Независимый Московский Университет

Московский Центр непрерывного математического образования

Высший Колледж Математики

Д. В. Аносов

Лекции по линейная алгебре

МЦНМО, ВКМ НМУ 1999

Аносов Дмитрий Викторович, академик РАН

Д. В. Аносов.
Лекции по линейная алгебре. — М.: МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999. — 105 с.

Предполагая известным начальный минимум основных сведений по линейной алгебре (определители, векторные пространства, линейная зависимость и т. п.), книга дает обзор широкого круга вопросов линейной алгебры (с доказательствами в менее известных местах), за исключением жордановой нормальной формы. Ее особенностью является внимание к обстоятельствам, которые часто остаются несколько в тени, но существенны при использовании линейной алгебры в других разделах математики. Заметно упрощено изложение двух вопросов: двойственность во внешней алгебре (оператор «звездочка») и алгебраический прототип соотношений Ходжа – Лепажа из теории комплексных многообразий.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Верстка В. Кордонский

Ответственный за выпуск В. Прасолов

Лицензия ЛР №071150 от 11.04.95 г
Подписано в печать 22.02.99 г. Тираж 300 экз.

МЦНМО
121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11. Тел. 241–05–00

Оглавление

Предисловие

Эта книга — своего рода расширенный конспект, который, несмотря на обработку, все же так и не стал учебником. Я должен объяснить, откуда взялся этот конспект, почему я не доработал его до настоящего учебника и почему я думаю, что его издание все же может быть полезным.

В различное время появилось много хороших учебников по линейной алгебре. Главы о линейной алгебре имеются также в книгах по «алгебре вообще» (как говорили в свое время, общей алгебре). Имеются общие для всех них «базовые сведения», — скажем, что такое векторное пространство, линейная зависимость, как перемножать матрицы, — причем не только по содержанию этих сведений, но и по их изложению учебники не очень отличаются друг от друга. Различаются же они отчасти по выбору дополнительного (по отношению к базовым сведениям) материала, отчасти по способу его изложения. (Часть дополнительного материала наряду с базовыми сведениями входит в обязательную программу и потому отражена во всех учебниках, но, повторяю, его изложение может различаться.)

Настоящая книга адресована студентам, которые усвоили (и хорошо усвоили) базовые сведения, а также приобрели (пусть потом и отчасти забыли) некоторые (пусть неполные) познания кое о чем еще. Таким образом, в ней излагается еще один вариант того, что выше названо дополнительным материалом. Порой я только комментирую нечто, предполагаемое хотя бы отчасти известным. Писать же еще один систематический учебник линейной алгебры мне казалось излишним — половина его повторяла бы имеющиеся учебники.

Теперь надо сказать, как я выбрал этот дополнительный материал. В некотором смысле — никак не выбрал, ибо эти заметки, строго говоря, вообще не являются конспектом моих лекций. Их происхождение таково. Читая лекции по другим разделам математики (больше всего по теории дифференциальных уравнений и динамических систем, но также по топологии и дифференциальной геометрии), я время от времени должен был отвлекаться на различный материал, который сам по себе к данной теории не относился, но который был мне нужен; он был, стало быть, вспомогательным. Иногда я сообщал слушателям какие-то новые факты, иногда кое-что попросту напоминал, а иногда пополнял, отчасти систематизировал или всего лишь комментировал (с какой-то, может быть, новой для них точки зрения) некие сведения, в принципе, им хотя бы отчасти известные. Я останавливался на этих вещах не систематически, как это было бы в специально посвященных им лекциях, а по мере того, как возникала в них потребность. С одной стороны, я думаю (и слышал такое же мнение от других), что подобное вкрапление инородного материала, затем используемого, имеет определенные достоинства, давая учащемуся какое-то ощущение связи между различными, скажем так, учебными дисциплинами, которые могли бы изучаться и по отдельности — собственно, отчасти это и делается, — но при последнем варианте связи ощущались бы слабее (if any). С другой стороны, каждый из затрагивавшихся урывками предметов — это ведь на самом деле некая теория, дисциплина и т. д., объединенная несколькими общими идеями, понятиями, методами; такой ее образ и должен сложиться в голове у учащегося. Упоминания урывками этому не очень-то способствуют. Конечно, моей задачей вовсе и не было изложение этих теорий. В какой-то степени учащийся с ними знаком — в противном случае от моих упоминаний было бы мало толку. Но я полагаю (основываясь на своем педагогическом опыте), что это знакомство может быть недостаточно прочным и (даже в требуемых здесь весьма скромных пределах) недостаточно полным, так что действительно надо кое-что напоминать, а кое о чем, может быть, и сообщать впервые. Это относится к лекциям. А вот при повторении учащемуся, мне кажется, было бы удобнее и полезнее иметь более систематическое, хотя бы и конспективное, изложение того же самого вспомогательного материала. В одних случаях ему может понадобиться навести справку, для чего систематическое изложение, где все, относящееся к данному предмету, собрано воедино, гораздо более удобно. В других случаях сводка сведений (пусть элементарных), представленных в систематическом виде, даст известное (хотя и начальное) представление о привлекаемом предмете как о чем-то едином.

Поэтому я выделил из своих лекций упомянутые вкрапления различного вспомогательного материала, сгруппировал их по нескольким темам и кое-что добавил, придав изложению известную связность. Обработка материала, относящегося к части этих тем, со временем, как я надеюсь, приведет к написанию двухтомника «Дополнительные главы функционального анализа и элементы топологии» (бо́льшая часть первого тома уже написана). А вот материал, относящийся к линейной алгебре, я не стал доводить до уровня учебника — как по указанным выше причинам, так и по банальной причине нехватки времени. Знакомства с настоящим учебником мои заметки, конечно, не заменят. Но если какое-то знакомство уже есть, то этот текст поможет лучше удержать эти вещи в памяти, возможно даже, что в более осознанном состоянии. А если знакомства нет, то этот текст может послужить для первого знакомства. Зная, о чем идет речь, читатель при желании сможет потом пополнить свои знания по другим книгам. (Это тем более рекомендуется, что основной недостаток этих заметок, мешающий им стать настоящим учебником, хотя бы и в качестве «Дополнительных глав», — практически полное отсутствие примеров и упражнений.) Кроме того, я думаю, что мои заметки имеют одну особенность, полезную для многих учащихся. Я пишу о вопросах, которые так или иначе оказывались нужными при чтении лекций по довольно широкому кругу вопросов анализа и геометрии, причем перспектива таких применений влияла на изложение[1]. Конечно, даже самые «чистые» алгебраисты не настолько «чисты», чтобы об этом не знать (не говоря уже о том, что среди авторов учебников были и математики с широким кругом интересов). И все же в этом отношении я «нахожусь у себя дома» и мои заметки возникли непосредственно под влиянием соответствующих «домашних дел». Наконец, полагаю, что здесь есть и кое-какие методические усовершенствования (возможно, они уже кем-то придуманы, но почему-то не использованы в известных мне учебниках).

[1]В связи с той же перспективой «выхода читателя во внешний мир» я больше, чем обычно, останавливался на различных оттенках, включая варианты терминологии и определений (иногда варианты последних не совсем равносильны).

В свое время издать даже небольшую брошюру было не так-то просто. Я имею в виду даже не столько административные согласования, сколько чисто производственную сторону дела: издание требовало немалого труда нескольких людей. Теперь в нашем распоряжении имеется намного больший труд намного бо́льшего числа людей, но труд, воплощенный в компьютерах, принтерах и издательских системах. Электронный самиздат сделал ненужными административные согласования и низвел производство просто до печатания текста, только не на пишущей машинке, а на пульте персоналки. Я уверен, что я не первый и уж далеко не последний, кто в этих условиях счел или сочтет возможным и нужным написать и пустить в широкое обращение конспект своих лекций (или, как в данном случае, чего-то с ними связанного), не дожидаясь того момента, когда их удастся расширить и отредактировать, доведя до настоящей книги. Можно ведь и не дождаться, благо у каждого есть много других дел. А некоторую пользу может принести и конспект.

Д.В. Аносов

Основным полем у нас будет $\mathbb{R}$, хотя в большинстве мест алгебраической части курса можно было бы брать и другое основное поле.

§1. Пространство $\mathbb{R}^n$

Элементы $\mathbb{R}^n$ («векторы» или «точки») суть столбцы из n чисел

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Поэтому $\mathbb{R}^n$ часто называют «арифметическим» n-мерным пространством. Ради удобства письма и набора текста мы обычно пишем $x = (x^1, \dots, x^n)$, как будто бы эти x^i были расположены в виде строки, но на самом деле, если не оговорено противное, то подразумевается, что в действительности эти x^i образуют столбец.

Это — первое из ряда соглашений, которые обычно принимаются более или менее молчаливо. Во избежание недоразумений, мы попытаемся в этом конспекте сформулировать их отчетливо.

Обращаем внимание, что мы сейчас использовали верхние, а не нижние индексы; это в ряде случаев оказывается более удобным. Конечно, при этом надо отличать индексы от показателей степени; это чаще всего без особых оговорок бывает ясно из контекста, хотя и требует некоторого внимания. Если мы хотим возвести первую координату x^1 в квадрат, то придется написать $(x^1)^2$. Запись x^{1^2} была бы не столь выразительна, а x^{12} естественно понимать как 12-ю координату.

Выше об x^i говорилось как о координатах вектора x. Это действительно его координаты, которые можно называть «стандартными» — координаты в следующем стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

j-й вектор которого e_j есть столбец из чисел $(\delta^i_j)_{i=1,\dots,n}$, где δ^i_j — известный символ Кронекера:

$$\delta^i_j = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \delta^i_j = 1 \text{ при } i = j.$$

(Его обозначают также через δ_{ij}, но в духе используемых нами обозначений сейчас лучше писать δ^i_j.) В $\mathbb{R}^n$ вполне могут использоваться и другие координаты, но если противное не оговорено, под координатами в $\mathbb{R}^n$ подразумеваются стандартные координаты. В этом отличие $\mathbb{R}^n$ от произвольного n-мерного векторного пространства, где не выделены особо никакие стандартные координаты.

Конечно, при желании можно было бы все-таки уже в самой записи подчеркнуть, что посредством строки из чисел $x^1, \dots, x^n$ обозначен столбец (1.1). Например, можно условиться для строки, обозначающей столбец, пользоваться не круглыми скобками, а какими-нибудь иными, скажем, квадратными. Тогда $(x^1, \dots, x^n)$ — это настоящая строка, а $[x^1, \dots, x^n]$ обозначает столбец (1.1). Вместо этого часто пишут $\mathrm{col}\,(x^1, \dots, x^n)$ (от column). Наконец, можно воспользоваться транспонированием матриц[2], при котором матрица-строка переходит в матрицу-столбец, и написать

[2] Для обозначения транспонирования используют значки $'$, *, ^{t}, $^\tau$, причем последние два иногда ставят не справа, а слева от транспонируемой матрицы. Мы будем пользоваться первыми двумя значками. Собственно, мы считаем, что второй из них используется для линейных операторов, а именно, им обозначается переход к сопряженному оператору, но ввиду естественного отождествления матриц с операторами в $\mathbb{R}^n$ (см. ниже) при использовании стандартной евклидовой метрики переход к сопряженному оператору — это как раз переход к транспонированной матрице.

$x = (x^1, \dots, x^n)'$. Мы, однако, позволим себе не прибегать к подобным уточнениям.

Можно (а иногда и нужно) рассматривать все-таки наряду с векторами-столбцами (1.1) также и вектор-строки

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \tag{1.2}$$

(теперь индексы ставятся внизу). Они тоже образуют n-мерное пространство — как бы второй экземпляр $\mathbb{R}^n$. Конечно, можно и отождествить эти два экземпляра друг с другом, но вместо этого мы будем рассматривать второй экземпляр как пространство линейных функционалов (по другой терминологии — линейных форм, линейных функций) на первом, в связи с чем пространство векторов-строк естественно обозначить через $\mathbb{R}^{n*}$. А именно, вектор-строка (1.2) определяет линейный функционал

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sum \xi_i x^i, \tag{1.3}$$

и обратно, всякий линейный функционал $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ получается таким способом ровно из одного вектора-строки; при этом соответствии между векторами-строками и линейными функционалами сложению первых и умножению их на скаляры соответствуют аналогичные операции для вторых. Линейный функционал, соответствующий вектору (1.2), естественно обозначить через $\xi(x)$ или короче просто через ξ. Впрочем, правая часть (1.3) — это в точности произведение строки (1.2) на столбец (1.1) по правилам перемножения матриц, так что $\xi(x) = \xi x$. Иногда удобнее писать $\xi(x)$, иногда ξx.

Элементы $\mathbb{R}^{n*}$ называют еще ковекторами или ковариантными векторами, тогда как элементы $\mathbb{R}^n$ — просто векторами, или контравариантными векторами. Эта терминология (как и использование верхних индексов для векторов и нижних для ковекторов) принята в тензорном исчислении; здесь мы имеем дело с очень частными случаями последнего.

Замечание. Привычная сокращенная запись системы алгебраических линейных уравнений

$$Ax = b \tag{1.4}$$

или системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{1.5}$$

связана с использованием векторов-столбцов. Если бы мы желали, чтобы x было вектор-строкой, то умножать x на матрицу A можно было бы только справа, а не слева. Вместо (1.4) и (1.5) мы имели бы

$$xA = b, \quad \text{соответственно,} \quad \frac{dx}{dt} = xA + f. \tag{1.6}$$

В принципе, это ничуть не хуже, но менее привычно. (Заметим кстати, что если вектор-столбец x удовлетворяет (1.4) или (1.5), то вектор-строка x' удовлетворяет уравнениям (1.6), в которых матрица A не совпадает с той, которая фигурирует в (1.4) или (1.5), а получается из не путем транспонирования. Действительно, уравнения для x' сразу получаются из уравнений (1.4), (1.5) путем транспонирования обеих частей последних. Разумеется, столбцы b и f тоже транспонируются, т. е. заменяются соответствующими строками.)

В $\mathbb{R}^n$ имеется стандартное скалярное произведение (по другой терминологии — евклидова метрика)

$$(x, y) = \sum x^i y^i \quad \text{для}$$
$$\text{векторов-столбцов} \quad x = (x^1, \dots, x^n), \quad y = (y^1, \dots, y^n).$$

Оно позволяет сопоставить каждому вектору $x \in \mathbb{R}^n$ линейный функционал $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, а именно, функционал $y \mapsto (x, y)$. Очевидно, что это есть функционал (1.3) с $\xi_i = x^i$. Таким образом, отождествление $\mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^{n*}$, которое определяется стандартным скалярным произведением согласно сказанному, является наиболее очевидным отождествлением векторов-строк и векторов-столбцов — отождествляются столбцы и строки, составленные из одних и тех же чисел (в одинаковом порядке). Заметим, что его можно описать еще так: вектор-столбцу x сопоставляется вектор-строка $\xi = x'$ (где штрихом, как и выше, обозначается транспонирование).

$(m\times n)$-матрица

$$A=(a_{ij})=(a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\,j=1,\ldots,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

(говорят еще: матрица порядка $(m\times n)$) — это матрица с m строками и n столбцами. (Таким образом, вектор-столбец (1.1) — это $(n\times 1)$-матрица, а вектор-строка $(x^1,\ldots,x^n)$ — это $(1\times n)$-матрица. $(n\times n)$-матрица называется квадратной матрицей n-го порядка.) Индексы стоят в таком порядке: сперва номер строки, затем номер столбца. Какой именно буквой обозначены индексы — неважно. Поэтому часто встречающаяся запись вроде $(a_{ij})'=(a_{ji})$ является, при всей своей наглядности, небрежной. Аккуратной является чуть менее наглядная запись

$$(a_{ij})'=(b_{ij}),\quad \text{где } b_{ij}=a_{ji}.$$

Индексы могут писаться еще и так: сверху стоит номер строки, снизу — номер столбца, так что

$$A=(a^i_j)^{i=1,\ldots,m}_{j=1,\ldots,n}. \tag{1.7}$$

Матрица (1.7) автоматически определяет линейное отображение $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, именно:

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1_1x^1+\ldots+a^1_nx^n\\ \dotfill\\ a^m_1x^1+\ldots+a^m_nx^n\end{pmatrix}=Ax,$$

короче:

$$(Ax)^i=\sum_j a^i_jx^j. \tag{1.8}$$

Конечно, матрица — это одно (таблица), а отображение — это другое. Но запись Ax соответствует правилам перемножения матриц: $(m\times n)$-матрица умножается справа на $(n\times 1)$-матрицу.

Поэтому в данном случае (когда речь идет об арифметических пространствах и стандартных координатах в них) можно все-таки позволить себе говорить об «отображении A». Для линейных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ мы уже имели дело с этим отождествлением матриц с линейными отображениями, рассматривая ξ и как строку (1.2), и как линейный функционал (1.3).

Ту же самую матрицу A можно умножить слева на вектор-строку ξ из $\mathbb{R}^{m*}$ (не из $\mathbb{R}^{n*}$, если $m \neq n$!). Получится вектор-строка из n чисел, так что возникает линейное отображение

$$\mathbb{R}^{m*} \to \mathbb{R}^{n*} \qquad \xi \mapsto \xi A.$$

Оказывается, что это отображение является сопряженным к отображению $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Это следует из формулы $\xi(Ax) = (\xi A)x$. Действительно, отображение $\mathscr{A}^*\colon \mathbb{R}^{m*} \to \mathbb{R}^{n*}$, сопряженное к $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляет ковектору $\xi \in \mathbb{R}^{m*}$ такой линейный функционал $\mathscr{A}\xi \in \mathbb{R}^{n*}$, значение которого на векторе $x \in \mathbb{R}^n$ совпадает с $\xi(Ax)$. Но ввиду ассоциативности матричного умножения $\xi(Ax) = (\xi A)x$, т. е. значение ξA на x как раз и равно $\xi(Ax)$; значит, ξA — это и есть $\mathscr{A}^*\xi$.

Можно рассматривать $\mathscr{A}^*$ также как и оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, — такой оператор, что

$$(\mathscr{A}^*x, y) = (x, \mathscr{A}y) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m \tag{1.9}$$

(сопряжение по отношению к стандартному скалярному произведению в «арифметических» пространствах). Это значит, что для функционалов $\xi(z) = (x, z)$ на $\mathbb{R}^n$ (для него $\xi = x'$) и $\eta(y) = (\mathscr{A}^*x, y)$ на $\mathbb{R}^m$ (для него $\eta = (\mathscr{A}^*x)'$) должно быть $\eta = \mathscr{A}^*\xi = \xi A$, т. е. $\mathscr{A}^*x = (\xi A)' = A'\xi' = A'x$. Следовательно, действие $\mathscr{A}^*$ на векторы-столбцы есть умножение их слева на матрицу A' (с чем и связано использование знака * для транспонирования). Подчеркнем, что такая простая формула для $\mathscr{A}^*$ связана с тем, что сопряжение берется по отношению к стандартному скалярному произведению.

Замечание. В формулах вроде (1.3), (1.8) часто опускают знак суммы, вводя следующее правило: если в некотором одночлене индекс (i в (1.3), j в (1.8)) написан один раз снизу, а другой раз сверху, то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование[3]. Оно ведется по всем значениям этого индекса (в (1.3), (1.8) — по i или $j = 1, \ldots, n$); (1.3), (1.8) принимают вид $x \mapsto \xi_i x^i$, $(Ax)^i = a^i_j x^j$. Если из контекста не ясно, по каким значениям надо суммировать, то это нужно специально указывать. (Это особенно важно, если вперемешку встречаются формулы, где суммирование идет по различным наборам значений индексов. Если таких наборов всего два, то можно условиться в одних случаях использовать для индексов одни буквы (скажем, латинские), а в других — другие (скажем, греческие).)

После некоторых колебаний я решил не пользоваться правилом суммирования по повторяющимся индексам в этом курсе и честно писать знак суммы, за исключением особо оговоренных случаев. Во-первых, у нас использование этого правила дало бы не такую уж большую экономию. Во-вторых (и это важнее), оно не является пригодным во всех случаях жизни. В гамильтоновой механике расположение индексов вверху и внизу в значительной степени теряет значение. В ней встречается, например, прямая сумма $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$, у элементов которой одни координаты надо было бы писать с верхними, другое — с нижними индексами. Это еще ничего, но оба слагаемых прямой суммы теперь оказывают-

[3]Иногда принимают, что суммирование ведется по любому повторяющемуся индексу, хотя бы он стоял оба раза внизу или оба раза вверху. Так поступают тогда, когда не следят за тем, какие индексы ставить вверху, а какие внизу; скажем, когда вообще все индексы ставят внизу. Естественно, наше $a^i_j x^j$ тогда пишется как $a_{ij} x_j$. Но на самом деле индексы действительно бывают двух типов, соответствующих «контравариантной» или «ковариантной» природе рассматриваемых объектов (в случае a^i_j объект является, так сказать, смешанным — говорят, что он контравариантен по i и ковариантен по j). То, что индексы первого типа условились писать вверху, а второго — внизу, не существенно, но существенно, чтобы было можно легко различать индексы этих двух типов, а этого проще всего достичь, если индексы одного типа всегда ставятся в одном месте, а другого типа — в другом. Применять правило суммирования по совпадающим индексам в том случае, когда они оба стоят, скажем, внизу (как в $a_{ij} x_j$), чаще всего оказывается удобным в тех случаях, когда на самом деле эти два индекса — различных типов, а запись этого не учитывает. Поэтому лучше следить за положением индексов и суммировать по повторяющемуся индексу только тогда, когда он появляется один раз внизу, другой раз вверху.

ся «равноправными», и могут производиться замены координат, при которых координаты различных типов как бы «перемешиваются между собой». Например, одна из новых координат может равняться $x^1 + \xi_2$; с каким индексом ее писать — верхним или нижним?

Однако должен сознаться, что «для себя» я постоянно пользуюсь правилом суммирования по повторяющимся индексам (там, где это уместно).

Напомню теперь понятие ранга. Ранг $(k \times n)$-матрицы A можно определить несколькими способами.

1) «Ранг по столбцам» $\text{ранг}_1 A$ равен наибольшему числу линейно независимых столбцов матрицы A.

2) «Ранг по строкам» $\text{ранг}_2 A$ равен наибольшему числу линейно независимых строк матрицы A.

3) «Ранг по минорам» $\text{ранг}_3 A$ равен наибольшему порядку ненулевых миноров матрицы A.

4) A стандартным образом определяет линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (матрица A действует слева на векторы-столбцы из $\mathbb{R}^n$) и даже может отождествляться с таким отображением. Его образ $A\mathbb{R}^n$ — некоторое векторное подпространство пространства $\mathbb{R}^k$. Четвертый ранг равен размерности этого подпространства: $\text{ранг}_4 A = \dim A\mathbb{R}^n$.

5) A стандартным образом определяет линейное отображение $\mathbb{R}^{k*} \to \mathbb{R}^{n*}$ (матрица A действует справа на векторы-столбцы из $\mathbb{R}^{k*}$) и даже может отождествляться с таким отображением. Его образ $\mathbb{R}^{k*}A$ — некоторое векторное подпространство пространства $\mathbb{R}^{k*}$. Пятый ранг равен размерности этого подпространства: $\text{ранг}_5 A = \dim \mathbb{R}^{k*}A$.

Все пять рангов совпадают.

$\text{ранг}_1 A = \text{ранг}_4 A$. Действительно, каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является линейной комбинацией векторов стандартного базиса $e_1, \ldots, e_n$; значит, каждый вектор вида Ax является линейной комбинацией векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$. Последние не обязательно линейно независимы. Выберем среди них максимальную линейно независимую систему $Ae_{i_1}, \ldots, Ae_{i_r}$; это будет базис пространства $A\mathbb{R}^n$, так что $\text{ранг}_4 A = r$. Но Ae_i — это i-й столбец матрицы A, поэтому $Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_r}$ — это максимальная система линейно независимых столбцов A и от того ранг$_1 A = r$.

Аналогично доказывается, что ранг$_2 A =$ ранг$_5 A$.

Прежде чем доказывать, что ранг$_1 A =$ ранг$_3 A$, отметим следующее утверждение. Пусть $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^k$ — линейно независимые векторы. Тогда хоть один из миноров r-го порядка матрицы

$$(a_1, \dots, a_r) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^k & \dots & a_r^k \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

(в i-м столбце которой стоят координаты вектора a_i; слева эта матрица записана как строка из столбцов, обозначенных каждый одной буквой) отличен от нуля.

Доказательство проводится индукцией по $r = 1, \dots, k$. При $r = 1$ утверждение состоит в том, что если вектор $a_1 \neq 0$, то хоть одна из его координат отлична от 0; это очевидно. Пусть наше утверждение доказано для некоторого r; убедимся, что оно справедливо и для $r+1$, т. е. что если векторы $a_1, \dots, a_{r+1}$ линейно независимы, то среди миноров $(r+1)$-го порядка матрицы

$$(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_r^1 & a_{r+1}^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^k & \dots & a_r^k & a_{r+1}^k \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

имеется ненулевой. По предположению, среди миноров r-го порядка матрицы (1.10) имеется ненулевой; пусть это будет

$$\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & \dots & a_r^{i_1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_1^{i_r} & \dots & a_r^{i_r} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Допустим, что все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы (1.11) равны нулю. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & \dots & a_r^{i_1} & a_{r+1}^{i_1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^{i_r} & \dots & a_r^{i_r} & a_{r+1}^{i_r} \\ a_1^{i} & \dots & a_r^{i} & a_{r+1}^{i} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{при любом } i = 1, \dots, n. \tag{1.13}$$

В самом деле, когда $1 = i_1, \ldots, i_r$, последняя строка этого определителя совпадает с одной из предыдущих; поэтому он равен нулю. Когда же $1 \neq i_1, \ldots, i_r$, то этот определитель является одним из миноров $(r+1)$-го порядка матрицы (1.11), и в этом случае рассматриваемый определитель равен нулю по предположению. Разлагая определитель (1.13) по элементам последней строки, получим

$$\sum_{j=1}^{r+1}(\text{алгебраическое дополнение} \\ \text{элемента } a_j^i \text{ последней строки}) \times a_j^i = 0.$$

Алгебраическое дополнение a_j^i получается при вычеркивании последней строки и j-го столбца в определителе (1.13). После вычеркивания последней строки остаются строки, не зависящие от i. Поэтому при последующем вычеркивании j-го столбца получается определитель D_j, не зависящий от i. Итак,

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j D_j a_j^i + \varepsilon_{r+1} D_{r+1} a_{r+1}^i = 0, \tag{1.14}$$

где ε_h — это знаки ± 1, которыми алгебраические дополнения отличаются от определителей D_h. На самом деле $\varepsilon_h = (-1)^{r+j-1}$, но нам существенно только то, что числа ε_h тоже не зависят от i и что $\varepsilon_{r+1} \neq 0$. Из (1.14)

$$a_{r+1}^i = -\sum_{j=1}^{r} \frac{\varepsilon_j D_j}{\varepsilon_{r+1} D_{r+1}} a_j^i.$$

Поскольку коэффициенты $\dfrac{\varepsilon_j D_j}{\varepsilon_{r+1} D_{r+1}}$ в правой части не зависят от i, то получается, что вектор a_{r+1} является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_r$, вопреки предположении о линейной независимости всех этих $r+1$ векторов.

Теперь можно доказать, что $\text{ранг}_1 A = \text{ранг}_3 A$. Пусть $\text{ранг}_1 A = r$. Обозначим $a_i := Ae_i$. При перестановке столбцов A ее миноры фиксированного порядка тоже определенным образом переставляются между собой и у них могут изменяться знаки.

Поэтому достаточно доказать равенство ранг$_1 A$ = ранг$_3 A$ для того случая, когда первые r столбцов $a_1, \ldots, a_r$ линейно независимы, а остальные являются их линейными комбинациями. Выражая столбцы $a_{r+1}, \ldots, a_n$ как линейные комбинации столбцов $a_1, \ldots, a_r$, получим, что любой минор матрицы A является некоторой линейной комбинацией миноров матрицы $(a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$. Ясно, что у последней все миноры порядка $\geqslant r$ равны 0, следовательно, ранг$_3 A \leqslant r$. С другой стороны, из доказанного выше утверждения явствует, что у A имеется ненулевой минор r-го порядка (являющийся минором «более узкой» матрицы (1.10)). Следовательно, ранг$_3 A \geqslant r$.

Аналогично доказывается, что ранг$_2 A$ = ранг$_3 A$.

§2. Векторные пространства.

В этом параграфе исходным является n-мерное векторное пространство V над основным полем $\mathbb{R}$.

1. Координаты и отображения. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — базис V (индексы пишем внизу). Каждый вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде

$$v = \sum x^i a_i. \tag{2.1}$$

(x^i, естественно, называются координатами вектора v в базисе $\{a_i\}$. У координат индекс ставится наверху, и в (2.1) суммирование идет по индексу, который один раз фигурирует наверху, а другой раз — внизу.) Образовав строку $A = (a_1, \ldots, a_n)$ (ее не стоит называть вектором-строкой, ибо ее элементы — не числа, а векторы[4]) и вектор-столбец $x = (x^1, \ldots, x^n)$, можно переписать (2.1) в виде

$$v = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = Ax \tag{2.2}$$

(хотя элементы строки A — не числа, произведение Ax попрежнему определяется по обычным правилам перемножения матриц, поскольку имеют смысл произведения $a_i x^i$ и их сумма. То, что при умножении вектора a_i на число x^i числовой множитель написан справа от вектора, быть может, несколько необычно, но, конечно, несущественно[5].)

[4]В частном случае, когда $V = \mathbb{R}^n$, векторы a_i суть столбцы, так что A состоит из n столбцов; значит, в этом случае A можно считать не только строкой из n векторов, но и квадратной матрицей n-го порядка.

[5]Следует предупредить, что в дифференциальной геометрии или, лучше сказать, в анализе на многообразиях выражению вида «вектор a, умноженный справа на число», часто придается иной смысл, нежели выражению «вектор a, умноженный слева на число». Последнее имеет обычный смысл. Первое же употребляется в тех случаях, когда «число» — это некоторая скалярная функция $f(x)$ на многообразии; под af при этом понимается производная f вдоль вектора a (можно считать, что вектор a в данном случае рассма-

Базис, таким образом, определяет линейное отображение

$$\mathbb{R}^n \to V \qquad x \mapsto Ax = \sum x^i a_i, \tag{2.3}$$

являющееся изоморфизмом векторных пространств[6]. При этом векторы стандартного базиса $e_i \in \mathbb{R}^n$ переходят в a_i. Обратно, любой изоморфизм $\mathbb{R}^n \to V$ получается таким образом с помощью ровно одного базиса в V (в качестве a_i надо взять образы e_i). Поэтому на базис можно смотреть как на линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n \to V$.

Основное различие между $\mathbb{R}^n$ и «общим» n-мерным векторным пространством V состоит в том, что, как уже подчеркивалось, в $\mathbb{R}^n$ имеется стандартный базис, тогда как никакой из базисов в V не объявлен стандартным. Если в каком-то вопросе мы почему-либо постоянно отдам предпочтение какому-то одному базису A в V, то различие в значительной мере стирается, поскольку теперь мы имеем фиксированный изоморфизм $A\colon \mathbb{R}^n \to V$. (Однако в $\mathbb{R}^n$ имеется еще стандартное скалярное произведение. Возможно, что в V никакого скалярного произведения не выделено, а если выделено, оно не обязано совпадать с тем, которое при изоморфизме A соответствует стандартному скалярному произведению в $\mathbb{R}^n$).

тривается как линейный однородный дифференциальный оператор первого порядка, который и действует на f). Но сейчас мы имеем дело не с анализом, а с алгеброй, так что вопроса о смысле выражения «вектор, умноженный справа на число», не возникает. Когда же имеют дело с такой ситуацией, в которой он может возникать, то, во-первых, надо обращать внимание на контекст и, во вторых, время от времени в тех случаях, когда все же имеется опасность путаницы, для обозначения того, что a действует на f как дифференциальный оператор, лучше использовать какую-нибудь другую запись, — скажем, можно условиться писать $a \bullet f$.

[6] Собственно, можно взять любые m векторов $a_1, \ldots, a_m \in V$ (они не обязательно линейно независимые и не обязательно их число равно размерности V) и, образовав строку $(a_1, \ldots, a_m) = A$, ввести линейное отображение

$$\mathbb{R}^m \to V \qquad x \mapsto Ax = \sum x^i a_i.$$

Если A — не базис, то это отображение не будет изоморфизмом. Его образ $A\mathbb{R}^n$ — это так называемая линейная оболочка векторов $\{a_i\}$ или порожденное ими подпространство, т. е. совокупность всевозможных линейных комбинаций этих векторов.

С квадратной матрицей $C = (c^i_j)$ n-го порядка связаны следующие преобразования, различные по существу, но описываемые одинаковыми (или по крайней мере сходными) формулами (смысл которых, однако, различен):

З) Замена координат и, вместе с тем, используемого базиса в V. (При этом матрица C должна быть невырожденной.)

О) Линейное отображение $V \to V$.

В З) с векторами из V ничего не происходит, а изменяется система координат; формулы связывают между собой новые и старые координаты одного и того же вектора. В О) вектор v переходит в (вообще говоря, другой) вектор $\mathscr{C}v$; формулы выражают координаты $\mathscr{C}v$ в исходной системе координат через координаты v в той же системе.

В З) матрицу C можно использовать двумя способами:

(ЗК) (замена координат). Если в старой системе координат (с базисом $(a_1, \ldots, a_n) = A$) вектор v имел координаты $x = (x^1, \ldots, x^n)$ (как мы помним, это на самом деле столбец), то в новой системе (с каким-то базисом $(b_1, \ldots, b_n) = B$) он имеет координаты $y = Cx$. Из

$$v = B(Cx), \quad v = Ax = (AC^{-1})(Cx)$$

видно, что

$$B = AC^{-1}, \qquad A = BC. \tag{2.4}$$

(ЗБ) (замена базиса). Матрица C используется для того, чтобы непосредственно выразить новый базис $B = (b_1, \ldots, b_n)$ через старый базис $A = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$B = (b_1, \ldots, b_n) = (a_1, \ldots, a_n)C = AC, \quad b_i = \sum c^j_i a_j.$$

(Между тем в (2.4) базис заменялся по другой формуле.) При этом новые координаты y вектора v выражаются через старые не по формуле $y = Cx$ из (ЗК), а по формуле $y = C^{-1}x$, так что на сей раз $x = Cy$:

$$v = By = ACy, \quad v = Ax = ACC^{-1}x, \quad y = C^{-1}x.$$

Таким образом, когда говорят что-нибудь вроде того, что «система координат преобразуется с помощью матрицы C», это требует уточнения: имеется ли в виду замена координат согласно (ЗК) или замена базиса согласно (ЗБ)?

В О) матрицу C можно использовать тоже двумя способами:

(ОК) (описание преобразования в терминах изменения координат). Вектор v, имевший в базисе A координаты x, переходит в вектор $\mathscr{C}v$, имеющий в том же базисе координаты Cx:

$$\mathscr{C}v = Ay = ACx.$$

Заметим, что если C — невырожденная матрица, то система векторов $B = AC$, $b_i = \sum c_i^j a_j$ снова является базисом и в этом базисе вектор $\mathscr{C}v$ имеет те же координаты x, какие v имеет в базисе A. Если C — вырожденная матрица, то B — не базис, однако по-прежнему $\mathscr{C}v$ является линейной комбинацией векторов b_i с коэффициентами x_i.

(ОБ) (описание отображения в терминах изменения базиса). Матрица C используется для того, чтобы непосредственно выразить, в какую систему векторов B переходит базис A при отображении $\mathscr{C}$. Для этого строку $(a_1, \ldots, a_n)$ умножаем справа на C (только справа это и можно):

$$B = (b_1, \ldots, b_n) = (\mathscr{C}a_1, \ldots, \mathscr{C}a_n) = (a_1, \ldots, a_n)C = AC,$$
$$b_i = \sum c_i^j a_j.$$

Вектор $v = Ax = \sum x^i a_i$ переходит в вектор

$$\mathscr{C}v = \sum x^i \mathscr{C}a_i = (Ca_1, \ldots, Ca_n)x = ACx.$$

Как видно, в (ОК) и (ОБ) получается одно и то же отображение $\mathscr{C}\colon V \to V$. В этом отношении О) «лучше», чем З).

Не стоит пытаться запомнить, в каком случае какие формулы получаются. Надо только ясно понимать, что бывают как преобразования координатной системы, так и преобразования самого пространства V, и что как те, так и другие описываются посредством явного указания либо того, как при этом изменяются координаты, либо того, как при этом изменяются базисы. Формулы же нетрудно восстановить за пару минут.

Замечание. Различие между преобразованиями каких-то объектов (в данном случае — векторов из V) и их координат не ограничивается, конечно, рамками линейной алгебры и используемых в ней «декартовых» координат. В более общем случае речь может идти о точках некоторой области M в евклидовом пространстве или некоторого многообразия и об их координатах. Соответственно, преобразование M, при котором точки переходят, вообще говоря, в другие точки, называют «точечным преобразованием», а о замене координат, при которой сами точки остаются на месте, говорят как о «координатном преобразовании». (Конечно, координатные преобразования тоже являются точечными преобразованиями, только это преобразования не в M, а в соответствующем $\mathbb{R}^n$, где принимают значения рассматриваемые координаты.) Выражение «точечное преобразование» было особенно в ходу в конце прошлого и начале нашего века, потому что такие преобразования воспринимались тогда как нечто более новое, нежели координатные преобразования (использование которых столь же старо, как и использование самих координат), и стоило специально указывать, что в таком-то случае речь идет именно о точечном преобразовании, а не о координатном. В наши дни положение изменилось; например, в линейной алгебре «преобразование» — это чаще именно точечное преобразование, а не координатное.

Мы говорили о линейном отображении $\mathscr{C}\colon V \to V$ векторного пространства V в себя. Более общим образом, можно рассматривать линейное отображение $\mathscr{C}\colon V \to W$ одного векторного пространства V (скажем, n-мерного) в другое W (скажем, k-мерное). При использовании координат $x^1, \dots, x^n$ в V и $y^1, \dots, y^k$ в W (соответствующие базисы пусть будут e_i и e'_j) отображение $\mathscr{C}$ описывается матрицей $C = (c^i_j)^{i=1,\dots,k}_{j=1,\dots,n}$: если вектор $u \in V$ имеет координаты x^i, образующие столбец x, то $\mathscr{C}u$ имеет координаты y^j, образующие столбец $y = Cx$. Можно также сказать, что $Ce_i = \sum\limits_{j=1}^{k} c^j_i e'_j$. При замене координат и, вместе с тем, используемых базисов в V и W матрица C заменяется другой матрицей $\widehat{C}$.

Если D — матрица (ЗК) в V и D_1 — матрица (ЗК) в W, то

$$\widehat{C} = D_1 C D^{-1}. \tag{2.5}$$

Ранг линейного отображение $\mathscr{C}\colon V \to W$ можно определить как размерность $\dim \mathscr{C}W$ его образа. Он совпадает с рангом матрицы C (последний, стало быть, не меняется при умножении C справа и слева на обратимые матрицы). Если ранг $\mathscr{C} = r$, то в V и W имеются такие координаты $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и $y = (y^1, \ldots, y^k)$, что в терминах этих координат отображение имеет вид $x \mapsto y$, где $y_i = x_i$ при $i = 1, \ldots, r$ и $y_i = 0$ при $i > r$. Иными словами, если e_i — базисные векторы системы координат x в V, а e'_i — системы координат y в W, то $e_i \mapsto e'_i$ при $i = 1, \ldots, r$ и $e_i \mapsto 0$ при $i > r$. Еще можно сказать, что при использовании этих координат отображение $\mathscr{C}$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}k-r \end{matrix}, \tag{2.6}$$

в которой I_r — единичная матрица r-го порядка (так что ширина левых блоков равна r, а правых — $n - r$). Можно сказать, что в подходящих координатах матрица C отображения $\mathscr{C}$ приводится к «простейшей» «нормальной форме» (2.6). В «чисто матричных» терминах это означает, что для $(k \times n)$-матрицы C существуют такая невырожденная квадратная матрица n-го порядка D и такая невырожденная квадратная матрица k-го порядка D_1, что $D_1 C D^{-1}$ имеет вид (2.6).

Если $V = W$, то кажется неестественным использовать в одном и том же пространстве две системы координат — одну, когда мы говорим об отображаемых элементах, другую — когда мы говорим об их образах; во всяком случае, представляется естественной такая постановка вопроса, при которой все время — и тогда, когда мы говорим об отображаемых элементах, и тогда, когда мы говорим об их образах, — используется одна и та же система координат. Тогда возможности для изменения матрицы C сужаются — в (2.5) $D_1 = D$. Вопрос о том, к какому простейшему виду можно привести матрицу коэффициентов преобразования $\mathscr{C}$ при использовании одной системы координат в V, т. е. путем замены C на DCD^{-1}, — это предмет теории жордановой нормальной формы. Я не буду на ней останавливаться, ибо, с одной стороны, этот вопрос сравнительно более сложен и двумя словами здесь нельзя было бы обойтись, а с другой — я не имею по этому поводу никаких замечаний, которыми стоило бы поделиться с читателем.

В связи со сказанным об описании $\mathscr{C}\colon V \to V$ в терминах координат в V обращаю внимание, что определитель $\det C = \det DCD^{-1}$, так что этот определитель зависит не от используемой координатной системы, а только от самого отображения $\mathscr{C}$. Поэтому его можно назвать определителем $\det \mathscr{C}$ самого отображения $\mathscr{C}$. Обозначая через $\mathscr{I}$ тождественное преобразование в V, мы можем рассмотреть $\det(\mathscr{C} - \lambda\mathscr{I})$, где λ — числовой параметр. Обращение к координатам показывает, что это есть характеристический многочлен соответствующей матрицы C; он, стало быть, тоже зависит только от $\mathscr{C}$ и может называться характеристическим многочленом этого преобразования. (Иногда его берут со знаком $(-1)^n$, т. е. под характеристическим многочленом $\mathscr{C}$ понимают $\det(\lambda\mathscr{I} - \mathscr{C})$; в таком случае его старший член есть λ^n.)

2. Сопряженное пространство. Сопряженное к V векторное пространство V^* — это пространство, элементами которого являются линейные функционалы (линейные формы, линейные функции) на V. (Сумма двух таких функционалов и произведение функционала на число определяются очевидным образом.) Аналогично тому как это делалось в частном случае «арифметических» пространств, элементы V^* называют еще ковекторами или ковариантными векторами, тогда как элементы исходного V — просто векторами, или контравариантными векторами. В V^*, как и в V, можно пользоваться любыми координатами, но если уж мы выбрали какую-то систему координат в V, отвечающую какому-то базису $a_1, \ldots, a_n$, то можно ввести в V координаты, тесно связанные с этими координатами в V:

$$V^* \to \mathbb{R}^{n*} \qquad \alpha \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_n), \text{ где } \xi_i = \alpha(a_i) \tag{2.7}$$

(как видно, у координат ковекторов индекс ставится внизу и набор координат ковектора записывается в виде строки). Если для ковектора α известны $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то этот ковектор полностью определен; действительно, для любого вектора $v = \sum x^i a_i$

$$\alpha(v) = \sum x^i \xi(a_i) = \sum \xi_i x^i.$$

Кроме того, для любого набора n чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n*}$ имеется функционал α, координатами которого являются эти ξ_i, т. е. для которого $\alpha(a_i) = \xi_i$. Таковым является функционал, принимающий на векторе v с координатами x значение $\sum \xi_i x^i$. Поэтому (2.7) — действительно система координат в V^*. Какому базису пространства V^* они соответствуют? В связи с этим вопросом введем сперва следующее определение. Базисы $a_1, \ldots, a_n$ в V и $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ в V^* называются взаимными (по отношению друг к другу), если $\alpha^i(a_j) = \delta^i_j$ при всех i, j. Это означает, что все координаты (2.7) i-го базисного вектора α^i, кроме i-й, равны 0, а i-я координата равна 1. Значит, α^i является i-м вектором того базиса, которому соответствует система координат (2.7). (Заодно мы видим, что для каждого базиса $a_1, \ldots, a_n$ пространства V действительно существует взаимный к нему базис $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ в V^*.) Итак, ответ на поставленный вопрос гласит: координаты (2.7) являются координатами в базисе $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ пространства V^*, взаимном к базису $a_1, \ldots, a_n$ пространства V. Фактически линейные функционалы α^i нам давно известны под другим названием. i-я координата x^i вектора v в базисе $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависит от v, т. е. (рассматриваемая как функция от v) является линейным функционалом на V. Поскольку

$$a_j = 0 \cdot a_1 + \ldots + 1 \cdot a_j + \ldots + 0 \cdot a_n = \sum_i \delta^i_j a_i,$$

то значение этого функционала на векторе a_j равно δ^i_j. Следовательно, i-я координата — это как раз и есть α^i; взаимный с $a_1, \ldots, a_n$ базис V^* образован координатами векторов $v \in V$, рассматриваемыми как функции от v. Далее я все-таки пишу α^i, а не x^i — в основном, потому, что через x^i удобно обозначать координаты какого-нибудь (временно фиксированного) вектора v, а тогда для x^i как функции от «переменного вектора» надо иметь другое обозначение[7].

Если желательно записать формулу вроде $\alpha = \sum \xi_i \alpha^i$ в сокращенном виде, подобно тому как формула (2.3) переписана в виде $v = Ax$, то следует взять столбец, элементами которого являются векторы базиса в V^*[8]

$$\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \xi \mathfrak{A}.$$

(Здесь мы обозначили столбец из векторов α^i готической буквой $\mathfrak{A}$, потому что заглавную греческую «альфу» трудно отличить от латинского A. Стандартные наборы шрифтов для TEX'а даже не содержат таких заглавных греческих букв, которые слишком похожи на латинские.) Впрочем, мы редко будем пользоваться такой записью. Все же заметим, что определяемый базисом $\mathfrak{A}$ изоморфизм линейных пространств $\mathbb{R}^{n*} \to V^*$ — аналог (2.3) — имеет, конечно, вид $\xi \mapsto \xi \mathfrak{A}$.

Пространства V и V^*, конечно, изоморфны, как и вообще любые два n-мерные векторные пространства. Однако никакого предпочтительного, «стандартного» изоморфизма здесь нет. Хорошо известно, что если в V введено евклидово скалярное произведение (определение напоминается ниже), которое мы сейчас обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$, чтобы отличать его от стандартного скалярного

---

[7]Однако в теории гладких многообразий общепринятым является обозначение, очень близкое к x^i. Сами x^i там обычно являются координатами в рассматриваемом гладком многообразии M (что нас не касается), а связанные с ними (как именно связанные — это нас тоже не касается) координаты в касательном векторном пространстве $T_x M$ обозначаются через dx^i (что нас уже касается). Согласно сказанному, эти dx^i суть некоторые линейные функционалы на $T_x M$, образующие базис сопряженного к $T_x M$ пространства $T_x^* M = (T_x M)^*$. В духе настоящей брошуры их надо было бы обозначить какой-нибудь греческой буквой, однако этого не делают, а так и пишут dx^i. (Вот если в $T_x^* M$ берут другой базис, то для его векторов используют греческую букву).

[8]Если $V = \mathbb{R}^n$ и используются стандартные координаты, то $V = \mathbb{R}^{n*}$, каждое α^i — это вектор-строка из n чисел, а столбец из n таких строк можно считать квадратной матрицей n-го порядка.

произведения $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{R}^n$, то естественным образом возникает некоторый изоморфизм $V \to V^*$, связанный с этим произведением. А именно, вектору $v \in V$ соответствует линейный функционал $\alpha(w) = \langle v, w\rangle$. Если $A = (a_1, \dots, a_n)$ — ортонормированный базис в V и $v = Ax$, $w = Ay$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $\langle v, w\rangle = \sum x^i y^i$; значит, α имеет координаты $\xi_i = x^i$, т. е. в терминах соответствующих координат отображение $V \to V^*$ представляется известным нам отображением $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n*}$, переводящим x в x'. Последнее точно так же связано со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{R}^n$, как наше $V \to V^*$ — со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в V; так оно и должно быть, ибо при изоморфизме (2.3), определяемом ортонормированным базисом, $(\cdot,\cdot)$ переходит в $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3. Билинейные функционалы. Рассмотрим более общую ситуацию, когда в V вместо скалярного произведения задан билинейный функционал (билинейная форма, билинейное отображение), т. е. такое отображение

$$\mathscr{B}\colon V \times V \to \mathbb{R} \qquad (v, w) \mapsto \mathscr{B}(v, w),$$

которое линейно по каждому аргументу в отдельности:

$$\begin{aligned} &\mathscr{B}(v_1+v_2, w) = \mathscr{B}(v_1, w)+\mathscr{B}(v_2, w), \quad \mathscr{B}(v, \lambda w) = \lambda\mathscr{B}(v, w),\\ &\mathscr{B}(v, w_1+w_2) = \mathscr{B}(v, w_1)+\mathscr{B}(v, w_2), \quad \mathscr{B}(v, \lambda w) = \lambda\mathscr{B}(v, w). \end{aligned} \tag{2.8}$$

В терминах координат, связанных с базисом $A = (A_1, \dots, A_n)$, $\mathscr{B}$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{если } v = Ax, w = Ay \quad (\text{т. е. если } v, w \text{ имеют координаты } x, y),\\ &\text{то } \mathscr{B}(v, w) = \textstyle\sum b_{ij} x^i y^j = (B'x, y) = (x, By) = x'By,\\ &\text{где } B = (b_{ij}),\ b_{ij} = \mathscr{B}(a_i, a_j). \end{aligned} \tag{2.9}$$

(В выражении $\sum b_{ij} x^i y^j$ индексы у коэффициентов b_{ij} естественно ставить внизу. Тем не менее надо считать, что в фигурирующих затем скалярных произведениях $B'x$ и By суть столбцы — результаты перемножения соответствующих квадратных матриц на соответствующие столбцы.) Это сразу получается с помощью (2.8), если в аргументы $\mathscr{B}$ подставить $\sum x^i a_i$ вместо v и $\sum y^j a_j$ вместо w.

Билинейный функционал $\mathscr{B}$ позволяет сопоставить вектору $v \in V$ два функционала

$$\alpha(w) = \mathscr{B}(v, w), \qquad \beta(w) = \mathscr{B}(w, v).$$

Тем самым возникают два отображения

$$V \to V^* \qquad v \mapsto \alpha = \mathscr{B}(v, \cdot) \text{ и } v \mapsto \beta = \mathscr{B}(\cdot, v). \tag{2.10}$$

Из (2.8) сразу следует, что оба они — линейные. Эти отображения совпадают в том и только том случае, когда функционал $\mathscr{B}$ — симметричный, т. е. $\mathscr{B}(v, w) = \mathscr{B}(w, v)$. Сейчас мы этого не предполагаем. (Для гамильтоновой механики особое значение имеют кососимметричные (по другой терминологии — знакопеременные) $\mathscr{B}$, для которых $\mathscr{B}(v, w) = -\mathscr{B}(w, v)$[9], а отображения (2.10) различаются знаком.) Ясно, что в терминах координат (подразумевается, что в V^* используется базис $\mathfrak{A}$, взаимный

[9] Отсюда следует, что $\mathscr{B}(v, v) = -\mathscr{B}(v, v)$, так что $\mathscr{B}(v, v) = 0$ для всех v. Обратно, если $\mathscr{B}$ обладает последним свойством, то

$$0 = \mathscr{B}(v + w, v + w) = \mathscr{B}(v, v) + \mathscr{B}(v, w) + \mathscr{B}(w, v) + \mathscr{B}(w, w) = \\ = \mathscr{B}(v, w) + \mathscr{B}(w, v),$$

т. е. $\mathscr{B}$ кососимметричен.

Переходя от $\mathscr{B}(v, v) = -\mathscr{B}(v, v)$ к $\mathscr{B}(v, v) = 0$, мы используем тот факт, что в поле $\mathbb{R}$ из $2a = 0$ следует, что $a = 0$. Последнее справедливо во всех полях, характеристика которых отлична от 2. Когда же основное поле (как, скажем, поле вычетов по mod 2) имеет характеристику 2, то в качестве определения кососимметричности $\mathscr{B}$ принимают именно свойство «$\mathscr{B}(v, v) = 0$ при всех v». Отсюда по-прежнему следует, что $\mathscr{B}(v, w) = -\mathscr{B}(w, v)$, но в данном случае всегда $a = -a$, так что кососимметричность оказывается частным случаем симметричности.

В учебниках, в которых линейная алгебра излагается над произвольным основным полем, в порядке унификации кососимметричность определяют как свойство «$\mathscr{B}(v, v) = 0$ при всех v». Однако в нашем случае определение кососимметричности как свойства «при перестановке аргументов знак $\mathscr{B}$ меняется» представляется более выразительным.

к базису A в V) отображения (2.10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\text{если} \quad v = Ax,\ w = Ay,\ \alpha = \xi\mathfrak{A},\ \beta = \eta\mathfrak{A} \text{ и } \mathscr{B} \text{ имеет вид (2.9)},\\
&\text{то} \quad \xi_j = \sum_i b_{ij}x^i,\ \text{т. е.}\ \ \xi' = B'x \text{ или } \xi = x'B,\\
&\text{и} \quad \eta_i = \sum_j b_{ij}x^j, \text{т. е. } \eta' = Bx.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Общепринятого названия для отображений (2.10) нет. Бурбаки называют их линейными отображениями, ассоциированными с $\mathscr{B}$ слева, соответственно справа.

Функционал $\mathscr{B}$ называется невырожденным, если выполняются следующие эквивалентные друг другу условия:

1) Отображение $v \mapsto \alpha$ является невырожденным, т. е. $\alpha = 0$ только при $v = 0$; это эквивалентно тому, что отображение $v \mapsto \alpha$ является линейным изоморфизмом пространств V и V^*.

2) Отображение $v \mapsto \beta$ является невырожденным; это эквивалентно тому, что отображение $v \mapsto \beta$ является линейным изоморфизмом пространств V и V^*.

3) Матрица коэффициентов $B = (b_{ij})$ — невырожденная.

Эквивалентность условий 1) – 3) сразу следует из (2.9) и (2.11).

Если билинейный функционал — симметричный и невырожденный, то его называют (псевдоевклидовым) скалярным произведением[10] в V и (если он в каком-то смысле рассматривается как «основной», составляя как бы часть структуры пространства V[11]) записывают чаще в таком же виде, как и обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, т. е. как (v, w), только скобки могут быть другими. Известно, что в некоторых координатах он

[10]Иногда это название используют и в том случае, когда функционал $\mathscr{B}$ вырожденный. В этом случае в формуле (2.12) ниже имеется не n, а r слагаемых, где r — ранг функционала $\mathscr{B}$, т. е. ранг матрицы B или, что то же самое, размерность образа V при левом или правом линейном отображении, ассоциированном с $\mathscr{B}$. Соответственно изменяется и приводимая затем формулировка для квадратичной формы.

[11]Отмечу, что такая ситуация не только встречается в линейной алгебре, но и является исходной в римановой геометрии. (В последней V является касательным пространством T_xM к гладкому многообразию M в точке x (см. гл. 3), но для чисто алгебраических вопросов это не важно.)

имеет вид

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{k} x^i y^i - \sum_{i=k+1}^{n} x^i y^i \quad \text{для } v = Ax, w = Ay, \qquad (2.12)$$

причем число k не зависит от конкретного выбора соответствующей системы координат. Более известной является формулировка для квадратичной формы $Q(v) = (v, v)$: она приводится к «сумме квадратов», в которой (вопреки буквальному смыслу слова «сумма») некоторые квадраты могут встречаться со знаком «минус», причем число таковых не зависит от способа приведения («закон инерции квадратичной формы»). Оно называется индексом квадратичной формы и соответствующего билинейного функционала[12] (у нас — скалярного произведения). Q была выражена через скалярное произведение, но связь между ними работает и в обратную сторону[13]:

$$Q(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w)).$$

Эта связь позволяет получить сделанное выше утверждение о приведении $(\cdot, \cdot)$ к виду (2.12) из соответствующего утверждения для Q.

Евклидово скалярное произведение в V, о котором говорилось ранее — это билинейный симметричный функционал $(\cdot, \cdot)$, обладающий тем свойством, что $(v, v) \geqslant 0$ при всех v и $(v, v) = 0$ только при $v = 0$. Такой функционал — невырожденный. Ведь если левое ассоциированное линейное отображение переводит некоторый вектор v в нулевой функционал, то получается, что, в частности, $(v, v) = 0$, а тогда, по нашему определению, $v = 0$. Поэтому евклидово скалярное произведение действительно является частным случаем «общего» (псевдоевклидова).

[12] При этом они не обязаны быть невырожденными. По поводу термина «индекс» надо предупредить, что Бурбаки дают (в иной обстановке) другое определение индекса, которое в нашем случае сводится к $\min(k, n - k)$. Наше определение индекса общепринято в вариационном исчислении (где его применяют к квадратичной форме второго дифференциала).

[13] Деление на 2 возможно при любом основном поле, характеристика которого отлична от 2. Над полями же характеристики 2 теория квадратичных форм не сводится к теории симметричных билинейных функционалов.

Если билинейный функционал $\mathscr{B}$ является невырожденным, то можно в $\mathscr{B}(v,w)$ перейти к ковекторам при помощи отображений $\alpha \mapsto v$, $\beta \mapsto w$, обратных к левому и правому ассоциированным с $\mathscr{B}$ линейным отображениям (для левого аргумента $\mathscr{B}$ используем левое, а для правого — правое ассоциированное отображение). Получается некоторый билинейный функционал $\widehat{\mathscr{B}}$ на V^*. Бурбаки называют его «билинейной формой, обратной к $\mathscr{B}$». Основанием для этого (не общепринятого) названия является тот факт, что (при использовании в V^* координатного базиса $\mathfrak{A}$, взаимного к координатному базису A в V) матрицей коэффициентов для $\widehat{\mathscr{B}}$ служит матрица B^{-1}, обратная к B из (2.9). Действительно, в наших предположениях и обозначениях

$$\alpha = \xi\mathfrak{A},\ \beta = \eta\mathfrak{A},\ v = Ax,\ w = Ay,\ \eta' = By,\ y = B^{-1}\eta',$$

$$\mathscr{B}(v,w) = \alpha(w) = \xi y$$

(произведение строки на столбец, т. е. $\sum \xi_i y^i$),

$$\widehat{\mathscr{B}}(\alpha,\beta) = \mathscr{B}(v,w) = \xi y = \xi B^{-1}\eta' = \sum \widehat{b}^{ij}\xi_i\eta_j,$$

где $\widehat{b}^{ij}$ — коэффициенты матрицы B^{-1}.

Если $\mathscr{B}$ — евклидово или псевдоевклидово скалярное произведение, то и $\widehat{\mathscr{B}}$ тоже. Это сразу видно из сказанного о матричных коэффициентах, но легко может быть доказано непосредственно. В римановой геометрии матрицу коэффициентов скалярного произведения в исходном V обычно обозначают через (g_{ij}) и называют метрическим тензором (это действительно тензор в том смысле, как это понимается в тензорном исчислении), а матрицу коэффициентов соответствующего скалярного произведения («обратной билинейной формы») в V^* — через (g^{ij}) (опуская, стало быть, «крышку» над g). Оба ассоциированных со скалярным произведением (хотя бы и псевдоевклидовым) отображения (2.10) совпадают. В терминах координат они имеют вид $\xi_i = g_{ij}x^j$ («опускание индекса»), а обратное отображение есть $x^i = g^{ij}\xi_j$ («поднимание индекса». Обозначения для векторов, ковекторов и их координат сейчас те же, что и в (2.11), только матрица коэффициентов используемого билинейного фуннкционала в V — не

(b_{ij}), а (g_{ij}), и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

Говорят, что линейное отображение $\mathscr{C}\colon V \to V$ сохраняет билинейный функционал $\mathscr{B}$, если $\mathscr{B}(v,w) = \mathscr{B}(\mathscr{C}v, \mathscr{C}w)$ для всех $v, w \in V$. В терминах координат (теперь y будет координатой w) отсюда следует, что

$$(Bx, y) = (BCx, Cy) \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (или } \mathbb{C}^n\text{)},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ (или его продолжение в $\mathbb{C}^n$), откуда $B = C'BC$. Если B — невырожденный функционал, то отсюда следует, что $(\det C)^2 = 1$, $\det \mathscr{C} = \pm 1$. В частности, определитель ортогонального или псевдоортогонального (сохраняющего псевдоевклидово скалярное произведение) преобразования равен ± 1. В этом случае простейшие примеры показывают, что реализуются обе возможности. Другой важный пример — преобразования $\mathscr{C}$, сохраняющее невырожденный билинейный кососимметричный функционал. Когда последний играет особую роль как существенная черта рассматриваемой структуры, то $\mathscr{C}$ называется симплектическим преобразованием. Из сказанного видно, что $\det \mathscr{C} = \pm 1$. Однако для симплектического преобразования такой результат — не окончательный: другим способом можно доказать, что $\det \mathscr{C} = 1$.

4. Сопряженное отображение. Пусть $\mathscr{C}\colon V \to W$ — линейное отображение, которое в терминах координат, отвечающих базисам $A = (a_1, \ldots, a_n)$ в V и $B = (b_1, \ldots, b_m)$ в W, представляется матрицей $C = (c^i_j)^{i=1,\ldots,m}_{j=1,\ldots,n}$. Как и для обсуждавшихся выше отображений $V \to V$, задание отображения посредством действия C на координаты отображаемого вектора (вектор $v \in V$ с координатами x переходит в вектор $w \in W$ с координатами y) и посредством действия на базис A (оно описывается путем умножения строки B справа на C — базис A переходит в набор векторов

$$(\mathscr{C}a_1, \ldots, \mathscr{C}a_n) = (b_1, \ldots, b_m)C = BC,$$

т. е. a_i переходит в $\mathscr{C}a_i = \sum\limits_j c^j_i b_j$) приводит к одному и тому же результату (если $v = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$, то $\mathscr{C}v = ACx$). Сопряженное линейное отображение $\mathscr{C}^*\colon W^* \to V^*$ переводит линейный функционал β на W в такой линейный функционал $\alpha = \mathscr{C}^*\beta$ на V, что

$$\alpha(w) = \beta(\mathscr{C}v) \quad \text{для всех } v \in V. \tag{2.13}$$

(Утверждение о существовании такого α — это очевидное утверждение, что отображение $v \mapsto \beta(v)$ является линейным функционалом на V. В проверке (весьма несложной) нуждается только утверждение о линейности отображения $\beta \mapsto \mathscr{C}^*\beta$.) При использовании в V^* и W^* координат, отвечающих базисам $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ и $\beta^1, \dots, \beta^m$, взаимных по отношению к $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ соответственно, отображение $\mathscr{C}$ описывается так: если $\beta \in W^*$ имеет координаты η (т. е. $\beta = \sum \eta_i \beta^i$), то $\mathscr{C}^*\beta$ имеет координаты ηC, т. е. $\mathscr{C}^*\beta = \sum \xi_i \alpha^i$, где $\xi^i = \sum\limits_j \eta_j c_i^j$. Действительно, для $v = Ax$ имеем: $\beta(\mathscr{C}v) = \eta(Cx)$ (справа стоит произведение матрицы-строки η на матрицу-столбец Cx), что равно $(\eta C)x$, а это и означает, что строка ηC доставляет координаты функционала $\mathscr{C}^*\beta$. Вероятно, читателю более привычна (хотя бы в каких-то частных случаях) другая формулировка, в которой фигурирует транспонированная матрица C'. Эта формулировка относится к тому варианту обозначений, когда координаты ковектора записываются в виде столбца. В наших терминах это означает, что ковекторы β и $\mathscr{C}^*\beta$ представляются не строками η и $\xi = C\eta$, а столбцами η' и $\xi' = (C\eta)' = C'\eta'$. Как видно, в этих терминах столбец η', действительно, умножается слева на матрицу C'.

Уместно отметить еще такой родственный факт: если $\mathscr{C}\colon V \to W$ — изоморфизм векторных пространств, переводящий базис $(a_1, \dots, a_n)$ первого в базис $(b_1, \dots, b_n)$ второго, то $\mathscr{C}^*\colon W^* \to V^*$ переводит взаимный к $(b_1, \dots, b_n)$ базис $(\beta^1, \dots, \beta^n)$ второго пространства во взаимный к $(a_1, \dots, a_n)$ базис $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ первого пространства. Это сразу видно из того, что при сделанных предположениях в этих базисах $\mathscr{C}$ представляется единичной матрицей, так что для любого $\beta \in W^*$ ковектор $\mathscr{C}^*\beta$ имеет в базисе $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ пространства V^* те же координаты, которые β имеет в базисе $(\beta^1, \dots, \beta^n)$ пространства W^*; в частности, это относится к самим β^i, для которых получается, что $\mathscr{C}^*\beta^i$ имеет в базисе $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ координаты δ_j^i.

Если в V и W введено скалярное произведение (хотя бы и псевдоевклидовое), то под сопряженным оператором может пониматься другой объект — линейное отображение $\mathscr{C}^*\colon W \to V$, для которого

$$(v, \mathscr{C}^* w) = (\mathscr{C} v, w) \quad \text{при всех } v \in V, w \in W. \tag{2.14}$$

С частным случаем этого мы уже встречались в (1.9). Как и там, в терминах соответствующих функционалов $\beta = (\cdot, w)$ на W и $\alpha = (\cdot, \mathscr{C}^* w)$ на V (2.14) означает, что $\alpha = \mathscr{C}^*\beta$ (где $\mathscr{C}^*$ понимается в том же смысле, что и в предыдущем параграфе). При использовании в V и W таких базисов, в которых $(\cdot,\cdot)$ имеет вид (2.12), переход от координат x вектора $\mathscr{C}^* w$ к координатам ξ ковектора α и от координат y вектора w к координатам η ковектора β очень прост. Если скалярное произведение евклидово, т. е. если в (2.12) нет минусов, то этот переход сводится просто к транспонированию, превращающему столбец в строку; значит, если $\mathscr{C}$ описывается матрицей C, то

$$\xi = \eta C,\ x = \xi' = (\eta C)' = C'\eta' = C'y.$$

Таким образом, в этом случае сопряженный оператор $V \to W$ описывается транспонированной матрицей. (Когда в конце предыдущего абзаца мы заменили вектор-строки ξ, η вектор-столбцами ξ', η', мы фактически как раз перешли к x и y, если только наш координатный базис был ортонормированным.) Если же в (2.12) имеются минусы, то для перехода от ξ, η к x, y надо не только переписать строки в виде столбцов, но и изменить знак у части координат. Соответственно, при переходе от формулы $\xi = C\eta$ к формуле, выражающей x через y, надо не только транспонировать матрицу C, но и изменить знаки у части ее элементов.

Наряду с отображением $V \to V$ можно рассматривать замену координат в V, описываемую (двумя способами — (ЗК) и (ЗБ)) матрицей C. Посмотрим, как при этом изменяются координаты в V^*, имея в виду, что там используются базисы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, взаимные с базисами A и B в V.

(ЗК) В обозначениях из п. 1, $v = Ax = By$, $y = Cx$. Так как

$$\alpha^i(v) = \text{ } i\text{-я координата } v \text{ в базисе } A = x^i,$$
$$\beta^i(v) = \text{ } i\text{-я координата } v \text{ в базисе } B = y^i,$$

то

$$\begin{pmatrix} \beta^1(v) \\ \vdots \\ \beta^n(v) \end{pmatrix} = y = Cx = C \begin{pmatrix} \alpha^1(v) \\ \vdots \\ \alpha^n(v) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = C\mathfrak{A}.$$

Итак, если в V мы производим (ЗК) с матрицей C, то в V^* происходит (ЗБ) с матрицей C, действующей слева (а не справа, как в V) на исходный базис $\mathfrak{A}$. Если на минуту перейти к записи базисов в V^* в виде строк, то соотношение $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$ перепишется в виде $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'C'$. Согласно (ЗБ) из п. 1, тогда координаты ξ', η' (записываемые столбцом) преобразуются так: $\eta' = (C')^{-1}\xi'$, откуда при обычной (строчной) их записи получается $\eta = \xi C^{-1}$.

(ЗБ) В п. 1 показано, что при (ЗБ) в V с матрицей C происходит (ЗК) с матрицей C^{-1}. А из предыдущего абзаца следует, что тогда в V^* происходит (ЗБ) с той же матрицей C^{-1}: $\mathfrak{B} = C^{-1}\mathfrak{A}$, причем при этом $\eta = \xi(C^{-1})^{-1} = \xi C$.

5. Тензоры. В этом пункте, как и в некоторых других местах, подразумевается, что читатель имеет некоторое (пусть неполное и даже несколько смутное) представление о тензорах. Напомню вкратце, что тензор валентности $k + l$ в n-мерном пространстве V, k раз контравариантный и l раз ковариантный, можно определить как правило, сопоставляющее каждой координатной системе в V набор n^{k+l} чисел («координат» или «компонент» этого тензора) $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$, где индексы $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ независимо друг от друга пробегают значения $1, \ldots, n$, причем при замене координат эти числа заменяются другими числами так, как описано ниже в основном тексте. Другое определение того же тензора — это полилинейная функция[14]

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{l \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}$$

(или со значениями в другом основном поле).

Связь этих двух определений дается формулой (в которой, как обычно в «тензорном» контексте, используется правило суммирования по повторяющимся индексам)

$$T(v_1, \ldots, v_l, u^1, \ldots, u^k) = T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} v^{j_1}_1 \ldots v^{j_l}_l u^1_{i_1} \ldots u^k_{i_k} \qquad (2.15)$$

для полилинейной функции T от $v_1, \ldots, v_l \in V^*$, $u^1, \ldots, u^k \in V$, сопоставляемой тензору в первом смысле $\{T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}\}$. Таким образом, числа $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$ суть коэффициенты в «координатном выражении» для функции T. Кроме того, если $a_1, \ldots, a_n$ — используемый базис в V, а $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ — взаимный базис в V^*, то

$$T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} = T(a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}, \alpha^{i_1}, \ldots, \alpha^{i_k}).$$

Теперь надо объяснить, как преобразуются координаты тензора при ЗК в V. В тензорном исчислении имеется несколько соглашений, позволяющих автоматически писать формулы для преобразования координат (компонент) различных тензоров (предполагая, конечно, что мы вообще имеем дело с тензором и что нам известен его характер — по каким индексам он контравариантен, по каким ковариантен). Одно из них — это правило суммирования по повторяющимся индексам (которым мы обычно не пользуемся, но которое используется в данном пункте). Далее, тензор представляется своими координатами, которые обозначаются той же буквой («коренной буквой»), что и сам тензор, но с добавлением индексов; при этом часто говорят коротко «тензор $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$», а не «тензор T с координатами $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$». Так, у нас координаты вектора v были x^i, но теперь их надо обозначать через v^i, и при этом можно говорить «вектор v^i». Аналогично можно

[14]Функция $f(w_1, \ldots, w_r)$, определенная на прямом произведении $W_1 \times \ldots \times W_r$ векторных пространств $W_1, \ldots, W_r$, называется полилинейной, если она линейна по каждому аргументу в отдельности.

говорить о ковекторе β_i (сама β_i — это бывшая ξ_i, т. е. i-я координата ковектора β, но в то же время «ковектор β_i» есть сам β), линейном операторе c_i^j, билинейном функционале b_{ij} (как видно, координатами линейного оператора и билинейного функционала, рассматриваемых как тензоры, служат соответствующие коэффициенты). Индексы, по которым тензор контравариантен, ставятся наверху, а по которым он ковариантен — внизу[15]. При переходе от координат $x^1, \dots, x^n$ в V (сейчас координаты только декартовы) к другим координатам $x^{1'}, \dots, x^{n'}$, — как видно, мы для второй системы координат ставим штрих у индексов, — координаты тензора в новой системе координат обозначаются прежней буквой (ведь сам он не изменился), но у индексов ставим штрих. (Переход к третьей системе координат потребовал бы двух штрихов[16] или иных дополнительных значков как у самих координат, так и у координат тензора.) Таким образом, например,

$$\mathscr{B}(v, w) = b_{ij} v^i w^j = b_{i'j'} v^{i'} w^{j'}.$$

Теперь можно написать общую формулу, выражающую для тензора $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ его новые координаты $T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l}$ через старые:

$$T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l} = T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j'_l}}. \tag{2.16}$$

Прокомментируем ее вид. Справа стоит сумма по повторяющимся индексам некоторых одночленов. Повторяются (сверху

[15] От индексов, нумерующих координаты, надо отличать индексы, нумерующие рассматриваемые объекты. У нас таковы, например, номера базисных векторов a_i, базисных ковекторов α^i, а также наборы индексов, нумерующие базисные элементы (3.3) во вводимом далее пространстве внешних k-форм. При последовательном проведении «тензорной» системы обозначений такие индексы ставятся не справа от коренной буквы, а над ней или под ней, например: $\underset{i}{a}, \overset{i}{\alpha}$. Мы этого не делаем.

[16] «Что вы будете делать, когда дойдете до тринадцатого цезаря?» спросил у сенаторов римский император Тиберий, когда сенат решил было переименовать в честь Тиберия один из месяцев (после того как ранее два других месяца были переименованы в честь Юлия Цезаря и Августа). В отличие от сенаторов, мы можем предложить ответ на аналогичный вопрос: мы напишем $x^{i^{(13)}}$.

и снизу) все нештрихованные индексы $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l)$ (причем у коренной буквы нештрихованный индекс стоит на том же месте, в каком соответствующий штрихованный индекс стоит у коренной буквы слева), так что остаются свободными только штрихованные индексы. Каждый одночлен — это произведение старой координаты $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$ нашего тензора и частных производных одних координат по другим — новых координат по старым и старых координат по новым. Всего перемножается $k + l$ производных — столько же, сколько индексов у тензора. Хотя частная производная $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ или $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ — не тензор (она определенным образом связана с двумя координатными системами $x^i, x^{i'}$ и не имеет самостоятельного значения), у нее тоже можно различать «верхний» индекс — это верхний индекс у буквы $x^{i'}$ или x^i, стоящей в «числителе», — и «нижний» индекс — это верхний индекс у буквы x^i или $x^{i'}$, стоящей в «знаменателе». В (2.16) каждому штрихованному индексу (верхнему, вида i'_h, или нижнему, вида j'_h), стоящему у коренной буквы слева, соответствует такой же (тоже штрихованный) индекс у одной из производных, расположенный так же, как в левой части, т. е. тоже сверху или тоже снизу. Второй индекс у этой производной — такой же нештрихованный индекс; его расположение (сверху или снизу) противоположно расположению соответствующего штрихованного индекса, а значит и положению того же нештрихованного индекса в первом множителе.

Представляем читателю проверить, что это правило дает верные формулы преобразования для тех тензоров, которые встречаются в этом и следующем параграфах, — для v^i, β_i, c^i_j, b_{ij}, а также для координат вводимых в §3 внешних форм (рассматриваемых как тензоры). Кроме того, оно гарантирует, что

$$T^{i'_1,\ldots,i'_k}_{j'_1,\ldots,j'_l} v_1^{j'_1} \ldots v_l^{j'_l} u^1_{i'_1} \ldots u^k_{i'_k} = T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} v_1^{j_1} \ldots v_l^{j_l} u^1_{i_1} \ldots u^k_{i_k},$$

т. е. что формула (2.15) корректно определяет полилинейную функцию

$$T(v_1, \ldots, v_l, u^1, \ldots, u^k).$$

(Корректность означает, что хотя при ее определении согласно правой части (2.15) использована какая-то система координат, результат не зависит от конкретного выбора этой системы.) Обратно, если дана полилинейная функция

$$T(v_1, \ldots, v_l, u^1, \ldots, u^k),$$

то коэффициенты в ее «координатном выражении» (правой части (2.15)) при (ЗК) преобразуются согласно (2.16).

Помимо замен координат, существуют еще линейные отображения. Можно ли говорить о действии линейного отображения $\mathscr{A}\colon V \to W$ на тензоры?

1а) Если T — контравариантный тензор в V (компоненты $T^{i_1,\ldots,i_k}$), то можно говорить об образе («прямом образе») $\mathscr{A}_*T$ этого тензора. Этот образ является тензором в W с координатами

$$(\mathscr{A}_*T)^{j_1,\ldots,j_k} = T^{i_1,\ldots,i_k}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}}.$$

Можно также сказать, что $\mathscr{A}_*T$ есть следующая полилинейная функция:

$$\mathscr{A}_*T\colon \underbrace{W^* \times \ldots \times W^*}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}$$

$$\mathscr{A}_*T(\omega^1, \ldots, \omega^k) = T(\mathscr{A}^*\omega^1, \ldots, \mathscr{A}^*\omega^k) \quad \text{при } \omega^1, \ldots, \omega^k \in W^*.$$

1б) Если T — ковариантный тензор в W (компоненты $T_{i_1,\ldots,i_k}$), то можно говорить об образе («обратном образе») $\mathscr{A}T$ этого тензора. Этот образ является тензором в V с координатами

$$(\mathscr{A}^*T)_{i_1,\ldots,i_k} = T_{j_1,\ldots,j_k}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}}.$$

Можно также сказать, что $\mathscr{A}^*T$ есть следующая полилинейная функция:

$$\mathscr{A}^*T\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R}$$

$$\mathscr{A}^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(\mathscr{A}v_1 \ldots, \mathscr{A}v_k) \quad \text{при } v_1, \ldots, v_k \in V.$$

2) Если T не является ни чисто ковариантным, ни чисто контравариантным, то не приходится говорить о его поведении при

отображении $\mathscr{A}$[17]. Положение меняется, если $\mathscr{A}$ является изоморфизмом векторных пространств.

2а) Определим прямой образ $\mathscr{A}_*T$ заданного в V тензора T с координатами $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$ при изоморфизме $\mathscr{A}$ как следующий тензор в W. Пусть $a_1,\dots,a_n$ — базис в V, $\alpha^1,\dots,\alpha^n$ — взаимный базис в V^*. Тогда $\mathscr{A}a_1,\dots,\mathscr{A}a_n$ — базис в W, $(\mathscr{A}^*)^{-1}\alpha_1,\dots,(\mathscr{A}^*)^{-1}\alpha_n$ — базис в W^*, взаимный к $\mathscr{A}a_1,\dots,\mathscr{A}a_n$. В терминах соответствующих координат

$$(\mathscr{A}_*T)^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} = T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}. \tag{2.17}$$

(С помощью $\mathscr{A}$ мы переносим в W координаты из V; в полученных координатах в W все остается таким же, как в V.) Сопоставление $T \leftrightarrow S$ не зависит от исходных координат в V: примем, что $\mathscr{A}_*T$ есть тензор, который в некоторой исходной системе координат имеет те же координаты, что и T в соответствующей системе координат в V; когда мы делаем (ЗК) в V, соответствующая (ЗК) в W происходит по тем же формулам; поэтому, новые координаты тензора $\mathscr{A}_*T$ выражаются через прежние его координаты по тем же формулам, по каким новые координаты T выражаются через прежние его координаты; значит, в новых координатах по-прежнему выполняется (2.17). Можно также сказать, что как полилинейная функция $\mathscr{A}_*T$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{A}_*T\colon \underbrace{W\times\ldots\times W}_{l\text{ раз}}\times\underbrace{W^*\times\ldots\times W^*}_{k\text{ раз}}$$

[17]Если бы мы рассматривали более сложный тип тензоров — полилинейных функций на $V_1\times\ldots\times V_l\times W_1^*\times\ldots\times W_k^*$ с (вообще говоря) различными векторными пространствами $V_1,\dots,W_k$, то можно было бы говорить, что при линейных отображениях $\mathscr{A}_i\colon \overline{V}_i\to V_i$, $\mathscr{B}_j\colon W_j\to\overline{W}_j$ тензору T сопоставляется тензор

$$S\colon \overline{V}_1\times\ldots\times\overline{V}_l\times\overline{W}_1^{\,*}\times\ldots\times\overline{W}_k^{\,*}\to\mathbb{R}$$
$$S(\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_l,\overline{\omega}^1,\dots,\overline{\omega}^k) = T(\mathscr{A}_1\overline{v}_1,\dots,\mathscr{A}_l\overline{v}_l,\mathscr{B}_1^{\,*}\overline{\omega}^1,\dots,\mathscr{B}_k^{\,*}\overline{\omega}^k).$$

$$\mathscr{A}_* T(w_1, \ldots, w_l, \omega^1, \ldots, \omega^k) =$$
$$= T(\mathscr{A}^{-1} w_1, \ldots, \mathscr{A}^{-1} w_l, \mathscr{A}^* \omega^1, \ldots, \mathscr{A}^* \omega^k).$$

2б) Определим обратный образ $\mathscr{A}^* T$ заданного в W тензора T с координатами $T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$ при изоморфизме $\mathscr{A}$ как следующий тензор в V. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — базис в W, $\beta^1, \ldots, \beta^n$ — взаимный базис в W^*. Тогда $\mathscr{A}^{-1} b_1, \ldots, \mathscr{A}^{-1} b_n$ — базис в V, $\mathscr{A}^* \beta_1, \ldots, \mathscr{A}^* \beta_n$ — базис в V^*, взаимный к $\mathscr{A}^{-1} b_1, \ldots, \mathscr{A}^{-1} b_n$. В терминах соответствующих координат

$$(\mathscr{A}^* T)^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} = T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}.$$

(С помощью $\mathscr{A}^{-1}$ мы переносим в V координаты из W; в полученных координатах в V все остается таким же, как в W.) Корректность этого определения и его перефразировка в терминах полилинейных функций получаются аналогично 2а). Очевидно также, что $\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}^{-1})_*$. Кроме того, $\mathscr{A}^* = (\mathscr{A}_*)^{-1}$, если только уточнить, на каком именно пространстве рассматривается оператор $\mathscr{A}_*$. (Скажем, на пространстве всех тензоров в V, k раз контравариантных и l раз ковариантных, или на бесконечномерном пространстве всех тензоров вообще.) В связи с этим мы будем при случае писать $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}_*^{-1}$, не заботясь о расстановке скобок.

6. Приведение билинейного кососимметричного функционала к каноническому виду. В заключение докажем, что ранг билинейного кососимметричного функционала $\mathscr{B}$ всегда четный и что если ранг равен $2k$, то существует такой базис $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\begin{aligned}
&& \mathscr{B}(a_{2i-1}, a_{2i}) = 1, \\
\text{если } i < k, & \quad \text{то} & \mathscr{B}(a_{2i-1}, a_j) = 0 \text{ при } j \neq 2i, \\
&& \mathscr{B}(a_{2i}, a_j) = 0 \text{ при } j \neq 2i-1; \\
\text{если } i > 2k, & \quad \text{то} & \mathscr{B}(a_i, a_j) = 0 \text{ при всех } j.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Иными словами, матрица коэффициентов в этом базисе имеет блочный вид

$$B = \begin{pmatrix} \overline{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\overline{B}$ — блочно-диагональная квадратная матрица $2k$-го порядка, вдоль диагонали которой k раз повторяется блок $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, так что

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
. & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
. & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots
\end{array}\right)$$

(разумеется, не исключено, что блоков и (или) нулей будет меньше, чем указано). В терминах координат x, y векторов v, w по отношению к этому базису

$$\mathscr{B}(v, w) = \sum_{i=1}^{k} (x^{2i-1} y^{2i} - x^{2i} y^{2i-1}). \tag{2.19}$$

(канонический вид билинейного кососимметричного функционала).

Данному утверждению можно придать более геометрический характер. По аналогии с евклидовой геометрией, будем говорить, что векторы v и w ортогональны[18] и писать $v \perp w$, если

[18] Сейчас V не снабжено евклидовой структурой, т. е. там не введено никакой «предпочтительной» евклидовой метрики, поэтому опасность путаницы только что введенной ортогональности с ортогональностью в обычном (евклидовом) смысле исключена. Если бы такая метрика имелась, то можно было бы говорить, скажем, о $\mathscr{B}$-ортогональности или о косоортогональности.

Если кососимметричный билинейный функционал $\mathscr{B}$ — невырожденный, то его называют симплектической формой (говорят также, что он вводит в V симплектическую структуру и что такое V является симплектическим

$\mathscr{B}(v,w)=0$. Так как $\mathscr{B}(v,w)=-\mathscr{B}(w,v)$, то соотношения $v\perp w$ и $w\perp v$ эквивалентны (точно так же, как в случае евклидова или псевдоевклидова скалярного произведения[19]). Вектор v ортогонален векторному подпространству $W\subset V$ (запись: $v\perp W$), если $v\perp w$ для всех $w\in W$. Подпространства W_1, W_2 ортогональны (друг к другу; запись: $W_1\perp W_2$), если $w_1\perp w_2$ при всех $w_1\in W_1$, $w_2\in W_2$. Ортогональное дополнение $W^\perp$ к векторному подпространству W — это $W^\perp=\{v\in V;\ v\perp W\}$; оно само является векторным подпространством. Для $W=\mathbb{R}v$ вместо $W^\perp$ пишут короче $v^\perp$. В отличие от евклидова случая, теперь всегда $v\in v^\perp$ (таким образом, слово «дополнение» здесь имеет не тот смысл, который ему придается в выражениях типа «V разлагается в прямую сумму W и дополнительного к нему подпространства»). Ортогональная прямая сумма нескольких векторных подпространств — это прямая сумма, «слагаемые» которой ортогональны друг другу. Используя эти понятия, можно сформулировать утверждение из предыдущего абзаца следующим образом: V разлагается в ортогональную прямую сумму $V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_k\oplus W$, где W_i двумерны, ограничения $\mathscr{B}|W_i$ (т. е. $\mathscr{B}|W_i\times W_i$) — невырожденные, а $\mathscr{B}|W$ тождественно равно нулю. (Тот факт, что в плоскости W_i найдется такой базис a_{2i-1}, a_{2i}, для которого $\mathscr{B}(a_{2i-1}, a_{2i})=1$, очевиден: принимаем за a_{2i-1} любой ненулевой вектор $a\in W_i$, берем такой вектор $b\in W$, для которого $\mathscr{B}(a,b)\neq 0$ (годится, кстати, любой вектор из W_i, линейно независимый с a), и умножаем его на подходящее число). А чтобы доказать последнее утверждение, очевидно, достаточно убедиться, что если $\mathscr{B}$ не равно тождественно нулю, то V разлагается в ортогональную прямую сумму $V=W_1\oplus V_1$, где W_1 двумерно и ограничение $\mathscr{B}|W_1$ невырождено. («Отщепив» ортогональное прямое слагаемое W_1, рассматриваем функционал

пространством). В этом случае можно говорить о симплектической ортогональности.

[19] Не делая заранее никаких предположений о билинейном функционале $\mathscr{B}$, можно доказать, что если соотношения $\mathscr{B}(v,w)=0$ и $\mathscr{B}(w,v)=0$ эквивалентны, то $\mathscr{B}$ либо симметричен, либо кососимметричен. См. Э. Артин. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

$\mathscr{B}|V_1$ и, если он не равен тождественно нулю, «отщепляем» еще одно слагаемое W_2, и т. д.)

А теперь доказательство почти очевидно. Если $\mathscr{B}$ не равно тождественно нулю, то имеются такие $u, v \in V$, что $\mathscr{B}(u,v) \neq 0$. Положим $W_1 = \mathbb{R}\, u + \mathbb{R}\, v$. W_1 двумерно, ибо u и v должны быть линейно независимы, — иначе $\mathscr{B}(u,v)$ равнялось бы нулю. В базисе u, v пространства W_1 функционал $\mathscr{B}|W_1$ имеет матрицу коэффициентов $\begin{pmatrix} 0 & \mathscr{B}(u,v) \\ -\mathscr{B}(u,v) & 0 \end{pmatrix}$ и, очевидно, невырожден. Линейные функционалы $\mathscr{B}(u,\cdot)$ и $\mathscr{B}(v,\cdot) = -\mathscr{B}(\cdot,v)$ на V — ненулевые; они линейно независимы, ибо первый из них обращается в 0 на u и не обращается в 0 на v, а со вторым все обстоит наоборот. Значит, $V_1 = \{\, w : \ \mathscr{B}(u,w) = \mathscr{B}(v,w) = 0\,\}$ — векторное подпространство коразмерности 2. Раз оно ортогонально u и v, то оно ортогонально любой их линейной комбинации, так что $V_1 \perp W_1$. Наконец, $W_1 \cap V_1 = \{0\}$ (откуда уже по одним только соображениям размерности следует, что $V = W_1 \oplus V_1$). Ведь если $\lambda u + \mu v \in W_1$, то $0 = \mathscr{B}(v, \lambda u + \mu v) = -\lambda$ и $0 = \mathscr{B}(u, \lambda u + \mu v) = \mu$, т. е. $\lambda = \mu = 0$.

7. Ориентация. Назовем два базиса $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ пространства V (и соответствующие системы координат в этом пространстве) эквивалентными, если матрица соответствующей (ЗК) или (ЗБ) имеет положительный определитель. (Говорить ли здесь о (ЗК) или (ЗБ), безразлично. В первом случае речь идет о матрице C_1, описывающей, как изменяется вектор-столбец, состоящий из координат вектора v, при переходе от A к B (если x есть этот вектор-столбец координат в базисе A, а y — в базисе B, то $y = C_1 x$); во втором случае речь идет о матрице C_2, позволяющей непосредственно выразить B через A (именно, $B = AC_2$); но мы видели, что $C_1 = C_2^{-1}$, так что у определителей этих матриц знаки одинаковые.) Легко видеть, что введенная таким образом «эквивалентность» действительно является отношением эквивалентности и что множество всех базисов (или, что равносильно, множество всех координатных систем) разбивается на два класса эквивалентности. Не столь легко (но и не особенно трудно) доказать, что два базиса A, B тогда и только тогда лежат в одном классе, когда их можно непрерывно продеформировать друг в друга в множестве всех базисов (это значит, что существует такой базис $A(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$, который непрерывно зависит от «параметра деформации» $t \in [0, 1]$, т. е. у которого все $a_i(t)$ непрерывны по t, и для которого $A(0) = A,\ A(1) = B$).

Задать (выбрать, ввести) в пространстве V ориентацию — это значит выбрать один из этих двух классов и объявить, что соответствующие базисы (и системы координат) считаются «положительно ориентированными», а базисы (и системы координат), принадлежащие другому классу — «отрицательно ориентированными». Достаточно объявить положительно ориентированным один какой-нибудь базис (одну координатную систему), ибо этим выбором выделяется тот класс, которому этот базис принадлежит. Говорят, что базис определяет ориентацию. Так как ориентаций всего две, то говорят, что они противоположны друг другу. О пространстве, в котором задана ориентация, говорят как об ориентированном пространстве.

Пусть V, W — ориентированные векторные пространства равной размерности. Говорят, что линейный изоморфизм $\mathscr{F}\colon V \to W$ сохраняет ориентацию, если он переводит какой-нибудь (а тогда и любой) положительно ориентированный базис V в положительно ориентированный базис W. В противном случае говорят, что $\mathscr{F}$ изменяет (обращает, заменяет) ориентацию. Выбрав по положительно ориентированному базису в V и W, мы можем описать $\mathscr{F}$ с помощью некоторой матрицы F (в данном случае оба варианта — (ОК) и (ОБ) — приводят к одной и той же F). $\mathscr{F}$ сохраняет ориентацию в том и только том случае, когда $\det F > 0$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ обычно положительной считается ориентация, определяемая его стандартным базисом.

В трехмерном физическом пространстве, в котором мы живем, два класса базисов и координатных систем называются «правым» и «левым»; сами соответствующие базисы и системы тоже называются «правыми» и «левыми», а применительно к базисам говорят о «правых и левых тройках векторов». Представитель первого класса базисов получается, если растопырить первые три пальца правой руки и направить первый вектор базиса вдоль большого пальца (от пясти к концу пальца), второй вектор — вдоль указательного и третий — вдоль среднего пальца. Представитель второго класса аналогичным образом определяется с помощью левой руки. В настоящее время обычно предпочтительно используются правые координатные системы; они и считаются ориентированными положительно. Глядя из конца вектора e_1 на плоскость векторов e_2, e_3 (все три вектора подразумеваются исходящими из одной точки), мы увидим, что поворот от e_2 к e_3 (происходящий по углу, меньшему $180°$) происходит против часовой стрелки. Если смотреть из конца e_2 (соответственно, e_3), то против часовой стрелки происходит поворот от e_3 к e_1 (соответственно, от e_1 к e_2).

В векторном исчислении и физике (включая механику) встречаются величины, построение которых подразумевает выбор в трехмерном векторном пространстве как положительно определенного скалярного произведения, так и ориентации. Физическому пространству, с которым при этом имеют дело, присущи известные из элементарной геометрии метрические свойства, вследствие которых угол $\angle(u,v)$ между двумя (ненулевыми) векторами u,v однозначно определяется самими u,v, а об их длинах $|u|,|v|$ можно говорить после того, как выбрана единица длины. Поэтому скалярное произведение $(u,v) = |u||v|\cos\angle(u,v)$ двух данных векторов определяется метрическими свойствами пространства, с точностью до тривиальной оговорки о единице длины (которая в физике является частью используемой системы единиц и тем более не заслуживает специального упоминания в этом месте). В определении же векторного произведения $[u,v]$ используется, кроме того, понятие правой тройки векторов. Его длина $|[u,v]| = |u||v|\sin\angle(u,v)$, — здесь нужна только единица длины, — а направление определяется двумя условиями: вектор $[u,v]$ ортогонален векторам u,v и векторы $u,v,[u,v]$ образуют правую тройку. (Здесь подразумевается, что u,v линейно независимы. Если они линейно зависимы, то $|[u,v]| = 0$, и специально говорить о направлении $[u,v]$ не приходится — куда его ни направить, получится нулевой вектор.) Известно, что в правой ортонормированной системе координат с базисом (e_1,e_2,e_3) векторное произведение

$$[u,v]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} \qquad (u^i, v^i\text{ — координаты } u, v). \qquad (2.20)$$

(Определитель надо «раскрыть» так, как если бы все его элементы были числами. Например, в полученном выражении будут два члена с e_1:

$$u^2v^3e_1 - u^3v^2e_1 = (u^2v^3 - u^3v^2)e_1.$$

$u^2v^3 - u^3v^2$ — это первая координата $[u,v]^1$ вектора $[u,v]$.)

При переходе к левому базису, если по-прежнему в определении $[u,v]$ говорить о правой тройке, в формуле (2.20) надо было бы перед правой частью поставить знак «минус». (Например, для левой ортонормированной тройки (e_1, e_2, e_3) при прежнем определении $[e_1, e_2] = -e_3$, а правая часть (2.20) без «минуса» дала бы e_3.) Однако, если приходится пользоваться и правыми, и левыми координатами, то поступают иначе. Во-первых, принимают, что векторное произведение зависит не только от метрики (включая сюда и масштаб длины), но и от ориентации, а именно, что векторы $u, v, [u,v]$ должны образовывать положительно ориентированный базис (если только u, v линейно независимы; в противном случае, как уже отмечалось, вопроса о направлении $[u,v]$ вообще не возникает). Во-вторых, подразумевают, что используются только положительно ориентированные (и по-прежнему ортонормированные) системы координат. В-третьих, если все-таки надо перейти от одной системе координат к системе с противоположной ориентацией, то считают, что при этом меняется и ориентация пространства.

При таких соглашениях формула (2.20) верна для любого ортонормированного базиса. Однако получается, что векторное произведение — это не совсем обычный вектор: при изменении ориентации он заменяется противоположным вектором, тогда как с обычным вектором $\overrightarrow{AB}$ ничего такого не происходит. Таким образом, приходится признать, что наряду с обычными векторами существуют еще объекты другого рода, — их называют «аксиальными (осевыми) векторами» или «псевдовекторами». При фиксированной ориентации пространства псевдовектор неотличим от обычного вектора, который можно считать его «изображением», но при изменении ориентации надо перейти к новому «изображению» того же псевдовектора, имеющему ту же длину и противоположное направление.

Примером псевдовектора в механике является угловая скорость ω. В ее элементарном определении всегда где-нибудь фигурирует правая тройка или вращение против часовой стрелки. На тот случай, если придется изменять ориентацию координат, лучше в определении перейти к условию, что соответствующая тройка векторов ориентирована так же, как и тройка векторов базиса. При таком определении ω формула

$$v_A - v_0 = [\omega, \overrightarrow{OA}],$$

которая связывает обычные («линейные») скорости v_A и v_O точек A, O твердого тела, имеющего (мгновенную) угловую скорость ω, справедлива и для правых, и для левых систем координат. (При изменении ориентации обычный вектор, изображающий псевдовектор ω, надо заменить на противоположный, но и у $[\cdot,\cdot]$ тоже изменяется знак, а потому векторное произведение псевдовектора на обычный вектор является обычным вектором, как оно и должно быть, поскольку в левой части последней формулы стоит обычный вектор.)

В физике примером псевдовектора является вектор напряженности магнитного поля (тогда как напряженность электрического поля — обычный вектор).

Сказанное о псевдовекторах непосредственно относится к трехмерному случаю. Однако само по себе понятие псевдовектора (который при фиксированной ориентации изображается обычным вектором, причем последний заменяется противоположным вектором при изменении ориентации) годится при любой размерности. Аналогичным образом определяется более общее понятие псевдотензора[20].

[20]В математической литературе иногда термин «псевдотензор» употребляют в другом (и, в общем, более широком) смысле. В физической литературе, кажется, «псевдовекторы» и «псевдотензоры» понимаются только в том смысле, как здесь.

Нам не придется пользоваться псевдовекторами и псевдотензорами, поэтому подробнее говорить о них не будем. Объект, зависящий от ориентации, появится у нас только один раз (в конце §3, не считая небольшого разговора в середине того же параграфа).

Если в V введена ориентация, то автоматически вводится ориентация и в V^*: берем положительно ориентированный базис $A = (a_1, \ldots, a_n)$ в V и объявляем положительно ориентированным взаимный базис $\mathfrak{A}$ = столбец $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Надо проверить корректность этого определения: если мы возьмем другой положительно ориентированный базис B в V, то взаимный с ним базис $\mathfrak{B}$ = столбец $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$ связан с $\mathfrak{A}$ посредством матрицы с положительным определителем. Выше было указано, что если $B = AC^{-1}$ ((ЗК) с матрицей C), то $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$ или, переходя к записи базисов в V^* в виде строк (при определении понятия ориентации мы ведь записывали базисы в рассматриваемом векторном пространстве как строки), $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}'C'$. Но $\det C^{-1}$ и $\det C'$ имеют один и тот же знак.

§3. Внешняя алгебра

В этом параграфе исходным по-прежнему является n-мерное векторное пространство V над основным полем $\mathbb{R}$.

Полилинейная форма (полилинейный функционал, полилинейное отображение) степени k (короче, k-форма или k-ковектор) на V — это отображение

$$\alpha\colon V^k \to \mathbb{R}, \qquad \text{где } V^k = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ раз}},$$

линейное по каждому аргументу. Ясно, что 1-формы — это линейные функционалы на V. Кроме того, принимают, что 0-формы — это числа (что не совсем укладывается в предыдущее определение, ибо в этом случае отображать нечего, а какое-то число все-таки получается). Полилинейная форма называется кососимметричной (знакопеременной), если у не изменяется знак, когда меняются местами любые два ее аргумента[21]. Применительно к 0-формам и 1-формам условие, что «для любой перестановки любых двух аргументов имеет место то-то», можно считать автоматически выполняющимся, ибо перестановок в данном случае вообще нет и потому утверждение, что для любой такой перестановки выполняется нечто, верно (хотя и бессодержательно). Совокупность полилинейных кососимметричных форм степени k обозначается через $\Lambda^k V^*$ (это обозначение будет пояснено далее). В частности, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ и $\Lambda^1 V^* = V^*$.

Из определения следует, что полилинейная кососимметричная форма равна 0, если в каких-то двух ее аргументах стоят пропорциональные друг другу векторы (скажем, $v_i = av_j$, $a \in \mathbb{R}$). Далее, если $\alpha \in \Lambda^k V^*$ и векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы,

---

[21]Как обычно, мы дам формулировку применительно к основному полю $\mathbb{R}$; в данном случае она годится и для основного поля характеристики $\neq 2$. В дальнейшем встречается деление на различные натуральные числа, поэтому сказанное там дословно сохраняет силу, только когда основное поле имеет характеристику 0. (Однако в измененном виде основное содержание этого параграфа остается в силе при любой характеристике основного поля. К этому случаю легко приспособить приводимый ниже первый вариант определения внешнего умножения, тогда как второй вариант не годится.)

то $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Действительно, тогда один из этих векторов, скажем v_i, является линейной комбинацией остальных. Заменив его этой линейной комбинацией и использовав линейность α по i-му аргументу, получим, что $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ является суммой слагаемых, у каждого из которых i-й аргумент пропорционален какому-то другому. Наконец, если $k > n$, то $\Lambda^k V^* = 0$, т. е. не существует нетривиальной (не обращающейся в 0 тождественно) знакопеременной полилинейной формы степени k, ибо при $k > n$ любые k векторов линейно зависимы. Иногда все-таки бывает полезно оперировать с полилинейной формой степени $> n$, хотя она и тождественно равна нулю. Формально это ничему не противоречит, а содержательно это бывает полезно для дальнейших рассуждений примерно по тем же причинам, по которым к различным выражениям иногда добавляют слагаемые, на самом деле равные нулю.

Обозначим через $\mathfrak{S}_k$ симметрическую группу степени k, т. е. группу всех перестановок[22] чисел $1, \ldots, k$. (Умножение в $\mathfrak{S}_k$ определим как обычную композицию отображений, в данном случае биекций $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$: для $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$ и $i \in \{1, \ldots, k\}$ принимаем, что $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Это стоило оговорить, ибо столь

[22]Имеется более детализированный вариант терминологии, по которому элементы $\mathfrak{S}_k$ называют подстановками, а название «перестановка» сохраняют для различных способов расположения чисел $1, \ldots, k$ в виде упорядоченной последовательности, — как говорят в комбинаторике, для различных размещений без повторений этих чисел. Согласно этой терминологии, (4,2,1,3) — это перестановка, а

$$\sigma\colon 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 3 \quad —$$

это подстановка, которую, как известно, записывают в виде $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$. Но, очевидно, различие между перестановками и подстановками невелико: если $\sigma\colon i \mapsto \sigma(i)$, то можно представлять себе, что i становится на место $\sigma(i)$ (с чем, собственно, и связано привлечение здесь слова «подстановка»), и из перестановки $\{1, \ldots, k\}$ получается перестановка $\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(k)\}$ (на место i приходит $\sigma^{-1}(i)$). (Другой вариант, в известном смысле обратный: можно считать, что на i-е место ставится $\sigma(i)$.) Оба варианта устанавливают естественную биекцию между подстановками и перестановками, так что можно не соблюдать строгого различия между теми и другими (плохо только, что имеются две биекции, в равной степени естественные).

же часто полагают $(\sigma\tau)(i) = \tau(\sigma(i))$.) Определим действие $\mathfrak{S}_k$ на функции $V^k \to \mathbb{R}$ (на все функции или только на полилинейные), полагая, что для $f\colon V^k \to \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k \in V$

$$(\sigma f)(v_1, \ldots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})^{[23]}.$$

В этих терминах определение кососимметричности k-формы α таково: для любой транспозиции σ (т. е. такой перестановки, которая меняет местами два числа и оставляет на месте остальные числа) $\sigma\alpha = -\alpha$. Известно, что любая перестановка является произведением транспозиций, причем для четной перестановки число перемножаемых транспозиций всегда четно (хотя и может зависеть от конкретного представления σ в виде произведения транспозиций), а для нечетной — нечетно. Положив для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_k$

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ — четная;} \\ -1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ — нечетная,} \end{cases}$$

получаем, что $\sigma\alpha = \varepsilon(\sigma)\alpha$ уже для любой $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

Для полилинейных знакопеременных форм вводятся некоторые алгебраические операции. Очевидным образом определяются сумма двух таких форм одной и той же степени и произведение формы на число. (В частности, в $\Lambda^0 V^*$ и $\Lambda^1 V^*$ эти две операции — те же, какие имеются в $\mathbb{R}$ и V^*.) Результат в обоих случаях снова является полилинейной знакопеременной формой той же степени. Таким образом, $\Lambda^k V^*$ естественным образом оказывается векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Нетривиальным шагом является введение умножения, обозначаемого знаком $\wedge$:

$$\Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^* \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \tag{3.1}$$

[23] Чтобы совсем уж разложить все по полочкам, можно сперва сказать, что элементы V^k можно рассматривать как отображения

$$\overline{v}\colon \{1, \ldots, k\} \to V \qquad \overline{v}(i) = v_i,$$

затем определить действие $\mathfrak{S}_k$ на V^k как $\sigma^*\overline{v} = v \circ \sigma$, где $\circ$ означает обычную композицию отображений, так что $\sigma^*(v_1, \ldots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$, а затем уж сказать. что $\sigma f = f \circ \sigma^*$.

(как видно, при умножении степени перемножаемых форм складываются.) Оно дистрибутивно по обоим сомножителям, ассоциативно[24], и кососкоммутативно; последнее означает, что $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\beta \wedge \alpha$. Умножение на элементы $\Lambda^0 V^*$ совпадает с обычным умножением на числа. Это умножение называется «внешним» умножением — должно быть, потому, что при умножении мы выходим из перемножаемых пространств ($\Lambda^k V^*, \Lambda^l V^*$) и попадаем в третье ($\Lambda^{k+l} V^*$). Теперь можно объяснить смысл обозначения $\Lambda^k V^*$: это есть сокращение для $\underbrace{V^* \wedge \cdots \wedge V^*}_{k \text{ раз}}$, а последнее понимается так: это есть не только совокупность произведений вида

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \qquad \text{где все } \alpha_i \in V^*, \tag{3.2}$$

но и множество всевозможных линейных комбинаций таких произведений. (То, что любая знакопеременная k-форма является суммой произведений вида (3.2), будет видно из дальнейшего.) В связи с этим и сами полилинейные знакопеременные формы называют внешними формами, а $\Lambda^k V^*$ называют k-й внешней степенью векторного пространства V^* над полем $\mathbb{R}$[25].

---

[24] Ассоциативность позволяет говорить о произведении нескольких форм (которые могут быть различной степени), не заботясь о расстановке скобок. Так, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ — это и $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, и $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

[25] Обратите внимание, что понятие «k-й внешней степени векторного пространства над $\mathbb{R}$» (или над иным основным полем) мы определили только в том случае, когда это пространство является сопряженным к некоторому другому пространству V. Правда, известно, что для конечномерного векторного пространства $V = (V^*)^*$, поэтому всегда можно считать $\Lambda^k V$ определенным как $\Lambda^k (V^*)^*$. Таким обходным способом можно определить внешние степени $\Lambda^k V$ и внешнее умножение $\Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$; см. в конце этого параграфа. Но этот обходный способ — не очень естественный. В полилинейной алгебре объясняется, что та же цель может быть достигнута иным путем, не требующим представления V в виде сопряженного пространства; при этом для пространства V^* определения после некоторых естественных отождествлений дают те же результаты, что и наши. Мы не будем на этом останавливаться, ибо нам нужны только $\Lambda^k V^*$. (На самом деле в лекциях, из которых возникли эти заметки, они были нужны главным образом в случаях $k = 0, 1, 2, n-1, n$, но было бы как-то нелепо, да и формально не всегда возможно, рассматривать эти случаи сами по себе.) Впрочем, при упомина-

Замечание. С алгебраической точки зрения естественно взять прямую сумму $\Lambda^* V^* = \sum\limits_{k=0}^{n} \oplus \Lambda^k V^*$. Ее элементы суть суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$ с $\alpha_k \in \Lambda^k V^*$; такую сумму лучше рассматривать не как сумму функций от различного числа переменных, а просто как формальную сумму в том смысле, как это понимается в алгебре, т. е, в сущности, просто набор $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, который на сей раз записывается иначе. Сложение, умножение на скаляры и внешнее умножение естественным образом продолжаются на такие суммы:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k\right) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + \beta_k),$$

$$a \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \sum_{k=0}^{n} a\alpha_k \quad (\text{где } a \in \mathbb{R}),$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) \wedge \left(\sum_{l=0}^{n} \beta_l\right) = \sum_{k,l=0}^{n} (\alpha_k \wedge \beta_l),$$

причем в последней сумме уже подразумевается использование сложения, введенного строчкой выше (ведь одно и то же $k+l$ получается, вообще говоря, при различных k, l, поэтому последняя сумма — это не просто формальная сумма вида $\sum\limits_{i=0}^{n} \gamma_i$ с $\gamma_i \in \Lambda^i V^*$, а сумма нескольких таких сумм). Тем самым операции умножения (3.1) как бы объединяются в единую операцию на $\Lambda^* V^*$. По отношению к введенным операциям $\Lambda^* V^*$ оказывается ассоциативной алгеброй над $\mathbb{R}$ (она называется «внешней алгеброй векторного пространства V^* над полем $\mathbb{R}$»), что «приятно» с алгебраической точки зрения. С других же точек зрения целесообразность обращения к $\Lambda^* V^*$ зависит от того, возникают ли в рассматриваемых вопросах суммы внешних форм с различными степенями. В топологии и алгебраической геометрии они возникают; говоря подробнее, там возникают некие наборы форм α_k

---

емой попутно «чисто-тензорной» трактовке $\Lambda^k V^*$ очевидна и соответствующая трактовка $\Lambda^k V$.

Сказанное относится и к вводимой в следующем абзаце внешней алгебре.

различной степени и при этом оказывается более удобно оперировать с формальными суммами $\sum \alpha_k$, чем с самими этими α_k по отдельности. В более классических вопросах дифференциальной геометрии и в нашем курсе таких сумм не возникает и обращаться к $\Lambda^* V^*$ мы не будем.

Мы не собираемся полностью воспроизводить определение внешнего умножения и проверку его свойств. Полное изложение этих вопросов требует довольно много места и мы не видим, как его можно было бы сократить по сравнению с тем, что имеется в ряде учебников. Мы только хотим обратить внимание на некоторые стороны этого дела.

В литературе имеются два различных определения внешнего умножения — различных не только по форме, но и в том смысле, что кое в чем они дают различные результаты. Правда, внешние алгебры $\Lambda^* V^*$ при этом оказываются изоморфными посредством изоморфизма, тождественного на $\Lambda^0 V^*$ и $\Lambda^1 V^*$ и переводящего $\Lambda^k V^*$ в $\Lambda^k V^*$. В обоих случаях оказывается, что если $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ — базис V^*, то элементы

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}, \qquad i_1 < \ldots < i_k, \tag{3.3}$$

образуют базис $\Lambda^k V^*$. (Таким образом, это пространство имеет размерность $C_n^k = \binom{n}{k}$ — именно столькими способами можно выбрать k различных чисел из $\{1, \ldots, n\}$.) Любая формула, написанная в терминах элементов (3.3), их линейных комбинаций, произведений таких линейных комбинаций и т. д., одинаково справедлива или не справедлива при обоих вариантах определения $\wedge$. Но когда мы вспоминаем, что элементы $\Lambda^k V^*$ суть функции на V^k, положение меняется. При том определении, которым мы будем пользоваться, для любых $\beta^1, \ldots, \beta^k \in V^*$ и $v_1, \ldots, v_k \in V$[26]

[26]Формально здесь не исключается возможность $k > n$, но результат при этом, конечно, равен нулю.

$$(\beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^k)(v_1, \dots, v_k) = \\ = \begin{vmatrix} \beta^1(v_1) & \dots & \beta^1(v_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta^k(v_1) & \dots & \beta^k(v_k) \end{vmatrix} = \det(\beta^i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}, \quad (3.4)$$

а при другом —

$$(\beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^k)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \det(\beta^i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}. \quad (3.5)$$

Формулу (3.4) или (3.5) можно было бы положить в основу определения внешнего умножения, постулировав ее вначале только для произведений базисных ковекторов α^i. Но такой путь был бы довольно громоздким. В современных учебниках поступают иначе. Определение произведения дается сразу для любых двух форм $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^l V^*$. Сперва образуют функцию

$$f \colon V^{k+l} \to \mathbb{R} \qquad f(v_1, \dots, v_{k+l}) = \alpha(v_1, \dots, v_k)\beta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}),$$

очевидно полилинейную, но, вообще говоря, не знакопеременную. Аргументы этой функции подвергают всевозможным перестановкам. Как уже говорилось, через $\mathfrak{S}_{k+l}$ обозначают симметрическую группу степени $k+l$; для всех ее элементов σ полагают

$$(\sigma f)(v_1, \dots, v_{k+l}) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

В терминах этого обозначения, берут сумму

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \sigma f \quad (3.6)$$

и делят ее:

— при первом определении $\wedge$ — на $k!\, l!$;

— при втором определении $\wedge$ — на $(k+l)!$.

Результат и есть $\alpha \wedge \beta$.

Например, для $\alpha, \beta \in V^*$ и $u, v \in V$ эти определения дают, соответственно,

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) \\ \beta(u) & \beta(v) \end{vmatrix},$$

$$(\alpha\wedge\beta)(u,v)=\frac{1}{2}(\alpha(u)\beta(v)-\alpha(v)\beta(u))=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha(u) & \alpha(v)\\ \beta(u) & \beta(v)\end{vmatrix},$$

т. е. сразу видно, что в этом примере при первом определении получается частный случай (3.4), а при втором — частный случай (3.5). В соответствии со сказанным выше, мы будем пользоваться первым определением. Отметим, что согласно нему, формулу (2.19) можно записать так:

$$\mathscr{B}=\sum_{i=1}^{k}\alpha^{2i-1}\wedge\alpha^{2i}, \tag{3.7}$$

ибо непосредственно эта формула означает, что

$$\mathscr{B}(v,w)=\sum_{i=1}^{k}(\alpha^{2i-1}(v)\alpha^{2i}(w)-\alpha^{2i}(v)\alpha^{2i-1}(w))=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(\alpha^{2i-1}\wedge\alpha^{2i})(v,w).$$

Основное, что мы здесь опускаем, — это проверка ассоциативности. После того как она установлена, сравнительно несложно получить (3.4) или (3.5), а остальные свойства $\wedge$ тривиальны.

Зафиксируем на минуту какую-нибудь перестановку $\tau\in\mathfrak{S}_{k+l}$. Среди перестановок $\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}$ имеются такие, которые переводят множество $\{1,\dots,k\}$ в то же самое множество $\{\tau(1),\dots,\tau(k)\}$, в которое его переводит τ (а множество $\{k+1,\dots,k+l\}$ — в $\{\tau(k+1),\dots,\tau(k+l)\}$). Для них в правой части равенства

$$(\sigma f)(v_1,\dots,v_{k+l})=\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

в аргументе у α и в аргументе у β стоят те же векторы v_i, которые стоят в аргументах у α и β в выражении для $(\tau f)(v_1,\dots,v_{k+l})$, только для σf и τf порядок этих векторов различен. Понятно, что имеются такие перестановки π и ρ, что

$$\pi \text{ оставляет на месте } k+1,\dots,k+l, \tag{3.8}$$
$$\rho \text{ оставляет на месте } 1,\dots,k \tag{3.9}$$

и $\sigma = \tau\pi\rho$. Очевидно, σf и τf различаются только знаком, равным $\varepsilon(\pi)\varepsilon(\rho)$, но таким же знаком различаются $\varepsilon(\sigma)$ и $\varepsilon(\tau)$. Стало быть, для всех рассматриваемых сейчас σ имеем $\varepsilon(\sigma)\sigma f = \varepsilon(\tau)\tau f$. Число же таких σ равно произведению числа перестановок π, удовлетворяющих (3.8), и числа перестановок ρ, удовлетворяющих (3.9), т. е. $k!\,l!$. Итак, вместе с $f(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k+l)})$ в (3.6) входит $k!\,l!$ таких же слагаемых. Этим мотивируется, почему (3.6) предлагается делить на $k!\,l!$.

Все это очень естественно, но и деление на $(k+l)!$ во втором варианте определения мотивируется не менее естественно: в (3.6) входит $(k+l)!$ слагаемых, вот мы и делим на $(k+l)!$, беря тем самым среднее.

Второе определение, в общем, более согласуется с общим тензорным исчислением, поэтому оно часто употреблялось в прошлом. Со временем выяснилось, что из всего тензорного исчисления для большинства применений нужна только некоторая часть и что эта часть обладает, так сказать, значительной автономией — ее можно развить независимо от общего тензорного исчисления. Если говорить только об алгебраической стороне дела (к которой и относится раздел о линейной алгебре), то речь идет о векторах, линейных отображениях, билинейных и квадратичных формах, внешних формах и двойственных к ним объектах — поливекторах (см. ниже)[27]. Мое отношение к вопросу об автономности этой части таково: я излагаю соответствующие вопросы автономно, но, так сказать, на фоне общего тензорного исчисления, т. е. отмечая связи с ним. Внешние формы иногда включают в обязательный курс, иногда нет; остальное всегда включают, хотя отдельные вопросы могут оставаться в стороне. Если определять внешнее умножение «без оглядки» на общую тензорную алгебру, то первое определение кажется более естественным —

[27]В некоторых книгах о поливекторах не говорят, а внешние формы рассматривают. Но это делается не потому, что поливекторы нельзя рассматривать отдельно от общего тензорного исчисления (степень их автономности — такая же, как и для внешних форм), а потому, что их роль заметно уступает роли последних.

в основном потому, что в простой и естественной формуле (3.4) не надо делить на $k!$.

Теперь докажем, что элементы (3.3) образуют базис в $\Lambda^k V^*$. Прежде всего, указанные там элементы порождают $\Lambda^k V^*$. Действительно, оказывается, что

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k} \tag{3.10}$$

($a_1, \ldots, a_n$ — базис, взаимный к $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$). Надо убедиться, что значения обеих частей (3.10) на любых k векторах $v_1, \ldots, v_k \in V$ совпадают. Разложим каждый вектор v_h по базису в V:

$$v_h = \sum_{j_h} v_h^{j_h} a_{j_h} \tag{3.11}$$

(мы хотим иметь для каждого v_h свой индекс, по которому идет суммирование, поэтому мы и обозначили эти индексы для $v_1, \ldots,$ v_k через $j_1, \ldots, j_k$). Подставив (3.11) в $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$, получаем:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j_1,\ldots,j_k} \alpha(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) v_1^{j_1} \ldots v_k^{j_k}.$$

Здесь каждый индекс j_h пробегает значения от 1 до n (независимо от остальных j_i). Зафиксируем какие-нибудь $i_1, \ldots, i_k$, для которых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. В правой части (3.10) имеется $k!$ слагаемых, для которых множество $\{j_1, \ldots, j_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$, но эти j_h, вообще говоря, расположены (пронумерованы) не в порядке возрастания. Имеется $k!$ способов расположить $i_1, \ldots, i_k$ в другом порядке; эти способы характеризуются перестановками $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, а именно, каждой перестановке отвечает набор $j_1, \ldots, j_k$ с $j_1 = i_{\sigma(1)}, \ldots, j_k = i_{\sigma(k)}$. При этом

$$\alpha(a_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, a_{i_{\sigma(k)}}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}),$$

так что

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \ldots v_k^{i_{\sigma(k)}}.$$

Хорошо известно, что

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} = \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

(Последний определитель, как известно, можно вычислить так. Берут по одному элементу в каждом столбце, причем в различных столбцах надо брать элементы, стоящие в разных строках, т. е. с разными верхними индексами; скажем, в i-м столбце берут $v_i^{i_{\sigma(i)}}$. Здесь σ есть некоторая перестановка из $\mathfrak{S}_k$. Выбранные элементы перемножают и их произведение умножается еще на $\varepsilon(\sigma)$. Наконец, складывают полученные числа , отвечающие всевозможным способам выбора элементов в столбцах, т. е. всевозможным перестановкам σ. Но именно такая сумма и стоит в левой части рассматриваемого сейчас равенства.) Далее, последний определитель, по (3.4), равен

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}(v_1, \dots, v_k);$$

значит,

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \left(\sum_{i_1<\dots<i_k} \alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} \right)(v_1, \dots, v_k).$$

Поскольку это верно при любых $(v_1, \dots, v_k)$, то тем самым (3.10) доказано.

Замечание. В предыдущих рассуждениях фактически доказано следующее утверждение:

Пусть имеется n^k чисел $\alpha_{i_1\dots i_k}$, $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n$, кососимметрично зависящих от индексов (т. е. при перестановке двух индексов у $\alpha_{\dots}$ меняется знак; в частности, если два индекса равны, то соответствующее $\alpha_{\dots} = 0$). Пусть имеются также nk чисел v_j^i, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$. Тогда

$$\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} \alpha_{i_1\dots i_k} \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{vmatrix} = \alpha_{i_1\dots i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k}, \tag{3.12}$$

где справа подразумевается суммирование по $i_1, \dots, i_k$, независимо пробегающим значения $1, \dots, n$.

Выше это относилось к тому случаю, когда $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \alpha(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, где α — знакопеременная k-форма, a_i — базисные векторы, а v_j^i — координаты векторов v_j. Но доказательство (3.12) никак не использовало такого геометрического смысла этих чисел. В частности, неважно, где стоят индексы — вверху или внизу.

Остается доказать, что указанные в (3.3) элементы $\Lambda^k V^*$ линейно независимы. Пусть некоторая из линейная комбинация равна нулю:

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} = 0. \tag{3.13}$$

Значит, значение левой части (3.13) на любых $v_1, \dots, v_k$ равно 0. Возьмем $v_1 = a_{j_1}, \dots, v_k = a_{j_k}$, где $j_1 < \dots < j_k$. Тогда

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \dots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \dots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{vmatrix}. \tag{3.14}$$

Если какой-нибудь индекс i_h не встречается среди чисел $j_1, \dots, j_k$, то в h-й строке стоят одни нули, и определитель равен нулю. Значит, в

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \tag{3.15}$$

отличны от нуля только те слагаемые, для которых $i_1, \dots, i_k \in \{j_1, \dots, j_k\}$. А так как $i_1 < \dots < i_k$ и $j_1 < \dots < j_k$, то это возможно только при $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$. В этом случае определитель в (3.14) является определителем единичной матрицы и равен 1. Поэтому сумма (3.15) равна $\lambda_{j_1, \dots, j_k}$, и ввиду (3.13) получается, что $\lambda_{j_1, \dots, j_k} = 0$. Но $j_1, \dots, j_k$ могут быть любыми числами из $\{1, \dots, n\}$, для которых $j_1 < \dots < j_k$, поэтому все коэффициенты в (3.13) — нулевые.

Замечание. Из (3.10) ясно, что координатами в естественном базисе (3.3) пространства $\Lambda^k V^*$ (наиболее тесно связанном с с базисом $\{\alpha^i\}$ в V^* и, в конечном счете, с базисом $\{a_i\}$ в исходном V) служат $C_n^k = \binom{n}{k}$ чисел

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_k} = \alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \qquad (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n).$$

С другой стороны, внешние k-формы естественным образом можно рассматривать как некоторые ковариантные тензоры «валентности» k (тензоры с k нижними индексами). Именно, форме α сопоставляется тензор $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$, где[28]

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_k} = \alpha(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \qquad (1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n).$$

В отличие от предыдущей формулы, теперь числа $i_1, \ldots, i_k$ не упорядочены по возрастанию и одни из них могут совпадать с другими (в последнем случае $\alpha_{i_1,\ldots,i_k} = 0$). Специфическое свойство полученного таким путем тензора $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ состоит в том, что он — кососимметричный (или, как еще говорят, антисимметричный); это значит, что если поменять местами два индекса, то у $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ изменится знак. Соответствие между кососимметричными ковариантными тензорами валентности k и внешними k-формами биективно (тензор $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ соответствует внешней k-форме

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}).$$

Под координатами ковариантного кососимметричного тензора (если иное не оговорено) понимают все n^k чисел $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ (которые действительно являются его координатами в пространстве всех, а не только кососимметричных, ковариантных тензоров валентности k).

Я остановлюсь на последнем подробнее (хотя формально этого нам не нужно), ибо это полезно для понимания, так сказать, положения «автономной» теории внешних форм в общем тензорном исчислении и может пригодиться читателю при чтении литературы, написанной с «тензорных» позиций.

[28]Так делается при используемом нами определении $\wedge$; при другом определении естественно при переходе к тензору делить на $k!$. Это подробнее объясняется ниже.

Обозначим пространство всех ковариантных тензоров пространства V валентности k через $T_k(V)$ (это одно из двух употребительных обозначений; второе будет приведено ниже). Введем операцию

$$T_k(V) \times T_l(V) \to T_{k+l}(V) \qquad (T, S) \mapsto T \otimes S,$$

где тензор $T \otimes S$ определяется просто перемножением компонент тензоров T и S:

$$(T \otimes S)_{i_1,\ldots,i_{k+l}} = T_{i_1,\ldots,i_k} S_{i_{k+1},\ldots,i_{k+l}}. \tag{3.16}$$

Операция $\otimes$ билинейна и ассоциативна:

$$\begin{aligned}(\lambda T + \lambda' T') \otimes S &= \lambda T \otimes S + \lambda' T' \otimes S,\\ T \otimes (\lambda S + \lambda' S') &= \lambda T \otimes S + \lambda' T \otimes S',\\ T \otimes (S \otimes R) &= (T \otimes S) \otimes R.\end{aligned}$$

Ее называют тензорным произведением. В (3.16) используются какие-то координаты. Надо убедиться, что на самом деле результат не зависит от конкретного выбора последних. Можно непосредственно убедиться, что при переходе к другой системе координат произведения $T_{i'_1,\ldots,i'_k} S_{i'_{k+1},\ldots,i'_{k+l}}$ новых координат тензоров T и S выражаются через произведения старых координат так, как это и должно быть по формуле (2.16), примененной к нашему случаю (верхних индексов нет, а нижних $k+l$). Но проще обратиться к определению тензора как полилинейной функции. (3.16) эквивалентно тому, что

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = T(v_1, \ldots, v_k) S(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Здесь никакие координаты уже не используются, а полилинейность определяемой таким образом функции $T \otimes S$ от $k+l$ переменных очевидна.

Теперь можно сказать, что

$$T_k(V) = \otimes^k V^* := \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k \text{ раз}},$$

имея в виду, что последнее тензорное произведение k «экземпляров» V^* есть не только совокупность произведений вида

$$\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^k, \quad \text{где все } \alpha^i \in V^*,$$

но и множество всевозможных линейных комбинаций таких произведений. Обозначение $\bigotimes^k V^*$ вместо $T_k(V)$ имеет преимущество бóльшей стандартности, ибо стандартен используемый в нем знак тензорного произведения.

Аналогично тому как это было с $\wedge$, в (3.16), собственно, введено много операций (ведь k и L могут быть различными), обозначенных одним и тем же знаком $\otimes$. Их можно объединить в одну операцию на $T_*(V) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \oplus T_k(V)$, где $T_0(V)$ есть $\mathbb{R}$ (или иное основное поле) и каждый элемент бесконечной прямой суммы является формальной суммой конечного числа слагаемых (своего для каждого элемента). Если $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ — используемый сейчас базис в V^*, то базисом $T_k(V)$ служат n^k элементов $a^{i_1} \oplus \ldots \oplus a^{i_k}$ с любыми $i_j = 1, \ldots, n$.

Тензору $T = \{T_{i_1,\ldots,i_k}\} \in T_k(V)$ сопоставляется полилинейная функция (форма)

$$T\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R} \qquad T(v_1, \ldots, v_k) = T_{i_1,\ldots,i_k} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k}.$$

Это соответствие между тензорами и полилинейными функциями биективно и линейно; тензору $T \otimes S$ соответствует форма

$$T \otimes S(v_1, \ldots, v_{k+l}) \mapsto T(v_1, \ldots, v_k) S(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Поэтому ковариантные тензоры молчаливо отождествляют с формами. Вместе со сказанным выше это делает ясным, что перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ действуют на $T_k(V)$:

$$(\sigma T)(v_1, \ldots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \\ = T_{i_1,\ldots,i_k} v_{\sigma(1)}^{i_1} \ldots v_{\sigma(k)}^{i_k} = T_{i_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,i_{\sigma^{-1}(k)}} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k}.$$

(Например, среди различных $v_{\sigma(j)}^{i_j}$ имеется какая-то координата v_1^h вектора v_1. Она получается при $\sigma(j) = 1$, поэтому номер этой координаты $h = i_j = i_{\sigma^{-1}(1)}$.) Итак, в терминах координат тензоров действие σ описывается так:

$$(\sigma T)_{i_1,\dots,i_k} = T_{i_{\sigma^{-1}(1)},\dots,i_{\sigma^{-1}(1)}}.$$

Впрочем, часто считают, что

$$(\sigma T)_{i_1,\dots,i_k} = T_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(1)}};$$

сейчас это не важно. Возвращаясь к определению внешнего умножения, мы видим, что для $\varphi \in \Lambda^k V^*$, $\psi \in \Lambda^l V^*$

$$\varphi \wedge \psi = \begin{cases} \dfrac{1}{k!\,l!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\sigma(\varphi \otimes \psi) & \text{при 1-м определении } \wedge, \\ \dfrac{1}{(k+l)!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\sigma(\varphi \otimes \psi) & \text{при 2-м определении } \wedge. \end{cases}$$

В частности, для базисных $\alpha^i \in V^*$

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\sigma(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k) & \text{при 1-м определении } \wedge, \\ \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\sigma(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k) & \text{при 2-м определении } \wedge. \end{cases}$$

Отсюда и следует, что для

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \varphi_{i_1,\dots,i_k} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} \tag{3.17}$$

представление φ в терминах «тензорного» базиса $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_k}$ при первом определении $\wedge$ есть

$$\varphi = \varphi_{i_1,\dots,i_k} \alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_k}. \tag{3.18}$$

Действительно, если подставить в (3.17) выражение $\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}$ через $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_k}$, то для каждого набора индексов $i_1 < \ldots < i_k$ в сумму войдут $k!$ слагаемых

$$\varepsilon(\sigma)\varphi_{i_1,\dots,i_k} \alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \alpha^{i_{\sigma(k)}} = \varphi_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}} \alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \alpha^{i_{\sigma(k)}};$$

это как раз все те слагаемые в (3.18), у которых индексы суть перестановки наших $i_1, \ldots, i_k$. При использовании второго определения $\wedge$ выражение $\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k}$ через $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_k}$ в $k!$ раз меньше, поэтому и коэффициенты при $\alpha^{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha^{i_k}$ в выражении для φ будут в $k!$ раз меньше. Поэтому при втором определении $\wedge$ форме (3.17) естественно сопоставлять тензор $\{\frac{1}{k!}\varphi_{i_1,\ldots,i_k}\}$.

Предоставляю читателю убедиться, что в терминах коэффициентов типа фигурирующих в (3.17) $\varphi_{i_1,\ldots,i_k}$ внешнее умножение описывается так:

$$(\varphi \wedge \psi)_{i_1,\ldots,i_{k+l}} = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \varphi_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}} \psi_{i_{\sigma(k+1)},\ldots,i_{\sigma(k+l)}}.$$

В терминах «тензорных» координат φ, ψ (т. е. их координат в $T_k(V), T_l(V)$) при первом определении $\wedge$ формула для $\varphi \wedge \psi$ остается такой же, раз эти координаты совпадают с коэффициентами в (3.17) и в аналогичных выражениях для $\psi, \varphi \wedge \psi$. Но при втором определении $\wedge$ получается, что внешнее произведение $T \wedge S$ двух ковариантных кососимметричных тензоров $\{T_{i_1,\ldots,i_k}\}$, $\{S_{j_1,\ldots,j_l}\}$ имеет «тензорные» координаты

$$(T \wedge S)_{i_1,\ldots,i_{k+l}} = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) T_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}} S_{i_{\sigma(k+1)},\ldots,i_{\sigma(k+l)}}.$$

Рассмотрим формы старшей, т. е. n-й степени. Имеется только одна система чисел $i_1, \ldots, i_n$, для которой $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, — именно, сама система $1, \ldots, n$. Поэтому в (3.10) имеется только одно слагаемое, и получается, что все внешние n-формы пропорциональны $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$; поэтому пространство $\Lambda^n V^*$ одномерно и изоморфно $\mathbb{R}$. В этом отношении оно аналогично пространству $\Lambda^0 V^*$. Но в последнем случае имеется совершенно стандартный изоморфизм $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$, ведь за $\Lambda^0 V^*$ по определению как раз и принималось $\mathbb{R}$, а изоморфизм $\Lambda^n V^* \approx \mathbb{R}$ определяется выбором базисного элемента $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$ пространства $\Lambda^n V^*$. Далее, из (3.4) видно, что, в наших обычных обозначениях, значение $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$

на n векторах v_j с координатами x_j^i равно

$$\begin{vmatrix} \alpha^1(v_1) & \dots & \alpha^1(v_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^n(v_1) & \dots & \alpha^n(v_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \tag{3.19}$$

Это есть отношение объема n-мерного параллелепипеда $\Pi(v_1, \dots, v_n)$, «натянутого» на векторы $v_1, \dots, v_n$ (он состоит из точек $\sum \lambda_i v_i$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ при всех i) к объему n-мерного параллелепипеда $\Pi(a_1, \dots, a_n)$, натянутого на базисные векторы $a_1, \dots, a_n$[29]. (Объемы считаются с учетом ориентации. Напом-

[29] A priori в V не определено понятие объема (оно определяется, если в V введено скалярное произведение или, скажем, если по определению принято, что такой-то параллелепипед имеет единичный объем). Однако можно корректно говорить об отношении объемов — оно при всех этих способах оказывается одним и тем же.

Определения понятия «объем» могут быть различными по форме и общности. В теории меры понятие объема (n-мерной меры Лебега; об ориентациях при этом нет речи, и мера всегда $\geqslant 0$) определяется для весьма общих (так называемых «измеримых») подмножеств V (при «нормирующем» условии о скалярном произведении или параллелепипеде единичного объема). Там четко формулируется, чего мы хотим от объема, и доказывается, что такая функция множества существует и что при указанном нормирующем условии она единственна. В этой теории утверждение

$$\frac{\text{объем } \Pi(v_1, \dots, v_n)}{\text{объем } \Pi(a_1, \dots, a_n)} = |\det A|$$

является теоремой.

В рамках же линейной алгебры лучше принять данное утверждение за определение объема $\Pi(v_1, \dots, v_n)$ (предполагая объем $\Pi(a_1, \dots, a_n)$ заданным). В пользу такого определения можно приводить различные доводы, ссылаясь, например, на то, что при $n = 1, 2, 3$ оно приводит к известным из элементарной геометрии формулам для длины отрезка, площади параллелограмма, объема параллелепипеда. Но последние формулы — это, в сущности, частные случаи указанной выше теоремы теории меры, причем они, скорее всего, в курсе элементарной геометрии были сформулированы не только в меньшей общности, чем в теории меры, но для $n = 2, 3$ и неточно. Поэтому ссылки на элементарную геометрию уместны, но только как эвристические соображения. Наконец, иногда для вящей научности вводят некие аксиомы, которым должны удовлетворять объемы параллелепипедов (только их!) и с триумфом устанавливают, что функция

$$\text{параллелепипед} \mapsto \text{его объем}$$

ню, что если $\det(x_i^j) > 0$, то считается, что базисы $v_1, \dots, v_n$ и $a_1, \dots, a_n$ ориентированы одинаково, в противном случае их ориентации различны.) Таким образом, внешние n-формы — это как бы различные «(ориентированные) объемы» в V — заданием ненулевой внешней n-формы определяются ориентация в V и «единица объема». А более формально в терминах координат можно сказать, что внешние n-формы — это, с точностью до множителей, определители, составленные из координат векторов.

Вот еще один родственный факт. Пусть мы перешли от одних координат в V к другим с помощью (3К) с матрицей C, так что в тех же, что и там, обозначениях

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)C,$$

и координаты a_j в базисе $(b_1, \dots, b_n)$ суть элементы $c_j^1, \dots, c_j^n$ j-го столбца матрицы C. Тогда для взаимных базисов $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ и $(\beta^1, \dots, \beta^n)$

$$\begin{gathered}\beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^n(a_1, \dots, a_n) = \det(c_j^i) = \det C,\\ \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n(a_1, \dots, a_n) = 1.\end{gathered}$$

Это приводит к выводу, что

$$\begin{gathered}\beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^n = \det C \cdot \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n,\\ \text{если для соответствующих координат } y = Cx.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Замечание. В нашем изложении время от времени использовались (и будут еще использоваться) свойства определителей. Ценой некоторого (не слишком большого) удлинения изложения без этого можно было бы обойтись, и тогда, наоборот, можно было бы определить определитель $\det(x_i^j)_{i,j=1,\dots,n}$ как $\alpha^1 \wedge \ldots \wedge$

существует, единственна (при заданном $\Pi(a_1, \dots, a_n)$) и дается указанной формулой. Недостаток этой аксиоматической теории — не в ее скромных размерах (в конце концов, чем они короче, тем лучше), а в том, что немедленно возникают вопросы: откуда взялись эти аксиомы? (из аналогий с элементарной геометрии, на которые мы выше ссылались, не возвышая этого до аксиоматической теории); нельзя ли приписывать объемы не только параллелепипедам, но и другим «фигурам»? (можно, см. теорию меры, где действительно работает настоящая, а не игрушечная аксиоматика).

$\wedge\, \alpha^n(v_1, \ldots, v_n)$, где $v_i = (x_i^1 \ldots, x_i^n)$ суть векторы-столбца (элементы $\mathbb{R}^n$), а α^i — (ко)векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^*$. Отсюда легко было бы вывести все свойства определителей. Такое изложение можно было бы признать более логичным. В преподавании ему не следуют единственно по той причине, что определители желательно ввести как можно быстрее, а с внешними формами можно и подождать (тем более что есть много вещей, с которыми надо познакомиться раньше).

Пусть $\mathscr{C}\colon V \to W$ — линейное отображение векторных пространств. Следуя той же идее, которая приводит к определению (2.13) сопряженного оператора $\mathscr{C}^*\colon W^* \to V^*$, определим отображение $\Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$, которое мы будем тоже обозначать через $\mathscr{C}^*$, следующим образом: оно переводит внешнюю k-форму β на W во внешнюю k-форму $\mathscr{C}^*\beta$ на V, определяемую как

$$(\mathscr{C}^*\beta)(v_1, \ldots, v_k) = \beta(\mathscr{C}v_1, \ldots, \mathscr{C}v_k). \tag{3.21}$$

Ясно, что $\mathscr{C}^*\beta$ действительно является внешней k-формой на V. При $k = 1$ это определение совпадает с (2.13). Кроме того, при $k = 0$ принимают, что число $\lambda \in \Lambda^0 W^* = \mathbb{R}$ переходит в то же самое число λ, рассматриваемое как элемент $\Lambda^0 V^*$.

Таким образом, одним и тем же знаком $\mathscr{C}^*$ обозначаются различные отображения (всего имеется $n + 1$ таких отображений $\Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$ с $k = 0, \ldots, n$). Иногда вместо $\mathscr{C}^*$ для рассматриваемого отображения $\Lambda^k W^* \to \Lambda^k V^*$ используют обозначение $\Lambda^k \mathscr{C}^*$; тогда, конечно, не остается неясности насчет того, о чем именно идет речь. Однако мы будем пользоваться обозначением $\mathscr{C}^*$, имея в виду, что в каждом конкретном случае о том, что подразумевается под $\mathscr{C}^*$, можно судить по тому, на что именно действует $\mathscr{C}^*$. (Кроме того, если «объединить» все $\Lambda^k W^*$ и $\Lambda^k V^*$ во внешние алгебры $\Lambda^* W^*$ и $\Lambda^* V^*$, то можно ввести единое отображение

$$\mathscr{C}^*\colon \Lambda^* W^* \to \Lambda^* V^*, \tag{3.22}$$

совпадающее с предыдущими на соответствующих прямых слагаемых. Смотря по обстоятельствам, оно будет применяться к k-формам с различными k.)

При $k \neq 1$ отображение $\mathscr{C}^*$ называют не сопряженным с $\mathscr{C}$, а отображением, индуцированным $\mathscr{C}$. Так же называют и «единое» отображение (3.21).

Из (3.21) явствует, что отображение $\mathscr{C}^*$ (любое из них) — линейное:

$$\mathscr{C}^*(a\alpha + b\beta) = a\mathscr{C}^*\alpha + b\mathscr{C}^*\beta \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \Lambda^k W^*).$$

Нетрудно убедиться также, что $\mathscr{C}^*$ сохраняет внешнее умножение:

$$\mathscr{C}^*(\alpha \wedge \beta) = \mathscr{C}^*\alpha \wedge \mathscr{C}^*\beta \qquad (\alpha \in \Lambda^k W^*,\ \beta \in \Lambda^l W^*) \tag{3.23}$$

(заметим, что если не пользоваться отображением (3.22), то здесь фигурируют три отображения, соответствующие k, l и $k+l$). При доказательстве целесообразно расширить определение $\mathscr{C}^*$, считая, что в формуле (3.21) β быть любой полилинейной k-формой на W. На промежуточных шагах построения $\alpha \wedge \beta$ для внешних форм α, β из них определенным способом получаются некоторые полилинейные $(k+l)$-формы. Из определений видно, что отображение $\mathscr{C}^*$ переводит их в полилинейные $(k+l)$-формы на V, которые точно таким же способом получаются из $\mathscr{C}^*\alpha, \mathscr{C}^*\beta$. Прослеживая это шаг за шагом, убеждаемся в (3.23).

На языке «единого» отображения (3.22) можно сказать, что $\mathscr{C}^*$ является гомоморфизмом алгебры ΛW^* в алгебру ΛV^*.

Действие $\mathscr{C}^*$ на формы старшей степени сводится просто к умножению на число $\det \mathscr{C}$. Действительно, пусть $\mathscr{C}$ переводит векторы a_i базиса в векторы $b_i = \mathscr{C} a_i = \sum\limits_j c_i^j a_j$, так что матрица $C = (c_i^j)$ описывает $\mathscr{C}$ согласно (ОБ) (и также (ОК)). Используя определение $\mathscr{C}^*$ и (3.19), имеем

$$(\mathscr{C}^*(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n))(a_1, \dots, a_n) = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n(b_1, \dots, b_n) = \\ = \det(c_i^j) = \det \mathscr{C}.$$

Но $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n(a_1, \dots, a_n) = 1$, а так как $\Lambda^n V^*$ одномерно, то каждая n-форма имеет вид $\lambda\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$ с некоторым λ; отсюда и видно, что

$$\det \mathscr{C}^*(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n) = \det \mathscr{C} \cdot \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n.$$

Теперь легко доказать сделанное в конце п. 3 §2 утверждение, что определитель симплектического преобразования равен 1. Сохраняемый $\mathscr{C}$ билинейный невырожденный кососимметричный функционал $\mathscr{B}$ можно считать приведенным к виду (2.19), где k — половина размерности n пространства V (последняя в данном случае должна быть четной). В терминах базиса $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ в V^*, взаимного к используемому в V, $\mathscr{B}$ представляется в виде (3.7). При возведении $\mathscr{B}$ во внешнюю k-ю степень получится k^k слагаемых, каждое их которых является произведением k сомножителей вида $\alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}$. Слагаемое с двумя одинаковыми сомножителями равно нулю. Остается $k!$ слагаемых, у которых все сомножители различны и, значит, с точностью до порядка совпадают с сомножителями произведения

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2) \wedge (\alpha^3 \wedge \alpha^4) \wedge \cdots \wedge (\alpha^{2k-1} \wedge \alpha^{2k}).$$

Все эти сомножители — четной (второй) степени, оттого при их перестановке знак не меняется. Итак,

$$\mathscr{B}^k = k!\, \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n.$$

В терминах настоящего параграфа сохранение $\mathscr{B}$ при отображении $\mathscr{C}$ означает, что $\mathscr{C}^*\mathscr{B} = \mathscr{B}$. Значит, и $\mathscr{C}^*\mathscr{B}^k = \mathscr{B}^k$. Но $\mathscr{C}^*(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n) = \det \mathscr{C} \cdot \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$, поэтому $\det \mathscr{C} = 1$.

Следующая алгебраическая операция, с которой мы познакомимся, — это так называемое внутреннее произведение $v \lrcorner \alpha$ вектора $v \in V$ и внешней k-формы α на V (другие обозначения — $i_v\alpha$, $i(v)\alpha$). Это есть внешняя $(k-1)$-форма, определяемая так[30]:

$$(v \lrcorner \alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(v, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

(Ясно, что действительно $v \lrcorner \alpha \in \Lambda^{k-1}V^*$). При $k = 0$ принимаем, что $v \lrcorner \alpha = 0$. При $k = 1$ у 0-формы $v \lrcorner \alpha$ нет аргументов; определение надо понимать в том смысле, что $v \lrcorner \alpha$ есть чи-

[30]Нередко ее определяют чуть иначе:

$$(v \lrcorner \alpha)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v).$$

Результат отличается знаком $(-1)^{k-1}$.

сло $\alpha(v)$[31]. Естественно, можно определить $v\rfloor$ и как отображение $\Lambda V^* \to \Lambda V^*$.

При внутреннем умножении, как и при внешнем, мы переходим из одного пространства (из $\Lambda^k V^*$) в другое (в $\Lambda^{k-1}V^*$). Название «внутреннее» умножение, вероятно, связано с тем, что что «сомножитель» v в понятном смысле «вставляется внутрь» α.

Ясно, что отображение $\alpha \mapsto v\rfloor\alpha$ — линейное. (Кроме того, $v\rfloor\alpha$ линейно и по v, что позднее тоже будет использовано). Несколько неожиданной является связь внутреннего умножения с внешним:

$$\begin{gathered} v\rfloor(\alpha\wedge\beta) = (v\rfloor\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge(v\rfloor\beta) \\ \text{при } \alpha\in\Lambda^k V^*,\ \beta\in\Lambda^l V^*. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Докажем сперва, что для $\beta^1,\dots,\beta^k\in V^*$, $v\in V$

$$\begin{aligned} v\rfloor(\beta^1\wedge\dots\wedge\beta^k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}\beta^1\wedge\dots\wedge(v\rfloor\beta^i)\wedge\dots\wedge\beta^k = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}\beta^i(v)\beta^1\wedge\dots\wedge\widehat{\beta^i}\wedge\dots\wedge\beta^k, \end{aligned} \tag{3.25}$$

[31]В этом случае мы вектору $v\in V$ фактически сопоставляем линейный функционал

$$V^*\to\mathbb{R}\quad(\text{или }\mathbb{C})\qquad \alpha\mapsto i(v)\alpha = v\rfloor\alpha = v(\alpha).$$

Тем самым получается отображение $i\colon V\to V^{**}$ (V^{**} — сокращение для $(V^*)^*$), которое является изоморфизмом векторных пространств («в конечномерном случае второе сопряженное пространство совпадает с исходным»). Действительно, линейность i очевидна; если $v\neq 0$, то найдется $\alpha\in V^*$ с $\alpha(v)\neq 0$, а значит $i(v)\neq 0$ (раз $i(v)\alpha\neq 0$); наконец, в конечномерном случае сопряженное пространство имеет ту же размерность, что и исходное пространство, поэтому размерности V, V^* и V^{**} совпадают. Поскольку этот изоморфизм является стандартным (он не зависит от выбора каких-либо вспомогательных объектов, скажем, от системы координат), то его рассматривают как стандартное отождествление V и V^{**}, в связи с чем пишут $V = V^{**}$.

где знак «крышки» $\widehat{\ }$ над β^i означает, что в соответствующем члене сомножитель β^i отсутствует. (3.25) означает, что при $v_1, \ldots, v_k \in V$

$$\det \begin{vmatrix} \beta^1(v) & \beta^1(v_1) & \ldots & \beta^1(v_{k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta^k(v) & \beta^k(v_1) & \ldots & \beta^k(v_{k-1}) \end{vmatrix} = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k(v, v_1, \ldots, v_{k-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-1} \beta^i(v) \cdot (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^{i-1} \wedge \beta^{i+1} \wedge \cdots \wedge \beta^k)(v_1, \ldots, v_{k-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \beta^i(v) \det \begin{vmatrix} \beta^1(v_1) & \ldots & \beta^1(v_{k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta^{i-1}(v_1) & \ldots & \beta^{i-1}(v_{k-1}) \\ \beta^{i+1}(v_1) & \ldots & \beta^{i+1}(v_{k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta^k(v_1) & \ldots & \beta^k(v_{k-1}) \end{vmatrix}.$$

Это равенство (в котором подразумевается, конечно, что в соответствующих суммах в первом и последнем слагаемых фигурируют не несуществующие β^0 и β^{k+1}, а $\beta^2, \ldots, \beta^k$ и $\beta^1, \ldots, \beta^{k-1}$) получается разложением левого определителя по его первому столбцу.

Теперь можно доказать (3.24) для того случая, когда α и β являются произведениями 1-форм (в этом случае говорят, что α и β суть разложимые формы):

$$\alpha = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k, \qquad \beta = \beta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \beta^{k+l}, \qquad \text{где все } \beta^i \in V^*.$$

Используем (3.25):

$$v \lrcorner (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^{k+l}) = \sum_{i=1}^{k+l} (-1)^{i-1} \beta^i(v) \beta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^{k+l} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \beta^i(v) \beta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^k \wedge \beta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \beta^{k+l} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{k+l} (-1)^{i-1} \beta^i(v) \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^k \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^{k+l}.$$

Первая сумма в правой части, очевидно, равна

$$(v\rfloor(\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^k))\wedge(\beta^{k+1}\wedge\cdots\wedge\beta^{k+l}).$$

Во второй заменим i на $k+j$, где j пробегает значения от $1,\ldots,l$, и перепишем эту сумму в виде

$$(-1)^k\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}(\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^k)\wedge\beta^{k+j}(v)\beta^{k+1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\beta^{k+j}}\wedge\cdots\wedge\beta^{k+l}=$$
$$=(-1)^k(\beta^1\wedge\cdots\wedge\beta^k)\wedge(v\rfloor(\beta^{k+1}\wedge\cdots\wedge\beta^l)).$$

Тем самым как раз и получается правая часть (3.24).

Остается напомнить, что произвольные внешние формы являются суммами разложимых. Если $\alpha=\sum\alpha_i$, $\beta=\sum\beta_j$, где для α_i и β_j формула (3.24) уже доказана, то отсюда она следует и для α,β.

При доказательстве (3.24) мы нигде не предполагали, что $k+l\leqslant n$, а при доказательстве (3.25) — что $k\leqslant n$. При $k+l>n+1$, соответственно, при $k>n+1$ эти формулы становятся тривиальными — и в правой, и в левой их частях стоят нули. Но при $k+l=n+1$, соответственно, при $k>n+1$ в левых частях стоят нули, а слагаемые в правых не обязательно равны нулю, в итоге в этом случае формулы утверждают, что некие суммы ненулевых слагаемых равны нулю; это, вообще говоря, нетривиально (и может быть полезно).

Формула (3.24) напоминает формулу Лейбница для производных, которая, если использовать для обозначения производной знак D, имеет вид

$$D(fg)=(Df)g+f(Dg). \tag{3.26}$$

Отличие состоит в знаке $(-1)^k$ у второго слагаемого в правой части (3.24). Подобная ситуация вообще встречается нередко. Пусть A — произвольная алгебра, в которой, помимо обычных операций, введены еще два линейных отображения $A\to A$: некоторая инволюция i (т. е. отображение, квадрат которого — тождественное отображение) и отображение D, причем выполняется «формула Лейбница»

$$D(ab)=(Da)b+i(a)Db\qquad\text{при всех } a,b\in A.$$

Тогда говорят, что D есть косое дифференцирование (или косая деривация; говорят также «антидифференцирование») в алгебре A (которую тогда называют дифференциальной алгеброй). Если же инволюция i является тождественным преобразованием (т. е. формула Лейбница выполняется в своем первоначальном виде (3.26)), то прилагательное «косое» опускают. Впрочем, его нередко опускают и тогда, когда дифференцирование на самом деле косое.

В этом смысле (косое) дифференцирование есть общее алгебраическое понятие, так же, как и гомоморфизм. Гомоморфизмы, несомненно, должны быть хорошо известны читателю, ибо они встречаются на каждом шагу. Дифференцирования встречаются реже, но все же не так уж редко. В числе операций, с которыми имеют дело при развитии анализа и геометрии на многообразиях, имеется несколько примеров дифференцирований, и косых, и не-косых.

После сказанного формулу (3.24) можно выразить словами: отображение $v\lrcorner : \Lambda^* V^* \to \Lambda^* V^*$ является косым дифференцированием в алгебре $\Lambda^* V^*$, а соответствующая инволюция такова:

$$\text{если } \alpha = \sum \alpha_k, \text{ где } \alpha_k \in \Lambda^k V^*, \text{ то } i\alpha = \sum (-1)^k \alpha_k.$$

Упражнение. Пусть A — любая ассоциативная алгебра над любым полем. Коммутатор $[a, b]$ двух ее элементов a, b определяется как $[a, b] = ab - ba$. Докажите, что для любого $f \in A$ отображение

$$A \to A \qquad b \mapsto [a, b]$$

является дифференцированием в A.

Базис $\Lambda^{n-1} V^*$ состоит из форм (3.3) с $k = n - 1$. При любых неравных друг другу числах $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, n\}$ среди них отсутствует ровно одно из чисел $\{1 \ldots, n\}$, скажем, k. Когда указано отсутствующее число, то набор $i_1, \ldots, i_{n-1}$, для которого $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-1} \leqslant n$, определен однозначно. Вновь используя «крышку» $\widehat{\ }$ для обозначения отсутствующего множителя, можно сказать, что

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge A \wedge \alpha^{i_{n-1}} = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^k} \wedge \cdots \wedge \alpha^n.$$

Коэффициент $a_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ можно обозначить короче через a_k; тогда

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^k} \wedge \dots \wedge \alpha^n. \tag{3.27}$$

Сравнивая (3.27) с формулой

$$v \rfloor (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} v^k \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^k} \wedge \dots \wedge \alpha^n$$

(это есть (3.25) для базисных форм, для которых $\alpha^k(v) = v^k$), приходим к следующему выводу. При фиксированной форме объема $\omega = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n$ возникает изоморфизм

$$V \xrightarrow{\approx} \Lambda^{n-1} V^* \qquad v \mapsto v \rfloor \omega,$$

который в терминах координат описывается так: если $v = Ax = \sum x^k a_k$, то $v \rfloor \omega$ имеет вид (3.27) с $a_k = (-1)^{k-1} x^k$.

Замечание. Когда Лейбниц придумал дифференцирование, он сразу «открыл, что $d(x + y) = dx + dy$, и это замечательное открытие немедленно заставило его задуматься, чему же равен дифференциал произведения. В соответствии с универсальностью своих размышлений он быстро пришел к выводу, что дифференцирование — гомоморфизм кольца, т. е. что должна иметь место формула $d(xy) = dx \cdot dy$ ... для схоласта Лейбница такой алгебраический ход мыслей очень типичен» (здесь цитирована брошюра: В.И. Арнольд, «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук», М.: Наука, 1989.) С содержательной точки зрения ошибка Лейбница прямо-таки нелепа, тем более что на самом деле у него речь шла не о производной, а о дифференциале, т. е. главной линейной части приращения, а произведение двух дифференциалов квадратично по приращению и сравнительно с последним является бесконечно малой второго порядка. Но Лейбниц мыслил иначе. Он попытался угадать ответ, полагая, что связь дифференцирования с умножением должна быть частным случаем какой-то общей закономерности. Мысль не такая уж нелепая (даже, в конечном счете, правильная), но беда Лейбница была в том, что ему был известен только один вид общей закономерности, которая связывала бы линейную операцию и умножение, — та связь, которая имеет место для гомоморфизма (хотя тогда не было такого термина). А о том, что имеется и другой тип связи, выражаемый формулой (3.26), Лейбниц не знал, — ему эту формулу еще предстояло открыть.

Мораль:

1) (абсолютно бесспорная, но бесполезная). Если бы Лейбниц заранее знал формулу Лейбница, то он, вероятно, сразу же написал бы правильное выражение для $d(xy)$.

2) (не столь бесспорная, но и не столь бесполезная). Если имеется подозрение, что некое линейное отображение действует на произведение согласно какому-то общему правилу, то надо иметь в виду, что такие правила известны двух общих типов — гомоморфизмы и дифференцирования[32]. Вариант: если алгебра A порождается своим линейным подпространством E, если имеется линейное отображение $\mathscr{L}\colon E \to E$ и если желательно продолжить его на всю алгебру A (не просто как на векторное пространство, а именно как на алгебру, т. е. так, чтобы имелась «хорошая» связь продолженного $\mathscr{L}$ с умножением), то сперва имеет смысл подумать, хотим ли мы получить эндоморфизм или дифференцирование.

Последние (связанные друг с другом) вопросы, с которыми мы познакомимся — это скалярное произведение в $\Lambda^k V^*$, форма объема, описание пространства, сопряженного к $\Lambda^k V^*$ и операция $*$.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ — евклидово (псевдоевклидово) скалярное произведение в V. Соответствующее скалярное произведение в V^* («обратный билинейный функционал») тоже обозначим через $(\cdot,\cdot)$. Оказывается, в каждом $\Lambda^k V^*$, $k = 0,\ldots,n$, имеется евклидово (псевдоевклидово) скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, естественным образом связанное с исходным скалярным произведением в V (более непосредственно — или с соответствующим скалярным произведением в V^*). Эта связь состоит в том, что

[32]Причем возможны их композиции. Для композиции нескольких дифференцирований формула соответствующим образом изменяется.

$$
\begin{gathered}
(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^k, \psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^k) = \det((\varphi^i, \psi^j))_{i,j=1,\dots,k} \\
\text{при любых } \varphi^1, \dots, \varphi^k, \psi^1, \dots, \psi^k \in V^*.
\end{gathered} \tag{3.28}
$$

(При $k = 1$ здесь сказано только то, что «новое» скалярное произведение в $\Lambda^1 V^* = V^*$ — это то самое скалярное произведение, которое уже имеется в V^*. При $k = 0$ здесь вообще ничего не сказано; поскольку элементы Λ^0 суть обычные числа, скалярное произведение для них понимают как обычное произведение чисел). Оказывается также, что этим условием скалярное произведение в $\Lambda^k V^*$ определяется однозначно.

Мы введем скалярное произведение в $\Lambda^k V^*$ с помощью координат, отвечающих базису (3.3), а затем докажем, что для этого произведения выполняется (3.28). Из последнего следует, что скалярное произведение на самом деле не зависит от координат (сперва получается, что от них не зависит произведение разложимых форм, ибо в правой части (3.28) координаты не фигурируют, а затем — что и любых, потому что любые формы представляются как суммы разложимых).

Начнем с «анализа задачи». Допустим, что в $\Lambda^k V^*$ существует скалярное произведение или хотя бы билинейный функционал $(\cdot, \cdot)$, для которого выполняется (3.28). Пользуясь теми же базисами, что и выше, обозначим через (g_{ij}) метрический тензор (т. е. $(g_{ij}) = (a_i, a_j)$; тогда $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ — матрица коэффициентов соответствующего скалярного произведения в V^* (т. е. $g^{ij} = (\alpha^i, \alpha^j)$). Скалярное произведение в $\Lambda^k V^*$ однозначно определяется произведениями базисных элементов, т. е. числами

$$
\begin{gathered}
g^{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} = (\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}, \alpha^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{j_k}), \\
1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n, \qquad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n.
\end{gathered}
$$

Если мы хотим, чтобы выполнялось (3.28), то должно быть

$$
g^{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k} = \det((\alpha^{i_r}, \alpha^{j_s}))_{r,s=1,\dots,k} = \det(g^{i_r j_s})_{r,s=1,\dots,k}. \tag{3.29}
$$

Таким образом, в V^* может существовать только одно скалярное произведение и даже только один билинейный функционал, для которого выполняется (3.28). В терминах координат оно (он) выражается следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1 < \ldots < j_k}} g^{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k} \varphi_{i_1, \ldots, i_k} \psi_{j_1, \ldots, j_k}. \tag{3.30}$$

Теперь естественно обратить это рассуждение. Пользуясь теми же базисами, рассмотрим билинейный функционал $(\cdot, \cdot)$ в $\lambda^k V^*$, определяемый согласно (3.30) с коэффициентами (3.29). (Ради полноты упомянем о случае $k = 0$, когда речь идет просто о произведении чисел; он не охватывается (3.30), ибо соответствующее множество индексов было бы пустым.) Ясно, что этот функционал симметричный, но пока не ясно, не зависит ли он от использованных при его построении координат, является ли он невырожденным (а когда исходное скалярное произведение в V положительно определено — положительно определенным) и удовлетворяет ли он условию (3.28).

Числа $g^{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k}$ пока что были определены лишь при $i_1 < < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_k$ (во всяком случае, только при таких значениях индексов они использовались). Определим их теперь при любых $i_1, \ldots, j_k$ согласно той же формуле (3.29). Новые $g^{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k}$ кососимметричны в отдельности по $i_1, \ldots, i_k$ и по $j_1, \ldots, j_k$, потому что при перестановке двух индексов i_r в определителе, фигурирующем в (3.29), меняются местами две строки, а при перестановке двух j_s — два столбца. Теперь, дважды пользуясь замечанием, связанным с (3.12) (и выражением для координат разложимой k-формы в базисе (3.3)), получаем для $\varphi = \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^k$, $\psi = \psi^1 \wedge \cdots \wedge \psi^k$

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi) &= \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1 < \ldots < j_k}} g^{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k} \begin{vmatrix} \varphi^1_{i_1} & \ldots & \varphi^1_{i_k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \varphi^k_{i_1} & \ldots & \varphi^k_{i_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi^1_{j_1} & \ldots & \psi^1_{j_k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \psi^k_{j_1} & \ldots & \psi^k_{j_k} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1} & \ldots & g^{i_1 j_k} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ g^{i_k j_1} & \ldots & g^{i_k j_k} \end{vmatrix} \varphi^1_{i_1} \ldots \varphi^k_{i_k} \psi^1_{j_1} \ldots \psi^k_{j_k} =\end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1}\varphi^1_{i_1} & \dots & g^{i_1 j_k}\varphi^1_{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ g^{i_k j_1}\varphi^k_{i_k} & \dots & g^{i_k j_k}\varphi^k_{i_k} \end{vmatrix} \psi^1_{j_1}\dots\psi^k_{j_k} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1}\varphi^1_{i_1}\psi^1_{j_1} & \dots & g^{i_1 j_k}\varphi^1_{i_1}\psi^k_{j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ g^{i_k j_1}\varphi^k_{i_k}\psi^1_{j_1} & \dots & g^{i_k j_k}\varphi^k_{i_k}\psi^k_{j_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\varphi^1,\psi^1) & \dots & (\varphi^1,\psi^k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\varphi^k,\psi^1) & \dots & (\varphi^k,\psi^k) \end{vmatrix}.
$$

Тем самым доказано (3.28).

Теперь ясно, что (φ,ψ) для разложимых φ,ψ не зависит от использованных координат, а так как любые φ и ψ являются суммами разложимых, то независимость (φ,ψ) установлена для любых φ,ψ. Остается убедиться в невырожденности $(\cdot,\cdot)$.

Пусть исходный базис $\{a_i\}$ — ортонормированный, т. е. все $g_{ij} = (a_i,a_j) = \pm\delta_{ij}$ (знак «минус» не исключается, ибо скалярное произведение может быть псевдоевклидовым). Тогда $\{\alpha^i\}$ — ортонормированный базис в V^* (ведь $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$). Нетрудно убедиться, что (3.3) — ортонормированный базис в $\Lambda^k V^*$. Ведь если $g^{i_1\dots i_k j_1\dots j_k} \neq 0$, то в каждой строчке определителя $\det(g^{i_r j_s})$ должен иметься ненулевой элемент, а таковой получается только при $i_r = j_s$; итак, каждое их чисел $i_1,\dots,i_k$ равно одному из чисел $j_1,\dots,j_k$, а так как обе эти системы чисел — возрастающие, то все $i_h = j_h$. Обратно, если все $i_h = j_h$, то в определителе $\det(g^{i_r j_s})$ отличны от нуля только диагональные элементы, равные ±1, поэтому $g^{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_k} = \pm1$. Из существования в $\Lambda^k V^*$ ортонормированного базиса следует невырожденность билинейного функционала $(\cdot,\cdot)$, так что это действительно скалярное произведение. А если исходное $(\cdot,\cdot)$ в V — положительно определенное, то в приведенном рассуждении исключается знак «минус», поэтому и в $\Lambda^k V^*$ получается положительно определенное скалярное произведение.

Позднее нам понадобится, что если используемый базис — ортонормированный, то

$$
g^{i_1\dots i_k i_1\dots i_k} = \text{ числу таких } i_h, \text{ что } (a_{i_h},a_{i_h}) = -1. \tag{3.31}
$$

Это сразу видно из (3.29).

Переходим к форме объема. Выше отмечалось, что пространство $\Lambda^n V^*$ одномерно и изоморфно $\mathbb{R}$, но что изоморфизм

$\Lambda^n V^* \approx \mathbb{R}^n$ определяется выбором базисного элемента $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \wedge \alpha^n$ пространства $\Lambda^n V^*$. В общем случае нет никаких оснований предпочитать один базисный элемент другому, поэтому нет стандартного изоморфизма $\Lambda^n V^* \approx \mathbb{R}^n$. Положение меняется, если в V введены скалярное произведение и ориентация; тогда в $\Lambda^n V^*$ следующим образом выделяется «предпочтительный» базисный элемент — «форма объема».

Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис в V. Если скалярное произведение — не евклидово, а только псевдоевклидово (т. е. приводится к виду (2.12) с $k < n$), то надо условиться, в каком порядке нумеруются векторы с различными знаками (a_i, a_i). Примем, что первые k скалярных произведений (a_i, a_i) равны 1, а последние $n-k$ равны -1 (так что в этом базисе скалярное произведение как раз и имеет вид (2.12))[33]. Пусть $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ — взаимный базис в V^*. Внешняя форма $\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n$ является «формой объема» (т. е. объем параллелепипеда $\Pi(v_1, \ldots, v_n)$ равен $|\omega(v_1, \ldots, v_n)|$, а знак $\omega(v_1, \ldots, v_n)$ положителен или отрицателен в зависимости от того, совпадают ли ориентации базисов $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(v_1, \ldots, v_n)$). Такой геометрический смысл ω делает понятным, что ω не должна зависеть от конкретного выбора положительно ориентированного ортонормированного базиса, ибо объем однозначно определяется скалярным произведением. Если бы мы имели в своем распоряжении независимые от линейной алгебры понятие объема и относящиеся к нему основные факты, доставляемые, например, теорией меры (во всяком случае, когда скалярное произведение евклидово), то сказанное имело бы доказательную силу. Но если читатель и знаком со всем этим, ссылка на теорию меры ради простого факта линейной алгебры кажется неестественной. Дадим простое алгебраическое доказательство.

Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ — другой положительно ориентированный ортонормированный базис в V, $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$ — взаимный базис

[33]Общепринятого стандарта на сей счет нет. В литературе встречается и такая нумерация, при которой сперва идут a_i с $(a_i, a_i) < 0$, а потом — с $(a_i, a_i) > 0$. При переходе к другой нумерации может измениться знак вводимой ниже «формы объема» ω.

в V^*; надо убедиться, что

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n.$$

Имеется ровно одно линейное преобразование $\mathscr{C}\colon V \to V$, переводящее $(a_1, \ldots, a_n)$ в $(b_1, \ldots, b_n)$. Оно псевдоортогональное (раз оба базиса ортонормированные[34]). Поэтому $\det \mathscr{C} = \pm 1$, а раз ориентации обоих базисов одинаковы, то $\det \mathscr{C} > 0$, так что $\det \mathscr{C} = 1$. В начале п. 4 §2 отмечалось, что $\mathscr{C}^* \beta^i = \alpha^i$. Поэтому

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = \mathscr{C}^*(\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n) = \det \mathscr{C} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n.$$

Рассмотрим теперь новую систему координат с базисом $(b_1, \ldots, b_n)$ и взаимным базисом $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$, не предполагая ее ортонормированной и ориентированной положительно. Тогда (см. (3.20))

$$\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \det C \cdot \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = \det C \cdot \omega,$$

где C — матрица соответствующей (ЗК). Отсюда можно было бы выразить ω через связанную со второй системой координат форму $\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n$, но это не было бы выражением ω в терминах второй координатной системы, потому что пришлось бы делить на $\det C$, а C связано с обеими координатными системами. Однако можно получить выражение для ω в терминах второй координатной системы, в котором фигурируют еще величина, связанная с выражением для скалярного произведения во второй координатной системе и от ее ориентации.

В (ЗК) мы обозначали старые координаты через x^i и новые — через y^i. Сейчас я буду в духе тензорного исчисления писать $x^{i'}$ вместо y^i. Заметим, что матрица $\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — это матрица C из (ЗК). Ее определитель мы обозначим короче через J, так что

$$J = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right).$$

[34]Точнее, раз все $(a_i, a_j) = (b_i, b_j)$. В псевдоевклидовом случае здесь существенно принятое соглашение о нумерации векторов ортонормированного базиса.

На минуту я даже исходную систему не буду считать ортонормированной. Обозначим $\det(g_{ij})$ через g, а $\det(g_{i'j'})$ — через g'. Поскольку

$$g_{i'j'} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

что в матричном виде можно записать как

$$(g_{i'j'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) (g_{ij}) \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right),$$

то $g' = J^2 g$ и $|g'| = |J|^2 |g|$. Если $J > 0$, то $J = \sqrt{\dfrac{|g|}{|g'|}}$, и

$$\sqrt{|g'|} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \sqrt{|g|} \cdot \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n.$$

Если теперь взять исходную систему ортонормированной, положительно ориентированной и удовлетворяющей соглашению о нумерации a_i с различными знаками (a_i, a_i), то получается, что

$$\omega = \sqrt{|g'|} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n.$$

Это получилось при $J > 0$, т. е. когда новая система координат ориентирована положительно. Если же допускается переход к противоположно ориентированным системам координат (оставляя прежнюю форму объема), то при нем $J = -\sqrt{\dfrac{|g|'}{|g|}}$ и

$$\omega = -\sqrt{|g'|} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n.$$

Заметим кстати, что g неявно у нас уже встречалось: согласно (3.28),

$$g^{1\ldots n 1 \ldots n} = g.$$

Форма объема ω позволяет установить изоморфизм одномерных векторных пространств

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\approx} \Lambda^n V^* \qquad \lambda \mapsto \lambda\omega.$$

В связи с формой объема вводят так называемый символ Леви – Чивита

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n} = \begin{cases} \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}, & \text{если } \{i_1,\dots,i_n\} = \{1,\dots,n\} \\ \quad \text{(т. е. если } \{i_1,\dots,i_n\} \text{ есть некоторая} \\ \quad \text{перестановка символов } \{1,\dots,n\}), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Используя его, можно сказать, что

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_n} = \varepsilon_{i_1\dots i_n}\omega, \tag{3.32}$$

ибо если символы $i_1,\dots,i_n$ не все различны, то в обеих частях этого равенства стоит 0, если же они все различны, так что $\{i_1,\dots,i_n\}$ получается из $\{1,\dots,n\}$ под действием некоторой перестановки, то

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_n} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n.$$

С помощью символа Леви – Чивита можно следующим образом выразить определитель $\det(v_j^i)_{i,j=1,\dots,n}$:

$$\begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_n^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_1^{i_n} & \dots & v_n^{i_n} \end{vmatrix} = \varepsilon_{i_1\dots i_n} v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n}, \tag{3.33}$$

где справа подразумевается суммирование по $i_1,\dots,i_n$, независимо пробегающим значения $1,\dots,n$. Фактически это есть перефразировка определения определителя. Из каждого столбца берется по элементу (из h-го столбца берется $v_h^{i_h}$) и выбранные элементы перемножаются. Получается n^n произведений, которые умножаются на соответствующие $\varepsilon_{\dots}$ и затем складываются. Пока не было исключено, что из двух разных столбцов будут выбраны элементы, лежащие в одной и той же строке; в этом случае два символа i_h совпадают, и соответствующее $\varepsilon_{i_1\dots i_n} = 0$. Таким образом, в правой части (3.33) остается только $n!$ слагаемых, получающихся, когда из разных строк выбираются элементы, лежащие в разных столбцах. Соответствующие знаки равны ± 1 в зависимости от четности или нечетности перестановки $\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix}$, как это и есть в обычном определении определителя. (Можно также сослаться на (3.12), приняв там $k = n$, $\alpha_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon i_1 \dots i_n$. В левой части сумма по $i_1, \dots, i_n$, для которых $1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n$, сведется к одному-единственному члену, в котором все $i_j = j$.) Теперь становится очевидным следующее выражение для формы объема «в тензорном духе»:

$$\begin{array}{l} \omega(v_1, \dots, v_k) = \pm\sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1 \dots i_n} v_1^{i_1} \dots v_n^{i_n} \\ \text{(суммирование по повторяющимся индексам;} \\ \text{знак зависит от того, является ли система координат} \\ \text{ориентированной положительно или отрицательно).} \end{array} \tag{3.34}$$

Из (3.34) явствует, что набор чисел $\sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ образует псевдотензор.

Набор же чисел $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ не является ни тензором, ни псевдотензором. Но не то чтобы «совсем не является», а скорее «не совсем является». Посмотрим, что получится, если применить к $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ тензорное правило (2.16). При замене $T^{\dots}_{\dots}$ на $\varepsilon_{\dots}$ правая часть (2.16) принимает вид $\varepsilon_{j_1 \dots j_n} \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \dfrac{\partial x^{j_n}}{\partial x^{j_n'}}$. По (3.33), это равно

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{j_1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{j_n'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{j_1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{j_n'}} \end{vmatrix}.$$

Если $\{j_1', \dots, j_n'\} \neq \{1, \dots, n\}$, то здесь имеются два одинаковых столбца, и определитель равен 0. Если $\{j_1', \dots, j_n'\} = \{1, \dots, n\}$, то, переставляя столбцы, получим

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ j_1' \dots j_n' \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, всегда

$$\varepsilon_{j_1\dots j_n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_n}}{\partial x^{j'_n}}=\varepsilon_{j'_1\dots j'_n}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{n'}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} & \dots & \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{n'}}\end{vmatrix}.$$

Если бы система величин $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ была тензором, то должно было бы получиться $\varepsilon_{j'_1\dots j'_n}$, а оно получилось с множителем $\det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)=J^{-1}$. Итак,

$$\varepsilon_{j'_1\dots j'_n}=J\varepsilon_{j_1\dots j_n}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_n}}{\partial x^{j'_n}}. \tag{3.35}$$

В связи с примерами такого рода в тензорном исчислении наряду с тензорами рассматривают некоторые родственные объекты. Правило, сопоставляющее каждой координатной системе в V набор n^{k+l} чисел $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}$, называется тензорной плотностью веса r, если для любых двух систем координат x^i и $x^{i'}$ эти числа связаны следующим образом:

$$T^{i'_1,\dots,i'_k}_{j'_1,\dots,j'_l}=J^{-r}T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i'_k}}{\partial x^{i_k}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{j'_l}}.$$

Таким образом, $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ — это тензорная плотность веса -1. Однако, как мы видели, при наличии скалярного произведения (метрический тензор g_{ij}) от $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ можно перейти к настоящему тензору, вернее, псевдотензору.

Отвлекаясь на минуту в сторону, замечу, что в трехмерном случае с помощью символа Леви – Чивита выражаются координаты $[v,w]^i$ векторного произведения $[v,w]$ векторов v и w с координатами v^i, w^i. А именно, при использовании ортонормированной положительно ориентированной системы координат

$$[v,w]^i=\varepsilon_{ijk}v^jw^k.$$

(Тот факт, что слева индекс i стоит сверху, а справа — снизу, связан с тем, что в пространстве с евклидовым скалярным произведением при использовании ортонормированных координат стирается различие между векторами и ковекторами, а также вообще между тензорами, различающимися верхним или нижним положением того или иного индекса.)

Теперь мы дадим некоторое геометрическое описание пространства, сопряженного к $\Lambda^k V^*$.

$\Lambda^k V^*$ состоит из полилинейных знакопеременных форм φ, аргументами которых являются k векторов $v_1, \ldots, v_k$. Аналогично можно рассмотреть полилинейные знакопеременные формы F, аргументами которых являются k ковекторов $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$; такие F называются поливекторами степени k, а короче — k-поливекторами и еще короче — k-векторами. Поскольку в линейной алгебре V и V^* фактически равноправны (что находит формальное выражение в том факте, что $V = V^{**}$), то все сказанное выше о полилинейных знакопеременных k-формах относится и к k-поливекторам. При желании мы даже можем рассматривать k-векторы как k-формы, считая исходным пространством не V, а V^*; поэтому утверждения о k-векторах являются не только аналогами, но и формальными следствиями утверждений о k-формах. k-векторы тоже образуют векторное пространство размерности $C_n^k = \binom{n}{k}$, которое обозначается через $\Lambda^k V$; определяется билинейное отображение

$$\Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V \qquad (F, G) \mapsto F \wedge G,$$

причем это можно сделать двумя способами, из которых мы будем пользоваться первым; поливекторы

$$\begin{gathered} a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_k}, \\ \text{где } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n \text{ и } a_1, \ldots, a_n \text{ — базис в } V, \end{gathered} \tag{3.36}$$

образуют базис в $\Lambda^k V$. k-поливектор называется разложимым или простым, если он является внешним произведением векторов из V. Если он есть $F = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ и векторы v_j имеют в базисе

$a_1, \ldots, a_n$ координаты v_j^i, то F в базисе (3.36) имеет координаты

$$F^{i_1 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \ldots & v_k^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{i_k} & \ldots & v_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{3.37}$$

В рамках чистой линейной алгебры, пожалуй, нет оснований придавать особое значение k-формам по сравнению с k-поливекторами. Положение меняется в дифференциальной геометрии, где между пространством T_xM (касательное пространство к многообразию M в точке x) и сопряженным к нему пространством T_x^*M имеется некоторая изначальная несимметричность в отношении их связи с M. В геометрии роль k-форм намного больше, чем роль k-векторов. То, что мы до сих пор специально занимались k-формами, а о k-векторах бегло говорим как о чем-то аналогичном, объясняется тем, что я учитываю это различие в их будущей роли. Для нас роль k-поливекторов состоит прежде всего в том, что $\Lambda^k V$ естественным образом оказывается пространством, сопряженным к $\Lambda^k V^*$, так что с помощью k-поливекторов получается некоторое описание как всего пространства $(\Lambda^k V^*)^*$, так и конкретных его элементов — линейных функционалов на $\Lambda^k V^*$. (Но они будут фигурировать и по несколько иным поводам.)

Зафиксируем какой-нибудь базис $a_1, \ldots, a_n$ в V, возьмем взаимный базис $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ в V^* и будем пользоваться базисами (3.3) и (3.36) в $\Lambda^k V^*$ и $\Lambda^k V$. Тем самым в последних двух пространствах вводятся координаты и устанавливаются изоморфизмы

$$\Lambda^k V \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}, \qquad \Lambda^k V^* \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^{\binom{n}{k}*} \tag{3.38}$$

(k-вектору или k-форме сопоставляется набор его (ее) координат. Сейчас мы представляем себе $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ или $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}*}$ как наборы чисел, пронумерованные не одним индексом, который пробегает значения от 1 до $\dbinom{n}{k}$, а k индексами $i_1, \ldots, i_k$, подчиненными условиям $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$.) Поскольку $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}*}$ является сопряженным пространством к $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, то с помощью (3.38) мы можем каждую $\varphi \in \Lambda^k V^*$ рассматривать как линейный функционал на $\Lambda^k V$, и $\Lambda^k V^*$ оказывается сопряженным к $\Lambda^k V$ пространством. А именно, если

$$\varphi = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varphi_{i_1\ldots i_k} \alpha^{i_1} \wedge \ldots \alpha^{i_k} \quad \text{и} \quad F = \sum_{i_1<\ldots<i_k} F^{i_1\ldots i_k} a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_k},$$

т. е. если $F^{i_1\ldots i_k}$ суть координаты F и $\varphi_{i_1\ldots i_k}$ — координаты φ, то мы полагаем

$$\varphi(F) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varphi_{i_1\ldots i_k} F^{i_1\ldots i_k}. \tag{3.39}$$

Так получается изоморфизм

$$\Lambda^k V^* \approx (\Lambda^k V)^*. \tag{3.40}$$

При его построении использовались координаты. Докажем, что на самом деле этот изоморфизм от них не зависит. Прежде всего, для любых $v_1, \ldots, v_k \in V$

$$\varphi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_k). \tag{3.41}$$

Действительно, $F = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ имеет координаты (3.37), а φ — координаты $\varphi_{i_1\ldots i_k} = \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ (ср. с (3.10)). По (3.39),

$$\varphi(F) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \begin{vmatrix} v_1^{i_1} & \ldots & v_k^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{i_k} & \ldots & v_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

Поскольку числа $\varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ кососимметричны по $i_1, \ldots, i_k$, то из замечания. относящегося к (3.12), следует, что

$$\varphi(F) = \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} = \\ = \varphi(a_{i_1} v_1^{i_1}, \ldots, a_{i_k} v_k^{i_k}) = \varphi(v_1, \ldots, v_k).$$

Тем самым мы доказали (3.41), откуда следует, что значение функционала φ на разложимых k-векторах не зависит от используемых координат. А так как каждый поливектор F является суммой разложимых, то и $\varphi(F)$ не зависит от координат.

Коль скоро изоморфизм (3.40) не зависит от координат, мы вправе рассматривать его как стандартное отождествление $\Lambda^k V^*$ с $(\Lambda^k V^*)^*$. Стало быть, и $\Lambda^k V = (\Lambda^k V)^{**} = (\Lambda^k V^*)^*$. Можно, далее, перейти к единым изоморфизмам $\Lambda V = (\Lambda V^*)^*$ и т. д. Как уже говорилось, нам в дальнейшем нужны не столько k-поливекторы, сколько k-формы, а k-поливекторы мы будем привлекать только как способ описания линейных функционалов на $\Lambda^k V^*$.

Предоставляю читателю убедиться, что базисы (3.3) и (3.36) являются взаимными базисами.

Аналогично тому как это было сделано в $\Lambda^k V^*$, можно ввести скалярное произведение в $\Lambda^k V$. С другой стороны, если исходить из уже описанного скалярного произведения в $\Lambda^k V^*$ и рассматривать $\Lambda^k V$ как сопряженное к $\Lambda^k V^*$ пространство, то в $\Lambda^k V$ определяется «обратный билинейный функционал». Эти два скалярных произведения в $\Lambda^k V$ совпадают. Я не буду останавливаться на этом подробнее, так как нам скалярное произведение в $\Lambda^k V$ не понадобится; при желании читатель сам легко проведет все рассуждения. Как мы знаем, при наличии в векторном пространстве скалярного произведения возникает некоторый изоморфизм между этим пространством и сопряженным к нему, зависящий от этого скалярного произведения. В данном случае возникает некоторый изоморфизм $\Lambda^k V^* \approx \Lambda^k V$, который в конечном счете зависит от исходного скалярного произведения в V. Легко проверить, что при этом изоморфизме k-форма φ с коэффициентами $\varphi_{i_1,\ldots,i_k}$ и k-поливектор F с коэффициентами $F^{i_1,\ldots,i_k}$ соответствуют друг другу тогда и только тогда, когда

$$F^{i_1,\ldots,i_k} = \sum_{j_1<\ldots<j_k} g^{i_1\ldots i_k, j_1\ldots j_k} \varphi_{j_1,\ldots,j_k} \tag{3.42}$$

или, что эквивалентно,

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_k} = \sum_{j_1<\ldots<j_k} g_{i_1\ldots i_k, j_1\ldots j_k} F^{j_1,\ldots,j_k},$$

где $g_{i_1\ldots i_k, j_1\ldots j_k}$ — коэффициенты в выражении для скалярного произведения в $\Lambda^k V$ в терминах координат, отвечающих базису (3.36). Это обычные формулы поднимания и опускания индексов, только теперь «индекс» — не одно число, а набор чисел. (Здесь не предполагается ортонормированности базисов.) Духу тензорного исчисления ближе эквивалентные формулы

$$F^{i_1,\dots,i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \varphi_{j_1,\dots,j_k}, \qquad \varphi_{i_1,\dots,i_k} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k} F^{j_1,\dots,j_k}$$

(где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Эквивалентность этих формул получается с помощью замечания, связанного с (3.12).

Существенно, что этот изоморфизм, который можно считать «единым» изоморфизмом $\Lambda V = \Lambda V^*$, сохраняет операцию $\wedge$, т. е., говоря в терминах «единого» изоморфизма, является изоморфизмом алгебр. Здесь как раз удобно говорить в этих терминах. Возьмем ортонормированный базис $(a_1, \dots, a_n)$ в V и взаимный базис $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ в ΛV^*. Пусть сперва скалярное произведение — евклидово. Тогда все $g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} = 1$, а прочие $g^{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} = 0$, поэтому, как видно из (3.42), внешней форме φ с координатами $\varphi_{i_1 \dots i_k}$ соответствует k-вектор F с такими же координатами:

$$F^{i_1 \dots i_k} = \varphi_{i_1 \dots i_k}. \tag{3.43}$$

В частности, каждой из базисных форм (3.3) соответствует базисный поливектор (3.36) (с теми же индексами). Произведение двух базисных форм

$$(\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}) \wedge (\alpha^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{j_l})$$

есть либо нуль (если у них есть общий сомножитель вида α^h), либо, с точностью до знака, снова базисная форма, которая получается, если опустить скобки и переставить индексы в порядке возрастания; знак определяется четностью соответствующей перестановки. Но буквально так же вычисляется и произведение

$$(a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}) \wedge (a_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_l})$$

соответствующих базисных поливекторов. В итоге оба раза получится либо нуль, либо некоторые базисные $(k+l)$-форма и $(k+l)$-поливектор

$$\varepsilon\alpha^{h_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{h_{k+l}} \quad \text{и} \quad \varepsilon a_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_{k+l}}$$

с одними и теми же h_r и одним и тем же $\varepsilon = \pm 1$. Эти форма и поливектор как раз и соответствуют друг другу при рассматриваемом изоморфизме.

Дело лишь немногим осложняется, если скалярное произведение не является положительно определенным. В этом случае вместо (3.43) внешней форме φ с координатами $\varphi_{i_1 \dots i_k}$ соответствует k-вектор F, координаты которого могут отличаться от координат φ знаками:

$$F^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1 \dots i_k}.$$

В частности, каждой из базисных форм $\alpha^{i_1} \wedge \alpha^{i_k}$ соответствует поливектор

$$g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}.$$

Если произведение двух базисных форм равно нулю, то и произведение поливекторов равно нулю. Если произведение двух базисных форм есть

$$\varepsilon \alpha^{h_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{h_{k+l}}, \tag{3.44}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ согласно сказанному выше, то произведение соответствующих поливекторов есть

$$\varepsilon g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} g^{j_1 \dots j_l j_1 \dots j_l} a_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_{k+l}},$$

между тем как форме (3.44) отвечает поливектор

$$\varepsilon g^{h_1 \dots h_{k+l} h_1 \dots h_{k+l}} a_{h_1} \wedge \dots \wedge a_{h_{k+l}}.$$

Но это тот же самый поливектор, ибо из (3.31) и того, что числа $h_1, \dots, h_{k+l}$ суть $i_1 \dots i_k$ и $j_1 \dots j_l$ (только переставленные в каком-то другом порядке), следует, что

$$g^{h_1 \dots h_{k+l} h_1 \dots h_{k+l}} = g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} g^{j_1 \dots j_l j_1 \dots j_l}.$$

Выше мы определили внутреннее произведение $v \rfloor \alpha = i_v \alpha = i(v)\alpha$ вектора $v \in V$ и внешней k-формы α на V. Теперь можно аналогично определить внутреннее произведение $i(F)\varphi$ k-вектора $F \in \Lambda^k V^*$ и l-формы $\varphi \in \Lambda^l V^*$, где $l \geqslant k$. Это есть внешняя $(l-k)$-форма, принимающая на $l-k$ векторах $v_1, \ldots, v_{l-k}$ значение

$$(i(F)\varphi)(v_1, \ldots, v_{l-k}) = \varphi(F \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{l-k}).$$

При $l = k$ у $i(F)\varphi$ уже не остается аргументов; в этом случае определение понимается в том смысле, что $i(F)\varphi$ есть число $F(\varphi) = \varphi(F)$. Это определение не требует никакой структуры в V, кроме структуры векторного пространства. Отметим некоторые простые свойства внутреннего произведения.

Если сумма степеней поливекторов F и G равна степени внешней формы φ, то $(i(F)\varphi)(G) = \varphi(F \wedge G)$. Действительно, для разложимого G это так по определению. В общем же случае G можно представить как сумму разложимых поливекторов. Соответственно, обе части доказываемого равенства представляются в виде сумм, причем слагаемые в левой части равны слагаемым в правой части. Далее, уже независимо от условия о степенях

$$i(F \wedge G)\varphi = i(G)i(F)\varphi. \tag{3.45}$$

Если сумма степеней F и G больше степени φ, то в обеих сторонах (3.45) стоит нуль. Если эта сумма равна степени φ, то (3.45) фактически сводится к предыдущей формуле (почему?) Если

$$\text{степень } \varphi - \text{ степень } F - \text{ степень } G = h > 0,$$

то при любых $v_1, \ldots, v_h \in V$

$$\begin{aligned}(i(F \wedge G)\varphi)(v_1, \ldots, v_h) &= \varphi(F \wedge G \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) = \\ &= (i(F)\varphi)(G \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) = (i(G)i(F)\varphi)(v_1, \ldots, v_h).\end{aligned}$$

Следующие два свойства выглядят имеющими довольно частный интерес. Вероятно, так оно и есть, но они нам понадобятся.

$$\begin{gathered}\text{Если } \alpha \in \Lambda^r V^*,\ \beta \in \Lambda^{n-r+1} V^*,\ v \in V, \\ \text{то } \alpha \wedge i(v)\beta = (-1)^{r-1} i(v)\alpha \wedge \beta.\end{gathered} \tag{3.46}$$

Степень формы $\alpha \wedge \beta$ равна $n+1$, так что $\alpha \wedge \beta = 0$. Используем «формулу Лейбница» (3.24):

$$0 = i(v)0 = i(v)(\alpha \wedge \beta) = i(v)\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge i(v)\beta,$$

откуда и следует (3.46). Далее,

$$\begin{aligned} &\text{если } \varphi \in \Lambda^k V^*,\ \omega \in \Lambda^n V^*,\ F \in \Lambda^k V, \\ &\text{то } \varphi \wedge i(F)\omega = \varphi(F)\omega. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Достаточно доказать это для разложимых F (почему?), для которых речь идет о таком утверждении:

$$\begin{aligned} &\text{если } \varphi \in \Lambda^k V^*,\ \omega \in \Lambda^n V^*,\ v_1, \dots, v_k \in V, \\ &\text{то } \varphi \wedge i(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)\omega = \varphi(v_1, \dots, v_k)\omega. \end{aligned}$$

Ввиду (3.45), правую часть можно переписать как

$$i(v_k) \dots i(v_1)\omega.$$

Применяя (3.46) с $r = k$, $\alpha = \varphi$, $\beta = i(v_{k-1}) \dots i(v_1)\omega$, $v = v_k$, получим, что последнее выражение равно

$$(-1)^{k-1} i(v_k)\varphi \wedge i(v_{k-1}) \dots i(v_1)\omega.$$

Снова применяя (3.46) с $r = k-1$, $\alpha = i(v_k)\varphi$, $\beta = i(v_{k-2}) \dots i(v_1)\omega$, $v = v_{k-1}$, «перебросим» налево $i(v_{k-1})$, при этом появится множитель $(-1)^{k-2}$. Продолжая этот процесс, перебросим налево все $i(v_h)$, что приведет к выражению

$$(-1)^{(k-1)+(k-2)+\dots+1} i(v_1) \dots i(v_k)\varphi \wedge \omega,$$

которое ввиду (3.45) равно

$$(-1)^{k(k-1)/2} i(v_k \wedge \dots \wedge v_1)\varphi \wedge \omega = \varphi((-1)^{k(k-1)/2} v_k \wedge \dots \wedge v_1)\omega,$$

что и дает нужный результат, поскольку $(-1)^{k(k-1)/2} v_k \wedge \dots \wedge v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ (легко видеть, что $\varepsilon\begin{pmatrix} k, & k-1, & \dots, & 1 \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} = (-1)^{k(k-1)/2}$).

Теперь можно перейти к оператору $*$[35]. Он подразумевает использование некоторого фиксированного скалярного произведения в V и соответствующих скалярных произведений во всех $\Lambda^k V^*$, а также выбор ориентации в V. Его определение основано на следующем утверждении и содержится в нем: для любой k-формы $\psi \in \Lambda^k V^*$ существует единственная $(n-k)$-форма $*\psi \in \Lambda^{n-k} V^*$, для которой

$$\varphi \wedge *\psi = (\varphi, \psi)\omega \qquad \text{при всех } \varphi \in \Lambda^k V^*. \tag{3.48}$$

Доказательство состоит из двух частей. Во-первых, мы проверим, что в качестве $*\psi$ можно взять

$$\begin{gathered} *\,\psi = i(F)\omega, \text{ где поливектор } F \\ \text{соответствует } \psi \text{ при изоморфизме } \Lambda^k V^* = \Lambda^k V, \\ \text{отвечающем используемому скалярному произведению.} \end{gathered} \tag{3.49}$$

Во-вторых, убедимся, что никакую другую $(n-k)$-форму нельзя взять за $*\psi$ в (3.48).

Первое нам фактически уже известно. Действительно, заменяя $*\psi$ в (3.48) согласно (3.49), видим, что надо установить равенство

$$\varphi \wedge i(F)\omega = (\varphi, \psi)\omega,$$

которое совпадает с (3.47), если вспомнить, что $(\varphi, \psi) = \varphi(F)$. Чтобы доказать второе, сохраняя обозначение $*$ за только что введенным отображением

$$\Lambda^k V^* \to \Lambda^{n-k} V^* \qquad \psi \mapsto i(F)\omega,$$

допустим, что при некотором ψ еще для какого-то $\chi \in \Lambda^{n-k} V^*$ выполняется условие

$$\varphi \wedge \chi = (\varphi, \psi)\omega \qquad \text{при всех } \varphi \in \Lambda^k V^*.$$

[35]Его можно назвать оператором двойственности для знакопеременных полилинейных форм, но так как слово «двойственность» часто употребляется по различным другим поводам, то $*$ часто называют просто «звездочкой».

Тогда для $\alpha = *\psi - \chi \in \Lambda^{n-k}V^*$ будет справедливо утверждение:

$$\varphi \wedge \alpha = 0 \qquad \text{при всех } \varphi \in \Lambda^k V^*.$$

Здесь можно переставить φ и α. А если после этого взять $\varphi = *\beta$, где $\beta \in \Lambda^{n-k}V^*$ может быть любым, — ведь при любом β будет $\varphi \in \Lambda^k V^*$, — то получится, что $\alpha \wedge *\beta = 0$ при всех β. Ввиду невырожденности скалярного произведения, это возможно только при $\alpha = 0$.

Приведенное построение $*$ отличается от того, которое дается в известных мне книгах (однако сомнительно, чтобы столь простая вещь могла быть новой). В них построение $*$ основывается на использовании систем координат, обычно положительно ориентированных, ортонормированных и удовлетворяющих условию о нумерации базисных векторов; само по себе оно заметно длиннее, но в нем не используются поливекторы и внутреннее умножение. Мне кажется, что некоторое знакомство с поливекторами в любом случае не лишне и их свойства выглядят очень естественно, внутренние произведения вектора и внешней формы тоже заслуживают внимания, а вот нужные нам свойства внутреннего произведения поливектора и формы — это не столь важный вопрос, но ведь на него пришлось потратить менее двух страниц.

Приведу несколько формул, дающих координатное описание операции $*$ (их проверка не составит труда для читателя).

Сперва будем пользоваться ортонормированным и положительно ориентированным базисом $a_1, \dots, a_n$ в V, пронумерованным в соответствии с нашим соглашением (сперва идут a_i с положительными (a_i, a_i), затем — с отрицательными). Тогда

$$\begin{gathered} *\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} = \varepsilon_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} g^{i_1 \dots i_k i_1 \dots i_k} \alpha^{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{j_{n-k}}, \\ \text{где числа } \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \end{gathered} \tag{3.50}$$

Непосредственно при выводе (3.50) мы имеем дело с базисом (3.3); значит, $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_{n-k}$. Но если теперь мы станем переставлять между собой символы $i_1, \dots, i_k$, то и левая, и правая части (3.50) либо обе изменят, либо обе не изменят знак. Если же переставлять между собой символы $j_1, \dots, j_{n-k}$, то знаки не меняются, потому что в правой части одновременно меняется или не меняется знак у $\varepsilon_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}}$ и у $\alpha^{j_1}\wedge\dots\wedge\alpha^{j_{n-k}}$. Таким образом, не обязательно, чтобы числа $i_1,\dots,i_k$ и $j_1,\dots,j_{n-k}$ были расположены в порядке возрастания. Далее, раз базисные векторы преобразуются согласно (3.50), то

$$(*\psi)_{j_1\dots j_{n-k}} = \varepsilon_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}} g^{i_1\dots i_k i_1\dots i_k}\psi_{i_1\dots i_k},$$

где, как обычно, $\{j_1,\dots,j_{n-k}\} = \{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$. Здесь тоже числа $i_1,\dots,i_k$ $j_1,\dots,j_{n-k}$ сперва подразумеваются расположенными в порядке возрастания, но затем можно доопределить $\psi_{\dots}$ и $(*\psi)_{\dots}$ с произвольным расположением индексов таким образом, чтобы зависимость от последних была кососимметричной. При этом приведенная формула остается справедливой.

Теперь приведу явные выражения для $*$ в терминах координат, которые не предполагаются ортонормированными:

$$(*\psi)_{j_1\dots j_{n-k}} = \pm\sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}}\psi^{i_1\dots i_k},$$

где подразумевается обычная связь между i_h и j_l, $\psi^{i_1\dots i_k}$ получается подниманием индексов из $\psi_{i_1\dots i_k}$, а знак $\pm$ обычным образом зависит от ориентации системы координат. Заметим, что эту формулу можно переписать так:

$$(*\psi)_{j_1\dots j_{n-k}} = \pm\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}\varepsilon_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}}\psi^{i_1\dots i_k}.$$

Обе части последнего равенства имеют тензорный характер (справа стоит свертка псевдотензора $\sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}}$ по первым индексам с $\psi^{i_1\dots i_k}$; добавление $\pm$ превращает псевдотензор в тензор[36]). Поэтому достаточно проверить данное равенство в какой-нибудь одной системе координат, а в использовавшихся выше «хороших» координатах это нетрудно (в них $\sqrt{|g|}=1$ и $\psi^{i_1\dots i_k} = g^{i_1\dots i_k i_1\dots i_k}\psi_{i_1\dots i_k}$).

[36]Напомним, что пространство считается ориентированным (без чего указание о $\pm$ не имело бы смысла).

Отметим частные случаи (3.50) для $k = 0, n$. Обозначим через i индекс используемого скалярного произведения в V. Тогда

$$
\begin{gathered}
*\omega = (-1)^i \\
\text{(где число } (-1)^i \text{ рассматривается как элемент } \Lambda^0 V^*\text{)}, \\
*1 = \omega.
\end{gathered}
\tag{3.51}
$$

В обоих случаях в (3.50) фигурирует $\varepsilon_{1\ldots n} = 1$. В первом, кроме того, еще надо учесть, что $g^{1\ldots n 1\ldots n} = (-1)^i$ ввиду (3.31). Во втором в (3.50) формально фигурирует g с пустым множеством индексов. Из вывода (3.50) видно, что соответствующее $g^{\cdots}$ есть некое скалярное произведение, которое при $k = 0$ есть просто $(1, 1) = 1$.

Отметим еще три формулы:

$$
**\varphi = (-1)^{k(n-k)+i}\varphi \qquad \text{для } \varphi \in \Lambda^k V^*, \tag{3.52}
$$

$$
\varphi \wedge \psi = (-1)^{k(n-k)}(\varphi, *\psi)\omega \quad \text{при } \varphi \in \Lambda^k V^*,\ \psi \in \Lambda^{n-k} V^*, \tag{3.53}
$$

$$
(\varphi, *\psi) = (-1)^{k(n-k)}(*\varphi, \psi) \quad \text{при } \varphi \in \Lambda^k V^*,\ \psi \in \Lambda^{n-k} V^*. \tag{3.54}
$$

(3.52) следует из (3.50), если учесть, что

$$
g^{i_1\ldots i_k} g^{j_1\ldots j_{n-k}} = (-1)^i
$$

(согласно (3.31), это произведение равно числу h с $(a_h, a_h) < 0$) и

$$
\varepsilon_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_{n-k}} \varepsilon_{j_1\ldots j_{n-k} i_1\ldots i_k} = (-1)^{k(n-k)}
$$

(если во втором $\varepsilon_{\ldots}$ переставить группы индексов $j_1 \ldots j_{n-k}$ и $i_1 \ldots i_k$, то получится первое $\varepsilon_{\ldots}$, при этом знак изменится на $(-1)^{k(n-k)}$). (3.53) сразу следует из (3.48) и (3.52):

$$
\varphi \wedge \psi = (-1)^{k(n-k)} \varphi \wedge **\psi = (-1)^{k(n-k)}(\varphi, *\psi)\omega.
$$

Теперь сразу получается и (3.54):

$$
(*\varphi, \psi)\omega = (\psi, *\varphi)\omega = (-1)^{k(n-k)}\psi \wedge \varphi = \varphi \wedge \psi = (-1)^{k(n-k)}(\varphi, *\psi)\omega.
$$

Для разложимых форм в евклидовом случае операция $*$ имеет простое геометрическое описание. Именно, для $\varphi = \varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^k$, где $\varphi^1, \dots, \varphi^k \in V^*$, $(n-k)$-форма $*\varphi$ является разложимой формой $\chi = \chi^1 \wedge \dots \wedge \chi^{n-k}$, $\chi^j \in V^*$, для которой подпространство E_χ пространства V^*, натянутое на $\chi^1, \dots, \chi^{n-k}$, ортогонально подпространству E_φ, натянутому на $\varphi^1, \dots, \varphi^k$, $(n-k)$-мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы χ^j[37], равен k-мерному объему параллелепипеда, натянутого на векторы φ^i, и n-форма $\varphi \wedge \chi$ соответствует положительной ориентации (т. е. она равна $\lambda\omega$ с некоторым $\lambda > 0$). Легко видеть, что все это не зависит от конкретного выбора представления φ и χ в виде произведений ковекторов. А то, что сказанное соответствует исходному определению $*$, явствует из того, что в данном случаен существует положительно ориентированный ортонормированный базис, у которого первые k векторов лежат в E_φ, а остальные — в E_χ. Для этого базиса наши $\varphi = \lambda\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k$ и $\chi = \lambda\alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^n$ с одним и тем же числовым множителем λ, а в то же время из (3.50) видно, что $*\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^n$.

Можно было бы начать с описанного здесь действия $*$ на разложимые формы, а затем линейно продолжить $*$ на прочие формы, которые представляются как суммы разложимых форм. Но если бы мы пожелали принять сказанное за определение $*$, то столкнулись бы со следующей трудностью: представление формы в виде суммы разложимых неединственно; почему, пользуясь разными представлениями, мы получим один и тот же результат? При данном выше определении $*$ такого вопроса не возникает, поскольку $*$ сразу определяется для всех k-форм.

В виде примера укажем связь между векторным произведением в трехмерном ориентированном векторном пространстве с положительно определенным скалярным произведением и операциями $\wedge, *$. Пусть (a_1, a_2, a_3) — положительно ориентированный ортонормированный базис, $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — взаимный базис.

[37] Мы вправе говорить об этом объеме, ибо в E_χ имеется положительно определенное скалярное произведение — ограничение имеющегося в V^* скалярного произведения на E_χ.

Как легко видеть,

$$*(\alpha^1 \wedge \alpha^2) = \alpha^3, \qquad *(\alpha^2 \wedge \alpha^3) = \alpha^1, \qquad *(\alpha^3 \wedge \alpha^1) = \alpha^2.$$

Поэтому для $\varphi = \sum \varphi_i \alpha^i$, $\psi = \sum \psi_j \alpha^j$

$$*(\varphi \wedge \psi) = (\varphi^2\psi^3 - \varphi^3\psi^2)\alpha^1 + (\varphi^3\psi^1 - \varphi^1\psi^3)\alpha^2 + (\varphi^1\psi^2 - \varphi^2\psi^1)\alpha^3,$$

т. е. координаты ковектора $*(\varphi \wedge \psi)$ в базисе $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ выражаются через коэффициенты ковекторов φ, ψ в том же базисе по таким же формулам, по каким выражаются координаты вектора $[v, w]$ в базисе (a_1, a_2, a_3) через координаты векторов v, w в том же базисе. А при наличии евклидова скалярного произведения имеется стандартное отождествление векторов и ковекторов и потому несущественно, что один раз говорилось о ковекторах, а другой — о векторах.

Добавление. Операторы L и Λ для эрмитова векторного пространства

Теорема линейной алгебры, рассматривающаяся в добавлении, в самой линейной алгебре не имеет значения. Ее роль состоит в том, что она предсталяет собой как бы алгебраическую часть или алгебраическую модель одной теоремы Ходжа – Лепажа в теории компактных кэлеровых многообразий (это один из типов комплексных многообразий, весьма интересный и один из наиболее изученных). Эту часть (модель) обычно рассматривают отдельно, потому что после этого переход к настоящей теореме Ходжа – Лепажа сравнительно несложен (хотя идея о возможности такого подхода была в свое время весьма нетривиальной). В известных мне изложениях используются подходящие координаты и проводятся довольно громоздкие вычисления. Я не стал противиться искушению написать более простое изложение, хотя едва ли оно может быть новым.

Ниже $V = \mathbb{C}^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$. В $\mathbb{C}^n$ определено эрмитово скалярное произведение $\langle z, w\rangle = \sum \overline{z^j} w^j$, где z^j, w^j — стандартные координаты векторов z, w в указанном базисе, а черта сверху означает комплексное сопряжение. Рассматривая V как вещественное векторное пространство, будем отмечать это записью $V_{\mathbb{R}}$. $V_{\mathbb{R}}$ является $2n$-мерным вещественным векторным пространством с базисом $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$, где $a_j = e_j$, $b_j = ie_j$. (Будем брать векторы базиса именно в таком порядке, как указано.) Взаимный базис в $V_{\mathbb{R}}^*$ обозначим через $\alpha^1, \beta^1, \dots, \alpha^n, \beta^n$. Соответствующую форму объема обозначим через Ω (так как ω будет иметь другой смысл). Если

$$z^j = x^j + iy^j,\ w^j = u^j + iv^j, \qquad x^j, y^j, u^j, v^j \in \mathbb{R},$$

то $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$ суть координаты в $V_{\mathbb{R}}$, позволяющие отождествить это пространство с $\mathbb{R}^{2n}$. В вещественных терминах $\langle z, w\rangle$ выражается так:

$$\langle z, w\rangle = (z, w) + \omega(z, w),$$

$$\text{где } (z, w) = \sum (x^j u^j + y^j v^j), \quad \omega(z, w) = \sum (x^j v^j - y^j v^j).$$

(z,w) — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$, а $\omega = \sum \alpha^j \wedge \wedge \beta^j$.

В $\Lambda V_{\mathbb{R}}^*$ вводятся операторы

$$L\varphi = \omega \wedge \varphi, \qquad \Lambda\varphi = *^{-1}L * .$$

Наша цель — доказать, что

$$[L, \Lambda]\varphi = \Lambda L\varphi - L\Lambda\varphi = (n-k)\varphi \qquad \text{при } \varphi \in \Lambda^k V_{\mathbb{R}}^*. \tag{3.55}$$

Если ввести оператор $P\colon \Lambda V_{\mathbb{R}}^* \to \Lambda V_{\mathbb{R}}^*$, полагая, что для $\varphi = \sum \varphi_k$, где $\varphi_k \in \Lambda^k V_{\mathbb{R}}^*$,

$$P\varphi = \sum_0^{2n} (n-k)\varphi_k,$$

то $[\Lambda, L] = P$. Значение этой формулы состоит в следующем. Легко видеть, что $[P, L] = 2L$ и $[P, \Lambda] = -2\Lambda$. Такие же коммутационные соотношения, как для P, L, Λ, имеют место для подходящих образующих алгебры $\mathfrak{so}(2)$, что позволяет определить действие последней на $\Lambda V_{\mathbb{R}}^*$. Представления $\mathfrak{so}(2)$ давно изучены, и это приводит к соответствующим результатам о действии наших операторов на $\Lambda V_{\mathbb{R}}^*$. Оказывается, что алгебраическая задача хорошо моделирует ситуацию, относящуюся к когомологиям компактного кэлерова многообразия, и на таком пути получается некоторая информация о последних.

Сперва отметим, что Λ можно определить двумя другими способами.

1) $\Lambda = L^*$, где сопряженный оператор понимается по отношению к $(\cdot,\cdot)$. Иными словами,

$$(\varphi, *^{-1}L*\psi) = (L\varphi, \psi) \qquad \text{для } \varphi, \psi \in \Lambda^k V_{\mathbb{R}}^*.$$

Согласно определению $*$, это равносильно тому, что $\varphi \wedge * *^{-1} L * \psi = L\varphi \wedge *\psi$, т. е. $\varphi \wedge \omega \wedge *\psi = \omega \wedge \varphi \wedge \psi$. Но форма второго порядка ω коммутирует с любой формой.

2) Обозначим через $w \in \Lambda^2 V_{\mathbb{R}}$ бивектор, соответствующий форме ω при изоморфизме $\Lambda V_{\mathbb{R}}^* \leftrightarrow \Lambda V_{\mathbb{R}}^*$, определяемом с помощью $(\cdot,\cdot)$. Так как базис ортонормированный и метрика евклидова, то

при этом изоморфизме $\alpha^i \leftrightarrow a_i$, $\beta^i \leftrightarrow b_i$, а так как изоморфизм является изоморфизмом алгебр, то

$$\omega = \sum \alpha^i \wedge \beta^i \leftrightarrow w = \sum a_i \wedge b_i.$$

Теперь можно дать еще одно определение Λ:

$$\Lambda\varphi = i(w)\varphi.$$

Согласно 1), это будет доказано, если установить, что

$$(i(w)\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi) \quad \text{для всех } \varphi \in \Lambda^k V_{\mathbb{R}}^*,\ \psi \in \Lambda^{n-k} V_{\mathbb{R}}^*.$$

Умножив на Ω, перепишем это в виде

$$i(w)\varphi \wedge *\psi = \varphi \wedge *L\psi = \varphi \wedge *(\omega \wedge \psi).$$

Если $\psi \leftrightarrow F$, то $\omega \wedge \psi \leftrightarrow w \wedge F$. Поэтому надо доказать, что

$$i(w)\varphi \wedge i(F)\Omega = \varphi \wedge i(w \wedge F)\Omega. \tag{3.56}$$

Используем формулу (3.47) с $w \wedge F$ вместо F (степень этого поливектора как раз равна степени k формы φ):

$$\varphi \wedge i(w \wedge F)\Omega = \varphi(w \wedge F)\Omega = (i(w)\varphi)(F)\Omega.$$

Снова используем ту же формулу с $i(w)\varphi$ вместо φ (ее степень равна $k-2$, т. е. степени F):

$$(i(w)\varphi)(F)\Omega = i(w)\varphi \wedge i(F)\Omega,$$

и (3.56) доказано.

Прежде чем приступать непосредственно к доказательству (3.55), отметим следующий общий факт. Пусть векторное пространство W имеет базис $c_1, \ldots, c_r$, а $\gamma^1, \ldots, \gamma^r$ — взаимный базис. Тогда для $\varphi \in \Lambda^k W^*$

$$\sum_1^r \gamma^j \wedge i(c_j)\varphi = k\varphi. \tag{3.57}$$

Это аналог теоремы Эйлера об однородных функциях, который доказывается по существу так же. Достаточно доказать его для базисных k-форм. Пусть $\varphi = \gamma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_k}$. Если j не совпадает ни с одним i_h, то $i(c_j)\varphi = 0$ (это сразу видно из (3.25)). Если же $j = i_h$, то

$$i(c_j)\varphi = (-1)^{h-1}\gamma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\gamma^{i_h}} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_k},$$

$$\gamma^j \wedge i(c_j)\varphi = \gamma^{i_h} \wedge (-1)^{h-1}\gamma^{i_1} \wedge \ldots \widehat{\gamma^{i_h}} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_k} = \\ = \gamma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_h} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_k} = \varphi.$$

Среди различных j в левой части (3.57) имеются $j = i_1, \ldots, i_k$; для них $\gamma^j \wedge i(c_j)\varphi = \varphi$. Для прочих j получается $\gamma^j \wedge i(c_j)\varphi = 0$. Отсюда и следует (3.57).

Применительно к нашему случаю ($W = V_{\mathbb{R}}$, базис $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$) (3.57) дает

$$\sum \alpha^j \wedge i(a_j)\varphi + \sum \beta^j \wedge i(b_j)\varphi = k\varphi. \tag{3.58}$$

Используя определение Λ, данное в 2), и определение L, перепишем (3.55) в виде

$$i(w)(\omega \wedge \varphi) = \omega \wedge i(w)\varphi + (n-k)\varphi. \tag{3.59}$$

Очевидно (см, (3.45),

$$i(w) = i\left(\sum a_j \wedge b_j\right) = \sum i(b_j)i(a_j),$$

$$i(a_j)\omega = i(a_j)\sum_h \alpha^h \wedge \beta^h = \beta^j \qquad \text{и} \qquad i(b_j)\omega = -\alpha^j$$

(здесь использовано (3.24)). Поэтому (снова используя (3.24))

$$i(a_j)(\omega \wedge \varphi) = i(a_j)\omega \wedge \varphi + \omega \wedge i(a_j)\varphi = \beta^j \wedge \varphi + \omega \wedge i(a_j)\varphi,$$

$$i(b_j)i(a_j)(\omega \wedge \varphi) = i(b_j)(\beta^j \wedge \varphi + \omega \wedge i(a_j)\varphi) = \\ = \varphi - \beta^j \wedge i(\beta^j) - \alpha^j \wedge i(a_j)\varphi + \omega \wedge i(b_j)i(a_j)\varphi,$$

что при суммировании по j (с учетом (3.58) и того, что $\sum i(b_j)i(a_j) = i(w)$) дает (3.59).