмем частное решение

$$\begin{aligned} &u_1 = 0, \quad u_2 = -2, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = -1 \\ &v_1 = 2, \quad v_2 = 4, \quad v_3 = 5, \quad v_4 = 4, \quad v_5 = 7. \end{aligned}$$

Таким образом, если составить матрицу C', в которой на месте (i, j) стоит $u_i + v_j$, то она имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

ШАГ 3. Убеждаемся, что $C' \nleqslant C$, т. е. построенный план не удовлетворяет условию 1) из теоремы 3.4. Например, $c_{15} = 6 < 7 = u_1 + v_5$.

ШАГ 4. Улучшаем план X^0. Начиная с x^0_{15} строим последовательность x^0_{13}, x^0_{33}, $x^0_{35} \neq 0$,. Расставляем пометки $+$ в клетки $(1, 5)$, $(3, 3)$ и - в клетки $(1, 3)$, $(3, 5)$. полагаем $\theta = \min(x^0_{13}, x^0_{33}) = \min(3, 9) = 3$. Меняем план, полагая

$$x'_{15} = 3, \quad x'_{13} = 0, \quad x'_{33} = 7, \quad x'_{35} = 6.$$

В остальных случаях полагаем $x'_{ij} = x^0_{ij}$. Получаем новый план

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ШАГ 5. По новой матрице X' составляем систему уравнений для новых потенциалов

$$
\begin{array}{llllll}
u_1+v_1=2, & u_1+v_2=4, & & & & u_1+v_5=6 \\
& & u_2+v_3=3, & u_2+v_4=2, & & \\
& & u_3+v_3=5, & & & u_3+v_5=7, \\
& u_4+v_2=3. & & & &
\end{array}
$$

Возьмем частное решение

$$
\begin{array}{lllll}
u_1=0, & u_2=-1, & u_3=1, & u_4=-1 & \\
v_1=2, & v_2=4, & v_3=4, & v_4=3, & v_5=6.
\end{array}
$$

Строим матрицу

$$
C''=\begin{pmatrix}
2 & 4 & 43 & 6 & \\
1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\
3 & 5 & 5 & 4 & 7 \\
1 & 3 & 3 & 2 & 5
\end{pmatrix}.
$$

Возвращаемся к шагу 3 и находим, что $C' \nleq C$, т. е. построенный план не удовлетворяет условию 1) из теоремы 3.4. Например, $c_{24}=3<4=u_2+v_4$. Выбираем путь $x'_{34}=0$, $x'_{33}\neq 0$, $x'_{23}\neq 0$, $x'_{24}\neq 0$. Расставляем пометки $+$ в клетки $(3,4)$, $(2,3)$ и - в клетки $(3,3)$, $(2,4)$. Тогда $\theta=\min(7,5)=5$. Составляем новый план

$$
X''=\begin{pmatrix}
5 & 5 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

По новой матрице X'' составляем систему уравнений для новых потенциалов

$$
\begin{array}{llllll}
u_1+v_1=2, & u_1+v_2=4, & & & & u_1+v_5=6 \\
& & u_2+v_3=3, & & & \\
& & u_3+v_3=5, & u_3+v_4=3 & & u_3+v_5=7, \\
& u_4+v_2=3. & & & &
\end{array}
$$

Возьмем частное решение

$$
\begin{array}{lllll}
u_1=0, & u_2=-1, & u_3=1, & u_4=-1 & \\
v_1=2, & v_2=4, & v_3=4, & v_4=2, & v_5=6.
\end{array}
$$

Строим матрицу

$$C''' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $C''' \leqslant C$. Отсюда следует оптимальность плана. При этом

$$z(X'') = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 3 = 148.$$

2. Задача о назначениях

Рассмотрим важную специальную задачу линейного программирования – задачу о назначениях, – решение которой можно найти, применяя изложеный выше алгоритм решения транспортной задачи.

Предположим, что у нас имеется n претендентов на n вакантных должностей, причем известны эффективности a_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, работы i-го претендента на j-ой должности. Предполагается, что матрица $A = (a_{ij})$ целочисленна. *Распределением* на работу называется такая подстановка $\sigma \in S_n$, что i-ый претендент занимает $\sigma(i)$-ую должность. Требуется найти такое распределение, чтобы суммарная эффективность

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

была бы максимальной. Покажем, что эта решение задача о назначениях сводится к решению некоторой транспортной задаче. Для этого сопоставим каждому распределению претендентов по должностям неотрицательную матрицу $X = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Z})$, где

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \sigma(i); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Условие того, что каждая должность занята можно выразить в виде систем уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Условие того, что каждый претендент получил назначение записывается в виде систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{62}$$

При этом все $x_{ij} \geqslant 0$ и нам требуется найти максимум функции

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_{ij}. \tag{63}$$

Положим $M = \max_{ij} a_{ij}$. Тогда задача (61), (62), (63) эквивалентна следующей транспортной задаче

$$\begin{gathered}
\textstyle\sum_{ij=1}^{n} (M - a_{ij}) x_{ij} \to \min, \qquad (64)\\
\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n;\\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n;\\
x_{ij} \geqslant 0. \qquad (65)
\end{gathered}$$

Заметим, что $M - a_{ij} \geqslant 0$ в силу выбора M.

К сожалению, возникающая транспортная задача вырождена и изложеный выше алгоритм не применим. Для решения задачи о назначениях применяется другой способ – венгерский метод. Он также основан на теореме 3.4. Пусть $C = (c_{ij} = M - a_{ij}) \geqslant 0$.

Строим первоначальную систему потенциалов

$$u_1 = \ldots = u_n = 0, \quad v_1 = \min_i c_{i1}, \ldots, v_n = \min_i c_{in}. \tag{66}$$

Пометим знаком $+$ все клетки (i, j), в которых $c_{ij} = u_i + v_j$, т. е. выполнено условие 2) из теоремы 3.4. В силу выбора (66) в каждом столбце содержится клетка со знаком $+$. Выберем среди этих клеток подмножество таким образом, чтобы в каждом столбце и каждой строке содержалось не более одного элемента. Пометим эти клетки дополнительным знаком ! . Таким образом, эти клетки помечены знаком $+!$. Если в каждой строке (и столбце) содержится клетка (i, j), помеченная $+!$, то сопоставим i-ому претенденту место j.

Предположим, что не все строки содержат клетки со знаком $+!$. Применим в этом случае

Основной шаг алгоритма.
Итак, у нас выделены клетки со знаками $+$ и $+!$. Кроме того, задана текущая система потенциалов

$$u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n.$$

Выделим теперь наименьшее множество строк со следующими свойствами:

1) выделены все строки, не содержащие клеток со знаком $+!$;
2) если выделенная i-ая строка содержит клетку (i, j) со знаком $+$ или $+!$ и t-ая строка содержит клетку (t, j) со знаком $+$ или $+!$, то выделяется и t-ая строка.

Пусть θ – минимум всех ненулевых $c_{ij} - u_i - v_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$ и i – пробегает все выделенные строки. Если i-ая строка выделена, то заменяем u_i на $u_i' = u_i + \dfrac{\theta}{2}$. Если s-ая строка не выделена, то то заменяем u_s на $u_s' = u_s - \dfrac{\theta}{2}$. Затем каждое v_j заменяем на $v_j' \pm \dfrac{\theta}{2}$, где знак выбирается таким образом, чтобы во всех клетках со знаком $+$ или $+!$ выполнялось равенство $c_{ij} = u_i' + v_j'$. В силу выбора строк этот шаг возможен.

После применения основного шага число клеток со знаком $+$ или $+!$ увеличивается, поскольку к ним добавляется клетка (i, j), в которой $\theta = c_{ij} - u_i - v_j$.

После применения основного шага можно перераспределить знак ! по клеткам со знаком $+$. В результате применения этих шагов получим в каждой строке клетку со знаком $+!$ и тем самым завершим работу алгоритма.

2.1. Пример. Пусть матрица A имеет вид

7	2	1	9	4
9	6	9	5	3
3	8	3	1	8
7	9	4	2	2
8	4	7	4	8

Тогда $M = \max a_{ij} = 9$ и C равно

2	7	8	0	5
0	3	0	4	6
6	1	6	8	1
2	0	5	7	7
1	5	2	5	1

Припишем слева столбец значений $u_1 = 0, \ldots, u_5 = 0$, а сверху строку $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$, $v_5 = 1$. Получаем таблицу

$u \diagdown v$	0	0	0	0	1
0	2	7	8	0	5
0	0	3	0	4	6
0	6	1	6	8	1
0	2	0	5	7	7
0	1	5	2	5	1

Расставляем знаки $+$ и получаем

$u \diagdown v$	0	0	0	0	1
0	2	7	8	$0+$	5
0	$0+$	3	$0+$	4	6
0	6	1	6	8	$1+$
0	2	$0+$	5	7	7
0	1	5	2	5	$1+$

Расставляем знаки ! и получаем

$u \diagdown v$	0	0	0	0	1
0	2	7	8	$0+!$	5
0	$0+$	3	$0+!$	4	6
0	6	1	6	8	$1+!$
0	2	$0+!$	5	7	7
0	1	5	2	5	$1+$

Совершаем основной шаг. Выбираем 5-ую и 3-ю строки. Для них $\theta = 1$. Меняем значения $u_1, \ldots, u_5$ и $v_1, \ldots, v_5$. Получаем

$u \diagdown v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	2	7	8	$0+!$	5
$-\frac{1}{2}$	$0+$	3	$0+!$	4	6
$\frac{1}{2}$	6	1	6	8	$1+!$
$-\frac{1}{2}$	2	$0+!$	5	7	7
$\frac{1}{2}$	1	5	2	5	$1+$

Добавляем знаки $+$ и получаем

$u \diagdown v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	2	7	8	$0+!$	5
$-\frac{1}{2}$	$0+$	3	$0+!$	4	6
$\frac{1}{2}$	6	$1+$	6	8	$1+!$
$-\frac{1}{2}$	2	$0+!$	5	7	7
$\frac{1}{2}$	$1+$	5	2	5	$1+$

Добавляем знаки ! и получаем

$u \diagdown v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	2	7	8	$0+!$	5
$-\frac{1}{2}$	$0+$	3	$0+!$	4	6
$\frac{1}{2}$	6	$1+$	6	8	$1+!$
$-\frac{1}{2}$	2	$0+!$	5	7	7
$\frac{1}{2}$	$1+!$	5	2	5	$1+$

Работа алгоритма закончена. Первый претендент занимает 4-ую должность, второй претендент — 3-ю должность, третий — 5-ую должность, четвертый — 2-ую должность, пятый — 1-ую должность.

3. Кратчайшие расстояния на графе

Ориентированным графом Γ называется множество вершин $X = (P_0, \ldots, P_n)$ и множество пар $(P_i, P_j) \in X \times X$, $i \neq j$. Пара (P_i, P_j) называется *ребром* графа. *Путем* из P_r в P_s в Γ называется последовательность ребер

$$(P_r, P_{i_1}),\ (P_{i_1}, P_{i_2}), \ldots, (P_{i_k}, P_s). \tag{67}$$

Предположим, что граф Γ *связен*, т. е. для любых P_r и P_s существует путь из P_r в P_s. Пусть каждой паре $(P_i,\, P_j)$ предписана длина $l_{ij} \geqslant 0$, причем $l_{ij} = \infty$, если пара $(P_i,\, P_j)$ не является ребром в Γ. Кроме того, предполагается, что $l_{ij} = l_{ji}$, если пары $(P_i,\, P_j)$, $(P_j,\, P_i)$ принадлежат Γ. *Длиной* пути (67) назовем сумму длин входящих в него ребер. В задаче требуется найти минимальной длину пути из P_0 в P_n.

Для решения задачи необходимо найти такую квадратную матрицу $X = (x_{ij})$ размера $n+1$, что $x_{ij} = 1$, если ребро $(P_i,\, P_j)$ принадлежит выбранному пути, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Элементы x_{ij} являются целочисленным решением следующие задачи линейного программирования:

$$z(X) = \min \textstyle\sum_{i,j=0}^{n} l_{ij} x_{ij} \to \max, \tag{68}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1;$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}, \quad 0 < i < n;$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = 1 + \sum_{j=1}^{n} x_{j0};$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{nj} = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_{jn}. \tag{69}$$

Второе условие означает, что выбранный путь не кончается не в какой внутренней точке $P_1, \, \ldots \,, P_{n-1}$. Третье и четвертое условие означают, что путь начинается в P_0 и кончается в P_n. Таким образом, для решения задачи необходимо найти целочисленное решение (68), минимизирующее $z(X)$.

Следующий алгоритм принадлежит Дейкстре (Dijkstra E.W. // Num. Math. – 1959. - 1. - С. 269-271.) Этот алгоритм не является самым быстрым, но идея, заложенная в этом алгоритмы достаточно проста и ее изложение не занимает много места. В ходе работы алгоритма строится набор текущих систем путей из P_0 в каждую вершину $P_1, \, \ldots \,, P_n$ и их длины обозначаются через $\lambda_1, \, \ldots \,, \lambda_n$.

ШАГ 1.

Заполняем квадратную матрицу размера $n + 1$, в которой на месте (i, j) стоит число l_{ij}, если $l_{ij} < \infty$. Положим $\lambda_0 = 0$. Если в на месте (i, j) стоит $l_{ij} < \infty$ и λ_i уже определено, но λ_j не определено, то положим $\lambda_j = \lambda_i + l_{ij}$. Если же λ_j определено и имеет значение λ'_j, то введем новое значение $\lambda_j = \min(\lambda'_j, \lambda_i + l_{ij})$.

ШАГ 2.
Если $\lambda_j - \lambda_i \leqslant l_{ij}$ для всех i, j, то процесс останавливается. Если же $\lambda_{j_0} - \lambda_{i_0} > l_{i_0 j_0}$ для некоторых i_0, j_0, то заменим λ_{j_0} на $\lambda'_{j_0} = \lambda_{i_0} + l_{i_0 j_0} < \lambda_{j_0}$. Повторяя шаг 2, добиваемся, чтобы $\lambda'_j - \lambda'_i \leqslant l_{ij}$ для всех i, j.

Теорема 3.12. *Если $\lambda_j - \lambda_i \leqslant l_{ij}$ для всех i, j, то λ_j равно кратчайшему расстоянию от P_0 до P_j для всех j.*

Доказательство. По построению существует такое t_1, что $\lambda_i - \lambda_{t_1} = l_{t_1 j}$. Далее существует такое t_2, что $\lambda_{t_1} - \lambda_{t_2} = l_{t_2 t_1}$ и т. д. Таким образом, в силу построения и связности Γ получаем последовательность

$$\lambda_i > \lambda_{t_1} > \ldots > \lambda_{t_s} > \lambda_0 = 0.$$

Рассмотрим путь из P_0 в P_i, проходящий через точки $P_{t_s}, \ldots, P_{t_1}$. Его длина равна

$$l_{ot_s} + \cdots + l_{t_2 t_1} + l_{t_1 i} = \lambda_{t_k} - \lambda_0 + \cdots + \lambda_{t_1} - \lambda_i \\ = \lambda_i - \lambda_0 = \lambda_i.$$

Если же взять другой пусть $P_0, P_{r_1}, \ldots, P_{r_k}, P_i$, то его длина равна

$$l_{0r_1} + \cdots + l_{r_k i} \geqslant \lambda_{r_1} - \lambda_0 + \cdots + \lambda_i - \lambda_{r_k} = \\ \lambda_i - \lambda_0 = \lambda_i.$$

□

3.1. Пример. Рассмотрим работу этого алгоритма на следующем примере. Пусть задан граф (см. Рис. 3.1). Пути без стрелок означают, что обе пары $(P_i, P_j), (P_j, P_i)$ входят в Γ. Стрелка $P_i \to P_j$ означает, что пара (P_i, P_j) входит в Γ, а пара (P_j, P_i) не входит. Внесем эти данные в таблицу и вычислим

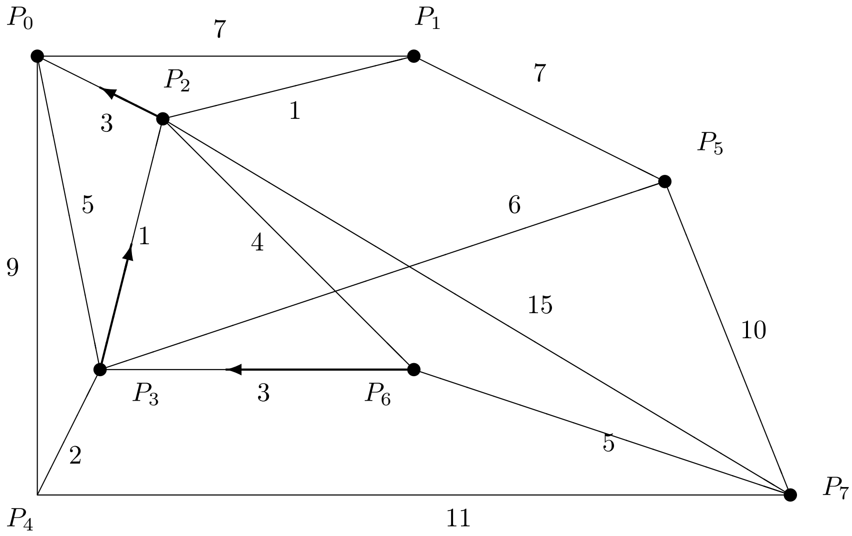

Рис. 3.1

значения λ_j (шаг 1).

		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
	λ_j λ_i	0	7	6	5	9	11	10	15
P_0	0		7		5	9			
P_1	7	7		1			7		
P_2	6	3	1					4	15
P_3	5	5		1		2	6		
P_4	9	9			2				11
P_5	11				6				10
P_6	10			4	3				5
P_7	15			15		11	10	5	

(70)

Проверяя положительность $\lambda_i - \lambda_j - l_{ji}$ имеем $\lambda_4 - \lambda_3 - l_{34} = 2$. Полагаем $\lambda_4' = \lambda_3 + l_{34} = 7$ заменим в таблице (70) $\lambda_4 = 9$ на $\lambda_4' = 7$. Полученная новая система удовлетворяет условию $\lambda_j' - \lambda_i' \leqslant l_{ij}$ для всех i, j. Ответ: $\lambda_7 = 15$.

Возможны другие постановки задачи.

1) В графе Г задано время движения t_{ij} из P_i в P_j при движении с постоянной скоростью. Требуется найти минимальной время, за которое из P_0 можно добраться до P_n.
2) В графе Г задана стоимость перевозки t_{ij} единицы груза из P_i в P_j. Требуется найти минимальную стоимость перевозки из P_0 в P_n.

4. Упражнения

Упражнение 3.13. Доказать, что транспортная задача невырождена тогда и только тогда, когда она не имеет вырождения как задача линейного программирования.

Упражнение 3.14. Пусть транспортная задача вырождена и заданы подмножества

$$G \subset \{1, \ldots, m\}, \quad H \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Пусть матрицы X_1, X_2 – решения транспортных задач для наборов индексов G, H и $\{1, \ldots, m\} \setminus G$, $\{1, \ldots, n\} \setminus H$. Верно ли, что матрица

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

будет

1) допустимым планом исходной транспортной задачи,
2) решением исходной транспортной задачи.

Упражнение 3.15. Показать, что система уравнений для нахождения первоначальной системы потенциалов состоит из $n + m - 1$ уравнения.

Упражнение 3.16. Верно ли, что оптимальный план транспортной задачи единствен.

Упражнение 3.17. Доказать, что допустимый план невырожденной транспортной задачи не имеет циклов тогда и только тогда, когда он является крайней точкой полиэдра, задаваемого системой неравенств (50).

Глава 4

Нормированные пространства и алгебры

Всюду в этой главе под $\mathbb{F}$ понимается либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение. Векторное пространство V над полем $\mathbb{F}$ называется *нормированным векторным пространством* с нормой $\|x\|$, если на V задана функция $x \to \|x\|$, принимающая неотрицательные вещественные значения, причем

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $x \in V, \lambda \in \mathbb{F}$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Из этого определения вытекает

Предложение 4.1. *Для любых элементов x, y из нормированного векторного пространства справедливо равенство* $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.

Доказательство. По свойству 3) имеем $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$. Отсюда $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. Аналогично $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\|$. Из полученных двух неравенств вытекает утверждение. □

Пример 4.2. Рассмотрим различные виды норм.

1) Пусть V – евклидово или эрмитово пространство. Тогда V является нормированным пространством, если положить $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

2) Пусть $\mathbb{F}^n$ – пространство строк длины n с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Для любого вещественного числа $p \geq 1$ положим
$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_j |x_j|^p}.$$
Тогда $\mathbb{F}^n$ является нормированным векторным пространством с нормой $\|x\|_p$. Эта норма называется l_p-нормой.
3) В пространстве $\mathbb{F}^n$ положим
$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|.$$
Тогда $\mathbb{F}^n$ является нормированным векторным пространством с нормой $\|x\|_\infty$. Эта норма называется l_∞-нормой.
4) Пространство всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ является нормированным пространством с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$, а также с нормами
$$\sqrt[p]{\int\limits_0^1 f(x)^p\, dx},$$
где $p \geq 1$ – заданное вещественное число.

Теорема 4.3. *Пусть V - конечномерное нормированное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Зафиксируем базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V и рассмотрим функцию $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$, где $f(x_1, \dots, x_n) = \|x_1 e_1 + \cdots x_n e_n\|$. Тогда функция f непрерывна.*

Доказательство. Для любых
$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{F}$$
по предложению 4.1 имеем
$$\begin{gathered} |f(x_1, \dots x_n) - f(y_1, \dots y_n)| = |\|x\| - \|y\|| \leqslant \\ \|x - y\| = \| \textstyle\sum_j (x_j - y_j) e_j \| \leqslant \sum_j |x_j - y_j| \|e_j\|. \end{gathered} \tag{71}$$
Положим $M = \max_j \|e_j\|$. Тогда в (71) получаем
$$|f(x_1, \dots x_n) - f(y_1, \dots y_n)| \leqslant M \max_j |x_j - y_j|.$$
Отсюда следует утверждение. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть V - конечномерное нормированное пространство с двумя нормами $\|x\|$ и $\|x\|'$. Тогда существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что для всех $x \in V$ справедливы неравенства $C_1\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant C_2\|x\|$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что одна из норм, например, $\|x\|$ – евклидова (эрмирова). Выберем в V ортонормированный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и обозначим через S множество всех таких $x \in V$, что $\sum_j |x_j^2| = 1$. Тогда S является n-мерной сферой и, следовательно, компактом. Отсюда в силу теоремы 4.3 вытекает, что функция $\|x\|'$ на S, принимающая положительные значения, ограничена сверху и снизу, т.е. существуют такие положительные вещественные числа C_1, C_2, что для всех $x \in S$ справедливы неравенства $C_1 \leqslant \|x\|' \leqslant C_2$. Если $x \in V \setminus 0$, то $y = \frac{x}{\|x\|} \in S$. Таким образом,

$$C_1 \leqslant \|y\|' = \|\frac{x}{\|x\|'} = \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leqslant C_2,$$

Отсюда вытекает утверждение. □

Определение. Пусть x_n – последовательность элементов нормированного пространства V. Скажем, что эта последовательность *сходится* к элементу $x \in V$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Аналогичным образом определяются последовательности Коши и полные нормированные векторные пространства. Из теоремы 4.4 вытекает

Следствие 4.5. *В конечномерном векторном пространстве Если последовательность сходится в конечномерном векторном пространстве относительно одной нормы, то она сходится и относительно любой другой нормы.*

Определение. *Алгеброй A* над полем $\mathbb{F}$ называется векторное пространство над этим полем, являющееся ассоциативным кольцом, причем для всех $x, y \in A, \alpha \in \mathbb{F}$ справедливы равенства $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$. Алгебра A над полем $\mathbb{F}$ называется *нормированной*, если A является нормированным векторным пространством с нормой $\|x\|$, причем для всех $x, y \in A$ выполняется неравенство $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Примерами алгебр являются алгебра многочленов $\mathbb{F}[X]$, алгебра матриц $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ размера n с коэффициентами из $\mathbb{F}$.

Пример 4.6. Алгебр матриц $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ является нормированной алгеброй относительно следующих норм: ($A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$)

1) $\|A\|_{l_1} = \sum_{i,j} |a_{i,j}|$;
2) $\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^p}$, где $p \geq 1, p \neq 2$;
3) $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$;
4) $\|A\| = n\|A\|_{l_\infty}$, где $\|A\|_{l_\infty} = \max_{i,j} |a_{i,j}|$;
5) $\|A\|_1 = \max_j(\sum_i |a_{i,j}|)$;
6) $\|A\|_\infty = \max_i(\sum_j |a_{i,j}|)$;
7) $\|A\|_2$ – максимум из квадратных корней собственных значений матрицы ${}^t\overline{A}A$.

Укажем теперь естественный способ построения нормированных алгебр. Пусть V – нормированное векторное пространство и $\mathcal{L}(V)$ - алгебра линейных операторов в V. Для $A \in \mathcal{L}(V)$ положим

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \tag{72}$$

Теорема 4.7. *Пусть V – конечномерное векторное пространство. Тогда* (72) *превращает $\mathcal{L}(V)$ в нормированную алгебру.*

Доказательство. Заметим сначала, что $\|A\|$ определена корректно и принимает конечные значения, поскольку по теореме 4.3 функция $f(A, x) = \|Ax\|$ непрерывна относительно координат вектора x и относительно элементов матрицы A. В силу упражнения 4.15 множество всех таких x, что $\|x\| = 1$ компактно. Таким образом, на этом множестве функция $f(A, x)$ ограничена.

Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для всех векторов x с условием $\|x\| = 1$. Отсюда следует, что $\|Ay\| = 0$ для всех векторов y, т.е. $A = 0$.

Заметим далее, что

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant$$
$$\sup_{\|x\|=1}(\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant$$
$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|;$$
$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| =$$
$$|\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|;$$
$$\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leqslant$$
$$\sup_{\|x\|=1} \|A\|\|Bx\| = \|A\|\|B\|.$$

Отметим, что при доказательстве последнего неравенства использована упражнениа 4.17. □

Определение. *Спектральным радиусом* $\rho(A)$ оператора (матрицы) $A \in \mathcal{L}(V)$ называется максимум модулей собственных значений A.

Теорема 4.8. *Пусть $\| \ \|$ – норма в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(V)$ в конечномерном пространстве V. Если $A \in \mathcal{L}(V)$, то $\rho(A) \leqslant \|A\|$.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого собственного вектора x. Построим матрицу X, столбцами которой будут координаты вектора x. Тогда $AX = \lambda X$, откуда

$$\|AX\| = |\lambda|\|X\| \leqslant \|A\|\|X\|. \tag{73}$$

Так как $X \neq 0$, то $\|X\| \neq 0$ и поэтому в (73) получаем $|\lambda| \leqslant \|A\|$. Отсюда вытекает утверждение, поскольку λ – любое собственное значение. □

Теорема 4.9. *Пусть $\rho(A) < 1$. Тогда $A^k \to 0$.*

Доказательство. *Первое доказательство.*

В силу следствия 4.5 достаточно доказать сходимость относительно матричной нормы $\| \ \|_E$. Пусть n – размерность пространства, в котором действует оператор A. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть для $n - 1$ теорема доказана. В силу теоремы о приведении к жордановой форме существует такой базис, в котором матрица оператора имеет верхнетреугольный вид. Переходя в этому базису будем считать, что матрица A имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & u \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right).$$

Тогда $\rho(B) \leqslant \rho(A) < 1$ и по индукции $B^k \to 0$.

Лемма 4.10.

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} B^k & D_k u \\ \hline 0 & \lambda^k \end{array}\right),$$

где $D_k = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j B^{k-1-j}$.

Доказательство. Непосредственная проверка, основанная на определении произведения матриц. □

Завершим доказательство теоремы. Так как $B^k \to 0$, то для любого $1 > \varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что для всех $k \geq N$ имеем $\|B^k\| < \varepsilon$. В частности, последовательность $\|B^j\|$ ограничена константой C. Кроме того, $|\lambda| < 1$. Таким образом, если $m > 2Nt$, то

$$\begin{gathered}
\|D_m\| \leqslant \| \sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{m-1-j}\| + \| \sum_{j=Nt}^{m-1-Nt} \lambda^j B^{m-1-j}\| \leq \\
\|B^{m-1-Nt}\| \| \sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{Nt-j}\| + \\
|\lambda^{Nt}| \| \sum_{j=Nt}^{m-1-Nt} \lambda^{j-Nt} B^{m-1-j}\| \leqslant \\
\|B^N\|^t \|B^{m-1-2Nt}\| \| \sum_{j=0}^{Nt-1} \lambda^j B^{Nt-j}\| + \\
|\lambda|^{Nt} \| \sum_{j=Nt}^{m-1-Nt} \lambda^{j-Nt} B^{m-1-j}\| \leqslant \\
C\|B^N\|^t (\sum_{j=0}^{Nt-1} |\lambda|^j \|B^{Nt-j}\|) + \\
|\lambda|^{Nt} (\sum_{j=Nt}^{m-1-Nt} |\lambda^{j-Nt}| \|B^{m-1-j}\|) \leqslant \\
C^2\|B^N\|^t (\sum_{j=0}^{Nt-1} |\lambda|^j) + C|\lambda|^{Nt} (\sum_{j=Nt}^{m-1-Nt} |\lambda^{j-Nt}|) = \\
C^2\|B^N\|^t \tfrac{|\lambda|^{Nt}-1}{|\lambda|-1} + C|\lambda|^{Nt} \tfrac{|\lambda|^{m-1-Nt}-|\lambda|^{1+Nt}}{|\lambda|-1}.
\end{gathered}$$

Таким образом, если m (и t) стремятся к ∞, то $\|D_m\| \to 0$. Отсюда по индукции вытекает утверждение теоремы. □

Второе доказательство.

Доказательство. Без ограничения общности как и выше можно предполагать, что $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. В силу теоремы о приведении к жордановой форме существует такая невырожденная матрица S, что $A = S^{-1}JS$, где J – жорданова форма. При этом $A^k = S^{-1}J^kS$ для всех k. Поэтому достаточно показать, что все элементы матрицы J^k стремятся к нулю при $k \to \infty$. Это утверждение достаточно доказать для одной жордановой клетки. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

имеет размер n. Заметим, что $J = \lambda E + B$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $B^n = 0$. Для любого $k \geq n$ получаем, что

$$J^k = (\lambda E + B)^k = \sum_{m=0}^{n} \binom{k}{m} \lambda^{k-m} B^m.$$

Коэффициент

$$\binom{k}{m}\lambda^{k-m} = \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!}\lambda^{k-m} =$$

$$k^m \lambda^k \left[\frac{1(1-\frac{1}{k})\cdots(1-\frac{m-1}{k})}{\lambda}^{-m} \right] \to 0$$

при $k \to \infty$. □

Теорема 4.11. *Пусть в алгебре линейных операторов $\mathfrak{L}(V)$ на конечномерном пространстве V задана норма $\| \, \|$. Если $A \in \mathfrak{L}(V)$, то $\rho(A) = \lim_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.*

Доказательство. Нам потребуется несколько лемм.

Лемма 4.12. *Для любого натурального числа k имеем $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.*

Доказательство. Достаточно выбрать базис, в котором матрица A имеет верхнетреугольный вид. Затем возвести эту матрицу в степень k. □

Лемма 4.13. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $B = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1} A$. Тогда $\rho(B) < 1$.*

Доказательство. Достаточно выбрать базис, в котором матрица A имеет верхнетреугольный вид. □

Завершим доказательство теоремы. По лемме 4.12 и теореме 4.8 имеем $\rho(A) = \rho(A^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ для всех k. Пусть B из лемме 4.13. По теореме 4.9 и лемме 4.13 имеем $B^k \to 0$. Следовательно, существует такое N, что $\|B^k\| < 1$ для всех $k > N$. Это означает, что при этих k выполняется неравенство $|\rho(A) + \varepsilon|^{-k} \|A^k\| < 1$, откуда $\|A^k\| < |\rho(A) + \varepsilon|^k$ и $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} < |\rho(A) + \varepsilon|$. □

1. Связи с системами линейных уравнений

Пусть в алгебре комплексных матриц задана матричная норма $\| \, \|$. Предположим, что нам задана некоторая невырожденная матрица A и произвольная матрица ε, с малой нормой. Сравним матрицы A^{-1} и $(A + \varepsilon)^{-1}$. Пусть $\|A^{-1}\varepsilon\| < 1$. Оценим *относительную погрешность*

$$\frac{\|A^{-1} - (A + \varepsilon)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|A^{-1} - A^{-1}(E + A^{-1}\varepsilon)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} =$$
$$\|E - (E + A^{-1}\varepsilon)^{-1}\| = \|E - \textstyle\sum_{j \geq 0} (-1)^j (A^{-1}\varepsilon)^j\| =$$
$$\| \textstyle\sum_{j \geq 1} (-1)^j (A^{-1}\varepsilon)^j\| \leqslant \textstyle\sum_{j \geq 1} \|(A^{-1}\varepsilon)^j\| =$$

$$\frac{\|A^{-1}\varepsilon\|}{1-\|A^{-1}\varepsilon\|}. \tag{74}$$

Мерой обусловленности матрицы A назовем число $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$. В (74) имеем

$$\frac{\|A^{-1}\varepsilon\|}{1-\|A^{-1}\varepsilon\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\varepsilon\|}{1-\|A^{-1}\|\|\varepsilon\|} = \frac{\kappa(A)\|A\|^{-1}\|\varepsilon\|}{1-\kappa(A)\|A\|^{-1}\|\varepsilon\|}.$$

Из полученных оценок видно, что если мера обусловленности матрицы близка к единицы, то операция вычисления обратной матрицы дает достаточно высокую относительную точность, сравнимую с относительной точностью задания $\|\varepsilon\|$.

Мера обусловленности матрицы применима и к оценкам точности решения систем линейный уравнений. Пусть задана квадратная система линейных уравнений $Ax = b$, где A – квадратная матрица, x, b – столбцы неизвестных и свободных членов. Пусть $\hat{x}$ – приближенной решение системы, $r = b - A\hat{x}$ – *вектор невязки.* Тогда

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}b - A^{-1}A\hat{x}\|}{\|x\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}r\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|x\|} = |A^{-1}\|\|r\|\frac{\|Ax\|}{\|b\|\|x\|} \leqslant$$

$$\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|r\|}{\|b\|} = \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

2. Упражнения

Упражнение 4.14. Доказать, что нормированное конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ полно.

Упражнение 4.15. Доказать, что в конечномерном нормированном пространстве V для любых вещественных чисел $a < b$ множество всех таких $x \in V$, что $a \leqslant \|x\| \leqslant b$ компактно.

Упражнение 4.16. Доказать, что алгебра матриц является нормированной алгеброй относительно норм, указанных в примере 4.6.

Упражнение 4.17. Показать, что $\|A\|$ в (72) – это инфинум всех таких $C \in \mathbb{R}$, что $\|Ax\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in V$.

Упражнение 4.18. Пусть $\| \ \|$ – норма в алгебре матриц и S – невырожденная матрица. Доказать, что функция $\|X\|_S = \|S^{-1}XS\|$ задает норму на алгебре матриц. Найти в терминах матрицы S такие положительные константы C_1, C_2, что

$$C_1\|X\| \leqslant \|X\|_S \leqslant C_2\|X\|$$

для всех матриц X.

Упражнение 4.19. Показать, что l_p-норма и l_∞-норма являются нормами в $\mathbb{F}^n$.

Упражнение 4.20. Если $\|\|, \|\|'$ – две нормы в пространстве V, то функция $\|x\|'' = \max(\|x\|, \|x\|')$ также является нормой в V.

Упражнение 4.21. Пусть в конечномерном евклидовом (эрмитовом) пространстве V задана норма $\|x\|$. Показать, что функция

$$\|x\|^* = \sup_{\|y\|=1} |(x, y)|$$

является нормой. Она называется *двойственной нормой* для $\|x\|$.

Упражнение 4.22. Показать, что в условии упражнении 4.21 для любого вектора x найдется такой вектор z, что $(z, x) = \|z\| \, \|x\|^*$.

Упражнение 4.23. Пусть в пространстве $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|x\|_\infty$. Найти двойственную норму $\|x\|_\infty^*$.

Упражнение 4.24. Пусть в пространстве $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|x\|_p, p > 1$. Доказать, что двойственная норма $\|x\|^*$ имеет вид $\|x\|_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Упражнение 4.25. Доказать, что в конечномерном евклидовом (эрмитовом) пространстве двойственная норма к двойственной совпадает с исходной.

Упражнение 4.26. Найти такие положительные константы C_1, C_2, что для всех $x \in \mathbb{F}^n$ справедливы соотношения $C_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant C_2\|x\|_2$.

Упражнение 4.27. Пусть в пространстве $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|x\|_1$. Доказать, что индуцированная норма в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ имеет вид

$$\|A\|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|).$$

Упражнение 4.28. Пусть в пространстве $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|x\|_\infty$. Доказать, что индуцированная норма в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ имеет вид

$$\|A\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|).$$

Упражнение 4.29. Пусть в пространстве $\mathbb{F}^n$ задана евклидова (эрмитова) норма. $\|x\|_2$. Доказать, что индуцированная норма в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ является спектральной нормой

$$\|A\|_2 = \max\{(\sqrt{\lambda}|\lambda - \text{ собственное значение } {}^t\overline{A}A\}.$$

Определение 4.30. Числа $\sqrt{|\lambda|}$, где λ – собственное значение ${}^t\overline{A}A\}$ называются *сингулярными числами* матрицы (оператора) A.

Упражнение 4.31. Доказать, что

$$\|A\|_{l_1} = \sum_{ij} |a_{ij}|$$

является матричной нормой в алгебре матриц. Доказать, что она не индуцирована никакой векторной нормой.

Упражнение 4.32. Доказать, что

$$\|A\| = n \max_{ij} |a_{ij}|$$

является матричной нормой в алгебре матриц размера n. Доказать, что она не индуцирована никакой векторной нормой.

Упражнение 4.33. Найти такие положительные константы C_1, C_2, что для всех матриц $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ справедливы соотношения

$$C_1\|A\|_1 \leqslant \|A\|_\infty \leqslant C_2\|A\|_1.$$

Упражнение 4.34. Доказать, что если $A^k \to 0$, то $\rho(A) < 1$.

Упражнение 4.35. Пусть $\|A\| < 1$ относительно некоторой матричной нормы. Доказать, что матрица $E - A$ обратима.

Упражнение 4.36. Пусть $\rho(A) < 1$. Доказать, что матрица $E - A$ обратима.

Упражнение 4.37. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ имеет собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать, что

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \leqslant \|A\|_E^2.$$

Упражнение 4.38. Матричная норма $\|\|$ унитарно инвариантна, если $\|A\| = \|UAV\|$ для любых унитарных матриц U, V. Доказать, что норма $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$ унитарно инвариантна. Доказать, что $\|A\|_E \leqslant \|A\|$ для любой унитарно инвариантной нормы $\|A\|$.

Упражнение 4.39. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ – матрица ранга 1, т. е. $A = {}^t xy$, где x, y – строки длины n. Пусть в $\mathbb{F}^n$ задана норма $\| \|$, индуцирующая норму в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$. Показать, что $\|A\| = \|x\| \, \|y\|^*$, где $\| \|^*$ – норма, дуальная к $\| \|$, (см. упражнение 4.21).

Упражнение 4.40. Пусть в $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|\|$, индуцирующая норму в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$. Показать, что

$$\|A\| = \max_{r(B)=1} \frac{|\mathrm{tr}(AB)|}{\|B\|},$$

где $r(B)$ – ранг матрицы B.

Упражнение 4.41. Пусть в $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|\|$, индуцирующая норму $\|\|$ в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$. Показать, что если двойственная норма $\|\|^*$ в $\mathbb{F}^n$ индуцирует норму $\|\|^*$ в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, то $\|A\| = \|{}^t A\|^*$ для всех $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$.

Упражнение 4.42. Пусть в $\mathbb{F}^n$ заданы две нормы $\|\|$, $\|\|'$ индуцирующие одну и ту же норму в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$. Показать, что нормы $\|\|$, $\|\|'$ совпадают.

Упражнение 4.43. Пусть в $\mathbb{F}^n$ задана норма $\|\|$, индуцирующая норму $\|\|$ в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$. Показать, что если в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$ задана вторая норма $\|\|'$, причем $\|A\|' \leqslant \|A\|$ для всех $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$, то обе нормы совпадают.

Упражнение 4.44. Доказать, что
1) $\|A\|_E \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2, \quad A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$;
2) $\|AB\|_E \leqslant \|A\|_2\|B\|_E$;
3) $\|AB\|_E \leqslant \|A\|_E\|B\|_2$.

Упражнение 4.45. Пусть A – банахова $\mathbb{F}$-алгебра, т. е. полная нормированная алгебра над полем $\mathbb{F}$. Доказать, что радиус сходимости ρ ряда $\sum_{j\geqslant 0} a_j X^j \in \mathbb{F}[[X]]$ удовлетворяет условию $\frac{1}{\rho} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$.

Упражнение 4.46. Пусть A – банахова $\mathbb{F}$-алгебра и элемент $a \in A$ аннулируется некоторым многочленом из $\mathbb{F}[X]$ степени m. Доказать, что если $f(X) \in \mathbb{F}[[X]]$ и ряд $f(a)$ сходится к элементу $b \in A$, то b лежит в линейной оболочке элементов $1, a, \ldots, a^{m-1}$.

Упражнение 4.47. Пусть A – банахова $\mathbb{F}$-алгебра, $a \in A$ и c – обратимый элемент из A. Доказать, что если $f(X) \in \mathbb{F}[[X]]$, то ряд $f(a)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $f(c^{-1}ac)$. При этом $f(c^{-1}ac) = c^{-1}f(a)c$.

Упражнение 4.48. Пусть на алгебре матриц $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ задана матричная норма и $f(X) \in \mathbb{C}[[X]]$. Если $a \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, то ряд $f(a)$ сходится, если $\rho(A)$ меньше радиуса сходимости ряда $f(x)$.

Упражнение 4.49. Пусть J – жорданова клетка размера n с λ по главной диагонали. Предположим, что радиус сходимости ряда $f(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ больше $|\lambda|$. Доказать, что

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{f^{n-2}(\lambda)}{(n-2)!} & \frac{f^{n-1}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.50. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, F)$. Доказать, что $\rho(A) = \inf \|A\|$, где inf берется по всем матричным нормам $\|A\|$.

Упражнение 4.51. Рассмотрим в алгебре матриц спектральную норму. Доказать, что $\kappa(A)$ равно отношению наибольшего сингулярного числа A к наименьшему.

Упражнение 4.52. Доказать, что мера обусловленности унитарной матрицы относительно спектральной нормы равна 1.

Упражнение 4.53. Пусть $\kappa(A)$ вычислено относительно некоторой матричной нормы. Доказать, что $\kappa(A)$ не меньше отношения модулей собственных значений из Задачи 4.51, если матрица A невырождена.

Упражнение 4.54. Пусть x – вектор-столбец длины 1 относительно эрмитовой нормы в $\mathbb{C}^n$ и $\lambda > 0$ – вещественное число. Показать, что матрица

$$A = E + \lambda x^t\overline{x}$$

эрмитова. Найти собственные значения этой матрицы и вычислить $\kappa(A)$ относительно спектральной нормы.

Упражнение 4.55. Доказать, что относительно спектральной нормы для любой матрицы A справедливы равенства $\kappa({}^t\overline{A}A) = \kappa(A^t\overline{A}) = \kappa(A)^2$.

Упражнение 4.56. Пусть A – верхнетреугольная невырожденная матрица. Доказать, что относительно любой матричной нормы

$$\kappa(A) \geqslant \frac{\max_i(\sum_j |a_{ij}|)}{\min_i |a_{ii}|}.$$

Упражнение 4.57. Пусть матрица A обратима, а матрица $A + B$ вырождена. Тогда

$$\kappa(A) \geqslant \frac{\|A\|}{\|B\|}.$$

Упражнение 4.58. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, и $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ – сингулярные числа A. Пусть Mat_r – множество матриц ранга меньше r. Доказать, что

$$\inf_{X\in \mathrm{Mat}_r} \|A, X\| = \alpha_r.$$

Упражнение 4.59. Пусть X – множество всех таких верхнетреугольных матриц $R = (r_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, F)$, что

1) $|r_{ij}| \leqslant 1$ для всех i, j;
2) $r_{ii} = 1$ для всех i.

Найти $\max_{R\in X} \kappa(R)$, где $\kappa(R)$ определено по норме $\| \|_\infty$.

Упражнение 4.60. Пусть в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ задана матричная норма $\|\|$. Предположим, что имеется последовательность A_i с нормой 1, причем $\kappa(A_i) \to \infty$. Доказать, что $\det A_i \to 0$.

Упражнение 4.61. Пусть A – положительно определенная матрица, и мера обусловленности задается спектральной нормой. Показать, что $\kappa(A + \alpha E)$ является убывающей функций от положительного числа α.

Упражнение 4.62. Доказать, что если в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ рассмотрена норма $\|\|_2$, то

$$\kappa(A) = 1 \iff A = \alpha U,$$

где $\alpha \in \mathbb{F}^*$, U – унитарная матрица.

Упражнение 4.63. Пусть A – положительно определенная симметрическая матрица и B – ее главная подматрица. Доказать, что относительно спектральной нормы $\kappa(B) \leqslant \kappa(A)$.

Упражнение 4.64. Найти решение системы

$$\begin{aligned}
1,2515x_1 + 0,001x_2 - 0,002x_3 \qquad &+0,0005x_4 = 2,5,\\
0,003x_1 + 1,501x_2 + 0,0005x_3 \qquad &-0,0005x_4 = 1,5,\\
-0,001x_1 + 0,001x_2 + 2,499x_3 \qquad &+0,0002x_4 = 5,\\
0,0025x_1 - 0,0005x_2 \qquad &+1,8885x_4 = 2,
\end{aligned}$$

с точностью до 0,01.

Упражнение 4.65. Найти решение системы

$$\begin{aligned}
0,501x_1 - 0,499x_2 + \quad 0,001x_3 \qquad\qquad &= 0,5,\\
0,498x_1 + 0,502x_2 + \qquad\qquad -0,001x_4 &= 0,5,
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llr}
0,006x_1 + 0,007x_2 + & 3,008x_3 - 1,991x_4 & = 0, \\
-0,001x_1 - & 2,001x_3 + x_4 & = 0,
\end{array}
$$

с точностью до 0,06.

Упражнение 4.66. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ имеет собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leqslant \|A\|_2^2.$$

Упражнение 4.67. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$ имеет собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и сингулярные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Упражнение 4.68. Пусть в условиях предыдущей задачи $A = (a_{ij})$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Глава 5

Неотрицательные матрицы.

1. Теорема Перрона

Определение. Пусть A, B – прямоугольные вещественные матрицы. Скажем, что $A \geqslant B$ $(A > B)$, если $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ $(a_{ij} > b_{ij}$ для любых элементов a_{ij}, b_{ij} матриц A и B. Матрица A *положительна (неотрицательна)*, если $A > 0$ $(A \geqslant 0)$. В частности, мы будем говорить о положительных (неотрицательных) векторах и квадратных матрицах.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Тогда $|A| = (|a_{ij}|)$.

Предложение 5.1. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $|AB| \leq |A||B|$;
2) $|A + B| \leq |A| + |B|$;
3) $|\alpha A| = |\alpha||A|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Предложение 5.2. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. *Если* $|A| \leq B$, *то* $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.

Доказательство. По предложению 5.1 для любого натурального числа k имеем $|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$. Рассмотрим на алгебре матриц норму $\| \, \|_E$ из главы 3, пример 4.6, п.3. Тогда $\|A^k\|_E \leq \| \, |A|^k \, \|_E \leq \|B^k\|_E$. Отсюда

$$\|A^k\|_E^{\frac{1}{k}} \leq \| \, |A|^k \, \|_E^{\frac{1}{k}} \leq \|B^k\|_E^{\frac{1}{k}}.$$

Остается воспользоваться теоремой 4.11. □

Предложение 5.3. *Пусть* $A \geqslant 0$, *причем* $\sum_{j=1}^n a_{ij} = C$ *– постоянно для всех* $i = 1, \dots , n$. *Тогда*

$$\rho(A) = \|A\|_\infty = \max_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}) = C.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty,$$

где $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Отсюда $\rho(A) \leqslant \|A\|_\infty = C$. С другой стороны, если $e = (1, \dots , 1)$, то $Ae = Ce$, откуда $C \leqslant \rho(A)$. □

Теорема 5.4. *Пусть* $A \geqslant 0$. *Тогда*

$$\min_i(\textstyle\sum_j a_{ij}) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_i(\sum_j a_{ij}),$$
$$\min_j(\textstyle\sum_i a_{ij}) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_i(\sum_i a_{ij})$$

Доказательство. Пусть $C = \min_i(\sum_j a_{ij})$. Тогда существует такая матрица B, что $A \geqslant B \geqslant 0$, причем $\sum_j b_{ij} = C$. Действительно, если $C = 0$, то положим $B = 0$. Если же $C > 0$, то положим $b_{ij} = \dfrac{Ca_{ij}}{\sum_t a_{it}}$. По предложениям 5.3 и 5.2 получаем $\rho(B) = C \leqslant \rho(A)$.

Аналогично, если $D = \max_i(\sum_j a_{ij})$, то можно построить такую матрицу B', что $0 \leqslant A \leqslant B'$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим транспонированную матрицу ${}^tA$ и заметим, что $\rho(A) = \rho({}^tA)$. □

Следствие 5.5. *Пусть* A *– неотрицательная матрица и* x *– положительный вектор. Тогда*

$$\min_i \frac{\sum_j a_{ij}x_j}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_i \frac{\sum_j a_{ij}x_j}{x_i};$$
$$\min_j[x_j(\textstyle\sum_i \dfrac{a_{ij}}{x_i})] \leqslant \rho(A) \leqslant \max_j[x_j(\sum_i \dfrac{a_{ij}}{x_i})].$$

Доказательство. Применим теорему 5.4 для матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

На месте (i, j) в этом произведении стоит $x_i^{-1}a_{ij}x_j$. □

Следствие 5.6. *Пусть $A \geqslant 0$ и $x > 0$ – вектор. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha x \leqslant Ax \leqslant \beta x$, то $\alpha \leqslant \rho(A) \leqslant \beta$. Если $\alpha x < Ax$, то $\alpha < \rho(A)$. Если $Ax < \beta x$, то $\rho(A) < \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha x \leqslant Ax$, то

$$\alpha \leqslant \min_i \frac{\sum_j a_{ij}x_j}{x_i}.$$

Отсюда $\alpha \leqslant \rho(A)$ по следствию 5.5. Если $\alpha x < Ax$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $(\alpha + \varepsilon)x \leqslant Ax$. Отсюда $\alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant \rho(A)$. Аналогично доказываются остальные утверждения. □

Следствие 5.7. *Пусть неотрицательная матрица A имеет положительный собственный вектор с собственным значением λ. Тогда $\lambda = \rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$, где x – положительный вектор. Заметим, что $\lambda \in \mathbb{R}$, поскольку $x > 0$. Применим следствие 5.6 с $\alpha = \beta = \lambda$. □

Следствие 5.8. *Пусть A – неотрицательная матрица, причем $\sum_j a_{ij} > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $\rho(A) > 0$.*

Предложение 5.9. *Пусть A – положительная матрица и x – неотрицательный ненулевой вектор. Тогда вектор Ax положителен.*

Доказательство. Пусть $x_k > 0$. Для любого индекса $i = 1, \dots, n$ имеем $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > a_{ik}x_k > 0$. □

Теорема 5.10. *Пусть задана квадратная неотрицательная матрица A, причем существуют такие положительные векторы x, y, что*

$$Ax = \rho(A)x, \quad {}^t\!Ay = \rho(A)y,$$

$$\sum_j x_j y_j = {}^t y x = 1, \tag{75}$$

где x, y *отождествляются со столбцами из координат векторов. Положим* $L = (x_i y_j) = x^t y$. *Тогда*

$$Lx = x, \quad {}^t y L = L,$$
$$L^2 = L, \quad AL = LA = \rho(A)L.$$

Кроме того, $(\rho(A)^{-1}A - L)^m = (\rho(A)^{-1}A)^m - L$.

Доказательство. Заметим, что $Lx = x^t y x = x$ и ${}^t y L = {}^t y x^t y = {}^t y$. Отсюда

$$L^2 = x^t y x^t y = L,$$
$$AL = Ax^t y = \rho(A)x^t y = \rho(A)L = LA. \tag{76}$$

Поэтому $\rho(A)^{-1}AL = L = L(\rho(A)^{-1}A)$, и

$$[\rho(A)^{-1}A - L]^m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j L^j + \rho(A)^{-m}A^m = [\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j] L + \rho(A)^{-m}A^m = - L + \rho(A)^{-m}A^m.$$

Отсюда $\rho(A)^{-m}A^m = L + [\rho(A)^{-1}A - L]^m$. □

Теорема 5.11. *Пусть* A *– положительная матрица и* $Ax = \lambda x$ *для некоторого ненулевого вектора* x*, причем* $|\lambda| = \rho(A)$*. Тогда*

1) $A|x| = \rho(A)|x|$*;*
2) $|x| > 0$*;*
3) $x = e^{i\theta}|x|$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{R}$*;*
4) $\lambda = \rho(A)$.

Доказательство. Имеем

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leqslant |A||x| = A|x|. \tag{77}$$

Положим $y = A|x| - \rho(A)|x|$. По (77) вектор y неотрицателен.

Предположим сначала, что $y \neq 0$. По предложению 5.9 вектор Ay положителен. Положим $z = A|x|$. В силу предложения 5.9 вектор z также положителен. Отсюда $0 < Ay = Az - \rho(A)z$ и поэтому $Az > \rho(A)z$. Это противоречит следствию 5.6.

Итак, $y = 0$, т.е. $A|x| = \rho(A)|x|$. Кроме того, по предложению 5.9 получаем $|x| = \rho(A)^{-1}A|x| > 0$. Поэтому для любой координаты x_k вектора x имеем

$$\begin{aligned} \rho(A)|x_k| = |\lambda||x_k| = \quad & |\lambda x_k| = |\textstyle\sum_j a_{kj}x_j| \leqslant \\ \sum_j |a_{kj}||x_j| = \quad & \textstyle\sum_j a_{kj}|x_j| = \rho(A)|x_k|. \end{aligned}$$

Таким образом, $|\sum_j a_{kj}x_j| = \sum_j a_{kj}|x_j|$, а значит, все x_j расположены на одном луче в комплексной области. В частности, существует такой угол θ, что $e^{-i\theta}x_j > 0$ для всех j. Отсюда $e^{-i\theta}x = |x|$, т.е. x – собственный вектор A с собственным значением $\rho(A)$. $\square$

Следствие 5.12. *Пусть A – положительная матрица. Тогда $\rho(A)$ – положительное собственное значение A. Существует положительный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $|\lambda| = \rho(A)$ для некоторого собственного значения λ матрицы A и $Ax = \lambda x$, где $x \neq 0$. По теореме $A|x| = \rho(A)|x|$, причем $|x| > 0$. $\square$

Следствие 5.13. *Пусть $A > 0$. Если λ – собственное значение A, причем $\lambda \neq \rho(A)$, то $|\lambda| < \rho(A)$.*

Теорема 5.14. *Пусть $A > 0$ и $w, z \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, причем $Aw = \rho(A)w$, $Az = \rho(A)z$. Тогда $w = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. По теореме 5.11 имеем $z = e^{-i\theta}|z|, w = e^{-i\psi}|w|$. Таким образом, можно считать, что $z, w > 0$. Положим $\beta = \min_j z_j w_j^{-1}$ и $r = z - \beta w$. Тогда $r \geqslant 0$ и r не положительный вектор. Вместе с тем $Ar = \rho(A)r$. Отсюда $r = \rho(A)^{-1}Ar > 0$ по предложению 5.9. Итак, $r = 0$. $\square$

Следствие 5.15. *Если $A > 0$, то существует единственный вектор x такой, что $x > 0$, $\quad Ax = \rho(A)x$, $\quad \sum_j x_j = 1$.*

Определение. Пусть $A > 0$. Тогда $\rho(A)$ называется *перроновым числом,* а вектор x из следствия 5.15 называется *перроновым вектором* для A.

Теорема 5.16. *Пусть A, x, y, L из теоремы 5.10, причем $A > 0$. Тогда* $\lim_{m\to\infty}[\rho(A)^{-1}A]^m = L$.

Доказательство. Имеем $L+[\rho(A)^{-1}A-L]^m = \rho(A)^{-m}A^m$ в силу теоремы 5.10. Поэтому в силу теоремой 4.9 достаточно показать, что $\rho[\rho(A)^{-1}A - L] < 1$. Пусть $[\rho(A)^{-1}A - L]w = \mu w, \quad w \neq 0$. По (76)

$$\mu Lw = L[\rho(A)^{-1}A - L]w = [L - L^2]w = 0.$$

Если $\mu \neq 0$, то $Lw = 0$, и поэтому $Aw = \rho(A)\mu w$, откуда $\rho(A)|\mu| \leqslant \rho(A)$, т.е. $|\mu| \leqslant 1$. Кроме того, если $|\mu| = 1$, то $\mu = 1$ по теореме 5.11, и по теореме 5.14 получаем $w = x$. В этом случае $0 = Lx = x^t yx = x \neq 0$ по теореме 5.10. Полученное противоречие показывает, что $|\mu| < 1$.

Теорема 5.17. *Пусть $A > 0$. Тогда $\rho(A)$ является простым корнем характеристического многочлена матрицы A.*

Доказательство. Пусть $\rho = \rho(A)$. Существует такая невырожденная комплексная матрица S, что

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \rho & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & \rho & & & \\ & & & \lambda_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_j| < \rho.$$

Отсюда

$$\rho^{-1}A = S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k \end{pmatrix} S^{-1},$$

где $\mu_j = \frac{\lambda_j}{\rho}, \quad |\mu_j| < 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned}(\rho^{-1}A)^m &= S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k \end{pmatrix}^m S^{-1} \\ &= S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu_t^m & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_k^m \end{pmatrix} S^{-1} \to \\ & S\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \bigstar & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned} \qquad (78)$$

Заметим, что ранг $\lim_m(\rho^{-1}A)^m$ равен рангу L, т.е. 1, и не меньше по (78) числу единиц на главной диагонали, т.е. кратности ρ. Отсюда вытекает утверждение. □

Таким образом, нами доказана

Теорема 5.18 (Перрон, 1907). *Пусть $A > 0$. Тогда*

1) $\rho(A) > 0$;

2) $\rho(A) > 0$ *является простым корнем характеристического уравнения и существует перронов вектор;*

3) если λ *– собственное значение* A *и* $\lambda \neq \rho(A)$, *то* $|\lambda| < \rho(A)$;

4) $\lim_m [\rho(A)^{-1}A]^m = L$, *где* $L = x^t y$, $Ax = \rho(A)x$, ${}^tAy = \rho(A)y$, ${}^tyx = 1$, $x, y > 0$.

2. Теорема Фробениуса

Теорема 5.19. *Пусть $A \geqslant 0$. Тогда $\rho(A)$ – собственное значение A и существует неотрицательный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $\varepsilon > 0$. Тогда $A(\varepsilon) = (a_{ij} + \varepsilon) > 0$. Пусть $x(\varepsilon)$ – перронов вектор матрицы $A(\varepsilon)$ с собственным значением $\rho(A(\varepsilon))$. Тогда $x(\varepsilon) > 0$ и $\sum_j x(\varepsilon)_j = 1$. Таким образом, все векторы $x(\varepsilon)$ лежат в компакте в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим убывающую последовательность $\varepsilon_k \to 0$. В последовательности $x(\varepsilon_k)$ выберем сходящуюся подпоследовательность $x(\varepsilon_k) \to x$. Так как $x(\varepsilon_k) > 0$, то $x \geqslant 0$ и, кроме того, $\sum_j x_j = 1$. При этом $A(\varepsilon_k) < A(\varepsilon_{k-1})$, откуда $\rho(A) \leqslant \rho(A(\varepsilon_k)) \leqslant \rho(A(\varepsilon_{k-1}))$ по предложению 5.2. Итак, существует предел $\rho = \lim_k \rho(A(\varepsilon_k))$ и $\rho \geqslant \rho(A)$. Отсюда

$$Ax = [\lim_k A(\varepsilon_k)]\,[\lim_k x(\varepsilon_k)] = \lim_k\,[A(\varepsilon_k)x(\varepsilon_k)] =$$
$$\lim_k\,[\rho\,(A(\varepsilon_k))\,x(\varepsilon_k)] = \lim_k \rho\,[A(\varepsilon_k)]\,[\lim_k x(\varepsilon_k)] = \rho x.$$

Следовательно, x является собственным вектором A с собственным значением ρ. Но тогда $\rho \leqslant \rho(A)$ и поэтому $\rho = \rho(A)$. □

Определение 5.20. Квадратная матрица называется *перестановочной,* если она получается из единичной перестановкой строк (столбцов).

Определение. Квадратная матрица A размера n называется *разложимой,* если выполнено одно из условий

1) $n = 1$ и $A = 0$;

2) $n \geqslant 2$ и существует такая перестановочная матрица P, что

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right),$$

где B, D – собственные квадратные подматрицы.

Матрицы, не являющиеся разложимыми, называются неразложимыми.

Теорема 5.21. *Пусть задана неотрицательная неразложимая матрица A размера n. Тогда матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна.*

Доказательство. **Первое доказательство** Предположим противное, в матрице

$$(E+A)^{n-1} = E + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$$

на некотором месте (p,q) стоит нулевой элемент. В этом случае $p \neq q$ и указанный элемент имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum \binom{n-1}{k} a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_k,j_{k+1}} = 0, \tag{79}$$

где второй знак суммы означает суммирование по множеству J_{pq} всех таких наборов $(j_1, \ldots, j_{k+1})$, что $p = j_1$, $q = j_{k+1}$, и $k \leqslant n-1$. Так как все слагаемые в (79) неотрицательны, то каждое произведение

$$a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_k,j_{k+1}} \tag{80}$$

равно нулю для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и для всех наборов $(j_1, \ldots, j_{k+1}) \in J_{pq}$.

Обозначим через I множество всех таких индексов $1 \leqslant l \leqslant n$, что либо $l = p$, либо $l \neq p$ и существует такая последовательность индексов $(j_1, \ldots, j_{k+1}) \in J_{pl}$, что произведение (80) отлично от нуля и $k \leqslant n-1$. По предположению $q \notin I$.

Лемма 5.22. *Если $i \in I, j \notin I$, то $a_{ij} = 0$.*

Доказательство. Пусть $a_{ij} \neq 0$.Так как $i \in I$, то существует такая последовательность индексов $(j_1, \ldots, j_{k+1}) \in J_{pq}$, что $j_{k+1} = i$ и произведение (80) отлично от нуля. Если $k \leqslant n-2$, то

$$a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_k,j_{k+1}} a_{ij} \neq 0$$

и $(j_1, \ldots, j_{k+1}, j) \in J_{pq}$, что невозможно.

Итак, $k = n-1$. В этом случае среди $n+1$ индекса $(j_1, \ldots, j_{k+1}, j_{k+2})$, где $j_{k+2} = j$ есть совпадения. Пусть, например, $j_\alpha = j_\beta$, где $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant k+2$. Тогда $(j_1, \ldots, j_\alpha, j_\beta) \in J_{pq}$, причем

$$a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_{\alpha-1},j_\alpha} a_{j_\alpha,j_\beta} \cdots a_{j_{k+1},j_{k+2}} \neq 0.$$

Получаем противоречие с условием $j \notin I$ □

Завершим доказательство теоремы. Перенумеруем номера строк матрицы A таким образом, чтобы $I = \{k+1, \ldots, n\}, \quad k < n$. Эта перенумерация соответствует переходу $A \mapsto P^{-1}AP$ для некоторой перестановочной матрицы P. Тогда $k+1 \leqslant p \leqslant n$ и для всех $1 < j \leqslant k$ по лемме 5.22 получаем $a_{ij} = 0$ при $i > k, j \leqslant k$. Таким образом, A содержит угол из нулей.

Второе доказательство Рассмотрим ориентированный граф Γ с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$. При этом существует дуга $i \to j$, если либо $a_{ij} \neq 0$, либо $i = j$.

Лемма 5.23. *Пусть в* Γ *существует путь из* $i \to j$. *Тогда в* Γ *существует путь из* i *в* j *длины (число дуг)* $\leqslant n-1$.

Для любой вершины p из Γ обозначим через C_p связную компоненту p, т. е. множество всех концов всевозможных путей из p в графе Γ. По лемме 5.23 можно считать, что любой такой путь имеет длину не больше $n-1$.

Лемма 5.24. *Пусть* $i \in C_p, j \notin C_p$. *Тогда* $a_{ij} = 0$.

Доказательство. По условию существует путь $p \to i, i \to j$. Поэтому в Γ существует путь $p \to j$, что невозможно. □

Предположим противное, в матрице

$$(E+A)^{n-1} = E + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$$

на некотором месте (p, q) стоит нулевой элемент. В этом случае $p \neq q$ и указанный элемент имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum \binom{n-1}{k} a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_k,j_{k+1}} = 0, \tag{81}$$

где второй знак суммы означает суммирование по множеству всех таких наборов $(j_1, \ldots, j_{k+1})$, что $p = j_1$, $q = j_{k+1}$, и $k \leqslant n-1$. Так как все слагаемые в (81) неотрицательны, то каждое произведение

$$a_{j_1,j_2} \cdots a_{j_k,j_{k+1}} \tag{82}$$

равно нулю для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и для всех наборов $(p = j_1, \ldots, j_{k+1} = q)$. Это означает, что $q \notin C_p$. Перенумеруем номера строк матрицы A таким образом, чтобы $I = \{k+1, \ldots, n\}, \quad k < n$. Эта перенумерация соответствует переходу $A \mapsto P^{-1}AP$ для некоторой перестановочной матрицы P. Тогда $k+1 \leqslant p \leqslant n$ и для всех $1 < j \leqslant k$ по лемме 5.24 получаем $a_{ij} = 0$ при $i > k$, $j \leqslant k$. Таким образом, A содержит угол из нулей. □

Предложение 5.25. *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения A, то $1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_n$ – собственные значения $E+A$. В частности, $1+\rho(A) \geqslant \rho(E+A)$. Если $A \geqslant 0$, то $1+\rho(A) = \rho(E+A)$.*

Доказательство. Перейдя к жордановой форме A получаем требуемые неравенства. Для доказательства равенства заметить, что среди λ_j по теореме 5.19 встречается $\rho(A) \geqslant 0$. □

Предложение 5.26. *Пусть $A \geqslant 0$ и $A^k > 0$ для некоторого натурального числа k. Тогда $\rho(A)$ – простой корень характеристического многочлена.*

Доказательство. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения A, то $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ – собственные значения $A^k > 0$. Отсюда $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. По теореме 5.19, например, $\lambda_1 = \rho(A)$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\lambda_1^k = \lambda_2^k = \rho(A)^k = \rho(A^k)$, что невозможно по теореме Перрона. □

Теорема 5.27 (Фробениус)**.** *Пусть $A \geqslant 0$ – неразложимая матрица. Тогда*

1) $\rho(A) > 0$;
2) $\rho(A)$ *– собственное значение* A*;*
3) существует положительный собственный вектор с собственным значением $\rho(A)$*;*
4) $\rho(A)$ *– простой корень характеристического многочлена матрицы* A*.*

Доказательство. Заметим, что в A нет нулевых строк и столбцов так как матрица A неразложима. Поэтому $\rho(A) > 0$. в силу следствия 5.13.

Утверждение 2 вытекает из теоремы 5.19.

Рассмотрим утверждение 3. По теореме 5.19 существует неотрицательный собственный вектор x для матрицы A с собственным значением $\rho(A)$. Тогда $(E+A)x = (1+\rho(A))x$ и поэтому $(E+A)^{n-1}x = (1+\rho(A))^{n-1}x$. Но матрица $(E+A)^{n-1}$ положительна и поэтому $(1+\rho(A))^{n-1}x > 0$, откуда вытекает положительность x.

Последнее утверждение следует из предложений 5.26, 5.25. □

Для доказательства аналога предельной теоремы нам потребуется

Предложение 5.28. *Пусть* A, x, y, L *из теоремы 5.10, причем матрица* A *неразложима. Тогда матрица*

$$E - \left[\rho(A)^{-1}A - L\right] \tag{83}$$

обратима.

Доказательство. Рассмотрим вектор z с условием $\left(E - \left[\rho(A)^{-1}A - L\right]\right) z = 0$. Тогда

$$z = \rho(A)^{-1}Az - Lz. \tag{84}$$

Применяя к (84) матрицу L по теореме 5.10 получаем

$$Lz = \rho(A)^{-1}LAz - L^2z = Lz - Lz = 0. \tag{85}$$

Таким образом, по (84) $z = \rho(A)^{-1}Az$, т.е. $Az = \rho(A)z$. В силу теоремы 5.27 имеем $z = \alpha x$. Отсюда по (85) $0 = Lz = \alpha Lx = \alpha x = z$. Итак, матрица (83) невырождена и потому обратима. □

Теорема 5.29. *Пусть задана неотрицательная неразложимая матрица A. Тогда матрица ${}^tA$ неразложима. В силу теоремы 5.27 существуют такие положительные векторы x, y, что выполнены равенства* (75). *Положим $L = x^t y$. Тогда существует такая положительная константа $C = C(A)$, что для любого натурального числа N*

$$\|\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}(\rho(A)^{-1}A)^m - L\|_\infty \leqslant \frac{C}{N}.$$

Доказательство. По теореме 5.10 имеем

$$\frac{1}{N}\textstyle\sum_{m=1}^{N}(\rho(A)^{-1}A)^m - L =$$
$$\frac{1}{N}\textstyle\sum_{m=1}^{N}\left(\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m + L\right) - L =$$
$$\frac{1}{N}\textstyle\sum_{m=1}^{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]^m =$$
$$\frac{1}{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]\left[E - (\rho(A)^{-1}A - L)^N\right] \times$$
$$\left[E - (\rho(A)^{-1}A - L)\right]^{-1} =$$
$$\frac{1}{N}\left[\rho(A)^{-1}A - L\right]\left[E - (\rho(A)^{-1}A)^N + L\right] \times$$
$$\left[E - (\rho(A)^{-1}A - L)\right]^{-1}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что все элементы матрицы $B = \left[(\rho(A)^{-1}A\right]^N$ ограничены. Непосредственная проверка показывает, что $Bx = x$. Пусть $B = (b_{ij})$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\sum_j b_{ij}x_j = x_i$. Следовательно,

$$\max_s x_s \geqslant x_i = \sum_j b_{ij}x_j \geqslant (\min_j x_j)\sum_j b_{ij} \geqslant (\min_j x_j)b_{ij}.$$

Отсюда

$$b_{ij} \leqslant \frac{\max_s x_s}{\min_j x_j}.$$

□

3. Приложения

3.1. Миграция населения. Пусть заданы города $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, причем между ними мигрирует население. Каждый год a_{ij}-ая часть населения Γ_j переезжает в Γ_i, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть $A = (a_{ij})$ и $z(m) = {}^t(z_1(m), \ldots, z_n(m))$ – распределение населения в m-ый год. Заметим, что $a_{ij} \geqslant 0$ и $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$. Отсюда $\rho(A) = 1$ по предложению 5.3. Тогда $z(m+1) = Az(m)$, откуда $z(m+1) = A^m z(1)$. Предположим, что $A > 0$. Тогда при достаточно больших m имеем $A^m \sim L$, т.е. поток населения начинает стабилизироваться.

3.2. Модели Леонтьева.

3.2.1. *А.* Пусть за некоторый период времени отрасли $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ производят, соответственно, продукты $p_1, \ldots, p_n$, причем a_{ij}-ая часть продукта p_j отрасли Γ_j потребляется отраслью Γ_i для производства единицы продукта p_i. Обозначим через c_j долю продукта p_j отрасли Γ_j, израсходованную на непроизводственные нужды, с $= {}^t(c_1, \ldots, c_n)$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей коэффициентов прямых затрат.* Будем считать, что в рассматриваемый период времени матрица A не меняется и если $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ –вектор объемов валовой продукции выпуска продуктов $p_1, \ldots, p_n$ отраслями $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, то вектор затрат линейно зависит от x и имеет вид Ax. Тогда свободный остаток, равный $c = x - Ax$ будет использоваться на непроизводственные нужды. Таким образом, при планировании на ближайший год, если заданы c, A, то для нахождения объема производства x необходимо решить систему линейных уравнений $c = (E - A)x$.

3.2.2. *Б.* Предположим теперь, что необходимо осуществить планирование на несколько лет вперед. Пусть $x(1), \ldots, x(T)$ – векторы объемов производств в ближайшие T лет, причем полученный набор продуктов снова пускается в производство. Ставится задача нахождения линейной $\max({}^t dx(T))$. Например, функция ${}^t dx(T)$ означает общую стоимость продукции, производимой в последний год. Таким образом, необходимо решить следующую задачу линейного программирования: найти $\max({}^t dx(T))$ при условии

$$Ax(j+1) \leqslant x(j), \quad x(i) \geqslant 0,$$

где $j = 1, \ldots, T-1$ и $i = 1, \ldots, T$.

3.2.3. *B.* Предположим теперь, что имеется $m > n$ технологических процессов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, каждый из которых выпускает один товар. При этом множество $\{1, \ldots, m\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $M_1, \ldots, M_n$, причем процесс Γ_j выпускает продукт p_j, если $j \in M_i$. Тогда $A = (a_{ij})$ – матрица размера $n \times m$. Пусть I – матрица инциндентности из нулей и единиц, причем не месте (i, j) стоит единица тогда и только тогда, когда $j \in M_i$. Если $x = {}^t(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0$ – вектор объемов производств, то имеем уравнение $Ix - Ax = c$. Пусть с каждым Γ_j связано число $l_j \geqslant 0$ – коэффициент трудовых затрат, $l = {}^t(l_1, \ldots, l_m)$. Если нужно минимизировать трудовые затраты, то необходимо решить следующую задачу линейного программирования: найти $\min({}^l x)$ при условии $Ax \geqslant c, x \geqslant 0$.

4. Упражнения

Упражнение 5.30. Доказать утверждения предложения 5.1.

Упражнение 5.31. Пусть $A > 0, x \geqslant 0, x \neq 0$ и $Ax = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $\lambda = \rho(A)$.

Упражнение 5.32. Доказать, что перестановочная матрица ортогональна.

Упражнение 5.33. Пусть $A \geqslant 0$ и $A^k > 0$ для некоторого натурального k. Показать, что $\rho(A) > 0$.

Упражнение 5.34. Построить пример такой неположительной (2×2)-матрицы $A \geqslant 0$, что $A^2 > 0$.

Упражнение 5.35. Пусть $A \geqslant 0$ и $A \neq 0$. Доказать, что если A имеет положительный собственный вектор, то $\rho(A) > 0$.

Упражнение 5.36. Пусть $A \geqslant 0$ и x – положительный вектор. Если $Ax = 0$, то $A = 0$.

Упражнение 5.37. Найти перроновы числа и векторы для матриц
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.38. Пусть $A > 0$ и x – перронов вектор. Доказать, что $\rho(A) = \sum_{ij} a_{ij} x_j$.

Упражнение 5.39. Если $A \geqslant 0$ и $A^k > 0$ для некоторого $k > 0$, то A имеет положительный собственный вектор.

Упражнение 5.40. Пусть $A \geqslant 0$ имеет положительный собственный вектор. Доказать, что матрица A подобна неотрицательной матрице B, у которой суммы элементов каждой строки одинаковы.

Упражнение 5.41. Пусть матрицы A, A^{-1} неотрицательны. Доказать, что $A = DP$, где матрица D диагональна, а матрица P перестановочная.

Упражнение 5.42. Пусть $A \geqslant 0$ и z – ненулевой комплексный вектор, причем $Az - \alpha z \geqslant 0$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Доказать, что $\rho(A) \geqslant \alpha$.

Упражнение 5.43. Пусть $A \geqslant 0$. Тогда следующие условия эквивалентны

- существует положительная матрица, перестановочная с A;
- матрицы A, ${}^tA$ имеют положительные собственные векторы.

Упражнение 5.44. Пусть матрица A разложима. Тогда матрица $(E + A)^{n-1}$ не является положительной.

Упражнение 5.45. Пусть $A \geqslant 0$, причем существует такой положительный вектор y, что ${}^tAy = \rho(A)y$. Предположим, что x – ненулевой неотрицательный вектор, причем $Ax \geqslant \rho(A)x$. Доказать, что $Ax = \rho(A)x$.

Упражнение 5.46. Построить неотрицательную матрицу A с неотрицательным собственным вектором x, причем $Ax \neq \rho(A)x$.

Упражнение 5.47. Построить пример неотрицательной неразложимой матрицы A, имеющей собственное значение $\lambda \neq \rho(A)$, причем $|\lambda| = \rho(A)$.

Упражнение 5.48. Построить пример неотрицательной разложимой матрицы A, у которой нет положительного собственного вектора.

Упражнение 5.49. Пусть $A \geqslant 0$, причем существует неотрицательный собственный вектор для A с собственным значением $\rho(A) > 0$. Если этот вектор не является положительным, то матрица A разложима.

Упражнение 5.50. Пусть матрица $A \geqslant 0$ неразложима и существует неотрицательная матрица B, перестановочная с A. Предположим, что x – перронов вектор для A. Доказать, что $Bx = \rho(B)x$.

Упражнение 5.51. Пусть минимальный многочлен матрицы $A \geqslant 0$ имеет степень m. Доказать, что следующие условия эквивалентны

- матрица A неразложима;
- матрица $(E + A)^{m-1}$ положительна.

Упражнение 5.52. Построить пример матрицы A, у которой $\rho(E + A) \neq 1 + \rho(A)$.

Упражнение 5.53. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения A. Является ли матрица A разложимой.

Упражнение 5.54. Пусть $A, B \geqslant 0$, причем A неразложима. Доказать, что матрица $A + B$ неразложима и $\rho(A + B) > \rho(A)$, если $B \neq 0$.

Глава 6

Локализация собственных значений

1. Теорема Гершгорина

Теорема 6.1. *Пусть* $n \geq 1$ *и задан полином* $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$, *с комплексными коэффициентами. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что для любого многочлена* $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_0, \quad b_n \neq 0$, *где* $\max_{0 \leq i \leq n} |a_i - b_i| < \delta$ *справедливо неравенство*

$$\min_{\sigma \in S_n} \left[\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j - \mu_{\sigma(j)}| \right] < \varepsilon,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *– корни* $p(x)$, *а* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *– корни* $q(x)$.

Доказательство. Пусть $p(x)$ имеет корень $x = 0$ кратности k. Предположим, что все остальные комплексные корни z многочлена $p(x)$ удовлетворяют условию $|z| > \varepsilon_1 > 0$. Из комплексного анализа известно (см. А. Картан, Элементарная теория аналитических функций одного и многих комплексных переменных, М. : Изд. иностр. литер. – 1963, С. 122 - 123), что при всех $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{p'(x)\, dx}{p(x)} = k. \tag{86}$$

Если коэффициенты многочлена $p_\delta(x) = b_n(\delta) x^n + \ldots + b_0(\delta), \quad b_n(\delta) \neq 0$, достаточно близки к коэффициентам $p(x)$, то $|p_\delta(x)| > 0$, если $|x| = \varepsilon$. Кроме того, значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{p'_\delta(x)\, dx}{p_\delta(x)} \tag{87}$$

близко значению интеграла (86). Учитывая, что интеграл (87) принимает целые значения, получаем,что интеграл (87) равен k. $\square$

Определение 6.2. Пусть задана матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. i-ым *кругом Гершгорина* Γ_i называется множество всех таких $z \in \mathbb{C}$, что

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Теорема 6.3 (Гершгорин, 1931)**.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. *Если λ – собственное значение A, то λ лежит в некотором круге Гершгорина. Если объединение $k \leq n$ из этих кругов, например, $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ образуют связную область, не пересекающуюся с $\Gamma_{k+1} \cup \cdots \cup \Gamma_n$, то в $\Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ лежит ровно k собственных значений A, считая с их кратностями.*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение A и $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, например, что $|x_1| \geq |x_2| \geq \cdots \geq |x_n|$. Тогда $x_1 \neq 0$ и

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1.$$

Отсюда

$$\lambda - a_{11} = a_{12}\frac{x_2}{x_1} + \cdots + a_{1n}\frac{x_n}{x_1},$$

и поэтому

$$|\lambda - a_{11}| \leq \sum_{i>1} |a_{1i}|,$$

т.е. $\lambda \in \Gamma_1$.

Для доказательства второго утверждения положим $A = D + \varepsilon B$, где $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ и $B = A - D$. Пусть $A(\varepsilon) = D + \varepsilon B$. Тогда соответствующие круги Гершгорина $\Gamma_i(\varepsilon)$ содержатся в соответствующих кругах Γ_i. Если $\varepsilon = 0$, то собственные значения D, равные $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, лежат в кругах $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Если ε меняется от 0 до 1, то собственные значения непрерывно зависят от ε по теореме 6.1 и лежат в кругах Гершгорина. Первые k корней, принимающих при $\varepsilon = 0$ значения $a_{11}, \ldots, a_{kk}$, лежат в

$$\Gamma_1(\varepsilon) \cup \cdots \cup \Gamma_k(\varepsilon) \subseteq \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k,$$

причем по условию $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ не пересекается с остальными кругами Гершгорина. Отсюда вытекает утверждение. $\square$

2. QR-алгоритм

Теорема 6.4 (QR-разложение)**.** *Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F})$, где $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Тогда $A = QR$, где Q – ортогональная (унитарная) матрица, R – верхнетреугольная матрица. Если матрица A невырождена, то R можно выбрать с положительными диагональными коэффициентами. В этом случае Q и R определяются однозначно.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Существует такая ортогональная (унитарная) матрица Q_1 размера n, что

$$Q_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \lambda & b_1 & * \\ 0 & b_2 & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_n & * \end{pmatrix}.$$

Выберем ортогональную (унитарную) матрицу Q_2 размера $n-1$ так, чтобы

$$Q_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \end{array}\right) Q_1 A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

и т.д. Отсюда вытекает существование разложения.

Ясно, что можно добиться положительности диагональных элементов R, если A невырождено. Пусть $QR = Q'R'$, где R, R' верхнетреугольные матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда $Q^{-1}Q' = RR'^{-1}$ – ортогональная (унитарная) верхнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами. Отсюда диагональные элементы равны 1 и в силу ортогональности разных строк матрицы RR'^{-1} получаем, что эта матрица единичная. □

Теорема 6.5 (Приведение к трехдиагональному виду)**.** *Пусть задана симметричная матрица $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Тогда существует такая ортогональная матрица Q, что матрица QA^tQ имеет трехдиагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Доказательство. Пусть первый столбец A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Существует такая ортогональная матрица U размера $n-1$, что

$$U \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В силу симметричности матриц получаем

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U \end{array}\right) A \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^tU \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Доказательство завершается индукцией по размеру матрицы. □

Определение. *Матрицей Якоби* называется вещественная трехдиагональная матрица вида (88), причем числа $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ отличны от нуля.

Предложение 6.6. *Матрица Якоби не имеет кратных комплексных корней.*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение кратности k у матрицы Якоби J. Так как матрица J подобна диагональной матрице, то в этом случае ранг матрицы $J - \lambda E$ равен $n-k$, где n – размер матрицы. С другой стороны, из вида J вытекает, что ранг $J - \lambda E$ равен $n-1$, так как в этой матрице имеется ненулевой минор порядка $n-1$. □

Отметим, что если в матрице (88) некоторый элемент $\beta_j = 0$, то эта матрица распадается на трехдиагональные блоки меньшего размера.

Предложение 6.7. *Пусть матрица A имеет QR-разложение $A = QR$. Тогда матрица A подобна матрице $B = RQ$ и поэтому собственные значения B совпадают с собственными значениями A. Если матрица A симметрична, то и матрица B симметрична.*

Доказательство. Имеем $B = RQ = Q^{-1}QRQ = Q^{-1}AQ$. Кроме того, если матрица A симметрична, то

$$^{t}B = {}^{t}Q^{t}A^{t}Q^{-1} = Q^{-1}AQ = B,$$

поскольку матрица Q ортогональна. □

Теорема 6.8. *Пусть J - невырожденная симметрическая трехдиагональная вещественная матрица вида* (88) *и $J = QR$ – ее QR-разложение. Тогда матрица RQ трехдиагональна. Элемент $\beta_{i-1} = 0$ в J тогда и только тогда, когда в RQ на месте $(i, i-1)$ стоит нулевой элемент. В частности, если J – матрица Якоби, то и RQ – матрица Якоби.*

Доказательство. Имеем $RQ = RQRR^{-1} = RJR^{-1}$. Пусть J имеет вид (88), и

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} r'_{11} & \dots & r'_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в RJR^{-1} на месте (i, j) стоит произведение

$$(0, \dots, 0, r_{ii}, r_{i,i+1}, \dots, r_{in})J \begin{pmatrix} r'_{1j} \\ \vdots \\ r'_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(0, \dots, 0, r''_{i-1}, r''_{i}, \dots, r''_{n}) \begin{pmatrix} r'_{1j} \\ \vdots \\ r'_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

где $r''_{i-1} = r_{ii}\beta_{i-1}$. Если $i-2 \geq j$, то произведение (89) равно нулю. Таким образом, RJR^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & & & & \\ \gamma_1 & \ddots & & \bigstar & \\ & \gamma_2 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

где $\gamma_{i-1} = r_{ii}\beta_{i-1}r'_{i-1,i-1}$. При этом $\gamma_{i-1} = 0 \iff \beta_{i-1} = 0$, поскольку $r_{ii}, r'_{i-1,i-1} \neq 0$. По предложению 6.7 в силу симметричности J получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 6.9. *Пусть линейный оператор $\mathcal{J}$ в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ задается невырожденной трехдиагональной якобиевой матрицей J и $J = QR$ – ее QR- разложение. Тогда*

1) $Qe_1 = \pm\frac{1}{\|\mathcal{J}e_1\|}\mathcal{J}e_1$, где $\|\|$ – евклидова норма;

2) базис $\mathbf{e}$ получается из системы векторов

$$(e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, \mathcal{J}^{n-1}e_1)$$

с помощью процессов ортогонализации и нормализации;

3) в базисе $\mathbf{e}Q$ матрица $\mathcal{J}$ имеет вид RQ;

4) базис $\mathbf{e}Q$ получается из системы векторов

$$(\mathcal{J}e_1, \dots, \mathcal{J}^n e_1)$$

с помощью процессов ортогонализации и нормализации.

В частности, векторы базисов $\mathbf{e}, \mathbf{e}Q$ определяется по первым векторам e_1, e_1Q однозначно, с точностью до ± 1.

Доказательство. Имеем

$$J = Q\begin{pmatrix} r_{11} & * \\ 0 & * \\ \cdots & \cdots \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

При этом в базисе $\mathbf{e}$ имеем

$$\mathcal{J}e_1 = QRe_1 = Q \begin{pmatrix} r_{11} & * \\ 0 & * \\ \dots & \dots \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{11}Qe_1.$$

Так как $\|Qe_1\| = \|e_1\| = 1$, то $\|\mathcal{J}e_1\| = |r_{11}|$. Отсюда вытекает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заметим, что для каждого $k < n$ в силу трехдиагональности J совпадают линейные оболочки

$$\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e_1, \mathcal{J}e_1, \dots, \mathcal{J}^{k-1}e_1 \rangle.$$

Для доказательства третьего утверждения заметим, что в базисе $\mathbf{e}Q$ матрица $\mathcal{J}$ имеет вид $Q^{-1}JQ = Q^{-1}QRQ = RQ$. Последнее утверждение вытекает из первого и второго. $\square$

Определение. Пусть задана вещественная матрица A. *QR-последовательностью* для A называется последовательность матриц $A_m, m \geq 0$, причем

- $A_0 = A$;
- для каждого $m \geq 0$ выбрано QR-разложение

$$A_m = Q_m R_m, \text{ причем } A_{m+1} = R_m Q_m.$$

Теорема 6.10. *Пусть A – невырожденная матрица Якоби, причем все ее собственные значения различны по модулю. Построим QR-последовательность A_m, $m \geq 0$, $A_0 = A$. Тогда эта последовательность сходится к диагональной матрице* $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения A, причем $|\lambda_1| > \ldots > |\lambda_n|$.*

Доказательство. Рассмотрим A как матрицу некоторого симметричного оператора $\mathcal{A}$, заданную в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}(0) = (e_{01}, \dots, e_{0n})$. Построим по возникающим при построении QR-последовательности A_m, $m \geq 0$, ортогональным матрицам Q_m, $m \geq 0$, базисы

$$\mathbf{e}(m+1) = \mathbf{e}(m)Q_m, \ m \geq 0,$$

где $\mathbf{e}(m) = (e_{m1}, \ldots, e_{mn})$. Используя формулу изменения матрицы оператора при изменении базиса замечаем, что каждая матрица $A_m, m \geq 0$, является матрицей оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}(m)$. По теореме 6.8 каждая матрица A_m трехдиагональна. По теореме 6.9 имеем

$$\begin{gathered} e_{m+1,1} = Q_m e_{m1} = \pm \tfrac{1}{\|\mathcal{A}e_{m1}\|}\mathcal{A}e_{m1} = \\ \pm \tfrac{1}{\|\mathcal{A}e_{m1}\|}\mathcal{A}(\pm \tfrac{1}{\|\mathcal{A}e_{m-1,1}\|}\mathcal{A}e_{m-1,1}) = \\ \cdots = \gamma_m \mathcal{A}^{m+1} e_{01}. \end{gathered} \tag{90}$$

Так как $\|e_{m+1,1}\| = 1$, то $|\gamma_m| = \|\mathcal{A}^{m+1}e_{01}\|$.

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ – собственный ортонормированный базис для оператора $\mathcal{A}$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. По условию можно считать, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$. Пусть $e_{01} = \tau_1 f_1 + \cdots + \tau_n f_n$. Тогда

$$\mathcal{A}^m e_{01} = \lambda_1^m \tau_1 f_1 + \cdots + \lambda_n^m \tau_n f_n. \tag{91}$$

Если бы $\tau_i = 0$ для некоторого i, то по (91) все векторы $\mathcal{A}^m e_{01}$ лежали бы в линейной оболочке $U = \langle f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n\rangle$, поскольку U инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Но векторы $e_{01}, \mathcal{A}e_{01}, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}e_{01}$ по теореме 6.9 образуют базис всего пространства. Полученное противоречие показывает, что все коэффициенты $\tau_i, i = 1, \ldots, n$, отличны от нуля.

По (90) и (91) имеем

$$e_{m,1} = \tag{92}$$

$$\pm\,(\sqrt{\lambda_1^{2m}\tau_1^2 + \cdots + \lambda_n^{2m}\tau_n^2})^{-1}[\lambda_1^m \tau_1 f_1 + \cdots + \lambda_n^m \tau_n f_n]$$

$$= \pm(\sqrt{\tau_1^2 + \cdots + (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^{2m}\tau_n^2})^{-1}[\tau_1 f_1 + \cdots + \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m}\tau_n f_n]$$

$$= \varepsilon_1 f_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^m z_{m,1}, \tag{93}$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$ не зависит от m и $\|z_{m,1}\|$ ограничено при всех m.

Пусть для $i = 1, \ldots, r < n$ уже доказано, что

$$e_{m,i} = \varepsilon_i f_i + \delta_i^m z_{m,i}, \tag{94}$$

где

$$\varepsilon_i = \pm 1, \quad \delta_i = \max(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|, \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|, \dots, \left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right|),$$

и $\|z_{m,i}\|$ ограничено при всех m.

Так как все числа λ_i различны, то система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^r \\ \vdots \\ \lambda_r^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \tag{95}$$

имеет и притом единственное решение $x_1, \dots x_r$. По тем же соображениям для любого $j \geq r+1$ имеем

$$0 \neq \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^r \\ 1 & \lambda_j & \dots & \lambda_j^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_j \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Пусть $r \geq 1$. Рассмотрим столбец из координат вектора

$$h = \mathcal{A}^{m+r} e_{01} - x_1 \mathcal{A}^m e_{01} - \dots - x_r \mathcal{A}^{m+r-1} e_{01},$$

в базисе $\mathbf{f}$, где x_i из (95). В силу (91), (95) столбец из координат h в базисе $\mathbf{f}$ равен

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{m+r}\tau_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^{m+r}\tau_n \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^r \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+i-1}\tau_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^{m+i-1}\tau_n \end{pmatrix} x_i = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+r}\tau_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^{m+r}\tau_n \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m\tau_1 & \dots & \lambda_1^{m+r-1}\tau_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^m\tau_n & \dots & \lambda_n^{m+r-1}\tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{r+1}^m \tau_{r+1} w_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n^m \tau_n w_n \end{pmatrix}, \tag{97}$$

где $w_{r+1},\ldots,w_n$ из (96) не зависят от m. По (97) как и в (92) имеем

$$\begin{aligned} g = \frac{h}{\|h\|} &= (\sqrt{\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i^{2m}\tau_i^2 w_i^2})^{-1}(\sum_{i=r+1}^{n}\lambda_i^m\tau_i w_i f_i) \\ &= \frac{\lambda_{r+1}^m\tau_{r+1}w_{r+1}}{|\lambda_{r+1}^m\tau_{r+1}w_{r+1}|}f_{r+1} + (\frac{\lambda_{r+2}}{\lambda_{r+1}})^m z'_m \\ &= \varepsilon' f_{r+1} + (\frac{\lambda_{r+2}}{\lambda_{r+1}})^m z'_m, \end{aligned} \tag{98}$$

где $\varepsilon' = \pm 1$, и $\|z'_m\|$ ограничено при всех m и ε' не зависит от m. Здесь мы предполагаем, что $\lambda_{r+2} = z'_m = 0$, если $r+1 = n$.

Найдем $\cos\alpha$, где α – угол между вектором g и подпространством

$$L = \langle \mathcal{A}^m e_{01},\ldots,\mathcal{A}^{m+r-1}e_{01}\rangle.$$

В силу теоремы 6.8 векторы $e_{m+1,1},\ldots,e_{m+1,r}$ образуют ортонормированный базис L. Пусть $u = \sum_{i=1}^r \zeta_i e_{m,i}$ – ортогональная проекция g на L. Тогда $\zeta_i = (g, e_{m,i})$, причем в силу (94) и (98) $\zeta_i = O(\delta_r^m)$. Так как $\|g\| = 1$, то в силу ортонормированности $e_{m,1},\ldots,e_{m,r}$ получаем

$$\cos\alpha = \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\zeta_i^2} = O(\delta_{r+1}^m). \tag{99}$$

По теореме 6.8 ортогональное дополнение к L в

$$\langle \mathcal{A}^m e_{01},\ldots,\mathcal{A}^{m+r}e_{01}\rangle$$

равно $\langle e_{m,r+1}\rangle$. По (98), (99) при $m\to\infty$ расстояние от f_{r+1} до $\langle e_{m,r+1}\rangle$ стремится к нулю. Так как $\|f_{r+1}\| = \|e_{m,r+1}\| = 1$, то

$$e_{m,r+1} = \varepsilon_{r+1}f_{r+1} + \delta_{r+1}^m z_m.$$

Так как A_m – матрица $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}(m)$, то

$$A_m = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) + \delta_n^m B_m,$$

где все элементы матрицы B ограничены. □

Следствие 6.11. *Пусть A – невырожденная симметрическая трехдиагональная матрица, все собственные* *значения которой различны по модулю. Построим QR-последовательность A_m для A. Тогда эта последовательность сходится к диагональной матрице.*

Доказательство. Матрица A разбивается на диагональные блоки, каждый из которых является матрицей Якоби. По теореме 6.8 это разбиение сохраняется во всех матрицах A_m, $m \geq 0$. Остается воспользоваться теоремой. $\square$

3. Метод Холецкого

Предложение 6.12. *Пусть A - симметрическая матрица с положительными собственными значениями. Тогда $A = {}^tRR$, где R – верхнетреугольная матрица. Если матрица A трехдиагональна, то матрица R имеет вид*

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Доказательство. Пусть $B^2 = A$, где B – симметричная матрица с положительными собственными значениями и пусть $B = QR$. Тогда

$$A = B^2 = {}^tBB = {}^tR{}^tQQR = {}^tRR.$$

Пусть $R = (r_{ij}), r_{ii} \neq 0$. Тогда при $i + 2 \leq j$ в ${}^tRR$ имеем

$$(r_{1i}, \dots, r_{ii}, 0 \dots, 0) \begin{pmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Варьируя $i = 1, \dots, j-2$ получаем, что $r_{ij} = 0$ при $i \leq j-2$. $\square$

Предложение 6.13. *Если невырожденная матрица A представима в виде $A = {}^tRR$, где R – верхнетреугольная матрица, то матрица R^tR симметрична и подобна A.*

Доказательство. Имеем

$$R^tR = R^tRRR^{-1} = RAR^{-1},$$

т. е. матрица R^tR подобна A. Кроме того, $(R^tR)^t = R^tR$, т. е. эта матрица симметрична. $\square$

Предложение 6.14. *Если трехдиагональная матрица A представима в виде $A = {}^tRR$, где R – верхнетреугольная матрица вида* (100), *то матрица R^tR является матрицей Якоби.*

Доказательство. По предложению 6.12 матрица R имеет вид (100). Если A имеет вид (88), то

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = x_1^2, & \alpha_2^2 = x_2^2 + y_1^2, & \dots, & \alpha_n^2 = x_n^2 + y_{n-1}^2, \\ \beta_1^2 = x_1^2 y_1^2, & \beta_2^2 = x_2^2 y_2^2, & \dots, & \beta_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 y_{n-1}^2. \end{array} \tag{101}$$

В частности, элементы $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1}$ отличны от нуля. Рассмотрим матрицу

$$R^tR = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_1 & x_2 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

В этой симметричной матрице на месте (i, j) стоит произведение

$$c_{ij} = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, x_i, y_i, 0, \dots, 0) \times$$

$$^t(\overbrace{0,\dots,0}^{j-1},x_j,y_j,0,\dots,0). \qquad (102)$$

Следовательно, если $i+2\leq j$, то $c_{ij}=0$. Если $i=j-1$, то $c_{i,i+1}=x_{i+1}y_i\neq 0$ по (101). Поэтому R^tR – матрица Якоби. □

Заметим, что формулы (101), (102) показывают, что по $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ можно найти элементы $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_{n-1}$, причем диагональные элементы c_{ii} матрицы R^tR равны

$$c_{ii}=y_i^2+x_i^2,\quad i=1,\dots,n,$$

где $y_n=0$.

Предложение 6.15. *Пусть A – симметричная матрица с положительными собственными значениями и $A={}^tRR$, где R - верхнетреугольная матрица. Предположим, что $A=B^2$ и $Q=BR^{-1}$. Тогда матрица Q ортогональна.*

Доказательство. Имеем

$${}^tQQ={}^tR^{-1t}BBR^{-1}={}^tR^{-1}B^2R^{-1}={}^tR^{-1t}RRR^{-1}=E.$$

□

Теорема 6.16. *Пусть A – симметричная матрица с различными положительными собственными значениями. Построим последовательность матриц $A_m, m\geq 0$, где $A_0=A$ и для каждого $m\geq 0$ выбрано разложение $A_m={}^tR_mR_m$, причем $A_{m+1}=R_m{}^tR_m$, где R_m – верхнетреугольные матрицы. Тогда последовательность $A_m, m\geq 0$ сходится к диагональной матрице.*

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что симметрическая квадратная матрица A является квадратом симметрической алгебры B с положительными собственными значениями. Положим $A_1=A, B_1=B$. Пусть уже построена последовательность симметрических матриц $B_m,\quad m\geq 0$, с положительными собственными значениями, причем $A_m=B_m^2$ для всех m. Тогда $B_m=Q_mR_m$, где по предложение 6.15 матрицы Q_m ортогональны. Построим матрицы R_mQ_m и сравним их с A_{m+1}. Заметим, что

$$(R_mQ_m)^2=R_mQ_mR_mQ_mR_mR_m^{-1}=$$

$$R_m B_m^2 R_m^{-1} = R_m A_m R_m^{-1} =$$
$$R_m{}^t R_m R_m R_m^{-1} = R_m{}^t R_m = A_{m+1} = B_{m+1}^2. \qquad (103)$$

Обе матрицы $U = B_{m+1}, V = R_m Q_m$ симметричны, их собственные значения различны и положительны в силу (103). Для завершения доказательства теоремы остается доказать следующую лемму.

Лемма 6.17. *Пусть U, V – симметрические операторы с различными положительными собственными значениями, причем $U^2 = V^2$. Тогда $U = V$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ – все собственные значения оператора U. По условию все эти значения различны. Из курса линейной алгебры известно, что существует собственный ортонормированный базис $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ для оператора U, причем $Ue_i = \lambda_i e_i, 1 \le i \le n$. В этом базисе матрица U имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$. В базисе $\mathbf{e}$ матрица оператора U^2 имеет вид $\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$, причем $\lambda_1^2 > \ldots > \lambda_n^2$.

Аналогично, существует ортонормированный базис $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, в котором матрица V имеет вид $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu_1 > \ldots > \mu_n$, а матрица V^2 имеет вид $\mathrm{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2)$, $\mu_1^2 > \ldots > \mu_n^2$.

Так как $U^2 = V^2$, то $\lambda_1^2 = \mu_1^2, \ldots, \lambda_n^2 = \mu_n^2$, и $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$. Но для любого i получаем

$$\langle e_i \rangle = \ker(U^2 - \lambda_i E) = \ker(V^2 - \mu_i E) = \langle f_i \rangle.$$

Отсюда можно считать, что $e_i = f_i$. Итак, $\mathbf{e} = \mathbf{f}$ и в этом общем базисе матрицы операторов U, V равны. $\square$

$\square$

4. Метод бисекций

Этот метод позволяет отыскивать для произвольной вещественной симметрической матрицы все ее собственные значения на любом интервале и исследовать общее распределение собственных значений. Для ускорения работы этот алгоритм обычно применяют для трехдиагональных матриц. В основе метода бисекций лежит закон инерции для квадратичных форм, теорема Сильвестра. Пусть A – заданная симметрическая вещественная матрица. Заметим, что если матрица A подобна матрице B, т. е. $B = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы C, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ матрица $A - \lambda E$ подобна матрице $B - \lambda E$. Действительно, $B - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C$. Таким образом, если J – трехдиагональная матрица, подобная A, то $J - \lambda E$ – трехдиагональная матрица, подобная $A - \lambda E$.

Отметим, что если матрица $A - \lambda E$ вырождена, то число λ является собственным значением A. Поэтому можно предполагать, что матрицы $A - \lambda E, J - \lambda E$ невырождены.

Вычислим для матрицы $J - \lambda E$ последовательность ее главных миноров

$$1,\ \delta_1(\lambda),\ \ldots,\ \delta_n(\lambda) \tag{104}$$

и обозначим через $n_-(\lambda)$ количество отрицательных собственных значений матриц $A - \lambda E$ и $J - \lambda E$. Из курса линейной алгебры известно, что число $n_-(\lambda)$ равно числу перемен знаков в последовательности (104). Таким образом, если задан интервал $(\lambda_1, \lambda_2) \subseteq \mathbb{R}$, то число $n_-(\lambda_2) - n_-(\lambda_1)$ равно числу собственных значений A и J, лежащих в интервале (λ_1, λ_2). Многократно деля отрезок (λ_1, λ_2) пополам мы сможем найти собственное значение A с любой точностью. Обычно для нахождения всех собственных значений A в качестве первоначального интервала берется интервал $(-\lambda, \lambda)$, где λ – верхняя граница кругов Гершгорина.

Отметим, что если J – матрица Якоби вида (88), то, разлагая ее определитель по последнему столбцу и последней строке, получаем рекуррентную формулу для вычисления главных миноров J. Именно, если $m = 2, \ldots, n-1$, то

$$\begin{gathered}\delta_0(\lambda) = 1, \quad \delta_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,\\ \delta_{m+1}(\lambda) = (\alpha_{m+1} - \lambda)\delta_m(\lambda) - \beta_m^2 \delta_{m-1}(\lambda).\end{gathered} \tag{105}$$

Из (105) видно, что два соседних минора $\delta_{m+1}(\lambda), \delta_m(\lambda)$ не могут одновременно равняться нулю. Кроме того, если $\delta_m(\lambda) = 0$ для некоторого m, то $\delta_{m-1}(\lambda), \delta_{m+1}(\lambda)$ отличны от нуля и имеют разные знаки.

5. Упражнения

Упражнение 6.18. Пусть A – вещественная матрица, причем все круги Гершгорина не пересекаются. Доказать, что все собственные значения A вещественны.

Упражнение 6.19. Пусть в матрице A для каждого $i = 1, \ldots, k$ выполнено неравенство

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Доказать, что ранг матрицы A не меньше k.

Упражнение 6.20. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Доказать, что $A = QDQ'$, где матрицы Q, Q' ортогональны, а матрица D диагональна.

Упражнение 6.21. Пусть $w \neq 0$ – вектор евклидова пространства E. Рассмотрим в E отображение $x \to U_w(x) = x - 2\frac{(x,w)}{(w,w)}w$. Доказать, что U_w является ортогональным оператором, причем $U_w(w) = -w$, и $U_w(x) = x$, если $x \in < w >^{\perp}$.

Упражнение 6.22. Пусть x, y – ненулевые векторы из евклидова пространства, причем $y \notin < x >$. Доказать, что существует такой ненулевой вектор w, что $U_w(x) = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}$.

Упражнение 6.23. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Тогда существуют такие векторы $w_1, \ldots, w_k$, где $k \leq n - 1$, что матрица $U_{w_1} \cdots U_{w_k} A$ верхнетреугольная.

Упражнение 6.24. Пусть задана QR-последовательность A_m, $m \geq 0$, сходящаяся к верхнетреугольной матрице. Найти собственные значения A_0.

Упражнение 6.25. Пусть задана QR-последовательность A_m, $m \geq 0$, сходящаяся к матрице B. Доказать, что $A_0 = {}^tUBU$ для некоторой унитарной (ортогональной) матрицы U.

Упражнение 6.26. Пусть A – комплексная матрица. Доказать, что существуют такие унитарные матрицы S, U, что

$A = SXU$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & y_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & y_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Если матрица A вещественная, то матрицы S, X, U можно выбрать вещественными.

Упражнение 6.27. Построить QR-последовательность для матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будет ли она сходится?

Упражнение 6.28. Пусть X – двудиагональная комплексная матрица из упражнении 6.26. Доказать, что $X = D_1 Y D_2$, где матрицы D_1, D_2 диагональны, а матрица Y вещественна.

Упражнение 6.29. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Привести матрицу A к трехдиагональному виду. Найти ее QR-разложение.

Упражнение 6.30. Привести матрицу

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 100 \end{pmatrix}$$

к трехдиагональному виду. Найти для нее QR-разложение.

Упражнение 6.31. Найти QR-разложение для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.32. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ – симметрическая матрица. Доказать, что существует такое вещественное число α, что

(1) матрица $A + \alpha E$ положительно определена;
(2) если λ – собственное значение $A + \alpha E$, то $-\lambda$ не является собственным значением $A + \alpha E$.

Упражнение 6.33. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ – симметрическая матрица с собственными значениями $\lambda_1 > \ldots . \lambda_n > 0$. Пусть число $\lambda \in \mathbb{R}$, причем $0 < \lambda_n - \lambda < \lambda_n$. Сравнить скорости сходимости QR-алгоритмов матриц A и $A - \lambda E$.

Упражнение 6.34. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 48 \\ 48 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найти число $\alpha \in \mathbb{R}$, для которого выполнены утверждения задачи упражнении 6.32.

Глава 7

Оптимальное управление портфелем ценных бумаг

Результаты этой главы принадлежат М. А. Гильману, Е. Е. Демидову и А. Г. Михееву.

Построение оптимальной стратегии управления портфелем ценных бумаг на заданном временном интервале, как по известным ретроспективным данным, так и по результатам прогноза, является весьма важной задачей. В первом случае найденная в безрисковой ситуации стратегия позволяет оценить "упущенные возможности", а во втором – с учетом риска определить наиболее целесообразное поведение инвестора на будущее.

в этой главе задача оптимизации будет сформулирована как задача линейного программирования. Будет показано, что в отсутствие ограничений по риску и по объему покупок/продаж задача сводится к "однобумажной"ситуации, Отсюда следует, что сложность вычислений оптимальной траектории может быть резко снижена. Кроме того, для решения задачи оптимизации с ограничениями по риску предлагаются некоторые приближенные методы.

1. Постановка задачи

В этом разделе анализируется задача управления портфелем из n активов на интервале N дней. Пусть задан начальный состав портфеля – вектор $Q^1 = (Q_1^1, \dots, Q_n^1)$, у которого координата Q_i^1 равна количеству i-го актива. Пусть на заданном периоде времени известны цены всех активов, именно, пусть P_i^t – средняя цена i-го актива в день t, и $\underline{P}_i^t, \overline{P}_i^t$ – ее нижняя и верхняя границы, соответственно. Предположим также, что на рассматриваемом периоде времени осуществляется ввод и вывод денежных средств из портфеля. Обозначим через F^t – сумму, вводимую (при $F_t > 0$) или выводимую (при $F^t < 0$) в день t. Будем считать, что комиссионные издержки при совершении сделки купли/продажи имеют вид τP, если P – сумма сделки, и τ – фиксированная ставка. Из дальнейшего видно, что если ставки комиссионных при покупке и при продаже различны, но не зависят от объемов сделки, то они могут быть надлежащим образом учтены.

Определение 7.1. Назовем *стратегией* управления портфелем такую последовательность векторов $Q^2, \dots, Q^N$ на каждый день управления, что суммарный капитал портфеля

$$\phi^t = P_1^t Q_1^t + \cdots + P_n^t Q_n^t$$

в конечный момент времени $t = N$ был бы максимален. При этом требуется, чтобы стратегия была бы *самофинансирующейся*, т. е. при переформировании портфеля должны быть учтены возможные издержки, а также поток денежных средств F. Кроме того, возможны ограничения на объемы покупок/продаж, а также ограничения по риску. Под *риском* будет пониматься недополучение прибыли.

В дальнейшем предполагается, что цены активов, служащие исходными данными для задачи, неотрицательны. Равенство $P_i^t = 0$ означает, что i-ый актив в день t не имеется в обращении, т. е. он либо погашен, либо еще не выпущен. Для достаточно больших N, как правило, несколько начальных или конечных отрезков строк цен обращаются в нуль.

С практической точки зрения предпочтение следует отдавать диверсифицированным стратегиям, при которых капитал портфеля распределен между активами в некотором смысле "равномерно". Это позволяет инвестору обезопасить себя от аномально резких изменений котировок отдельных активов. Известно несколько способов достижения разумной диверсификации – в основном, за счет введения в задачу нелинейности или дополнительных ограничений.

2. Линейные уравнения

Для того, чтобы написать уравнения, задающие условия самофинансирования, введем дополнительный актив – "деньги", количество которого в день t обозначим Q_0^t. Пусть s_i^t – часть количества i-го актива в день t, которая будет продана, а q_i^t – часть, которая будет оставлена. Тогда

$$Q_i^t = q_i^t + s_i^t, \quad i = 1\dots, n;$$
$$Q_0^t = \textstyle\sum_i S_i^t s_i^t + F^t,$$

где $S_i^t = P_i^t(1-\tau)$ – цена продажи единицы i-го актива в день t с учетом комиссионных издержек. Сумма денег Q_0^t, вырученная от продаж активов с учетом средств, вводимых в портфель или выводимых из него, расходуется далее на покупку активов. Пусть b_i^t – сумма денег, идущая на покупку i-го актива. Тогда

$$Q_i^{t+1} = q_i^t + B_i^t b_i^t, \quad i = 1\dots, n;$$
$$Q_0^t = \textstyle\sum_i b_i^t,$$

где

$$B_i^t = \begin{cases} \dfrac{1}{P_i^t(1+\tau)}, & \text{если } P_i^t \neq 0; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

– количество денег i-го актива, покупаемое на единицу денег с учетом комиссионных издержек.

Итак, после исключения переменных Q_i^t при $t = 1, \dots, N$, стратегия (последовательности векторов $Q^1, \dots, Q^N$) можно однозначно сопоставить набор из N векторов $v^1, \dots, v^N$ размерности $3n$ вида

$$v^i = (q_1^t, \dots, q_n^t, s_1^t, \dots, s_n^t, b_1^t, \dots, b_n^t).$$

Условия самофинансирования записываются с помощью блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} S^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B^1 & S^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & S^3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B^{N-1} & S^N \end{pmatrix}$$

размера $(n+1)N \times 3nN$, где матричные блоки S^i и B_i размера $(n+1) \times 3n$ имеют вид

$$S^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{11}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_1^t & S_2^t & \dots & S_n^t & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^t =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -B_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -B_2^t & \dots & 0 \\ \multicolumn{12}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -B_n^t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $v = (v^1, \dots, v^N)$ и $u = (u^1, \dots, u^n)$, где

$$\begin{array}{ccccccc} u^1 & = & (Q_1^1, & \dots, & Q_n^1, & F^1), \\ u^2 & = & (0, & \dots, & 0, & F^2), \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ u^N & = & (0, & \dots, & 0, & F^N). \end{array}$$

Тогда условие самофинансирования записывается в виде систем линейных уравнений $Av = u$.

Замечание 7.2. Если цены продаж будут ниже цен покупок (с учетом комиссионных издержек), то для оптимальной стратегии будут выполнены дополнительные ограничения

$$s_i^t b_i^t = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1 \dots, N,$$

поскольку в такой ситуации, очевидно, невыгодно сначала продавать некоторый актив, а потом покупать его же.

Замечание 7.3. Выписанные выше линейные ограничения нетрудно модифицировать для ситуации, когда денежные средства, вырученные от продаж активов, поступают на счет инвестора с некоторой задержкой, зависящей от типа данного актива (например, при электронных торгах по ГКО перевод денег происходит без задержек, а при торгах по акциям приватизированных предприятий задержка составляет от двух до пяти рабочих дней.) Для учета задержки нужная часть блоков S^1 в матрице A должна быть перенесена вниз. Кроме того, платежи, приходящиеся на дни, следующие за концом интервала управления, должны быть надлежащим образом учтены в функционале ϕ^N.

3. Линейные неравенства

Всегда имеются простые ограничения:

$$q_i^t \geq 0, \quad s_i^t \geq 0, \quad b_i^t \geq 0,$$
$$i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, N.$$

Совокупность этих ограничений будем как и выше обозначать $v \geq 0$. Ограничения на объемы продаж и покупок имеют, соответственно, вид

$$s_i^t \leqslant \overline{s}_i^t, \quad i = 1 \ldots, n; \qquad b_i^t \leqslant \overline{b}_i^t, \quad i = 1 \ldots, n.$$

Совокупность таких ограничений обозначим через $v \leqslant \overline{v}$. Здесь $\overline{w}$ означает верхнюю границу величины w на рассматриваемый период.

4. Декомпозиция

Итак, задача оптимального управления порфтелем, поставленная в разделе 2, приобретает вид задачи линейного программирования:

$$\phi^N(v) = P_1^N Q_1^N + \cdots + P_n^N Q_n^N \to \max,$$
$$Av = u, \quad 0 \leqslant v \leqslant \overline{v}.$$

Далее мы рассмотрим задачу оптимального управления портфелем с простыми ограничениями вид:

$$\phi^N(v) \to \max, \qquad Av = u, \quad v \geqslant 0, \quad u \geqslant 0. \tag{106}$$

Условие $u \geqslant 0$ означает, что на этапе управления не производится вывода средств. Напомним, что

$$\phi^N(v) = P_1^N Q_1^N + \cdots + P_n^N Q_n^N =$$
$$P_1^N(q_1^N + s_1^N) + \cdots + P_n^N(q_n^N + s_n^N).$$

является конечным капиталом портфеля.

Теорема 7.4. *Решение задачи является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами решений w_j задач*

$$\begin{gathered}\phi^N(w_j) \to \max,\\ Aw_j = e_j, \quad w_j \geqslant 0,\end{gathered}$$

где $j = 1, \dots, 3nN$, и $e_j = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ – базисный вектор,

$$v = \sum_{i=1}^{n} Q_i^1 e_i + \sum_{i=1}^{N} F^t e_{(n+1)t}.$$

Мы проведем доказательство в несколько шагов.

Предложение 7.5. *Пусть $N = 2$ и у вектора $(Q_1^1, \dots, Q_n^1, Q_0^1)$ все координаты, кроме одной, равны нулю. Тогда при оптимальной стратегии вектор $(Q_1^2, \dots, Q_n^2, Q_0^2)$ также обладает указанным свойством.*

Доказательство. Пусть сначала $Q_1^1 = \dots = Q_n^1 = 0$ и $Q_0^1 \neq 0$. Тогда

$$r = Q_0^1 + F^1 = \sum_i b_i^1 + Q_0^2, \quad b_1^1, \dots, b_n^1, Q_0^2 \geqslant 0. \tag{107}$$

Заметим, что

$$Q_i^2 = b_i^1 B_i^2, \quad B_i^1 \geqslant 0, i \geqslant 1. \tag{108}$$

Необходимо найти

$$\phi^2(v) = P_1^2 Q_1^2 + \dots + P_n^2 Q_n^2 \to \max$$

при условиях (107), (108). Указанные ограничения задают полиэдр, вершины которого имеют все нулевые координаты, кроме одной. Поэтому max достигается в вершине.

Предположим теперь, что

$$Q_1^1 \neq 0, \quad Q_2^1 = \dots = Q_n^1 = Q_0^1 = 0.$$

Тогда

$$\begin{gathered}r = S_1^1 s_1^1 = \textstyle\sum_i b_i^1 + Q_0^2,\\ Q_1^1 = q_1^1 + s_1^1, \qquad Q_i^2 = q_i^1 + B_i^1 b_i^1, \quad i \geqslant 1,\end{gathered}$$

причем $b_i^1 s_i^1 = 0$. Снова экстремум достигается в вершине. □

Определение 7.6. Аффинная функция $\Phi(x)$ *конусно-линейна*, если $\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$ для всех $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Предложение 7.7. *Решение задачи* (106) *конусно линейна.*

Доказательство. Проверим справедливость этого утверждения индукцией по числу шагов. Случай одного шага рассмотрен в предложении 7.5. Нам необходима

Лемма 7.8. *Рассмотрим две задачи линейного программирования*

$$(ZZ): \quad \begin{cases} \phi \to \max \\ Ax = b, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \qquad (ZZ\lambda): \quad \begin{cases} \phi \to \max \\ Ax = \lambda, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$$

Тогда $\lambda(\max_{ZZ}) = \max_{ZZ\lambda}$.

Доказательство этой леммы является несложным утверждением.

Завершим доказательство предложения. Пусть для t шагов утверждение доказано. Тогда на каждом шаге свойство конечно-линейности сохраняется в силу леммы. □

Из предложений 7.5, 7.7 вытекает утверждение теоремы 7.4.

Следствие 7.9. *Изначально однобумажный портфель остается однобумажным на всем интервале управления.*

Следствие 7.10. *Нахождение максимальной доходности портфеля при отсутствии*
ввода/вывода средств (чистой спекулятивной доходности) при заданном начальном капитале портфеля эквивалентно перебору n вариантов вложения этого капитала в один из активов.

Пусть Q'^t и Q''^t, $t = 1, \ldots, N$ – две стратегии управления портфелем. Назовем *суммой* этих стратегий стратегию Q^t, при которой

$$Q_i^t = Q_i'^t + Q_i''^t, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема 7.11. *Оптимальная стратегия в задаче* (106) *при отсутствии вывода средств равна сумме $n + n_{in}$ однобумажных стратегий, где n_{in} – количество дней, в которые происходит ввод средств.*

Замечание 7.12. Как показывает практика, вырождение оптимальной стратегии в однобумажную производит через несколько шагов, в основном, благодаря тому, что цена какого-либо актива аномально резко изменилась. Как правило, при не слишком больших ставках трансакционных издержек ($r \approx 0.01$) оптимальная стратегия сводится к переложению средств в наиболее доходный (к следующему дню) актив. При более равномерном поведении цен стратегия остается диверсифицированной.

5. Однобумажная задача

Пусть в первый день периода управления все средства вложены в один актив, ввод/вывод средств производится без ограничений на объем покупок/продаж. В этом случае вся стратегия будет однобумажной.

Пусть Q_j^t – количество j-ого актива в день t, P_j^t – его цена. Тогда количество i-го актива, купленного по цене P_i^t на всю вырученную от продаж j-го актива сумму (с учетом трансакционных издержек) равна

$$Q_i^{t+1} = \frac{P_j^t(1-\tau)}{P_i^t(1+\tau)} Q_j^t.$$

Определим трансакционных матрицы T^t, $\quad t = 2, \dots, N$, полагая

$$T_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{P_j^t(1-\tau)}{P_i^t(1+\tau)} Q_j^t, & \text{если } i \neq j, \quad P_i^t . P_j^t \neq 0; \\ 1, & \text{если } i = j, P_i^t \neq 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, задача оптимальной стратегии сводится к вычислению

$$\max_{i_1,\dots,i_{N-1}} (T^N_{i_N i_{N-1}} \cdots T^2_{i_2 i_1} Q^1_{i_1}) = Q^N_{i_N} \tag{109}$$

и нахождению оптимальной *траектории*, т. е. последовательности $i_1, \ldots, i_N$, на который этот максимум достигается. Здесь Q^1 – вектор начальных количеств активов, имеющих лишь одну ненулевую компоненту. Конец i_N оптимальной траектории определяется как номер актива, на котором достигается максимум конечного капитала – $\max_i(P_i^N Q_i^N)$.

Рассмотрим множество $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел с операциями

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \odot y = xy.$$

Эти операции превращают $\mathbb{R}_+$ в ассоциативное идемпотентное полукольцо. Нетрудно видеть, что выражения (109) сводятся к перемножению трансакционных матриц в смысле полукольца $\mathbb{R}_+$, именно,

$$Q_{i_N}^N = (T^N \odot \cdots \odot T^2 \odot Q^1)_{i_N},$$

поскольку $(A \odot B)_{ij} = \max_k(a_{ik} b_{kj})$, и умножение матриц ассоциативно. Сложность операции матричного умножения в полукольце $\mathbb{R}_+$ такая же, что и в сложность обычного матричного умножения. Тем самым, задача управления однобумажным портфелем допускает эффективное решение.

Для нахождения траектории можно завести вспомогательный массив индексов I_j^t, где $j = 1, \ldots, n$ и $t = 1, \ldots, N-1$, с

$$I_j^t = i_0 : (T^{t+1} \odot Q^t)_j = T_{ji_0}^{t+1} Q_{i_0}^t,$$

т. е. на i_0 достигается максимум произведений $T_{ji}^{t+1} Q_i^t$. Здесь

$$Q^t = T^{t-1} \odot \cdots \odot T^2 \odot Q^1.$$

Положим $I_j^N = j$. Конец оптимальной траектории i_N определяется из условия

$$P_{i_N}^N Q_{i_N}^N = \max_i(P_i^N Q_i^N).$$

Далее, если $i_N, i_{N-1}, \ldots, i_t$ уже известны, то i_{t-1} определяется из условия $i_{t-1} = I_{i_t}^{t-1}$. Итак, однобумажная задача решена.

Для оценки риска однобумажной траектории $(i_1, \ldots, i_N)$ заметим, что конечный капитал

$$C_{out} = C(Q_{i_1}^1, i_1, \ldots, i_N) = P_{i_N}^N Q_{i_N}^N$$

может уменьшиться, если продажи осуществляются по ценам $\underline{P}_i^t$, в то время как покупки – по ценам P_i^t (напомним, что $\underline{P}_i^t \leqslant P_i^t \leqslant \overline{P}_i^t$). Поэтому, если определить матрицы "невыгодных трансакций"как

$$\hat{T}_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{\underline{P}_i^t(1-\tau)}{\overline{P}_i^t(1+\tau)}, & \text{если } i \neq j, \quad \underline{P}_i^t, \overline{P}_i^t \neq 0, \\ 1, & \text{если } i = j, \quad P_i^t \neq 0, \\ 0, & \text{в противном случае }, \end{cases}$$

то

$$C_{out} \geqslant \overline{C} = \overline{C}(Q_{i_1}^1, i_1, \ldots, i_N) = \underline{P}_{i_N}^N \hat{T}_{i_N i_{N-1}}^N \cdots \hat{T}_{i_2 i_1}^1 Q_{i_1}^1.$$

Отметим, что зависимость $\overline{C}(Q_{i_1}^1, i_1, \ldots, i_N)$ от $Q_{i_1}^1$ при фиксированной траектории линейна.

Замечание 7.13. При решении однобумажной задачи полезно добавить еще один актив "деньги". Введение этого актива позволит рассматривать такой вариант стратегии, когда вместо убыточного вложения средств в один из активов происходит их "консервация"в виде денег. Для этого к матрице цен P_i^t надо приписать еще одну строку (будем считать ее нулевой) с $P_0^t = 1$ для всех $t = 1, \ldots, N$. Правила составления трансакционных матриц остаются после этого прежними.

Замечание 7.14. В трансакционной матрице T^t может быть закодирована разнообразная информация об условиях торгов в данный день. Например, рассмотрим портфель ГКО в день аукциона t. Пусть в этот день выпускаются облигации i_0, а облигации j_0 гасятся; по другим облигациям в этот день, согласно правилам, торги не производятся. Кроме того, при погашении облигации комиссионные с получаемой суммы не взимаются. Поэтому матрица T^t должна выглядеть следующим образом

$$T_{i_0 j_0}^t = \frac{P_{nom}}{P^t - i_0(1+\tau)},$$

(P_{nom} – номинальная цена облигации, по которой и осуществляется погашение),

$$T_{0 j_0}^t = P_{nom}, \quad T_{i_0 0}^t = \frac{1}{P^t - i_0(1+\tau)}$$

(актив с номером 0 – это "деньги"),

$$T_{00}^t = 1, \quad T_{ii}^t = 1,$$

если i-ая облигация существует в день t и $i \neq i_0, j_0$. В остальных случаях полагаем $T_{ij}^t = 0$. Таким образом, в день аукциона можно либо вложить полученную после погашения сумму в выпускаемую облигацию, либо сохранить эту сумму в виде денег, либо, наконец, истратить имеющиеся деньги по покупку выпускаемой облигации.

6. Приближенное решение задачи с ограничением по риску

Предположим, что портфель должен быть сформирован, исходя из начального капитала C_{in}. Пусть в течение интервала управления отсутствует ввод/вывод средств, а для конечного капитала C_{out} установлено ограничение $C_{out} \geqslant \mathbb{C}_{in}$. Идея состоит в том, чтобы добиться выполнения поставленного ограничения при помощи подходящей начальной диверсификации портфеля.

Действительно, пусть капитал C_{in} распределяется между активами следующим образом:

$$C_{in} = \sum_{i=1}^{n} P_i^1 Q_i^1.$$

Для каждого актива $k = 1, \ldots, n$ решим однобумажную задачу с начальным количеством 1 и найдем набор оптимальных траекторий

$$(k, i_2^k, \ldots, i_N^k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Вычислим для этих траекторий конечные капиталы и их нижние оценки

$$c_k = C(1; k, i_2^k, \ldots, i_N^k),$$
$$\overline{c}_k = \overline{C}(1; k, i_2^k, \ldots, i_N^k).$$

Отсюда нижняя граница для конечного капитала равна

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k Q_k^1.$$

Таким образом, получилась несложная задача линейного программирования

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} c_k Q_k^1 \to \max,\\ \sum_{k=1}^{n} P_k^1 Q_k^1 = C_{in},\\ \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k Q_k^1 \geqslant C_{out},\\ Q_k^1 \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, n.\end{gathered}$$

Очевидна модификация этого способа для ситуации, когда на интервале управления присутствует ввод средств. В этом случае для каждой точки ввода необходимо ввести свой набор переменных, а в качестве линейного функционала, отвечающего за ограничение по риску, нужно взять сумму таких функионалов для каждой точки ввода.