П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для вузов

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Огромное влияние теории множеств на развитие математики последнего полустолетия является в настоящее время общепризнанным фактом; поэтому естественно, что идеи теории множеств находят достаточно большое место в преподавании математики как в университетах, так и в высших педагогических учебных заведениях. Современный курс анализа сам по себе уже испытал значительное влияние теории множеств, и влияние это за последние годы очень усилилось*). Наряду с этим, в большинстве университетов осуществляются специальные курсы теории множеств и теории функций; такой курс входит и в программы высших педагогических институтов. Однако, согласно господствующей в настоящее время традиции, курсы теории множеств и теории функций строятся почти исключительно в направлении собственно теории функций д е й с т в и т е л ь н о г о п е р е м е н н о г о в том духе, как эта теория сложилась в школе теории функций Московского университета. Эта традиция в своё время сыграла большую роль в развитии нашей математической культуры, и, конечно, совершенно естественно, что в наших университетах читаются и будут

*) Мы надеемся, в частности, что появление таких курсов анализа, как курс проф. Г. М. Фихтенгольца, позволит в следующем издании нашей книги вовсе обойтись без изложения теории иррациональных чисел.

читаться курсы, посвящённые специально теории функций действительного переменного или отдельным её главам. Однако едва ли в настоящее время можно видеть в теории функций действительного переменного основную область применения идей и методов теории множеств, а следовательно, и основной источник ознакомления с этими идеями. Ведь область влияния теории множеств стала гораздо более широкой, и самый центр тяжести этого влияния значительно сместился за последние десятилетия в сторону от, так сказать, «классической» теории функций действительного переменного. В самом анализе уже давно невозможно пользоваться одними множествами действительных и комплексных чисел; различные типы функциональных (и вообще, так называемых «абстрактных») пространств (как в топологическом, так и в метрическом смысле слова) давно заняли прочное место в современном построении математического анализа, а также таких дисциплин, как теория динамических систем, теория вероятностей, не говоря уже о собственно функциональном анализе, значение которого в общей системе математики нашего времени непрерывно возрастает. Излагать, например, теорию интегрирования по Лебегу лишь для функций, определённых на действительной прямой, было бы в настоящее время анахронизмом.

Ещё большим анахронизмом является изложение в курсе теории точечных множеств и функций, например, элементарных свойств непрерывных функций лишь для функций, определённых на числовой прямой и её отрезках; в результате приходится доказывать эти свойства сначала для функций одного действительного переменного, потом для функций двух действительных переменных, потом для функций одного комплексного переменного, потом для функционалов, определённых на компактных семействах функций, и т. д., вместо того, чтобы раз навсегда доказать их для функций, определённых в компактных метрических пространствах. Вообще, понятие метрического (а в значительной степени и топологического) пространства настолько приобрело в настоящее время право гражданства в математике, что стало невозможным излагать элементарные вопросы теории точечных множеств и функций, ограничиваясь лишь случаем числовой прямой или даже n-мерного евклидова пространства. Подтверждением этому может служить хотя бы недавно вышедшая книга В. В. Немыцкого и В. В. Степанова по качественной теории дифференциальных уравнений: занимаясь проблемами, по существу аналитическими, авторы этой книги оказались вынужденными посвятить целую главу множествам, лежащим в метрических пространствах, т. е. предмету, который читатель имеет право найти в любом курсе теории множеств и функций.

Изложенные соображения предопределили достаточную общность принятых нами предпосылок как в первой части, посвящённой общим вопросам теории множеств и функций, так и во второй, излагающей теорию меры и интегрирования.

Однако общность предпосылок педагогически лишь тогда целесообразна, когда читатель подготовлен к ней, т. е. понимает её естественность. Для достижения этой цели нами в первой части избран путь постепенного расширения предпосылок. Таким образом, читатель в четвёртой и пятой главах знакомится с традиционным изложением элементов теории точечных множеств на прямой (и отчасти на плоскости), а также с элементарными предложениями теории действительных функций действительного переменного. Лишь в шестой и седьмой главах разбирается общий случай метрических, а в Прибавлениях к этим главам — и топологических пространств. Некоторая «концентричность» изложения, получившаяся в результате такого размещения материала, представляет, как нам кажется, ещё одно преимущество: более элементарные главы, а именно, первая, вторая, четвёртая и пятая, образуют сами по себе связное целое и могут служить курсом теории множеств и теории функций действительного переменного в высших педагогических учебных заведениях. В остальных главах можно найти богатый материал для всякого рода факультативных занятий студентов высших педагогических учебных заведений. При пользовании книгой следует далее иметь в виду, что весь материал второй главы, а также части четвёртой и пятой глав содержится в обычных курсах анализа.

Первая часть книги написана П. С. Александровым.

Вторая часть, написанная А. Н. Колмогоровым, посвящена более специальному кругу вопросов: теории меры и интеграла Лебега с применениями к системам ортогональных функций и теории интегральных уравнений с симметрическим ядром. Теория меры и интеграл Лебега возникли по преимуществу из интересов чисто логического порядка: стремления выяснить естественные границы обобщения основных понятий классического анализа. Созданные по этому поводу концепции оказались, однако, соединяющими большую общность с большой простотой: по существу общая теория интеграла Лебега, охватывающая классические теории интегрирования функций одного и многих переменных, как в обычном смысле, так и в смысле Стильтьеса, значительно проще этой совокупности старых теорий, а может быть даже и каждой из них в отдельности. Общий интеграл Лебега (на множестве элементов любой природы и по любой абстрактной мере) сделался чрезвычайно мощным орудием дальнейших исследований в самых различных областях математики. Именно в таком общем и приспособленном к различным применениям виде и излагается во второй части нашего курса теория меры и теория интеграла Лебега. Таким образом, вторая часть ориентирована по преимуществу на интересы университетских студентов-математиков, для которых мера и интеграл Лебега явятся необходимым орудием при изучении теории вероятностей функционального анализа, теории динамических систем и т. д. Постепенно становится ясным, что ориентированный в эту же сторону курс теории меры и интеграла Лебега будет делаться всё более необходимым и специалистам по теоретической физике и по механике. Эта тенденция уже осуществляется в ленинградском университете в курсах математического анализа для механиков В. И. Смирнова и в специальных дополнительных курсах для физиков-теоретиков в Московском университете.

При составлении этой книги мы пользовались большой помощью наших сотрудников Л. Д. Кудрявцева и Ю. М. Смирнова (по первой части), А. А. Петрова (по второй), которым мы обязаны многими полезными замечаниями и улучшениями и которым выражаем самую сердечную благодарность. Мы очень благодарны также редактору Д. А. Райкову, который сделал ряд предложений, касающихся композиции первой части; эти предложения были приняты во внимание и содействовали, как нам кажется, значительному улучшению книги.

Болшево, Комаровка
8 мая 1948 г.

П. Александров
А. Колмогоров

ГЛАВА ПЕРВАЯ

О БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

§ 1. Понятие множества

На каждом шагу нам приходится сталкиваться с тем трудно определимым понятием, которое выражается словом совокупность. Например, можно говорить о совокупности людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих на пруду, страусов, живущих в Сахаре, и т. п.

В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова совокупность употребить слово множество.

В математике постоянно приходится иметь дело с различными множествами: например, множество точек, являющихся вершинами какого-нибудь многоугольника, множество сочетаний из 13 элементов по 7 и т. д.

Все приведённые примеры множеств обладают одним существенным свойством: все эти множества состоят из определённого конечного числа элементов; последнюю фразу мы понимаем в том смысле, что в каждом из упомянутых случаев на вопрос «сколько» (людей в комнате, гусей на пруду, сочетаний из 13 по 7) мы можем ответить или прямым указанием известного нам целого числа (например, число сочетаний из 13 по 7 есть $\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 1716$) или указанием на то, что целое число, дающее ответ на вопрос, во всяком случае имеется, хотя в данный момент и при данном состоянии наших знаний нам может быть и неизвестно, каково оно именно. Множества, состоящие лишь из конечного числа элементов, называются *конечными множествами*.

В математике приходится постоянно сталкиваться и с другими — не конечными, или, как принято говорить, *бесконечными* множествами. Таковы, например, множества всех натуральных чисел, всех чётных чисел, всех чисел, дающих при делении на 11 в остатке 7, всех прямых, проходящих через данную точку плоскости.

К числу конечных множеств мы причисляем и пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента; число элементов пустого множества есть нуль. Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, так как, может быть, какой-нибудь капитан и завёз какого-нибудь страуса за полярный круг.

Пустое множество обозначается через Λ.

§ 2. Подмножества. Операции над множествами.

Введём теперь следующие основные обозначения и понятия.

Для того чтобы указать, что x есть элемент множества A, пишут $x \in A$ или $A \ni x$ (при этом обычно обозначают множества большими буквами, а их элементы — малыми).

Определение 1. Если каждый элемент множества A есть вместе с тем элемент множества B, то множество A называется *частью* или *подмножеством* множества B.

Например, множество всех чётных чисел есть часть множества всех целых чисел. Вместо того, чтобы сказать, что множество A есть часть множества B, говорят часто, что множество A содержится в множестве B или что A включено в B, и записывают это так:

$$A \subseteq B \quad \text{или} \quad B \supseteq A.$$

Если A есть подмножество множества B, причём $A \neq B$, то пишут

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A.$$

Знаки $\subseteq$, $\subset$ называются *знаками включения* (одного множества в другое).

Согласно нашему определению, всякое множество A есть подмножество самого себя. Кроме того, пустое множество есть часть всякого множества. Множество A и пустое множество называются *несобственными* подмножествами множества A; все остальные подмножества называются *собственными*.

Предположим, что мы имеем некоторую (конечную или бесконечную) совокупность множеств M_α *). Рассмотрим множество тех элементов, которые принадлежат хотя бы к одному из множеств, входящих в данную совокупность. Множество всех этих элементов называется *суммой* (или *соединением*) множеств, образующих данную совокупность.

Сумма множеств обозначается знаком $\bigcup$; например, $A \bigcup B$ есть сумма множеств A и B; сумма всех множеств A_α данной совокупности множеств обозначается через $\bigcup\limits_{\alpha} A$

(в частности, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots$).

Например, множество всех целых чисел есть сумма множества всех чётных и множества всех нечётных чисел, а также

множества M_1 всех нечётных чисел, не делящихся на три;

множества M_2 всех чётных чисел;

множества M_3 всех чисел, делящихся на три

(при этом множества M_2 и M_3 имеют общие элементы — числа, делящиеся на 6).

Рассмотрим теперь операцию вычитания множеств. Пусть имеем два множества A и B (из которых второе может и не содержаться в первом). Разностью множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не суть элементы множества B. Разность множеств A и B обозначается через $A \setminus B$.

---

*) Индексы α, β, ... (могущие, например, принимать значения 1, 2, 3, ...) служат для различения элементов данной совокупности: например, мы говорим о множествах M_α, M_β, M_γ данной совокупности множеств.

Переходим к третьей и последней основной операции над множествами — к операции взятия общей части или пересечения множеств. Пусть мы снова имеем конечную или бесконечную совокупность множеств A_α. Назовём *общей частью* или *пересечением* этих множеств множество тех элементов, которые содержатся во всех данных множествах (множество элементов, общих всем множествам A_α).

Пересечение обозначается знаком $\bigcap$; так, например, $A \bigcap B$ есть пересечение множеств A и B. Пересечение всех множеств A_α данной совокупности множеств обозначается через $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$; в частности, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap \ldots$

Примеры:

1. Обозначим через A_n множество всех рациональных чисел, абсолютная величина которых меньше $\frac{1}{n}$ (где n — натуральное число). Пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ всех множеств A_n состоит из одного числа 0.

2. Обозначим через A_n множество всех положительных рациональных чисел, меньших, чем $\frac{1}{n}$. В этом случае нет ни одного элемента, общего всем множествам A_n, т. е. пересечение всех множеств A_n есть пустое множество.

Из очевидных свойств действий сложения, пересечения и вычитания отметим:

Коммутативность:

$$A \bigcup B = B \bigcup A; \quad A \bigcap B = B \bigcap A.$$

Ассоциативность:

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) = A \bigcup B \bigcup C,$$

$$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = A \bigcap B \bigcap C.$$

Дистрибутивность (пересечения относительно сложения):

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C),$$

вообще

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)\bigcap B=\bigcup_\alpha (A_\alpha\bigcap B),$$

и далее

$$(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus B=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C),$$
$$A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B),$$
$$A=(A\bigcap B)\bigcup(A\setminus B).$$

Почти столь же очевидны следующие важные соотношения, известные под названием *соотношений двойственности* (сложения и пересечения):

Для любой (конечной или бесконечной) *системы подмножеств A_α данного произвольного множества X имеют место тождества*

$$X\setminus\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha (X\setminus A_\alpha), \tag{1}$$

$$X\setminus\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha (X\setminus A_\alpha). \tag{2}$$

Доказательства обеих формул (1) и (2) совершенно аналогичны и проводятся автоматически. Докажем, например, формулу (1).

Пусть $x\in X\setminus\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$. Это означает, что x не принадлежит хотя бы одному A_α, т. е. что x принадлежит хотя бы одному $X\setminus A_\alpha$, т. е. что $x\in\bigcup\limits_\alpha (X\setminus A_\alpha)$. Поэтому левая часть формулы (1) содержится в правой части.

Пусть, обратно, $x\in\bigcup\limits_\alpha (X\setminus A_\alpha)$; это означает, что x принадлежит хоть одному $X\setminus A_\alpha$, следовательно, x не может принадлежать всем A_α, т. е. x не принадлежит $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, значит, x принадлежит $X\setminus\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$. Таким образом, правая часть формулы (1) есть подмножество левой части. Формула (1) доказана.

В заключение этого параграфа скажем об убывающих и возрастающих последовательностях множеств.

Последовательность множеств

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_n,\ \ldots \tag{3}$$

называется *убывающей*, соотв. *возрастающей*, если для любого n имеем $M_n \supseteq M_{n+1}$, соотв. $M_n \subseteq M_{n+1}$. Если при этом для всех n имеют место более сильные соотношения $M_n \supset M_{n+1}$, соотв. $M_n \subset M_{n+1}$, то последовательность (3) называется *строго убывающей* (*строго возрастающей*).

Легко видеть, что *пересечение* (соотв. *сумма*) *любой бесконечной подпоследовательности убывающей* (соотв. *возрастающей*) *последовательности* (3) *совпадает с пересечением* (соотв. *суммой*) *всей последовательности* (3).

§ 3. Взаимно однозначное соответствие между множествами. Отображение одного множества на другое. Разбиение множества на подмножества

Если два множества состоят из одного и того же конечного числа элементов, то между элементами этих множеств возможно установить *взаимно однозначное соответствие*, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно; если же число элементов первого множества меньше, чем второго, то можно установить взаимно однозначное соответствие между первым множеством и частью второго.

Понятие взаимно однозначного соответствия по существу дела не предполагает, что множества, между элементами которых устанавливается это соответствие, непременно конечны.

Приведём примеры взаимно однозначных соответствий между бесконечными множествами.

1. Множество A состоит из всех целых положительных чисел, множество B из всех целых отрицательных чисел.

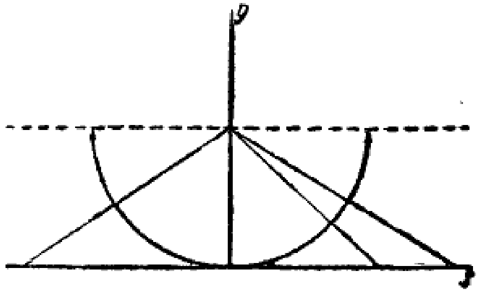
Очевидно, мы получим однозначное соответствие между множествами A и B, если каждому положительному числу поставим в соответствие отрицательное с тою же абсолютной величиной.

2. Множество A состоит из всех целых положительных чисел, множество B из всех положительных чётных чисел. Мы получим взаимно однозначное соответствие между A и B, если каждому числу $n \in A$ поставим в соответствие число $2n \in B$.

3. Множество A состоит из всех точек прямой линии (которую примем за ось абсцисс некоторой координатной системы)*). Множество B состоит из всех точек полуокружности

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, y < 1,$$

с центром в точке (0, 1). Концы этой полуокружности, т. е. точки (1, 1) и (−1,1), не принадлежат к ней (в силу условия $y < 1$) (черт. 1).



Черт. 1.

Полуокружность касается нашей прямой в начале координат. Устанавливаем взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, ставя в соответствие каждой точке ξ прямой ту точку η окружности, в которой эту окружность пересекает луч, соединяющий центр круга с ξ.

4. Пусть A и B сохраняют смысл, указанный в предыдущем примере. Пусть B' — интервал $(-1; 1)$ числовой прямой, т. е. множество всех точек x оси абсцисс, удовлетворяющих неравенству $-1 < x < 1$. Проектируя полуокружность B ортогонально на интервал B' и помня, что A уже поставлено во взаимно однозначное соответствие с B, получим взаимно однозначное соответствие между числовой прямой A и её интервалом $(-1; 1)$. Очевидно можно таким образом установить взаимно однозначное соответствие между числовой прямой и любым её интервалом, а следовательно, и между любыми двумя интервалами.

На основе понятия взаимно однозначного соответствия вводится следующее

Определение 2. Два множества называются *количественно эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие.

*) Мы считаем, что читатель знаком с понятиями числовой прямой и действительного числа из курса анализа. Подробно мы займёмся действительными числами в следующей главе

Таким образом, множества A и B в каждом из предыдущих примеров суть множества количественно эквивалентные.

Количественно эквивалентные множества обычно называют просто *эквивалентными* множествами.

Замечание 1. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Замечание 2. Очевидно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же конечного числа элементов.

Замечание 3. Из предыдущего определения эквивалентности следует, что два множества A и B, эквивалентных одному и тому же третьему C, эквивалентны между собою.

Замечание 4. На вопрос, что такое мощность (см. замечание 1), можно ответить лишь так называемым «определением через абстракцию»: мощность — это то, что есть общего у всех эквивалентных между собою множеств. Если мы поставим себе вопрос: «что есть общего у всех эквивалентных между собою конечных множеств?», то из сказанного в замечании 2 будет следовать, что этим общим является одинаковое число или количество элементов, из которого состоят все эквивалентные между собой конечные множества. В этом смысле понятие мощности является — в применении к бесконечным множествам — аналогом понятия количества (количественные числа) *).

Определение 3. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется *счётным множеством*.

На основании сказанного в замечании 3 мы заключаем, что: 1) всякое множество, эквивалентное счётному множеству, само есть счётное множество, 2) всякие два счётных множества эквивалентны.

Определение счётного множества может быть формулировано и следующим образом: счётное множество —

*) См. в связи с этим замечание 2 в § 5 этой же главы.

это такое множество A, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы в качестве номера дано одному и лишь одному элементу нашего множества.

Бесконечное множество, не являющееся счётным, называется несчётным множеством.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, или, как говорят, взаимно однозначное отображение одного множества на другое, есть частный случай общего понятия *отображения: если каким-нибудь образом каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определённый элемент y некоторого множества Y, то мы говорим, что имеется отображение множества X во множество Y, или функция f, аргумент которой пробегает множество X, а значения принадлежат множеству Y*. Для того чтобы показать, что данный элемент y поставлен в соответствие элементу x, пишут: $y = f(x)$ и говорят, что y есть *образ* элемента x при данном отображении f.

При этом могут представиться различные случаи, которые мы сейчас разберём.

Может случиться, что каждому элементу x множества X поставлен в соответствие элемент $y = f(x)$ множества Y, причём каждый элемент множества Y оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу множества X. В этом случае мы говорим, что имеем отображение множества X *на* множество Y.

Наиболее важным случаем отображений является случай отображения одного множества *на* другое. К нему легко приводится и общий случай отображения одного множества *в* другое. В самом деле, пусть дано какое-нибудь отображение f множества X во множество Y; *множество всех тех элементов множества Y, которые в силу отображения f поставлены в соответствие хотя бы одному элементу множества X, назовём образом множества X при отображении f и обозначим через $f(X)$.*

Очевидно, что отображение f есть отображение множества X *на* множество $f(X) \subseteq Y$.

Определение 4. Пусть дано отображение f множества X на множество Y. Пусть y есть произвольный элемент множества Y. *Полным прообразом* элемента y при отображении f называется множество всех тех элементов множества X, которым при отображении f ставится в соответствие данный элемент $y \in Y$. Это множество обозначается через $f^{-1}(y)$.

Отображение f множества X на множество Y, очевидно, тогда и только тогда взаимно однозначно, когда полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждого элемента y множества Y состоит лишь из одного элемента множества X.

Пусть дано множество X, представленное в виде суммы попарно непересекающихся подмножеств (в конечном или в бесконечном числе). Эти подмножества (множества-слагаемые нашей суммы) являются элементами данного *разбиения* множества X. Простой пример: пусть X есть множество всех учащихся в средних школах Москвы. Множество X можно разбить на попарно непересекающиеся подмножества, например, следующими двумя способами: 1) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одной и той же школы*) (т. е. разбиваем множество всех учащихся по школам), 2) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одного и того же класса (хотя бы и различных школ). Второй пример: пусть X есть множество всех точек плоскости; возьмём на этой плоскости какую-нибудь прямую d и разобьём всю плоскость на прямые, параллельные прямой d. Множества точек каждой такой прямой и являются теми подмножествами, на которые мы разбиваем множество X.

Замечание 5. Если данное множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества, дающие в сумме множество X, то для краткости говорят просто о разбиении множества X на *классы*.

Следующее предложение непосредственно следует из наших определений. Пусть дано отображение f множества

*) В предположении, что каждый учащийся учится лишь в одной школе.

X на множество Y. Полные прообразы $f^{-1}(y)$ всевозможных элементов y множества Y образуют разбиение множества X на классы. Множество этих классов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Y.

Обратно: пусть дано разбиение множества X на классы. Это разбиение порождает отображение множества X на некоторое множество Y, а именно на множество, элементами которого являются классы данного разбиения. Это отображение получается, если заставить соответствовать каждому элементу множества X тот класс, к которому он принадлежит.

Пример. Тем самым, что учащиеся Москвы распределены по школам, уже установлено*) отображение множества X всех учащихся на множество Y всех школ: каждому учащемуся соответствует та школа, в которой он учится.

При всей самоочевидности изложенных фактов они не сразу получили в математике отчётливую формулировку; получив же эту формулировку, они сразу приобрели очень важное значение в логическом построении различных математических дисциплин.

Пусть дано разбиение множества X на классы. Введём следующее определение: назовём два элемента множества *эквивалентными по отношению к данному разбиению*, если они принадлежат к одному и тому же классу.

Таким образом, если мы разобьём учащихся Москвы по школам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одной и той же школе (хотя бы и в разных классах). Если же мы разобьём учащихся по классам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одном и том же классе (хотя бы и различных школ).

Отношение эквивалентности, только что определённое нами, очевидно, обладает следующими свойствами:

Свойство симметрии (или взаимности). Если x и x' эквивалентны, то эквивалентны также x' и x.

*) См. предыдущую сноску.

Свойство транзитивности (или переходности). Если эквивалентны элементы x и x', а также x' и x'', то x и x'' эквивалентны («два элемента x и x'', эквивалентные третьему x', эквивалентны между собою»).

Наконец, мы считаем каждый элемент эквивалентным самому себе; это свойство отношения эквивалентности называется свойством рефлексивности.

Итак, *всякое разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности.*

Предположим теперь, что, обратно, нам удалось установить некоторый признак, дающий нам возможность о некоторых парах элементов множества X говорить как об эквивалентных. При этом мы требуем от этой эквивалентности только, чтобы она обладала свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности. Докажем, что это *отношение эквивалентности определяет разбиение множества X на классы.*

В самом деле, назовём классом $\xi(x)$ данного элемента x множества X множество всех элементов из X, эквивалентных элементу x. Вследствие рефлексивности каждый элемент x содержится в своём классе. Докажем, что если два класса имеют хоть один общий элемент, то они непременно совпадают.

В самом деле, пусть классы $\xi(x)$ и $\xi(x')$ имеют общий элемент x''. Записывая эквивалентность посредством значка $\sim$, имеем по определению классов $x \sim x''$, $x' \sim x''$, следовательно, в силу симметрии $x'' \sim x'$, а тогда в силу транзитивности $x \sim x'$. Пусть x^* — какой-нибудь элемент класса $\xi(x')$. Имеем $x \sim x' \sim x^*$, а в силу транзитивности $x \sim x^*$, т. е. $x^* \in \xi(x)$; значит, $\xi(x') \subseteq \xi(x)$. Пусть теперь $\tilde{x}$ есть элемент класса $\xi(x)$. Тогда $x \sim \tilde{x}$, по симметрии $\tilde{x} \sim x$, и так как $x \sim x'$, то по транзитивности $\tilde{x} \sim x'$, откуда $x' \sim \tilde{x}$, т. е. $\tilde{x} \in \xi(x')$; значит, $\xi(x) \subseteq \xi(x')$.

Таким образом, два класса $\xi(x)$ и $\xi(x')$, имеющие общий элемент, действительно совпадают между собою.

Объединим доказанное в одно предложение:

Каждое разбиение какого-нибудь множества X на классы определяет между элементами множества X некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности. Обратно, каждое отношение эквивалентности, установленное между элементами множества X и обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности, определяет разбиение множества X на классы попарно эквивалентных между собою элементов.

§ 4. Теоремы о счётных множествах

Переходим к доказательству следующих теорем.

Теорема 1. *Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счётное множество.*

Доказательство. Пусть A — счётное множество. На основании определения счётного множества мы вправе предположить, что все элементы множества A занумерованы и, следовательно, само множество может быть представлено в виде бесконечной последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

Пусть A' есть часть множества A и a_{n_1} — первый элемент последовательности (1), являющийся вместе с тем элементом множества A'; пусть a_{n_2} будет второй такой элемент в последовательности (1) и т. д.

Возможны лишь два случая: либо мы после конечного числа шагов исчерпаем всё множество A', которое окажется в этом случае конечным множеством, либо мы получим бесконечную последовательность

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots,\ a_{n_k},\ \ldots,$$

состоящую из всех элементов A'. Обозначая для простоты a_{n_k} через a'_k, видим, что A' — счётное множество.

Теорема 2. *Сумма конечного или счётного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество.* (При этом очевидно, что если хотя бы одно слагаемое бесконечно, то сумма не может быть конечной и потому есть счётное множество.)

Доказательство. Пусть данные множества суть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; обозначим их сумму через A. Обозначим далее через P_1 множество всех простых чисел, через P_2 — множество всех чисел, являющихся квадратами простых чисел, вообще через P_n — множество всех чисел, являющихся n-ми степенями простых чисел. Множества P_n суть попарно не пересекающиеся счётные множества.

Предположим сначала, что множества A_n попарно не имеют общих элементов. Так как каждое из этих множеств конечно или счётно, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством A_n и множеством P_n или его частью. Но этим будет установлено взаимно однозначное соответствие между всем множеством A и некоторой частью множества всех натуральных чисел, откуда и следует, что множество A не более, чем счётно.

В общем случае, когда среди множеств A_n имеются пересекающиеся множества, положим

$$A'_1 = A_1, A'_2 = A_2 \setminus A'_1, \ldots, A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup \ldots \cup A'_{n-1}), \ldots$$

Множества A'_k суть попарно не пересекающиеся конечные или счётные множества, имеющие ту же сумму A, что и множества A_n, откуда следует, что A конечно или счётно.

Второе доказательство (мы даём его, простоты ради, лишь для случая счётного множества попарно непересекающихся счётных множеств). Пусть данные счётные множества суть

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},\\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},\\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_m &= \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Тогда множество $A = \bigcup\limits_n A_n$ может быть следующим образом записано в виде счётной последовательности:

$$a_{11};\ a_{12}, a_{21};\ a_{13}, a_{22}, a_{31};\ a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41};\ \ldots$$

Теорема 3. *Всякое бесконечное множество M содержит счётное подмножество.*

Доказательство. Так как M бесконечно, мы можем найти в M два различных элемента, которые обозначим через a_1 и b_1; M наверное не исчерпывается этими двумя элементами, так что можно найти в M элемент a_2, отличный от a_1 и b_1; M не исчерпывается также и тремя элементами a_1, b_1, a_2, так что существует четвёртый элемент b_2, отличный от уже выбранных трёх.

Продолжая наш процесс, мы выделим из множества M даже не одно, а два счётных множества:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

чем доказана наша теорема. То обстоятельство, что мы получили два счётных множества без общих точек, позволяет следующим образом усилить формулировку теоремы 3.

Всякое бесконечное множество M содержит счётное множество A, притом такое, что $M \setminus A$ есть бесконечное множество (так как $M \setminus A$ содержит счётное множество B).

Теорема 4. *Если M есть несчётное множество* *), *а A — конечное или счётное множество, содержащееся в M, то M и $M \setminus A$ эквивалентны между собою.*

В самом деле, множество $M \setminus A$ несчётно (так как если бы $M \setminus A$ было конечным или счётным, то на основании теоремы 2 множество $M = A \cup (M \setminus A)$ было бы конечным или счётным). На основании теоремы 3 можно выделить из множества $M \setminus A$ счётное множество A . Обозначим оставшуюся часть $(M \setminus A) \setminus A_1$ множества M через N. Имеем:

$$M \setminus A = A_1 \cup N,$$
$$M = (A \cup A_1) \cup N.$$

Установим взаимно однозначное соответствие между счётными множествами A_1 и $A \cup A_1$, а каждый элемент множества N поставим в соответствие самому себе. Этим

---

*) Существование несчётных множеств будет доказано в § 6 этой главы.

будет установлено взаимно однозначное соответствие между $M \setminus A$ и M, ч. и тр. д.

Теорема 5. *Присоединяя к бесконечному множеству A счетное или конечное множество B, получим множество $A \bigcup B$, эквивалентное множеству A.*

В самом деле, если A счётно, то $A \bigcup B$ счётно на основании теоремы 2 и, следовательно, эвивалентно множеству A. Если A несчётно, то $A \bigcup B$ также несчётно, мы можем, следовательно, получить множество A отнятием от несчётного множества $A \bigcup B$ конечного или счётного множества B, поэтому на основании предыдущей теремы $A \bigcup B$ и A эквивалентны.

Теорема 6. *Всякое бесконечное множество A содержит часть A', эквивалентную всему множеству A (причём можно предположить, что $A \setminus A'$ есть бесконечное множество).*

В самом деле, если A — счётное множество, то, выделяя из него (по теореме 3) счётное подмножество A' (так, чтобы $A \setminus A'$ было бесконечно), получим сразу доказательство нашего утверждения. Если A несчётно, то, выделяя из A любое счётное множество A_0, получим часть $A_0 = A \setminus A'$, эквивалентную множеству A по теореме 4.

Так как никакое конечное множество не содержит части, эквивалентной всему множеству, то теорема 6 выражает характеристическое свойство бесконечных множеств, т. е. свойство, принадлежащее любому бесконечному множеству и лишь бесконечным множествам. Это позволяет принять свойство, выраженное теоремой 6, за определение бесконечных множеств.

Очень много приложений имеет следующая простая

Теорема 7. *Множество P всех пар натуральных чисел*) счётно.*

Доказательство. Назовём высотою пары (p, q) натуральное число $p+q$. Очевидно, имеется ровно $n-1$

---

*) Под парой натуральных чисел понимаются два натуральных числа (не непременно различных), данных в определённом порядке. Так, (1,2), (2,1), (1,1) и т. д. суть различные пары натуральных чисел.

пар данной высоты n, $(n>1)$, именно

$$(1,\ n-1),\quad (2,\ n-2),\ \ldots,\ (n-1,\ 1).$$

Поэтому, обозначая через P_n множество всех пар высоты n, видим, что множество P есть сумма счётного множества конечных множеств P_n, т. е. счётное множество.

Так как каждому положительному дробному числу взаимно однозначно соответствует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ и, следовательно, пара натуральных чисел $(p,\ q)$, то, на основании теорем 7 и 1, все положительные дробные числа образуют счётное множество. Счётным является и множество всех отрицательных дробных чисел. Итак:

Теорема 8. *Множество всех рациональных (т. е. целых и дробных) чисел счётно.*

Пара натуральных чисел есть частный случай конечной последовательности

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$$

натуральных чисел *). Докажем общее предложение:

Теорема 9. *Множество S всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счётного множества D, есть счётное множество.*

Доказательство (посредством полной индукции). Из теоремы 7 вытекает, что множество пар, составленных из элементов счётного множества D, есть счётное множество. Предположим, что доказана счётность множества S_m всех последовательностей, состоящих из m элементов данного счётного множества D. Докажем, что множество S_{m+1} всех последовательностей, состоящих из $m+1$ элементов множества D, также счётно. В самом деле, пусть

$$D=\{d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n,\ \ldots\}.$$

Каждой последовательности $s^{(m+1)}=(d_{i_1},\ldots,\ d_{i_m},\ d_k)\in S_{m+1}$ соответствует пара $(s^{(m)},\ d_k)$, где $s^{(m)}=(d_{i_1},\ldots,\ d_{i_m})\in S_m$,

*) Строго говоря, последовательность из n (каких угодно чисел $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ есть функция определённая на множестве первых n натуральных чисел, со значениями $f_1=f(1),\ f_2=f(2),\ \ldots$ $\ldots,\ f_n=f(n)$.

причём различным $s^{(m+1)}$ соответствуют различные пары этого вида. Так как множество S_m всех $s^{(m)}$ счётно, и может быть записано в виде $s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \ldots, s_i^{(m)}, \ldots$, то счётно и множество всех пар $(s_i^{(m)}, d_k)$ (взаимно однозначно соответствующих парам натуральных чисел-индексов i, k), а значит, и множество всех $s^{(m+1)}$.

Так как каждое S_m по доказанному счётно, то счётно и множество S, ч. и тр. д.

Из теоремы 9 вытекает ряд следствий. Назовём точку плоскости (а также трёхмерного и, вообще, n-мерного пространства) *рациональной*, если все её координаты суть рациональные числа. Очевидно, рациональная точка n-мерного пространства может быть рассматриваема как последовательность n рациональных чисел. Поэтому из теоремы 9 и счётности множества всех рациональных чисел вытекает

Теорема 10. *Множество всех рациональных точек n-мерного пространства счётно.*

Назовём «рациональной окружностью» (а также рациональной сферой трехмерного, вообще, n-мерного пространства) окружность (или сферу), центр и радиус которой рациональны. Таким образом, рациональные окружности находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (x, y, r) рациональных чисел (x и y суть координаты центра, а r — радиус). Отсюда и из аналогичных соображений для пространства следует, что *множество всех рациональных окружностей* (а также множество всех рациональных сфер) *счётно.*

Точно так же доказывается и

Теорема 11. *Множество всех многочленов*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

с рациональными коэффициентами счётно.

В самом деле, эти многочлены взаимно однозначно соответствуют конечным последовательностям

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

рациональных чисел.

Комплексное (в частности, действительное) число ξ называется, как известно, *алгебраическим*, если существует многочлен (1) с рациональными коэффициентами, обращающийся в нуль при подстановке $x=\xi$. Обозначая через $A(P)$ множество всех корней данного многочлена $P(x)$ с рациональными коэффициентами, видим, что множество всех алгебраических чисел есть сумма счётного множества конечных множеств $A(P)$, т. е. счётное множество. Итак:

Теорема 12 (Кантор). *Множество всех алгебраических чисел счётно.*

Во второй главе будет доказано, что множество всех действительных чисел несчётно. Называя комплексное (в частности, действительное) число *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим, получим в качестве следствия из теорем 12 и 5 теорему о несчётности множества всех трансцендентных действительных (а значит, и подавно комплексных) чисел.

§ 5. Понятие об упорядоченном множестве

В предыдущем параграфе, а также ещё в курсе элементарной алгебры читатель имел случай познакомиться с множествами, элементы которых рассматриваются в определённом порядке. Так, например, при определении размещений и сочетаний из m элементов по n говорится, что сочетания из m элементов по n суть комбинации, состоящие из каких-нибудь n элементов, взятых из числа данных m элементов, т. е. суть всевозможные состоящие из n элементов подмножества данного множества m элементов; что же касается размещений, то указывается, что это также суть комбинации из n элементов, взятых из числа данных m элементов, но при этом две такие комбинации (т. е. два подмножества) считаются различными даже и тогда, когда, содержа те же самые элементы, они отличаются лишь порядком этих элементов. По существу, следовало бы определить размещения, как *упорядоченные подмножества* (данного множества m элементов), состоящие из n элементов. Таким образом, мы приходим к следующему чрезвычайно важному определению:

Определение 5. Множество X, состоящее из каких угодно элементов, называется *упорядоченным*, если в нём установлено «отношение порядка между любыми двумя его элементами», т. е. если относительно любых двух различных элементов x, x' множества X известно, что один из них *предшествует* другому, например, элемент x предшествует элементу x', что записывается так:

$$x \prec x'.$$

При этом предполагается, что отношение порядка удовлетворяет следующим условиям (*«аксиомам порядка»*).

1° Отношения $x \prec x'$ и $x' \prec x$ исключают друг друга (т. е. из того, что элемент x предшествует элементу x', вытекает, что элемент x' не предшествует элементу x).

2° Если $x \prec x'$ и $x' \prec x''$, то $x \prec x''$ («транзитивность» или «переходность» отношения порядка).

Замечание 1. Вместо *x предшествует x'* говорят также: *x' следует за x* и пишут $x' \succ x$.

Понятие конечного упорядоченного множества совпадает с понятием конечной последовательности, состоящей из различных элементов (откуда, между прочим, следует, что множество всех конечных упорядоченных множеств, составленных из элементов данного счётного множества, счётно).

Простейшими примерами бесконечных упорядоченных множеств являются множество всех целых чисел и множество всех рациональных чисел; и в том и в другом множестве элемент x считается предшествующим элементу x', если $x < x'$; этот порядок во множестве рациональных, в частности, целых чисел называется *«естественным»*.

Множество всех действительных чисел (числовая прямая) также может служить примером упорядоченного множества.

Важно с самого начала заметить, что одно и то же множество можно упорядочить многими различными способами, так что получатся различные упорядоченные множества. Так, например, натуральные числа можно упорядочить «естественным образом», так что получится последовательность

$$1, 2, 3, 4, \ldots;$$

но можно упорядочить по возрастанию отдельно все нечётные числа и отдельно все чётные и считать всякое нечётное число предшествующим всякому чётному. Получим упорядоченное множество

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ \ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$$

Можно также занумеровать каким-нибудь способом все рациональные числа в последовательность

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots,$$

а для двух натуральных чисел n, n' положить $n \prec n'$, если

$$r_n < r_{n'}.$$

Определение 6. Пусть a и b — два элемента упорядоченного множества X. Если $a \prec x \prec b$, то говорим, что элемент $x \in X$ лежит *между* элементами a и b. Множество всех элементов x, лежащих между элементами a и b, называется *интервалом* $(a;\ b)$ упорядоченного множества X. Если к интервалу $(a;\ b)$ прибавить оба его «конца», т. е. элементы a и b, то получим *сегмент* $[a;\ b]$. В применении к числовой прямой получаем известные из элементов анализа понятия интервала (промежутка) и сегмента (отрезка) действительных чисел *).

Упорядоченное множество может содержать пустые интервалы. Так, например, в упорядоченном множестве всех натуральных чисел все интервалы вида $(n;\ n+1)$ пусты.

Элементы x и x' упорядоченного множества X называются *соседними*, если интервал $(x;\ x')$ пуст.

Если элемент a упорядоченного множества X таков, что для всякого $x \in X$, $x \neq a$ имеем $a \prec x$, то говорим, что a — *первый* (или *наименьший*) элемент упорядоченного множества X. Если, наоборот, для всех $x \in X$, $x \neq a$ имеем $x \prec a$, то a называется *последним* (или *наибольшим*) элементом упорядоченного множества X. Очевидно,

---

*) Прибавляя к интервалу $(a;\ b)$ только один из его концов, получим полуинтервалы $[a;\ b) = a \cup (a;\ b)$ и $(a;\ b] = (a;\ b) \cup b$.

во всяком упорядоченном множестве имеется не более одного первого и не более одного последнего элемента. В любом сегменте $[a; b]$ упорядоченного множества X (в частности, в любом сегменте числовой прямой) элемент a является первым, а элемент b последним. В интервале $(a; b)$ числовой прямой нет ни первого, ни последнего элемента. Во множестве всех неотрицательных действительных (соотв. рациональных, соотв. целых) чисел нуль есть первый элемент, а последнего элемента нет. Во множестве всех неположительных чисел нуль есть последний элемент.

Определение 7. Взаимно однозначное отображение f упорядоченного множества X на упорядоченное множество Y называется *соответствием подобия* или *подобным соответствием*, если оно сохраняет порядок (т. е. если из $x \prec x'$ в X всегда следует, что $f(x) \prec f(x')$ в Y).

Два упорядоченных множества называются *подобными* (или *одинаково упорядоченными*, или имеющими тот же *порядковый тип*), если одно из них можно подобно отобразить на другое.

Примеры подобных упорядоченных множеств.

1. Любые два конечных упорядоченных множества X и Y, состоящие из одного и того же числа s элементов, подобны между собой. В самом деле, выпишем все элементы каждого из множеств X и Y в том порядке, который дан в этих множествах:

$$x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_s,$$
$$y_1 \prec y_2 \prec \ldots \prec y_s.$$

Ставя в соответствие элементу x_i элемент y_i, получим, очевидно, подобное соответствие между X и Y.

2. Указанное в § 3 (пример 4, черт. 1) взаимно однозначное соответствие между всей числовой прямой и её интервалом $(-1; 1)$ является соответствием подобия. Линейная подстановка $y = \frac{x-a}{b-a}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между интервалами $a < x < b$

и $0 < y < 1$ числовой прямой. Итак, все интервалы числовой прямой подобны между собою и подобны всей числовой прямой. Точно так же подобны между собою и все сегменты числовой прямой.

Весьма важным является следующее замечание. В определении 7 два подобных между собою упорядоченных множества названы множествами одного и того же порядкового типа. Таким образом *понятие порядкового типа получается путём абстракции из понятия класса подобных между собою упорядоченных множеств* так же, как понятие мощности (или «количественного» типа множества) получилось путём абстракции от понятия класса эквивалентных между собою множеств.

Замечание 2. Класс упорядоченных множеств, подобных данному, так же как и класс множеств, эквивалентных (в смысле мощности) данному, нельзя рассматривать как логически законченное образование, как множество, все элементы которого действительно даны. В самом деле, нельзя мыслить себе совокупность **всех** вообще множеств, эквивалентных или подобных данному, хотя бы уже потому, что совершенно необозримой является совокупность всех предметов, которые вообще могут быть элементами каких бы то ни было множеств. Когда в математике говорят о множестве всех предметов, обладающих каким-то свойством, то естественно требовать, чтобы заранее было дано какое-то вполне определённое множество, элементами которого и являются рассматриваемые предметы; иначе легко придти к таким не только бессодержательным, но и противоречивым понятиям, как, например, понятие «множества всех множеств», из существования которого можно сделать любой нелепый вывод (множество всех множеств должно было бы содержать себя самого как элемент, содержать в качестве подмножества множество всех своих подмножеств и т. д.). С другой стороны, должная осторожность в пользовании словом «все» в только что приведённом смысле (т. е. применение этого слова лишь к элементам заранее данных множеств), повидимому (насколько можно судить по опыту истории теории множеств), позволяет набежать так называемых «парадоксов» этой теории.

Очевидно, два подобных между собой упорядоченых множества и подавно эквивалентны между собою, т.е. имеют одну и ту же мощность. Поэтому можно говорить о *мощности данного порядкового типа*, понимая под этим мощность любого множества этого типа. Так как два конечных упорядоченных множества подобны между собою тогда, когда они состоят из одного и того же числа элементов, то порядковые типы конечных упорядоченных множеств находятся во взаимно однозначном соответствии с их количественными числами (мощностями) и могут быть отождествлены с этими последними. Так в арифметике всегда и делается: натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5,... выражают в одно и то же время как количество элементов («мощность») конечных множеств, так и порядковый тип конечных упорядоченных множеств. Совершенно иначе обстоит дело даже с простейшими бесконечными множествами, а именно, со счётными множествами: все счётные множества по самому своему определению имеют одну и ту же мощность [мощность множества всех натуральных чисел, обозначаемую через $\aleph_0$*)]. Между тем в главе 3 будет доказано, что число различных порядковых типов счётных упорядоченных множеств не только конечно, но даже несчётно.

Упорядоченным множествам посвящена третья глава этой книги. Здесь же мы ограничимся сделанными элементарными замечаниями.

§ 6. О сравнении мощностей

Уже при самом определении мощности мы говорили о том, что понятие мощности является—в случае бесконечных множеств—обобщением понятия количества элементов конечного множества. Однако одно из основных свойств количества заключается в том, что два количества либо равны, либо одно из них больше другого. Поэтому естественно возникает вопрос о сравнимости мощностей.

Пусть даны два множества A и B. Логически возможны следующие случаи:

1. Существует взаимно однозначное соответствие между A и B.

2. Существует взаимно однозначное соответствие между одним множеством, например A, и собственною частью другого множества, B, и в то же время нет взаимно одно-

*) $\aleph$ есть первая буква древнееврейского алфавита, называемая «алеф»; выражение $\aleph_0$ читается «алеф-нуль».

значного соответствия между множеством B и частью множества A.

3. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и собственной частью множества B, а также взаимно однозначное соответствие между множеством B и собственной частью множества A.

4. Не существует ни взаимно однозначного соответствия между A и частью B, ни взаимно однозначного соответствия между B и частью A.

Если A и B—конечные множества, то третий и четвёртый случаи невозможны. В самом деле, если эти множества состоят из одного и того же числа элементов, то осуществляется первый случай, а если из разного—то второй.

В главе 3, § 6 будет доказано, что четвёртый случай невозможен также и в применении к бесконечным множествам. Однако доказательство это опирается на аксиому (так называемую аксиому Цермѐло (Zermelo)), вопрос о законности применения которой в математических рассуждениях не все математики считают окончательно решённым.

Что касается третьего случая, то для бесконечных множеств он может осуществляться; например, если A и B — счётные множества, то для них одновременно осуществляются и первый и третий случаи. Мы сейчас докажем, что из выполнения третьего случая всегда следует выполнение первого. Для бесконечных множеств, как легко выводится из теоремы 6, всегда из первого случая следует третий.

Итак, переходим к доказательству следующего предложения:

Т е о р е м а 13 (т е о р е м а К а н т о р а - Б е р н ш т е й н а). *Если из двух множеств каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собою.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A эквивалентно множеству $B_1 \subseteq B$ и в то же время B эквивалентно множеству $A_1 \subseteq A$.

В силу взаимно однозначного соответствия, существующего, по предположению, между B и A_1, множеству B_1

соответствует некоторое подмножество (очевидно, собственное) A_2 множества A_1. Итак:

$$\left.\begin{array}{l} A \supset A_1 \supset A_2, \\ A \text{ эквивалентно } A_2, \\ B \text{ эквивалентно } A_1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Если мы докажем, что в условиях (1) множество A_1 эквивалентно A (и A_2), то будет доказана и теорема Кантора-Бернштейна.

Рассмотрим какое-нибудь взаимно однозначное отображение f множества A на множество A_2. При отображении f

$$\begin{array}{llllll} A & \text{отображается} & \text{на} & & A_2, \\ A_1 \subset A & » & » & \text{некоторое} & A_3 \subset A_2, \\ A_2 \subset A_1 & » & » & » & A_4 \subset A_3, \\ A_3 \subset A_2 & » & » & » & A_5 \subset A_4 \end{array}$$

и т. д. до бесконечности.

В силу того же взаимно однозначного отображения f, очевидно,

$$\begin{array}{llll} A \setminus A_1 & \text{отображается} & \text{на} & A_2 \setminus A_3, \\ A_1 \setminus A_2 & » & » & A_3 \setminus A_4, \\ A_2 \setminus A_3 & » & » & A_4 \setminus A_5, \\ A_3 \setminus A_4 & » & » & A_5 \setminus A_6, \\ A_4 \setminus A_5 & » & » & A_6 \setminus A_7, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \end{array}$$

откуда следует эквивалентность множеств

$$\left.\begin{array}{l} (A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots, \\ (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \dots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Положим теперь

$$D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Тогда легко проверяются тождества

$$\left.\begin{aligned} A &= D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \\ &\qquad \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots, \\ A_1 &= D \cup \qquad\qquad (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \\ &\qquad \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые можно, очевидно, записать и так:

$$\left.\begin{aligned} A &= [D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots] \cup \\ &\quad \cup [(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots], \\ A_1 &= [D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots] \cup \\ &\quad \cup [(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Но в правых частях обоих этих равенств в первой квадратной скобке заключено одно и то же множество, тогда как во второй квадратной скобке заключены эквивалентные множества (2); устанавливая между этими двумя множествами (2) взаимно однозначное соответствие и заставляя соответствовать себе самому каждый элемент множества

$$D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots,$$

мы получим взаимно однозначное соответствие между множествами A и A_1, что и требовалось доказать.

После того, как мы докажем в главе 3 невозможность четвёртого случая, мы сможем сказать, что для двух множеств A и B могут осуществиться лишь следующие две возможности*): либо множества A и B эквивалентны (имеют одну и ту же мощность), либо одно из них, например A, эквивалентно собственной части другого, B, тогда как множество B уже не эквивалентно никакой части множества A.

---

*) Даже те математики, которые не считают убедительным данное в главе 3 доказательство невозможности четвёртого случая, согласны с тем, что он не может встретиться ни в каком конкретном примере.

Во втором случае мы говорим, что мощность множества A меньше мощности множества B (или что мощность множества B больше мощности множества A).

Все предыдущие рассуждения о мощности лишь в том случае могут претендовать на реальный интерес, если существуют различные бесконечные мощности. Сейчас мы увидим, что это действительно так: мы докажем, что для каждого множества M существует множество, мощность которого больше мощности множества M.

Мы докажем даже более точное предложение:

Теорема 14. *Пусть X и Y — два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех различных отображений множества X в множество Y имеет мощность, бо́льшую, чем мощность множества X.*

При этом мы, естественно, считаем два отображения f_1 и f_2 множества X в множество Y различными, если по крайней мере для одного элемента $x \in X$ элементы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ множества Y различны между собою.

Доказательство. Обозначим через Y^X множество всех отображений множества X в множество Y. В соответствии с определением неравенства мощностей мы должны доказать два утверждения:

1. Существует взаимно однозначное отображение множества X на некоторое подмножество множества Y^X.

2. Не существует взаимно однозначного отображения множества X на всё множество Y^X.

Для доказательства первого утверждения выберем в множестве Y два каких-нибудь различных элемента y' и y'' и для каждого элемента x_0 множества X построим отображение f_{x_0} множества X в множество Y следующим способом: образ данного элемента x_0 при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x_0) = y'$, а образ всякого отличного от x_0 элемента $x \in X$ при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x) = y''$. Различным элементам x_1, x_2 множества X соответствуют различные отображения; в самом деле,

$$f_{x_1}(x_1) = y',$$
$$f_{x_2}(x_1) = y''.$$

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X и частью множества Y^X.

Докажем теперь, что не существует никакого взаимно однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X.

Предположим, что такое соответствие существует, и обозначим через f^ξ тот элемент множества Y^X, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ множества X. Искомое противоречие мы получим, если найдём элемент f множества Y^X, отличающийся от всех f_ξ.

Такой элемент f, т. е. такое отображение множества X в множество Y, мы построим следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент ξ множества X; образ этого элемента при отображении f^ξ есть элемент $f^\xi(\xi)$ множества Y. Определим теперь $f(\xi)$, положив $f(\xi)=\eta$, где η — произвольный элемент множества Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от элемента $f^\xi(\xi)$ (это условие всегда выполнимо, так как, по предположению, множество Y содержит по крайней мере два элемента).

Мы утверждаем, что отображение f отлично от всех отображений f^ξ. В самом деле, если бы f совпадало с некоторым определённым f^ξ, то, в частности, для элемента $\xi \in X$ мы имели бы

$$f(\xi)=f^\xi(\xi),$$

вопреки определению отображения f. Теорема этим доказана.

Замечание 1. Только что изложенная теорема, принадлежащая к числу замечательнейших предложений теории множеств, доказана, и притом приведённым здесь методом, основателем теории множеств Кантором. Самый этот метод доказательства известен под названием *канторова диагонального процесса*.

Рассмотрим различные частные случаи теоремы Кантора.

Прежде всего, пусть множество Y состоит из двух элементов, положим из элементов 0 и 1. Тогда каждому отображению f множества X в множество Y соответствует разбиение множества X на два подмножества без общих элементов: на подмножество X_0^f, состоящее из всех тех элементов $x \in X$, для которых $f(x)=0$, и на подмножество X_1^f, состоящее из остальных элементов множества X (т. е. из тех $x \in X$, для которых $f(x)=1$). Сосредоточив своё внимание на подмножествах X_0^f, мы можем сказать: каждому отображению f множества X в множество Y, состоящее из двух элементов 0 и 1, соответствует определённое подмножество X_0 множества X (а именно, подмножество X_0^f). При этом каждое подмножество X_0 множества X поставлено в соответствие вполне определённому отображению множества X в множество Y (состоящее из двух элементов 0 и 1), именно, отображению f, определяемому условием $f(x)=0$, если $x \in X_0$, $f(x)=1$, если $x \in X \setminus X_0$. Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств множества X и множеством всех отображений множества X в множество, состоящее из двух элементов 0 и 1*). Так как это множество отображений имеет мощность, бо́льшую, чем множество X, то доказана

Т е о р е м а 15. *Множество всех подмножеств произвольного непустого множества X имеет мощность, бо́льшую, чем мощность множества X.*

З а м е ч а н и е 2. Число всех отображений конечного множества X в конечное множество Y равно, как нетрудно доказать, b^a, где a — число элементов множества X, а b — число элементов множества Y. В частности, число всех отображений конечного множества X в множество, состоящее из двух элементов (или число всех подмножеств конечного множества X), равно 2^a. Поэтому и в случае бесконечных множеств мощность множества отображений X в Y обозначается через b^a, где a и b суть, соответственно, мощности множеств X и Y. В частности, мощность множества всех подмножеств множества X обозначается через 2^a, где a — мощность множества X. Эти обозначения логически включаются в общую теорию дей-

*) При этом соответствии двум несобственным подмножествам множества X отвечают два отображения, из которых одно отображает всё множество X на элемент 1, а другое — на элемент 0.

ствий над мощностями, где рассматривается не только возведение в степень, но и общее действие умножения мощностей (при любой мощности множества сомножителей), а также более простое действие сложения мощностей. См. об этом главу 3, § 6.

Рассмотрим множество всех отображений множества N всех натуральных чисел в множество, состоящее из двух элементов 0 и 1. Всякое такое отображение, ставя каждому натуральному числу n в соответствие число i_n, равное 0 или 1, приводит к построению бесконечной последовательности

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots,\ i_n = {}^{0}_{1}, \tag{4}$$

и, обратно, всякая такая последовательность определяет отображение f, где $f(n) = 0$ или 1. Итак, множество последовательностей (4) имеет ту же мощность, что и множество всех подмножеств натурального ряда.

Обозначив (как было сделано выше) мощность счётных множеств через $\aleph_0$, мы можем сказать, что мощность множества всех последовательностей (4) есть $2^{\aleph_0}$.

Заметим, наконец, что если перед последовательностью (4) поставить цифру 0 и запятую, то получим бесконечную двоичную дробь. Итак, множество всех бесконечных двоичных дробей эквивалентно множеству всех подмножеств натурального ряда и имеет поэтому мощность $2^{\aleph_0}$.

Определение 8. Мощность $2^{\aleph_0}$ называется *мощностью континуума* и обозначается через $\mathfrak{c}$; она—несчётна ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$).

Мы встретимся с этой мощностью в конце главы 2 (§ 4).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Дедекиндовское определение иррационального числа

Рассмотрим множество всех рациональных чисел. Обозначим это множество через R_0.

Оно есть упорядоченное множество без пустых интервалов (каковы бы ни были два различных рациональных числа r' и r'', между r' и r'' существует бесконечно много рациональных чисел r, например, $r_1 = \frac{1}{2}(r' + r'')$, $r_2 = \frac{1}{2}(r' + r_1)$, $r_3 = \frac{1}{2}(r' + r_2), \ldots$).

После этого предварительного замечания перейдём к изложению дедекиндовского определения иррационального числа.

Назовём *сечением* упорядоченного множества X всякое разбиение его на два непустых непересекающихся подмножества A и B такие, что для любых элементов $x \in A$, $y \in B$ имеем $x < y$.

Множество A называется нижним (или левым), а множество B—верхним (или правым) классом.

В этом параграфе мы будем рассматривать только сечения в (*естественно* *) упорядоченном) множестве всех рациональных чисел.

Примеры сечений.

1. Если r есть произвольное рациональное число, то, принимая за множество A множество всех рациональных $a \leqslant r$, а за B—множество всех остальных рациональных чисел, получаем сечение.

---

*) То-есть по величине (см. стр. 32).

Очевидно, r есть наибольшее число среди всех чисел, принадлежащих к нижнему классу A.

2. Пусть r — произвольное рациональное число; относим к классу A все рациональные числа, меньшие, чем r, а к классу B — все остальные рациональные числа. Таким образом опять установлено сечение, причём r есть наименьшее число среди всех чисел класса B.

3. Отнесём к классу A все отрицательные рациональные числа, число 0 и все положительные рациональные числа, квадрат которых меньше 2. Отнесём к классу B все остальные рациональные числа. Так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 *), то квадраты всех рациональных чисел, принадлежащих к B, больше 2.

Докажем, что в A нет наибольшего, а в B — наименьшего числа.

Пусть r — произвольное число из класса A, так что $r^2 < 2$. Тогда $r + \frac{1}{n}$ при достаточно большом n также будет содержаться в этом классе. Действительно, предполагая, что $n > 1$, имеем:

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < r^2 + \frac{2r+1}{n},$$

и для того, чтобы правая часть была меньше, чем 2, достаточно взять $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$. Таким образом, каково бы ни было $r \in A$, при достаточно большом n также $r + \frac{1}{n} \in A$, т. е. в A нет наибольшего числа.

---

*) Так как $r^2 = |r|^2$, то достаточно показать, что не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 2. Целого числа такого наверное не существует, так как $1^2 = 1$, а для $n \geqslant 2$ будет $n^2 \geqslant 4$. Пусть существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Тогда $p^2 = 2q^2$ есть чётное число. Так как квадрат нечётного числа есть нечётное число, то p есть чётное число, $p = 2p'$ (где p' — целое), т. е. $4p'^2 = 2q^2$ или $q^2 = 2p'^2$, значит, q — чётное число, и дробь $\frac{p}{q}$ сократима. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Подобным же образом докажем, что если $r \in B$, так что $r^2 > 2$, то и $r - \frac{1}{n} \in B$ при достаточно большом n. Действительно,

$$\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n},$$

и для того, чтобы правая часть была больше, чем 2, достаточно взять $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$. Таким образом, в B нет наименьшего числа.

Теорема 1. *Для всякого сечения (A, B) в множестве всех рациональных чисел имеются лишь следующие три возможности:*

1) *либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r (тогда в верхнем классе нет наименьшего числа);*

2) *либо в верхнем классе B имеется наименьшее число r (тогда в нижнем классе нет наибольшего числа);*

3) *либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего, ни в верхнем классе нет наименьшего числа.*

Доказательство. Четвёртый логически возможный случай: в A есть наибольший элемент a и в B есть наименьший элемент b — не может осуществиться, так как тогда между числами a и b не было бы никакого рационального числа.

Определение 1. В случаях 1) и 2) говорят, что сечение (A, B) определяет рациональное число r; в случае 3) говорят, что сечение определяет некоторое *иррациональное число*.

Иногда говорят, что иррациональное число есть сечение. Однако, в других построениях теории действительных чисел по существу те же самые иррациональные числа (например $\sqrt{2}$ или π) связываются с совсем другими образованиями, например, бесконечными десятичными дробями; при этом иногда тоже говорят, что иррациональное число есть бесконечная (непериодическая) десятичная дробь. Мы предпочитаем в обоих случаях говорить, что иррациональное число лишь определяется сечением или бесконечной десятичной дробью и т. п.

Введём определения понятий «больше» и «меньше» в применении к иррациональным числам.

Пусть у нас есть иррациональное число ξ. Это означает, что у нас есть сечение (A^ξ, B^ξ) в множестве всех рациональных чисел. Введём следующее определение: всякое иррациональное число ξ больше всякого $a \in A^\xi$ и меньше всякого $b \in B^\xi$.

Определение 2. Иррациональное число ξ называется *положительным*, если $\xi > 0$, и *отрицательным*, если $\xi < 0$.

Предположим, мы имеем два иррациональных числа ξ и η, определённых сечениями (A_ξ, B_ξ) и (A_η, B_η). Возможны три случая:

1. $A_\xi = A_\eta$; тогда $B_\xi = B_\eta$ и $\xi = \eta$.

2. Имеется число $a \in A_\xi$, не принадлежащее к A_η (т. е. $a \in A_\xi \cap B_\eta$). Тогда*) $A_\eta \subset A_\xi$, и мы полагаем $\eta < \xi$.

3. Имеется число $a \in A_\eta$, не принадлежащее к A_ξ (т. е. $a \in A_\eta \cap B_\xi$). Тогда $A_\xi \subset A_\eta$, и мы полагаем $\xi < \eta$.

Легко проверить, что эти определения превращают множество R^1 всех *действительных* (т. е. рациональных и иррациональных) чисел в упорядоченное множество.

Теорема 2. *Среди действительных чисел нет наибольшего и нет наименьшего числа.*

Доказательство. Пусть ξ есть наибольшее число; ξ не может быть рационально, так как $\xi + 1 > \xi$. Если ξ иррационально, то пусть (A, B) есть определяющее ξ сечение и $b \in B$; тогда $b > \xi$. Аналогично доказывается, что нет наименьшего действительного числа.

Теорема 3. *Каковы бы ни были два различных действительных числа x и $y \neq x$, можно найти бесконечно много рациональных чисел, заключённых между ними.*

Достаточно показать, что между каждыми двумя действительными числами существует хотя бы одно рациональное число.

Теорема верна, если x и y оба рациональны.

Пусть одно из них, например x, иррационально, $x = (A, B)$, а другое рационально. Если $y > x$, то $y \in B$

---

*) Всякое $x \in A_\eta$, будучи меньше чем a, содержится в A_ξ, т. е. $A_\eta \subset A_\xi$.

и в B нет наименьшего числа. Поэтому в B имеется (рациональное) число y', меньшее чем y и большее чем x. Если $y < x$, то $y \in A$ и в A имеется y', большее чем y и меньшее чем x.

Пусть, наконец, оба числа x и y иррациональны. Так как они различны, то существует хоть одно рациональное число, принадлежащее к нижнему классу одного сечения и к верхнему классу другого сечения и, следовательно, меньшее, чем одно из этих иррациональных чисел, и большее, чем другое.

Теорема 4. *Пусть дано иррациональное число $\xi = (A, B)$. Каково бы ни было положительное число ε, можно найти два рациональных числа a и b, удовлетворяющих неравенствам $a < \xi < b$ и $b - a < \varepsilon$.*

Достаточно доказать теорему для рационального ε. В самом деле, если бы ε было иррационально, то достаточно было бы взять положительное рациональное число $\varepsilon' < \varepsilon$ (такое ε' существует на основании предыдущей теоремы). Итак, пусть ε рационально. Возьмём произвольно $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ и построим ряд рациональных чисел:

$$a_0,\ a_1 = a_0 + \frac{\varepsilon}{2},\ \ldots,\ a_n = a_0 + n\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Возьмём $n > \frac{2(b_0 - a_0)}{\varepsilon}$; тогда $a_n > b_0$, $a_n \in B$. Пусть a_k, $k \geqslant 1$ есть первое среди чисел (1), принадлежащее к B. Тогда $a_{k-1} \in A$, $a_k \in B$, $0 < a_k - a_{k-1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

§ 2. Сечения в множестве действительных чисел. Верхняя и нижняя грани.

Теорема 5. *Какаво бы ни было сечение (A, B) в множестве всех действительных чисел, всегда либо существует наибольшее число в A, либо наименьшее в B, причём одна из этих возможностей исключает другую.*

Доказательство. Обозначим через A', соотв. B', множество рациональных чисел, принадлежащих к A, соотв. B. Таким образом имеем сечение (A', B') множества рациональных чисел. Возможны три случая:

1) либо есть рациональное число, наибольшее в A';
2) » » » » , наименьшее в B';
3) либо в A' нет наибольшего, а в B' нет наименьшего числа.

Пусть ξ есть наибольшее число в A'. Докажем, что ξ есть наибольшее число и в A. Действительно, в противном случае в A существовало бы некоторое $a > \xi$; взяв рациональное a' между ξ и a, получили бы противоречие, так как $a' \in A'$, $a' > \xi$.

Совершенно аналогично доказывается, что число, наименьшее в B', является наименьшим и в B.

Остаётся рассмотреть третий случай. В этом случае сечение (A', B') определяет иррациональное число ξ. Так как каждое действительное число содержится либо в A, либо в B, то и ξ содержится в одном из двух этих множеств. Пусть, например, $\xi \in A$. Если бы в A существовало $a > \xi$, то беря рациональное a' между ξ и a, имели бы $a' \in A'$ и значит $a' < \xi$ (вопреки выбору числа a').

Если бы $\xi \in B$, то совершенно так же мы доказали бы, что ξ есть наименьшее в B. Наконец, если бы в A было наибольшее, а в B — наименьшее число, то получили бы противоречие с теоремой 3.

Замечание о геометрическом изображении действительных чисел. Уже в элементарной алгебре, исходя из наивного представления о прямой линии, показывается, как, взяв на прямой две точки, — нулевую точку (или «начало координат») и единичную, — можно нанести на этой прямой сетку так называемых рациональных точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами. Этот процесс построения множества всех рациональных точек прямой может быть строго обоснован, т. е. выведен из системы аксиом элементарной геометрии, в рассмотрение которых мы здесь входить не будем. Эти же аксиомы позволяют поставить остальные (т. е. не рациональные) точки прямой во взаимно однозначное соответствие с иррациональными числами, так что в результате устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел. Установив раз навсегда такое соответствие, мы говорим о «числовой прямой». Впрочем, читатель может ограничиться тем, чтобы попросту называть действительные числа точками числовой прямой и в рассуждениях о них пользоваться геометрическим языком. Так, например, вместо того, чтобы говорить, что действительное число a меньше действительного числа b, мы будем часто говорить, что точка a лежит левее точки b, и т. п.

Определение 3. Множество M, состоящее из действительных чисел, называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если существует такое число c, что все элементы этого множества меньше (соотв. больше), чем c. Множество называется *ограниченным*, если оно одновременно ограничено и сверху и снизу.

Пусть мы имеем непустое множество M, ограниченное сверху. Обозначим через B множество всех точек числовой прямой, лежащих вправо от всех точек, образующих множество M, и через A множество всех действительных чисел, не вошедших в B. Очевидно, A состоит из всех тех точек x, для каждой из которых имеется хоть одна точка ξ множества M, удовлетворяющая условию $x \leqslant \xi$; следовательно, $M \subseteq A$.

Пусть a — произвольная точка множества A, b — произвольная точка множества B; так как $a \in A$, то существует точка $\xi \in M$ такая, что $a \leqslant \xi$; так как $b \in B$, то $\xi < b$. Следовательно, $a < b$, т. е. (A, B) есть сечение в множестве всех действительных чисел; это сечение на основании теоремы 5 определяет действительное число β_M, которое есть либо наибольшее в A, либо наименьшее в B.

Докажем, что *число β_M есть наименьшее из всех действительных чисел β, удовлетворяющих условию*:

$$\beta \geqslant \xi \text{ для всех } \xi \in M. \tag{1}$$

В самом деле, β_M есть либо наибольшее число в A, либо наименьшее в B. И в том и в другом случаях β_M не может быть меньше никакого числа $\xi \in A$, следовательно, и подавно не может быть меньше никакого $\xi \in M$.

С другой стороны, для всякого $a < \beta_M$ можно найти a' между a и β_M; так как $a' \in A$, то существует такое $\xi \in M$, что $a' \leqslant \xi$, значит, $a < \xi$. Таким образом β_M есть действительно наименьшее число среди всех чисел β, удовлетворяющих условию (1). Число β_M однозначно определено для всякого непустого ограниченного сверху множества M, и называется *верхнею гранью* множества M.

Верхнюю грань множества M мы будем обозначать так: $\sup M$ (читается: supremum, ударение на *e*).

Верхняя грань множества в одних случаях принадлежит к множеству, а в других—нет, как видно из примеров:

1. Множество всех целых отрицательных чисел имеет своею верхнею гранью число -1, принадлежащее к этому множеству.

2. Множество всех отрицательных чисел имеет своею верхнею гранью число 0, не принадлежащее к этому множеству.

3. Интервал $(0; 1)$ имеет верхнею гранью число 1, не принадлежащее к нему.

4. Сегмент $[0; 1]$ имеет верхнею гранью число 1, принадлежащее к нему.

5. Множество M, состоящее из всех рациональных чисел, меньших единицы, имеет верхнею гранью число 1, не принадлежащее к нему.

Пусть теперь дано непустое множество M, ограниченное снизу. Отнесём к классу A все числа, которые меньше всех элементов множества M, к классу B — все остальные действительные числа. Таким образом получаем сечение в множестве всех действительных чисел, определяющее некоторое число α_M. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые были только что проведены, мы убеждаемся в том, что α_M *есть наибольшее среди всех чисел* α, *удовлетворяющих условию*: $\alpha \leqslant \xi$, *каково бы ни было* $\xi \in M$. Число α_M называется *нижней гранью* множества M и обозначается $\inf M$ (читается: infimum, ударение на первом *i*).

Из предыдущих определений следует:

Теорема 6. *Нет ни одной точки множества M, расположенной слева от $\alpha = \inf M$, но всякий полусегмент вида $[\alpha; b)$ содержит по крайней мере одну точку $\xi \in M$.*

Теорема 7. *Нет ни одной точки множества M, расположенной справа от $\beta = \sup M$, но всякий полусегмент вида $(a; \beta]$ содержит хоть одну точку $\xi \in M$.*

Если множество M ограничено, то оно имеет и нижнюю грань α и верхнюю грань β. Сегмент $[\alpha; \beta]$ содержит всё множество M и есть наименьший сегмент, содержащий это множество (другими словами, никакой сегмент, составляющий собственную часть сегмента $[\alpha; \beta]$, уже не содержит всех точек множества M).

Очевидно, если в множестве M есть наибольшее (наименьшее) число γ, то γ есть верхняя (нижняя) грань множества M.

Теорема 8. *Если M ограничено сверху и $M_1 \subseteq M$, то* $\sup M_1 \leqslant \sup M$.

В самом деле, пусть (A, B) есть сечение, определяющее $\sup M$, а (A_1, B_1) — соответствующее сечение для $\sup M_1$. Из определений классов B и B_1 следует, что $B_1 \supseteq B$ и, значит, $\sup M_1 \leqslant \sup M$.

Совершенно так же доказывается

Теорема 9. *Если M ограничено снизу и $M_1 \subseteq M$, то*

$$\inf M_1 \geqslant \inf M.$$

Следствие. *Если M состоит из чисел, меньших или равных a* (где a — произвольное действительное число), *то* $\sup M \leqslant a$.

В самом деле, множество M является частью множества A всех чисел $x \leqslant a$ и по теореме 8 $\sup M \leqslant \sup A = a$.

Аналогично, *если M состоит из чисел, бо́льших или равных a, то* $\inf M \geqslant a$.

Определение 4. *Расстоянием двух рациональных точек a и $b \geqslant a$ на прямой называется число $b - a$.*

Пусть имеем два действительных числа a и $b > a$. Рассмотрим множество M, состоящее из рациональных чисел, являющихся расстояниями между какими-либо двумя рациональными точками сегмента $[a; b]$. Верхняя грань (очевидно, ограниченного) множества M называется *расстоянием между точками a и b* и обозначается $\rho(a, b)$; это же число называется *длиною* сегмента $[a; b]$ (и интервала $(a; b)$).

Докажем теперь следующую, во многих случаях полезную, теорему:

Теорема 10. *Пусть P и Q суть два таких непустых множества, что каждая точка множества P расположена левее, чем любая точка множества Q. Если, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ имеются две точки $x \in P$, $y \in Q$, расстояние между которыми меньше ε, то*

$$\sup P = \inf Q.$$

Доказательство. Прежде всего, множество P ограничено сверху, а Q — снизу. Пусть

$$\beta = \sup P, \quad \alpha = \inf Q.$$

Если бы было $\alpha < \beta$, то в $(\alpha; \beta]$ имелась бы точка $x \in P$, а в $[\alpha; x)$ — точка $y \in Q$, и вопреки предположению было бы $y < x$.

Итак, $\beta \leqslant \alpha$. Если бы было $\beta < \alpha$, то, взяв рациональные числа a, b так, чтобы $\alpha < a < b < \beta$, мы имели бы для любых $x \in P$, $y \in Q$ неравенство $\rho(x, y) > b - a$, вопреки предположению. Теорема доказана.

Из теоремы 10 вытекает

Следствие 1. *Пусть множества P и Q удовлетворяют условию теоремы 10 и пусть $\xi = \sup P = \inf Q$. Если $P_1 \subseteq P$ и $Q_1 \subseteq Q$ обладают тем свойством, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти две точки $x \in P_1$ и $y \in Q_1$, удовлетворяющие условию $\rho(x, y) < \varepsilon$, то $\sup P_1 = \inf Q_1 = \xi$.*

В самом деле, P_1 и Q_1 удовлетворяют условию теоремы 10, следовательно, $\sup P_1 = \inf Q_1 = \xi_1$. Но так как $P_1 \subseteq P$, $Q_1 \subseteq Q$, то (на основании теорем 8, 9)

$$\xi_1 \leqslant \xi, \quad \xi_1 \geqslant \xi,$$

т. е. $\xi_1 = \xi$.

Следствие 2. *Если (A, B) есть сечение в множестве всех рациональных (соотв. всех действительных) чисел и если ξ есть число, определяемое этими сечениями, то*

$$\xi = \sup A = \inf B.$$

В самом деле, пара множеств A и B удовлетворяет (на основании теоремы 4) всем условиям теоремы 10, так что $\sup A = \inf B = \xi'$. Так как ξ не меньше любого числа из A и не больше любого числа из B, то $\sup A \leqslant \xi \leqslant \inf B$ и значит $\xi = \xi'$.

Следствие 3. *Пусть имеем убывающую последовательность сегментов*

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \ldots, \quad \Delta_n = [a_n;\ b_n],$$

причём длина сегментов Δ_n неограниченно убывает при возрастании n.

Существует одна и только одна точка ξ, принадлежащая всем сегментам Δ_n.

В самом деле, множество P, состоящее из всех точек a_n, и множество Q, состоящее из всех точек b_n, очевидно, удовлетворяют всем условиям теоремы 10; поэтому

$$\sup P = \inf Q = \xi,$$

причём для любого n имеем $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, т. е. $\xi \in \Delta_n$. Если бы существовала вторая точка ξ', принадлежащая всем Δ_n, то длина Δ_n не могла бы неограниченно убывать, вопреки нашему условию.

§ 3. Действия над действительными числами

Применим теорему 10 к определению сложения и умножения действительных чисел.

Пусть даны два действительных числа x и y. Числа x и y определяют сечения (A_x, B_x) и (A_y, B_y) в множестве всех рациональных чисел, причём A_x (соотв. A_y) состоит из всех рациональных чисел $a_x \leqslant x$ (соотв. $a_y \leqslant y$); на основании теоремы 4 можно для всякого положительного $\varepsilon > 0$ найти такие числа $a_x \in A_x$, $b_x \in B_x$, соотв. $a_y \in A_y$, $b_y \in B_y$, что

$$0 < b_x - a_x < \varepsilon, \text{ соотв. } 0 < b_y - a_y < \varepsilon. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь множество A всех рациональных чисел вида $a_x + a_y$, где a_x, a_y — произвольные элементы из A_x, соотв. A_y; рассмотрим также множество B всех рациональных чисел вида $b_x + b_y$, где $b_x \in B_x$ и $b_y \in B_y$. Так как каждое a_x меньше каждого b_x, и каждое a_y меньше каждого b_y, то каждое $a_x + a_y$ меньше каждого $b_x + b_y$. Кроме того, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти $a = a_x + a_y \in A$ и $b = b_x + b_y \in B$ так, чтобы $b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{2}$ и $b_y - a_y < \frac{\varepsilon}{2}$ и, значит, $0 < b - a < \varepsilon$.

Множества A и B удовлетворяют, таким образом, всем условиям теоремы 10, так что $\sup A = \inf B = \xi$. Теперь определяем:

$$\xi = x + y.$$

Если x и y оба рациональны, то наше определение суммы $x + y$ превращается в обычное; в самом деле, по определению множества A число $x + y$ есть в этом случае наибольшее число в A.

Заметим, наконец, что если x — рациональное число, то $x + y$ есть верхняя грань множества всех рациональных чисел вида $x + a_y$, где a_y — любое рациональное число, не превосходящее y. Отсюда, в частности, следует, что $0 + y = y$.

Определённое таким образом сложение, очевидно, коммутативно:

$$x + y = y + x.$$

Для того чтобы доказать, что оно ассоциативно, т. е. что

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

рассмотрим следующие множества рациональных чисел:

A_1, состоящее из всех чисел вида $a_{x+y} + a_z$ (где $a_{x+y} \leqslant x + y$, $a_z \leqslant z$);
B_1, состоящее из всех $b_{x+y} + b_z$ (где $b_{x+y} > x + y$, $b_z > z$);
A_2, состоящее из всех $a_x + a_{y+z}$;
B_2, состоящее из всех $b_x + b_{y+z}$;
A_3, состоящее из всех $a_x + a_y + a_z$;
B_3, состоящее из всех $b_x + b_y + b_z$.

Очевидно

$$A_3 \subseteq A_1, \quad A_3 \subseteq A_2;$$
$$B_3 \subseteq B_1, \quad B_3 \subseteq B_2.$$

Так как любая пара множеств (A_i, B_i), $i = 1, 2, 3$ удовлетворяет условиям теоремы 10, то из следствия 1 этой теоремы вытекает, что

$$\sup A_3 = \inf B_3 = \sup A_1 = \inf B_1 = (x + y) + z,$$
$$\sup A_3 = \inf B_3 = \sup A_2 = \inf B_2 = x + (y + z),$$

т. е.

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы определить вычитание действительных чисел, нужно определить сначала для каждого действительного числа x число $-x$. Для этого рассмотрим множество B всех рациональных чисел $b \geqslant x$ и множество A всех рациональных чисел $a < x$. В A нет наибольшего числа; если же в B есть наименьшее число, то оно непременно совпадает с x, так как $x = \inf B$. Обозначим через $\overline{A}$ множество всех чисел $-b$; оставшиеся рациональные числа образуют множество $\overline{B}$, состоящее из всех чисел $-a$; разбиение $(\overline{A}, \overline{B})$ есть сечение множества всех рациональных чисел.

Если в $\overline{A}$ есть наибольшее число y, то $-y = x$ (как наименьшее число в B); тогда и x и $y = -x$ рациональны. Заметим, что в $\overline{B}$ нет наименьшего числа (так как в A нет наибольшего), поэтому, если в $\overline{A}$ нет наибольшего числа, то сечение $(\overline{A}, \overline{B})$ определяет иррациональное число, которое мы называем числом $-x$ (в этом случае в B нет наименьшего числа, и так как в A нет наибольшего, то и x иррационально). Если $x > 0$, то $0 \in A$, следовательно, $0 \in \overline{B}$, т. е. $-x < 0$, и обратно. Таким образом, если $x \neq 0$, то одно из двух чисел x и $-x$ положительно, другое отрицательно; положительное из двух чисел x и $-x$ обозначается через $|x|$ и называется *абсолютной величиной* чисел x и $-x$.

Читателю предоставляется самому доказать, что из двух отрицательных чисел то больше, у которого абсолютная величина меньше.

Докажем, что $x + (-x) = 0$. В самом деле, по определению суммы, $x + (-x) = \sup A$, где A есть множество всех рациональных чисел вида $a + \overline{a}$, причём $a \leqslant x$, $\overline{a} \leqslant -x$.

Заметим прежде всего, что множество A не содержит никакого положительного числа. В самом деле, среди двух чисел x и $-x$ одно, пусть x, положительно, другое отрицательно, а потому $\overline{a}$ отрицательно и $|\overline{a}| \geqslant x$. Если a отрицательно или нуль, то $a + \overline{a}$ также отрицательно; если же a положительно, то так как в этом случае $a = |a|$, то $|a| \leqslant x = |x|$; следовательно, $|a| \leqslant |\overline{a}|$

и, значит, $a+\bar{a}$ отрицательно или нуль. Итак, $x+(-x)$ не может быть положительным числом.

Докажем, что $x+(-x)$ не может быть отрицательным.

В самом деле, если $\sup A<0$, то возьмём, во-первых, рациональное число r между $\sup A$ и 0, во-вторых, два таких рациональных числа r' и r'', чтобы

$$r'<x<r'', \quad r''-r'<|r|=-r.$$

Имеем $-r''<-x$; отсюда и из $r'<x$ следует, что $r'-r''=r'+(-r'')\in A$. С другой стороны, $r''-r'<-r$, значит, $r'-r''>r>\sup A$, что противоречит тому, что $r'-r''\in A$. Равенство $x+(-x)=0$ доказано.

Разностью двух действительных чисел x и y называется действительное число $x+(-y)$; оно обозначается через $x-y$.

Вычитание, определённое таким образом, есть действие, обратное сложению. В самом деле,

$$(x-y)+y=(x+(-y))+y=x+((-y)+y)=x+0=x.$$

Из приведённых свойств сложения, вычитания и умножения следуют, как известно, все излагаемые в элементарной алгебре правила, касающиеся этих действий.

Докажем, наконец, что абсолютная величина разности двух чисел x и y равна расстоянию между точками x и y.

Пусть $y<x$. Надо доказать, что $x-y=\rho(x,y)$. Для этого рассмотрим множества:

A: всех чисел $a_x+\bar{a}_y$, где a_x и $\bar{a}_y$ рациональны, $a_x\leqslant x$, $\bar{a}_y\leqslant -y$; и

D: всех чисел вида $a'_x-a'_y$, где a'_x и a'_y рациональны, $y\leqslant a'_y<a'_x\leqslant x$.

Так как элементы множества D могут быть записаны в виде $a'_x+\bar{a}'_y$, где $\bar{a}'_y=-a'_y$ удовлетворяет условию $-x<\bar{a}'_y\leqslant -y$, то ясно, что $\sup D=\sup A$. Но $\sup D=\rho(x,y)$, а $\sup A=x+(-y)=x-y$, что и требовалось доказать.

Умножение двух действительных чисел x и y мы сначала определяем в предположении, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Мы это делаем аналогично тому, как определяли в своё время сложение *): множество A определим как множество всех чисел вида $a_x a_y$, где a_x, a_y рациональны, $0 \leqslant a_x \leqslant x$; $0 \leqslant a_y \leqslant y$; множество B определим как множество всех чисел вида $b_x b_y$, где $b_x > x$ и $b_y > y$ рациональны. Пусть дано произвольное рациональное $\varepsilon > 0$. Пусть m есть натуральное число, большее, чем числа $x+1$, $y+1$, $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем a_x, b_x, a_y, b_y так, чтобы

$$0 < b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad 0 < b_y - a_y < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Тогда $a_x a_y \in A$, $b_x b_y \in B$, и так как

$$b_x < a_x + \frac{\varepsilon}{2m} < x + 1 < m,$$

то

$$0 < b_x b_y - a_x a_y = b_x (b_y - a_y) + a_y (b_x - a_x) <$$

$$< b_x \frac{\varepsilon}{2m} + a_y \frac{\varepsilon}{2m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а потому мы находимся вновь в условиях теоремы 10, и

$$\sup A = \inf B.$$

Число $\sup A = \inf B$ мы называем *произведением* xy данных действительных чисел x и y.

После того как действие умножения определено для неотрицательных чисел, мы распространяем его и на отрицательные, полагая, при $x > 0$, $y > 0$,

$$x(-y) = (-x)y = -(xy),$$

$$(-x)(-y) = xy.$$

*) При определении сложения неравенства $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, однако, не предполагались.

Доказательство основных свойств умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность по отношению к сложению), а также свойств $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, может быть предоставлено читателю. Далее, читателю предоставляется самому определить действие деления (как обратное умножению) по образцу того, как введено действие вычитания. При этом надо начать с непосредственного определения числа $\frac{1}{x}$ (сначала при $x > 0$), указав соответствующее сечение множества рациональных чисел, доказать потом, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, и определить, наконец, $\frac{x}{y}$ как $x \cdot \frac{1}{y}$ (при $y \neq 0$). Проведение всех относящихся сюда рассуждений будет хорошим упражнением.

Замечание о пополнении числовой прямой двумя «несобственными» точками $+\infty$ и $-\infty$. Иногда бывает удобно наряду с обычными точками числовой прямой (взаимно однозначно соответствующим действительным числам и отождествлёнными нами с этими последними) ввести ещё две новые «несобственные» точки, обозначаемые через $+\infty$ и $-\infty$. При этом эти две несобственные точки связываются с обычными точками следующими соотношениями:

1° для любого действительного числа x полагаем

$$-\infty < x < +\infty,$$

в соответствии с чем устанавливается и неравенство

$$-\infty < +\infty;$$

2° для любого действительного числа x

$$(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty,$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty,$$

$$-(+\infty) = -\infty, \quad -(-\infty) = +\infty,$$

в соответствии с чем для любого действительного x

$$x-(+\infty)=x+(-\infty)=-\infty,$$
$$x-(-\infty)=x+(+\infty)=+\infty;$$

3° для любого положительного числа x

$$x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=(+\infty)\cdot(+\infty)=$$
$$=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,$$
$$x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=(+\infty)\cdot(-\infty)=$$
$$=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Для отрицательного x полагаем

$$x\cdot(+\infty)=-(-x)\cdot(+\infty)=-\infty,$$

и т. д.

В отличие от этих правил действий, мы действия $+\infty+(-\infty)$, а также $(+\infty)\cdot 0$, $(-\infty)\cdot 0$ определять не будем, так как разумным образом их определить нельзя. Числовую прямую, пополненную точками $+\infty$ и $-\infty$, будем называть расширенной числовой прямой и обозначать через R^*.

§ 4. Разложение действительных чисел в двоичные дроби. Мощность континуума

Сегмент $[0;1]$ назовём сегментом нулевого ранга и обозначим через Δ. Сегменты $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2};1\right]$ назовём сегментами первого ранга и обозначим соответственно через Δ_0 и Δ_1. Каждый из сегментов первого ранга разделим пополам; получим четыре сегмента второго ранга

$$\Delta_{00}=\left[0;\frac{1}{4}\right],\quad \Delta_{01}=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right];\quad \Delta_{10}=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right],$$
$$\Delta_{11}=\left[\frac{3}{4};1\right].$$

Вообще, сегменты n-го ранга получаются от деления пополам сегментов $(n-1)$-го ранга, имеют длину $\frac{1}{2^n}$ и обозначаются через $\Delta_{i_1\ldots i_n}$, где $i_1,\ldots,i_n$ независимо друг от друга принимают значения 0 и 1; при этом

$\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}0}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}1}$ суть, соответственно, левая и правая половины сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}}$.

Пусть x — какое-нибудь неотрицательное действительное число. Если x — не целое, то оно является внутренней точкой одного и только одного сегмента вида $[k; k+1]$, где $k \geqslant 0$ — целое; число k обозначается через $[x]$ и называется *целой частью* x; тогда $x = k + x'$, где x' принадлежит интервалу $(0; 1)$. Рассмотрим сначала случай, когда x' не имеет вида $\frac{m}{2^n}$ (при целом m). Тогда x' принадлежит единственному сегменту первого ранга Δ_{i_1} единственному сегменту второго ранга $\Delta_{i_1 i_2} \subset \Delta_{i_1}$, вообще при любом n единственному сегменту n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Таким образом, однозначно определяется последовательность сегментов

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{1}$$

единственной общей точкой которых и является x'. Последовательность чисел

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n, \ldots, \tag{2}$$

из которых каждое есть 0 или 1, также определена однозначно и называется *последовательностью двоичных знаков* действительного числа x' и действительного числа $x = k + x'$; сами эти числа записываются в виде

$$x' = 0, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots; \quad x = k, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots, \tag{2'}$$

и записи эти называются *разложениями* соответствующих чисел в бесконечную двоичную дробь.

Пусть теперь $x' \in (0; 1)$ есть так называемое *двоично-рациональное число*, т. е. имеет вид

$$x' = \frac{m}{2^n}, \tag{3}$$

где дробь $\frac{m}{2^n}$ несократима и, следовательно, n в представлении (3) имеет наименьшее возможное значение. Тогда x' является общим концом двух сегментов Δ_* и $\Delta_{*'}$ ранга n, например, правым концом сегмента Δ_* и левым концом сегмента $\Delta_{*'}$ (здесь положено для краткости $* = i_1 \ldots i_{n-1}0$ и $*' = i_1 \ldots i_{n-1}1$). Тогда x' будет правым концом сегмента Δ_{*1} и левым концом сегмента $\Delta_{*'0}$, правым концом сегмента Δ_{*11} и левым концом сегмента $\Delta_{*'00}$ и т. д. Таким образом число x' определяет не одну, а две последовательности сегментов вида (1), а именно

$$\Delta_{i_1} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}} \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 0} \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 01} \supset \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 011} \supset \ldots$$

и

$$\Delta_{i_1} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}} \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 1} \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 10} \supset \supset \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} 100} \supset \ldots,$$

в соответствии с чем мы получим и две последовательности двоичных знаков числа x':

$$\begin{cases} i_1, \ldots, i_{n-1}, \ 0, 1, 1, 1, \ldots, \\ i_1, \ldots, i_{n-1}, 1, 0, 0, 0, \ldots, \end{cases} \tag{4}$$

из которых, начиная с ранга $n+1$, одна состоит из одних нулей, а вторая — из одних единиц. Числа x и x' имеют по два двоичных разложения.

Пусть, обратно, мы имеем последовательность

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n, \ldots; \quad i_n = 0 \text{ или } 1. \tag{2}$$

Ей соответствует последовательность сегментов (1) с единственной общей точкой x', и (2) есть последовательность двоичных знаков числа x'. Если мы имеем две различные последовательности вида (2), определяющие одно и то же действительное число x' сегмента $[0; 1]$, то эти две последовательности (будучи последовательностями двоичных знаков одного и того же $x' \in [0; 1]$), по доказанному, непременно имеют вид (4), а само число x' является двоично-рациональным. Отсюда следует:

Каждое действительное число $x \geqslant 0$ имеет либо лишь одно двоичное разложение

$$k, i_1 i_2 \ldots i_n \ldots, \tag{2'}$$

либо два двоичных разложения

$$k, i_1 \ldots i_{n-1} 0111 \ldots \text{ и } k, i_1 \ldots i_{n-1} 1000 \ldots, \tag{2''}$$

причём второй случай наступает тогда и только тогда, когда число x двоично-рационально, т. е. имеет вид

$x=\frac{m}{2^n}$ *при целых m и n. Обратно, всякое двоичное разложение определяет одно единственное неотрицательное действительное число, разложением которого оно и является.*

Замечание 1. Если мы будем сегменты ранга n делить не на два, а на какое-нибудь другое постоянное число s равных частей*) (например, на три или на десять), то получим для каждого действительного числа $x \geqslant 0$ разложение в бесконечную троичную, десятичную, вообще s-ичную дробь. Попрежнему, у каждого числа будет либо одно, либо два таких разложения, причём те числа, у которых имеется два s-ичных разложения, образуют лишь счётное множество, а именно множество рациональных чисел вида $\frac{m}{s^n}$ где m и n — целое.

Теорема 11. *Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ и, следовательно, несчётно***).

Доказательство. Так как вся числовая прямая находится во взаимно однозначном соответствии с любым из своих интервалов, и так как множество двоично рациональных чисел счётно, то достаточно доказать, что множество J' всех не двоично рациональных чисел интервала $(0; 1)$ имеет мощность $\mathfrak{c}$. Но множество J' находится во взаимно одозначном соответствии с множеством D' непериодических (т. е. не кончающихся ни одними нулями, ни одними единицами) бесконечных двоичных дробей

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$$

Множество D *всех* бесконечных двоичных дробей имеет, как мы видели***), мощность $\mathfrak{c}$, а множество D' получает-

*) Целое число $s \geqslant 2$ будет так называемым «основанием системы счисления».

**) См. конец главы 1, стр. 45. Числовая прямая часто называется арифметическим континуумом («continuum» значит «непрерывное»), поэтому и мощность $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, являясь мощностью множества всех действительных чисел, называется мощностью континуума.

***) См. конец главы 1, стр. 45.

ся из множеств D вычитанием двух множеств, состоящих, соответственно, из дробей вида

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n 000 \ldots$$

и вида

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n 111 \ldots$$

Каждое из этих множеств находится во взаимно однозначном соответствии с множеством двоично рациональных чисел интервала (0; 1) и потому счётно; следовательно, множество D', а значит, и множество J' имеют мощность c, что и требовалось доказать.

Следующее элементарное доказательство теоремы о несчётности множества действительных чисел представляет собою применение общих рассуждений § 6 первой главы специально к доказательству несчётности множества всех десятичных дробей, т. е. по-существу — множества всех отображений множества натуральных чисел в множество, состоящее из десяти элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Достаточно показать, что множество всех чисел интервала (0; 1) несчётно. Предположим, что оно счётно. Это означает, что все действительные числа интервала (0; 1) могут быть занумерованы в одну последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{5}$$

Каждое число x_n может быть представлено единственным образом в виде бесконечной десятичной дроби

$$x_n = 0,\ a_1^{(n)}\, a_2^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \ldots,$$

не являющейся периодической дробью с периодом 9. Возьмём теперь для каждого n **отличное** от $a_n^{(n)}$ число b_n, равное, либо 1, либо 2.

Для определённости мы, например, положим:

$$b_n = 1, \quad \text{если } a_n^{(n)} \neq 1,$$
$$b_n = 2, \quad \text{если } a_n^{(n)} = 1.$$

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь

$$0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \tag{6}$$

Она определит некоторое число x интервала (0; 1) (более точно: число x принадлежит даже к сегменту [0,1; 0,3]).

Так как мы предполагаем, что последовательность (5) содержит все действительные числа интервала (0; 1), то число x занимает в нашей последовательности (5) определённое, пусть, например, m-е место. Тогда

$$x = 0, \quad a_1^{(m)} a_2^{(m)} \ldots a_n^{(m)} \ldots \tag{7}$$

и, следовательно,

$$a_1^{(m)} = b_1, \quad a_2^{(m)} = b_2, \ \ldots, \ a_n^{(m)} = b_n, \ \ldots$$

(так как (6) и (7) — одна и та же бесконечная десятичная дробь). В частности,

$$a_m^{(m)} = b_m,$$

что, однако, невозможно, так как мы выбирали b_m так, чтобы было $b_m \neq a_m^{(m)}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2. Из доказанного следует, что всякий сегмент, интервал и полуинтервал числовой прямой имеют мощность континуума, так как все эти множества эквивалентны между собой и эквивалентны множеству всех действительных чисел.

Отсюда непосредственно вытекает, что множество всех иррациональных чисел, а также множество иррациональных чисел, содержащихся в любом интервале числовой прямой, несчётны, ибо каждое из них получается из несчётного множества удалением из него счётного подмножества. На основании этого получаем, в частности: между любыми двумя различными вещественными числами найдётся иррациональное число и даже несчётно много их.

Применим замечание 2 к доказательству следующего предложения:

Теорема 12. *Сумма конечного или счётного множества множеств, имеющих мощность континуума, имеет мощность континуума.*

Пусть наши множества суть

$$E_1, \ E_2, \ E_3, \ \ldots, \ E_n, \ \ldots$$

и пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$. Положим $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus A_1$, вообще

$$A_n = E_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}).$$

Очевидно,

$$E = \bigcup_n E_n = \bigcup_n A_n,$$

причём множества A_n попарно не пересекаются. Множество $A_1 = E_1$ имеет мощность континуума, тогда как каждое из множеств A_n, $n > 1$, есть подмножество некоторого множества мощности континуума. Поэтому множество A_1, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех точек интервала (0; 1), а каждое множество A_n, $n > 1$, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с некоторым подмножеством соответственно интервала $(n-1; n)$. Вследствие этого всё множество E оказывается поставленным во взаимно однозначное соответствие с подмножеством множества всех действительных чисел; так как, кроме того, E содержит часть E_1, имеющую мощность континуума, то по теореме Кантора-Бернштейна E само имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Упорядоченные множества

Понятия упорядоченного множества и подобного отображения одного упорядоченного множества на другое, а также понятие порядкового типа данного упорядоченного множества были введены в главе 1, § 5. Эти понятия лежат в основе всей настоящей главы. Сделаем по поводу этих основных элементарных понятий ещё следующее, в сущности, сáмо собою разумеющееся

Замечание 1. Упорядоченное множество A называется *упорядоченным подмножеством* упорядоченного множества X, если каждый элемент a множества A является элементом множества X и если отношение $a \prec a'$ в A совпадает с отношением $a \prec a'$ в X. Всякое подмножество упорядоченного множества X мы будем в этой главе рассматривать, как упорядоченное подмножество. Наконец, на протяжении всей этой главы действует следующее соглашение: множество всех действительных чисел и все его подмножества, в частности, любое множество, составленное из рациональных чисел, считается упорядоченным естественным образом (т. е. для любых двух действительных, в частности, для любых двух рациональных чисел x, x' отношение порядка $x \prec x'$ означает, что $x < x'$).

После этих вводных замечаний докажем следующее важное предложение:

Теорема 1. *Всякое счётное упорядоченное множество X подобно некоторому подмножеству множества D всех двоично-рациональных чисел интервала* $(0; 1)$, *причём*, *если множество X не содержит ни пустых интервалов ни первого и ни последнего элементов, то оно подобно всему множеству D.*

Доказательство*). Пусть все элементы множества X занумерованы в последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

(причём порядок элементов в множестве X, вообще говоря, никак не связан с их порядком в последовательности (1)).

Возьмём какое-нибудь двоично-рациональное число d, представим его в виде несократимой дроби $\frac{m}{2^n}$ и назовём n рангом числа d. Всё множество D распадается на «решётки» элементов разных рангов: решётка первого ранга D_1 состоит из одного числа $\frac{1}{2}$, решётка второго ранга D_2 из двух чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, и т. д. Поставим теперь в соответствие числу $\frac{1}{2}$ элемент $x_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ и перейдём к решётке второго ранга D_2. Если в X есть элемент, предшествующий элементу x_1, то берём тот из этих элементов, который имеет в (1) наименьший индекс n, и полагаем $f\left(\frac{1}{4}\right) = x_n$. Если элемента $x_n \prec x_1$ в X нет, то вычёркиваем в решётке D_2 элемент $\frac{1}{4}$, ищем в (1) первый элемент $x_n \succ x_1$, ставим его в соответствие числу $\frac{3}{4}$ и переходим к решётке D_3. В ней берём сначала число $\frac{1}{8}$ и ищем к нему элемент x_n с наименьшим индексом, предшествующий ранее построенным элементам. Если он имеется, то ставим его в соответствие числу $\frac{1}{8}$, если нет, то вычёркиваем число $\frac{1}{8}$ и переходим к числу $\frac{3}{8}$. К числу $\frac{3}{8}$ стараемся подобрать элемент с наименьшим индексом, находящийся к отобранным элементам множе-

*) См. ниже замечание 2.

ства X в том же порядковом отношении, в каком число $\frac{3}{8}$ находится к уже рассмотренным и не вычеркнутым числам. Далее переходим к числу $\frac{5}{8}$ и т. д., двигаясь всё время от каждой решётки к решётке следующего ранга, а внутри каждой решётки — в порядке возрастания её элементов. В результате получаем подобное отображение f множества D' невычеркнутых двоичных чисел в множество X. Докажем, что f есть отображение на всё множество X. В самом деле, пусть это не так, и пусть x_n есть первый элемент множества X, не поставленный в соответствие никакому d. Тогда элементы $x_1, \ldots, x_{n-1}$ поставлены в соответствие некоторым элементам $d_1, \ldots, d_{n-1}$, принадлежащим, положим, сумме первых k решёток, причём пусть x_n лежит между x_p и x_q, имея эти элементы в качестве ближайшего предшествующего и ближайшего следующего. Так как в решётке D_{k+1} имеются элементы, лежащие между любыми двумя соседними элементами множества $D_1 \bigcup \ldots \bigcup D_k$, то в D_{k+1} имеется и первый по величине элемент d_n, лежащий между d_p и d_q; этому элементу по нашему построению и должен быть поставлен в соответствие элемент x_n. Так же рассуждаем и в том случае, когда x_n предшествует всем элементам $x_1, \ldots, x_{n-1}$ или следует за ними всеми.

Первое утверждение теоремы 1 этим доказано. Если X не содержит крайних элементов и не имеет пустых интервалов, то, как легко видеть, нам вовсе не придётся вычёркивать никаких элементов в D, так что получится подобное отображение всего множества D на множество X.

Следствие. *Множество всех рациональных чисел подобно множеству всех двоично-рациональных.*

Поэтому всякое счётное упорядоченное множество без пустых интервалов и без крайних элементов подобно также множеству всех рациональных чисел.

Замечание 2. Если интересоваться лишь первым утверждением теоремы 1, то самое простое доказательство — следующее. Полагаем $f(x_1) = \frac{1}{2}$. Пусть элементам $x_1, \ldots, x_n$ уже поставлены в соответствие двоично-рациональные числа $d_1, \ldots, d_n$ интервала $(0; 1)$, среди которых пусть d_i — наименьшее, а d_k — наибольшее. Если x_{n+1} предшествует всем $x_1, \ldots, x_n$ или следует за всеми ними, то полагаем $f(x_{n+1}) = \frac{1}{2} d_i$, соотв. $f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}(1 + d_k)$.

Если же x_{n+1} лежит между x_p и x_q, $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, имея эти элементы своими соседями, то полагаем

$$f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}(d_p + d_q).$$

Таким образом определено подобное отображение f множества X в множество D и первое утверждение теоремы 1 доказано.

Сечением упорядоченного множества Θ называется, как мы знаем, такое разбиение множества Θ на два непустых подмножества (на два «класса») A и B, что каждый элемент одного множества, например A («нижнего класса»), предшествует каждому элементу второго множества B («верхнего класса»).

Возможны следующие типы сечений:

1. В нижнем классе A есть наибольший элемент a и в верхнем классе есть наименьший элемент b; такое сечение называется *скачком*. Очевидно, в этом случае $(a; b)$ есть пустой интервал.

Обратно, всякому пустому интервалу $(a; b)$ упорядоченного множества Θ однозначно соответствует скачок (A, B), где A состоит из всех $x \underline{\prec} a$, а B — из всех $y \underline{\succ} b$ *).

Пример: Θ состоит из всех $x \leqslant 0$ и из всех $y \geqslant 1$; A состоит из всех $x \leqslant 0$, B — из всех $y \geqslant 1$; $a = 0, b = 1$.

2. В нижнем классе есть наибольший элемент ξ, но в верхнем классе нет наименьшего элемента.

3. В нижнем классе нет наибольшего, но в верхнем есть наименьший элемент ξ (сечения типов 2, 3 называются *дедекиндовыми сечениями*; элемент ξ называется элементом, определяемым этим сечением).

4. В нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего элемента. Такое сечение называется *«щелью»*.

---

*) Запись $x \underline{\prec} a$ (соответственно $y \underline{\succ} b$) означает, что либо $x \prec a$, либо $x = a$ (соответственно либо $y \succ b$, либо $y = b$).

Множество всех щелей упорядоченного множества Θ есть упорядоченное множество: если $\lambda=(A, B)$ и $\lambda'=(A', B')$ — две щели, то полагаем $\lambda \prec \lambda'$, если $A \subset A'$.

Упорядоченное множество называется *непрерывным*, если все сечения в нём суть сечения дедекиндовы. Непрерывное упорядоченное множество называется *открытым*, если у него нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента, *замкнутым*, — если у него есть и наибольший, и наименьший элемент. Очевидно, присоединяя к открытому непрерывному множеству два элемента — первый и последний, получим замкнутое непрерывное упорядоченное множество (так от числовой прямой R^1, являющейся открытым непрерывным упорядоченным множеством, мы перешли к замкнутому непрерывному упорядоченному множеству R^*).

Наконец, назовём подмножество D упорядоченного множества Θ *плотным* в Θ, если каждый интервал множества Θ содержит хотя бы один элемент из D.

Замечание 3. Из этого определения следует, что если в упорядоченном множестве Θ имеются скачки (или, что то же, пустые интервалы), то никакое вообще подмножество $D \subseteq \Theta$ не является плотным в Θ.

Мы будем в дальнейшем интересоваться плотными подмножествами лишь непрерывных упорядоченных множеств.

Теорема 2. *Пусть Θ — непрерывное открытое упорядоченное множество, а D — плотное подмножество множества Θ. Существует соответствие подобия между элементами множества $\Theta \setminus D$ и (упорядоченным) множеством всех щелей множества D.*

Доказательство. Пусть ξ — произвольный элемент множества $\Theta \setminus D$. Обозначим через D'_ξ множество всех предшествующих элементу ξ, а через D''_ξ — множество всех следующих за элементом ξ элементов множества D. Легко видеть, что разбиение $\lambda_\xi=(D'_\xi, D''_\xi)$ есть сечение множества D и притом — щель (так как, если бы, например, в D'_ξ был наибольший элемент a, то между a и ξ не содержалось бы ни одного элемента из D). Ясно также, что двум различным элементам ξ, η, множества $\Theta \setminus D$ соответствуют различные щели $\lambda_\xi=(D'_\xi, D''_\xi)$

и $\lambda_\eta = (D'_\eta, D''_\eta)$, причём из $\xi \dashv \eta$ следует $\lambda_{\xi'} \dashv \lambda_\eta$. Остаётся доказать, что каждой щели $\lambda = (D', D'')$ множества D соответствует элемент $\xi \in \Theta \setminus D$ такой, что $D' = D'_\xi$, $D'' = D''_\xi$. Обозначим через Θ' множество всех таких $x \in \Theta$, что x предшествует любому элементу $d \in D''$. Положим $\Theta'' = \Theta \setminus \Theta'$. Легко видеть, что $D' = D \cap \Theta'$, $D'' = D \cap \Theta''$ и что (Θ', Θ'') есть сечение в Θ. Если ξ есть элемент, определяемый в Θ дедекиндовым сечением (Θ', Θ''), то $D' = D'_\xi$, $D'' = D''_\xi$. Торема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть даны два открытых непрерывных упорядоченных множества Θ_1 и Θ_2 и плотные в них множества D_1, соотв. D_2. Если множества D_1 и D_2 подобны между собою, то подобны между собою и множества Θ_1 и Θ_2.*

В самом деле, соответствие подобия (обозначим его через φ), существующее между множествами D_1 и D_2, порождает соответствие подобия ψ между множествами щелей этих множеств, а значит и между множествами $\Theta_1 \setminus D_1$ и $\Theta_2 \setminus D_2$. Легко видеть, что отображения φ и ψ вместе дают соответствие подобия между Θ_1 и Θ_2, чем теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Всякое открытое непрерывное упорядоченное множество Θ, в котором плотно некоторое счётное подмножество D, подобно множеству всех действительных чисел.*

Доказательство. Легко видеть, что счётное множество E, плотное в непрерывном открытом упорядоченном множестве Θ, не имеет ни скачков (пустых интервалов), ни наименьшего, ни наибольшего элемента и потому в силу теоремы 1 подобно множеству R_0 всех рациональных чисел. Так как R_0 есть плотное подмножество непрерывного открытого упорядоченного множества R^1 всех действительных чисел, то по теореме 3 соответствие подобия между D и R_0 может быть продолжено до соответствия подобия между Θ и R^1, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Из теоремы 4 следует, что всякое непрерывное замкнутое упорядоченное множество, в котором плотно некоторое счётное множество, подобно сегменту числовой прямой.

§ 2. Определение и примеры вполне упорядоченных множеств

Определение 1. Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество содержит первый элемент.

Из этого определения сразу следует, что всякое подмножество вполне упорядоченного множества само есть вполне упорядоченное множество.

Замечание 1. Так как к подмножествам любого множества мы причисляем и само данное можество, то во всяком вполне упорядоченном непустом множестве содержится первый элемент. Однако существование первого элемента в самом данном упорядоченном множестве ещё недостаточно для того, чтобы оно было вполне упорядоченным; требуется ещё, чтобы и во всяком непустом подмножестве данного множества был первый элемент. Так, множество всех рациональных чисел сегмента [0; 1] имеет первый и последний элемент, но оно не является вполне упорядоченным, так как, например, в его подмножестве, состоящем из всех рациональных чисел интервала (0; 1), первого элемента нет.

Все конечные упорядоченные множества вполне упорядочены. Примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел; это множество и все подобные ему называются *множествами типа* ω. Множеством типа ω является, следовательно, например, множество всех чисел

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots \tag{1}$$

(так как очевидно, что оно подобно множеству всех натуральных чисел). Но пополняя множество (1) ещё одним элементом, именно числом 1 (следующим в порядке возрастания за всеми числами вида $\frac{n}{n+1}$) мы получим множество, состоящее из всех чисел

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,\ 1. \tag{2}$$

Это множество — тоже вполне упорядоченное и счётное, но оно не подобно множеству всех натуральных чисел хотя бы потому, что во множестве (2) есть последний элемент, именно элемент 1, а во множестве всех натуральных чисел последнего элемента нет. Множество (2) и всякое подобное ему множество называется множеством типа $\omega+1$. Итак, даже в п о л н е упорядоченные счётные множества могут иметь различные порядковые типы. Более того, мы увидим в этой главе, что имеется несчётное множество различных порядковых типов вполне упорядоченных счётных множеств.

Но прежде чем идти дальше в исследовании вполне упорядоченных множеств, и даже для того, чтобы обосновать обозначение $\omega+1$ для порядкового типа множества (2), введём весьма важные вспомогательные понятия, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть имеются два упорядоченных множества A и B, данных в этом порядке (т. е. сначала A, потом B) и не имеющих общих элементов. Рассмотрим множество $A\cup B$, состоящее из всех элементов $a\in A$ и $b\in B$. Превратим множество $A\cup B$ в упорядоченное множесто $A+B$, введя в него порядок следующим образом: элементы множества A, равно как элементы множества B, сохраняют свой порядок и в $A+B$ (т. е. если $a\prec a'$ в A, или $b\prec b'$ в B, то те же отношения сохраняются и в $A+B$); если же $a\in A$, $b\in B$, то полагаем

$$a\prec b \quad \text{в} \quad A+B.$$

Упорядоченное множество $A+B$ называем *порядковой суммой* упорядоченных множеств A и B (данных в порядке $A\prec B$). Если α, β суть порядковые типы множеств A и B, то порядковый тип множества $A+B$ называется *суммой* $\alpha+\beta$ порядковых типов α и β (в этом их порядке).

Заметив, что множество, состоящее из одного элемента, имеет порядковый тип 1, видим, что, присоединяя к какому-либо множеству порядкового типа ω ещё один элемент, следующий за всеми элементами данного множества типа ω, получим упорядоченное множество, порядковый тип которого, в силу только что сформулированного определения сложения порядковых типов, есть $\omega+1$.

Аналогично, множество

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

имеет порядковый тип $\omega+m$, а множество

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \ldots,\frac{2n+1}{n+1},\ \ldots$$

— порядковый тип $\omega+\omega$. Тот же порядковый тип $\omega+\omega$ получим, если упорядочим все натуральные числа не естественным образом (по их величине), а так: сначала упорядочим все нечётные числа по величине, а за ними заставим следовать все чётные числа, также упорядоченные по величине: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Введённая только что операция сложения порядковых типов не обладает свойством коммутативности: так, например,

$$1+\omega=\omega\neq\omega+1;$$

вообще, для любого натурального n

$$n+\omega=\omega\neq\omega+n.$$

В то же время легко видеть, что сложение порядковых типов обладает свойством ассоциативности:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Введём теперь понятие суммы упорядоченного множества упорядоченных множеств, являющееся обобщением понятия суммы двух упорядоченных множеств. Пусть дано какое-нибудь упорядоченное непустое множество A, элементами которого являются попарно непересекающиеся упорядоченные множества B_ξ. Сумму $S=\bigcup\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ всех множеств $B_\xi\in A$ делаем упорядоченным множеством, обозначаемым через $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$, вводя в множество S порядок следующим образом: элементы каждого множества B_ξ сохраняют тот порядок, который они имели в B_ξ; если же $x\in B_\xi$, $x'\in B_{\xi'}$, то полагаем $x\prec x'$, если $B_\xi\prec B_{\xi'}$ в A. Упорядоченное множество $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ называем суммой упорядоченного множества A упорядоченных множеств B_ξ.

Если b_ξ есть порядковый тип множества B_ξ и a — порядковый тип множества A, то порядковый тип s упорядоченного множества $\sum\limits_{B_\xi \in A} B_\xi$ называется суммой по типу a порядковых типов b_ξ. Это определение законно, так как порядковый тип s, очевидно, зависит лишь от данных порядковых типов b_ξ и от порядкового типа a, а не от того, какие именно множества B_ξ, A этих типов были взяты.

Рассмотрим частный случай только что введённого определения. Пусть все множества B_ξ имеют один и тот же тип b. Тогда порядковый тип их суммы по типу a обозначается через $b \cdot a$ и называется произведением порядковых типов b и a в этом порядке. Так, например, $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\omega + \omega + \omega = \omega \cdot 3$ и т. д.

Замечание 2. Легко видеть, что $2 \cdot \omega = \omega$, $3 \cdot \omega = \omega$ и т. д., так что $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$, $3 \cdot \omega \neq \omega \cdot 3$ и т. д.: свойством коммутативности умножение порядковых типов (даже вполне упорядоченных множеств) не обладает.

Другой пример на умножение порядковых типов. Множество рациональных чисел

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \ldots,\ 1+\frac{n}{n+1},\ \ldots$$

$$\ldots,\ k+\frac{1}{2},\ k+\frac{2}{3},\ \ldots,\ k+\frac{n}{n+1},\ \ldots$$

очевидно упорядочено по типу $\omega \cdot \omega = \omega^2$: тип $\omega \cdot \omega = \omega^2$ получается, если взять сумму последовательности

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

множеств, каждое из которых упорядочено по типу ω. Точно так же сумма последовательности множеств

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots,$$

каждое из которых имеет тип ω^2, даст нам множество, упорядоченное по типу $\omega^2 \cdot \omega = \omega^3$, и т. д., так что можно говорить о порядковом типе ω^n при любом n.

Легко доказывается следующая

Теорема 4. *Сумма вполне упорядоченного множества вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

В самом деле, пусть упорядоченное множество C определено как сумма $\sum\limits_{B_\xi \in A} B_\xi$ вполне упорядоченного множества A вполне упорядоченных множеств B. Пусть C' — какое нибудь непустое подмножество множества C. Так как множество A вполне упорядочено, то среди множеств B_ξ, содержащих элементы множества C', имеется первое множество B_{ξ_0}. Так как множество $C' \cap B_{\xi_0}$ является непустым подмножеством вполне упорядоченного множества B_{ξ_0}, то в нём имеется первый элемент. Этот элемент и есть, очевидно, первый элемент упорядоченного множества C'. Теорема доказана.

Таким образом, в силу теоремы 4, применяя операцию сложения к вполне упорядоченным множествам, в частности, к конечным множествам и к последовательностям вполне упорядоченных множеств, мы можем получать всё более и более сложные примеры вполне упорядоченных множеств. При этом сложение конечного числа и счётных последовательностей счётных вполне упорядоченных множеств, естественно, не выводит нас из класса счётных множеств.

Рассмотрим, в частности, сумму

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^n + \ldots = \sum_n^{\omega} \omega^n. \tag{3}$$

Порядковый тип $\sum\limits_n^{\omega} \omega^n$ условно *) обозначаем через ω^ω. Для того чтобы построить множество рациональных чисел, имеющее порядковый тип ω^ω, можно поступить, например, так: возьмём в интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ какое-нибудь множество, упорядоченное по типу ω, в интервале $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ — какое-нибудь множество, упорядоченное по

*) В этой книге не вводится определение степени с показателем ω; интересующихся этим и дальнейшими понятиями теории упорядоченных множеств отсылаем к «Теории множеств» Хаусдорфа, главы 3 и 4.

типу ω^2, вообще, в интервале $\left(\frac{n}{n+1}; \frac{n+1}{n+2}\right)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ — какое-нибудь множество, упорядоченное по типу ω^{n+1}. Сумма всех полученных множеств имеет тип ω^ω. Теперь можем строить дальше типы

$$\omega^\omega+1, \ldots, \omega^\omega+n, \ldots, \omega^\omega+\omega, \ldots, \omega^\omega+\omega\cdot 2, \ldots$$

$$\ldots, \omega^\omega+\omega\cdot n, \ldots, \omega^\omega+\omega\cdot\omega=\omega^\omega+\omega^2, \ldots, \omega^\omega+\omega^n, \ldots$$

$$\ldots, \omega^\omega+\omega^\omega=\omega^\omega\cdot 2, \ldots, \omega^\omega\cdot n, \ldots$$

и далее $\omega^\omega\cdot\omega$, который условно обозначаем через $\omega^{\omega+1}$,

$$\omega^{\omega+1}+1, \ldots, \omega^{\omega+1}+\omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega+1}+\omega^\omega\cdot 2, \ldots, \omega^{\omega+1}+$$

$$+\omega^\omega\cdot n, \ldots, \omega^{\omega+1}+\omega^{\omega+1}=\omega^{\omega+1}\cdot 2, \ldots, \omega^{\omega+1}\cdot n, \ldots$$

$$\ldots, \omega^{\omega+1}\cdot\omega=\omega^{\omega+2}, \ldots, \omega^{\omega+n}, \ldots, \omega^{\omega+\omega}=\omega^{\omega\cdot 2}, \ldots$$

$$\ldots, \omega^{\omega\cdot n}, \ldots, \omega^{\omega\cdot\omega}=\omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^n}, \ldots$$

$$\ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}}}_{n\text{ раз}}, \ldots$$

Сумма $\omega^\omega+\omega^{\omega^\omega}+\omega^{\omega^{\omega^\omega}}+\ldots+\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}}}_{n\text{ раз}}+\ldots$ обозначается

через $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ или через ε (Кантор). Далее можно идти тем же путём и получать порядковые типы $\varepsilon+1, \ldots$ $\ldots, \varepsilon+\omega, \ldots, \varepsilon+\varepsilon=\varepsilon\cdot 2, \ldots, \varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon^2, \ldots$ и т. д., не будучи никогда остановленным в этом процессе. Эти примеры (как, впрочем, уже $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$) показывают, что множество порядковых типов счётных вполне упорядоченных множеств бесконечно.

Со времён Кантора *порядковые* типы *вполне упорядоченных множеств называются порядковыми числами.* Порядковые типы конечных множеств суть, как мы уже упоминали, натуральные числа и число нуль; *порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств называются трансфинитными числами.*

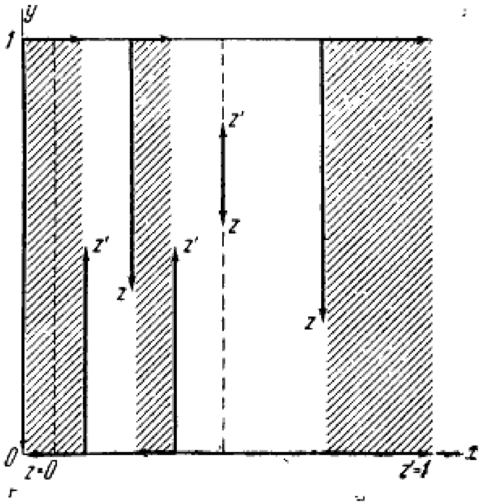
Замечание 3. При рассмотрении вполне упорядоченных множеств знаки $\prec$, $\succ$ заменяются через обычные $<$, $>$.

Приведём в заключение несколько примеров действий над порядковыми типами упорядоченных, но не вполне упорядоченных множеств.

Обозначим через ρ порядковый тип множества всех действительных чисел. Упорядочим множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, полагая для $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$

$$z \prec z',$$

если (не взирая на то, какое из двух чисел y, y' больше другого) имеем $x < x'$. Если же $x = x'$, то полагаем $z < z'$, если $y < y'$ (другими словами, упорядочиваем все пары (x, y), как говорят, в алфавитном порядке). Этим путём множество всех комплексных чисел оказывается упорядоченным по типу ρ^2.



Черт. 2.

Примечателен порядковый тип θ^2, где θ есть порядковый тип сегмента числовой прямой. Множество, упорядоченное по типу θ, можно получить, если взять на плоскости замкнутый квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и упорядочить множество всех точек $z = (x, y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, этого квадрата в «алфавитном порядке» (т. е. положить $(x, y) \prec (x', y')$, если $x < x'$, или если $x = x'$, $y < y'$).

Читателю предлагается проверить, что интервалы $(z; z')$ этого упорядоченного множества для различных z, z' имеют вид, указанный на черт. 2, и что в нём можно найти систему мощности c попарно не пересекающихся интервалов; при этом наше упорядоченное множество непрерывно и имеет как первый, так и последний элемент.

§ 3. Основные теоремы о вполне упорядоченных множествах

Множество всех отрицательных целых чисел

$$\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1 \qquad (1)$$

и всякое подобное ему множество называется множеством порядкового типа ω^*.

В множестве (1) есть последний элемент — 1, но, очевидно, нет первого элемента; поэтому это множество, будучи упорядоченным, не является вполне упорядоченным, и порядковый тип ω^* не есть порядковое число. Более того, имеет место весьма простая, но тем не менее важная

Теорема 5. *Для того чтобы упорядоченное множество не было вполне упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы в нём существовало подмножество типа* ω^*.

В самом деле, так как всякое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено, а множества типа ω^* не вполне упорядочены, то никакое вполне упорядоченное множество не может содержать подмножества типа ω^*. Обратно, если какое-либо упорядоченное множество C не является вполне упорядоченным, то оно содержит подмножество A без первого элемента. Возьмём какой-нибудь элемент множества A и обозначим его через a_{-1}. Так как никакой элемент множества A, в том числе и элемент a_{-1}, не является первым элементом, то в A есть элемент, предшествующий элементу a_{-1}; один из таких элементов обозначим через a_{-2}:

$$a_{-2} \prec a_{-1}.$$

Так как a_{-2} также не является первым элементом в A, то имеется элемент a_{-3}, предшествующий элементу a_{-2}. Повторяя это рассуждение, строим для каждого натурального n элемент a_{-n} множества A, причём

$$a_{-(n+1)} \prec a_{-n}.$$

Множество

$$\ldots, a_{-(n+1)}, a_{-n}, \ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}$$

является подмножеством множества $A \subseteq C$ и имеет тип ω^*.

Теорема 6. *Если f есть подобное отображение вполне упорядоченного множества A в себя, то для любого элемента $x \in A$ имеем $f(x) \geq x$.*

Доказательство. Пусть в A имеются элементы x, не удовлетворяющие последнему неравенству. Тогда среди этих элементов имеется первый; обозначим его через x_1. Значит,

$$f(x_1) < x_1. \qquad (1)$$

Обозначая элемент $f(x_1)$ через x_0, переписываем неравенство (1) в виде

$$x_0 < x_1, \tag{1'}$$

и помня, что f есть подобное отображение, выводим из (1′) неравенство

$$f(x_0) < f(x_1) = x_0.$$

Но неравенства $f(x_0) < x_0$ и $x_0 < x_1$ противоречат определению элемента x_1 как первого элемента $x \in A$, удовлетворяющего условию $f(x) < x$. Теорема 6 доказана.

Пусть теперь x — произвольный элемент вполне упорядоченного множества A. Назовём *отрезком множества A, отсечённым элементом x*, и обозначим через $A(x)$ множество всех элементов $x' \in A$, предшествующих элементу x (если x — первый элемент множества A, то $A(x)$ есть пустое множество). Множество всех остальных элементов множества A, т. е. множество всех $x'' \in A$, удовлетворяющих неравенству $x'' \geq x$, назовём *хвостом* (множества A), отсечённым элементом x.

Из теоремы 6 выводится

Теорема 7. *Не существует никакого подобного отображения вполне упорядоченного множества A в отрезок какого-либо подмножества $A' \subseteq A$.*

Доказательство. Если бы существовало подобное отображение вполне упорядоченного множества A в отрезок $A'(x)$ какого-либо подмножества $A' \subseteq A$, то было бы $f(x) \in A'(x)$, и, значит, $f(x) < x$, вопреки теореме 6.

Пусть $A(x)$ и $A(x')$ — два различных отрезка вполне упорядоченного множества A; один из элементов x, x' предшествует другому, положим $x < x'$; тогда $A(x)$, очевидно, есть отрезок множества $A(x')$. Итак, из двух отрезков одного и того же вполне упорядоченного множества один есть отрезок другого. Поэтому

Следствие 1. *Два различных отрезка вполне упорядочённого множества не могут быть подобны между собою.*

Из теоремы 7 вытекает далее

Т е о р е м а 8. *Существует не более одного подобного отображения одного вполне упорядоченного множества на другое.*

В самом деле, пусть f и g — два различных подобных отображения вполне упорядоченного множества A на вполне упорядоченное множество B. Так как f и g предположены различными, то существует элемент $a \in A$, для которого $b = f(a) \neq b' = g(a)$. Пусть, например, $b < b'$. Так как при всяком подобном отображении f множества A на множество B отрезок $A(x)$ множества A переходит в отрезок $B(y)$ множества B, где $y = f(x)$, то отрезок $A(a)$ множества A подобен отрезкам $B(b)$ и $B(b')$ множества B, откуда следует, вопреки только что доказанному, что отрезки $B(b)$ и $B(b')$ множества B подобны между собою.

С л е д с т в и е 2. *Единственное подобное отображение вполне упорядоченного множества на себя есть тождественное отображение.*

Введём теперь следующее основное определение:

Мы говорим, что *порядковое число* α *меньше порядкового числа* β, *если какое-либо* (а значит, и любое) *вполне упорядоченное множество типа* α *подобно некоторому отрезку какого-нибудь* (а следовательно, и любого) *вполне упорядоченного множества типа* β. Очевидно, из $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ следует, что $\alpha < \gamma$. Кроме того, из нашего определения и теоремы 8 вытекает, что отношения $\alpha < \beta$ и $\alpha = \beta$, а также $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ исключают друг друга. Другими словами, два данных порядковых числа α, β могут удовлетворять не более чем одному из трёх отношений $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Мы докажем, что одно из этих отношений всегда выполнено. Другими словами, имеет место

Т е о р е м а 9. *Для любых двух порядковых чисел* α *и* β *всегда осуществляется один и только один из трёх случаев: либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha > \beta$.

В силу данного выше определения неравенства между порядковыми числами теорема 9 может быть сформулирована и так:

Т е о р е м а 9'. *Пусть даны два вполне упорядоченных множества* A *и* B. *Тогда имеются лишь три возможности:*

либо A и B подобны между собою, либо A подобно некоторому отрезку множества B, либо B подобно некоторому отрезку множества A.

Доказательству теоремы 9 предпошлём следующее замечание.

Если дано какое-нибудь порядковое число ξ, то дано и множество $W(\xi)$ всех порядковых чисел, меньших чем ξ. В самом деле, задать порядковое число ξ — значит задать какое-нибудь вполне упорядоченное множество типа ξ, тогда даны и все отрезки этого множества; но порядковые типы этих отрезков как раз и исчерпывают множество всех порядковых чисел, меньших чем ξ. При этом:

Теорема 9″. *Отношение $\alpha < \beta$, установленное для порядковых чисел, превращает множество $W(\xi)$ всех порядковых чисел, меньших данного порядкового числа ξ, во вполне упорядоченное множество типа ξ.*

Доказательство теоремы 9″. Как мы только что видели (и как непосредственно следует из определения отношения $\alpha < \beta$), множество $W(\xi)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех отрезков $A(x)$ произвольно выбранного множества A типа ξ; так как отрезки $A(x)$ взаимно однозначно соответствуют элементам $x \in A$, то имеем взаимно однозначное соответствие $\alpha = f(x)$, $x \in A$, $\alpha \in W(\xi)$, между множеством $W(\xi)$ и множеством A типа ξ. При этом соответствии из $x < x'$ в A следует, что $A(x)$ есть отрезок множества $A(x')$, значит $\alpha = f(x) < \beta = f(x')$ в $W(\xi)$ и обратно. Теорема 9″ доказана.

Только что доказанная теорема 9″ может быть сформулирована так:

Теорема 9‴. *Элементы всякого вполне упорядоченного множества A данного типа ξ могут быть (и притом единственным образом) занумерованы посредством порядковых чисел $\alpha < \xi$ так, что получится подобное соответствие между множеством A и множеством всех порядковых чисел $\alpha < \xi$ (т. е. $x_\alpha < x_\beta$ в A равносильно тому, что $\alpha < \beta$).*

Переходим теперь к доказательству теоремы 9. Пусть даны два порядковых числа α, β. Обозначим через D множество $W(\alpha) \cap W(\beta)$. Это множество вполне упорядочено; его тип обозначим через δ. Докажем неравенства $\delta \leqslant \alpha$, $\delta \leqslant \beta$. Достаточно доказать, например, первое из них. Имеем $D \subseteq W(\alpha)$. Если $D = W(\alpha)$, то δ есть порядковый тип множества $W(\alpha)$, т. е. $\delta=\alpha$. Пусть $D\subset W(\alpha)$. Разбиение

$$W(\alpha)=D\bigcup(W(\alpha)\setminus D)$$

есть сечение во вполне упорядоченном множестве $W(\alpha)$. В самом деле, пусть $x\in D$, $y\in W(\alpha)\setminus D$. Так как $W(\alpha)$ упорядочено, то либо $x<y$, либо $y<x$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, так как $x\in W(\alpha)$, $x\in W(\beta)$, то одновременно $x<\alpha$, $x<\beta$. Если бы было $y<x$, то было бы $y<\alpha$, $y<\beta$, т. е. $y\in D$. Итак, доказано, что $x<y$ для любых $x\in D$, $y\in W(\alpha)\setminus D$, а это и означает, что $(D, W(\alpha)\setminus D)$ есть сечение в $W(\alpha)$. Пусть $\xi<\alpha$ есть первый элемент в $W(\alpha)\setminus D$. Тогда отрезок, отсекаемый в $W(\alpha)$ элементом ξ, совпадает с D, т. е. ξ есть порядковый тип множества D, $\xi=\delta$ и $\delta<\alpha$.

Совершенно аналогично доказывается и неравенство $\delta\leqslant\beta$.

Однако неравенства $\delta<\alpha$, $\delta<\beta$ не могут быть выполнены одновременно, так как в этом случае мы имели бы $\delta\in D$, так что δ было бы типом отрезка множества D и не могло бы быть типом всего D. Итак, имеются лишь следующие возможности:

$$\text{либо } \delta=\alpha,\quad \delta=\beta \quad \text{и, значит,}\quad \alpha=\beta;$$

$$\text{либо } \delta=\alpha,\quad \delta<\beta \quad \text{и, значит,}\quad \alpha<\beta;$$

$$\text{либо } \delta<\alpha,\quad \delta=\beta \quad \text{и, значит,}\quad \beta<\alpha.$$

Основная теорема 9 полностью доказана.

Теорема 10. *Любое множество A, состоящее из порядковых чисел, вполне упорядочено.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любое непустое множество A', состоящее из порядковых чисел, имеет первый элемент: если это будет доказано, то будет доказано, в частности, что всякое непустое подмножество A' множества A имеет первый элемент, т. е. что A вполне упорядочено.

Возьмём какое-нибудь $a'\in A'$. Если a' — наименьшее из чисел $x\in A'$, то всё доказано. Если же нет, то пересечение $W(a')\bigcap A'$ непусто и, будучи подмножеством вполне упорядоченного множества $W(a')$, содержит первый элемент a. Порядковое число a и является первым элементом в A'.

Теорема 11. *Пусть ξ — какое-нибудь порядковое число. Тогда $\xi+1>\xi$, причём не существует никакого порядкового числа ξ', удовлетворяющего неравенству $\xi<\xi'<\xi+1$.*

В самом деле, пусть A — какое-нибудь вполне упорядоченное множество типа ξ. По определению сложения порядковых типов, множество A' типа $\xi+1$ получим, если присоединим к A новый элемент a', следующий за всеми элементами $a\in A$. Тогда, очевидно, $A=A'(a')$, т. е. $\xi<\xi+1$. Всякое порядковое число $\xi'<\xi+1$ является типом некоторого отрезка $A'(x)$ множества A'. Но если $x=a'$, то $A'(x)=A'(a')=A$ и $\xi'=\xi$, если же $x=a<a'$, то $A'(x)=A(a)$ и $\xi'<\xi$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 11 выражают и так: число $\xi+1$ есть первое порядковое число, следующее за числом ξ.

Теорема 12. *Пусть A и B — вполне упорядоченные множества и пусть α, β — их порядковые типы. Если $A\subseteq B$, то $\alpha\leqslant\beta$.*

В самом деле, в противном случае имели бы $\beta<\alpha$ и множество B было бы подобно отрезку своего подмножества A, что противоречит теореме 7.

Пусть дано некоторое порядковое число τ и каждому $\alpha<\tau$ поставлено в соответствие порядковое число x_α. Пусть ξ — сумма по типу τ всех порядковых чисел x_α; обозначаем её через

$$\xi=\sum_{\alpha<\tau} x_\alpha.$$

Если X_α есть какое-нибудь множество, упорядоченное по типу x_α, то сумма вполне упорядоченного (по типу $W(\tau)$) множества множеств X_α есть вполне упорядоченное множество X, типом которого является ξ. Так как множество X содержит в качестве своего подмножества каждое из множеств X_α, то на основании теоремы 12 для любого x_α имеем $x_\alpha\leqslant\xi$. Итак, нами доказана

Теорема 13. *Сумма любых порядковых чисел x_α (данных в любом порядке) есть порядковое число ξ, не меньшее, чем любое из данных слагаемых x_α.*

Взяв число $\xi+1$, видим, что оно больше любого из данных x_α.

Итак:

Теорема 14. *Ко всякому данному множеству порядковых чисел можно построить порядковое число, большее любого из чисел этого множества.*

Отсюда в свою очередь вытекает, что «множество всех порядковых чисел» не существует вовсе*). Оно и понятно: процесс построения всё бо́льших и бо́льших порядковых чисел по самому своему существу не может мыслиться как законченный, а «множество всех порядковых чисел» могло бы возникнуть лишь как итог этого процесса.

Пусть A — какое-нибудь непустое множество порядковых чисел. По теореме 14 существуют числа ξ, бо́льшие чем все $x \in A$. Среди этих ξ имеется одно единственное наименьшее ξ_0. Чтобы получить это ξ_0, возьмём какое-нибудь ξ, большее чем все $x \in A$. Тогда во вполне упорядоченном множестве $W(\xi+1)$ будут содержаться числа, бо́льшие чем все $x \in A$ (например, число ξ). Среди этих чисел будет одно наименьшее. Оно и будет искомым.

Возможны два случая. 1° Во множестве A имеется последний элемент (т. е. существует наибольшее число x' среди всех чисел $x \in A$). Тогда, очевидно, $\xi = x'+1$ и будет первым порядковым числом, бо́льшим, чем все $x \in A$.

2° В A нет последнего элемента. В этом случае первое число ξ, большее чем все $x \in A$, обладает тем свойством, что, каково бы ни было число $\xi' < \xi$, интервал $(\xi'; \xi)$ вполне упорядоченного множества $W(\xi+1)$ содержит числа $x \in A$, а содержа одно какое-нибудь число $x' \in A$, содержит и все числа $x \in A$, бо́льшие чем это x'. В этом случае говорят, что *вполне упорядоченное множество A порядковых чисел сходится к числу* ξ (имеет число ξ своим пределом), и пишут

$$\xi = \lim_{x \in A} x.$$

---

*) См. главу 1, § 5, замечание 2.

Пусть, в частности, $A = W(\xi)$, где ξ — какое-нибудь порядковое число. Если в $W(\xi)$ имеется наибольшее число ξ', то $\xi = \xi' + 1$; в этом случае интервал $(\xi'; \xi' + 2)$ состоит из единственного числа $\xi = \xi' + 1$ и число ξ называется *числом первого рода* (или *изолированным* числом). Таковы все натуральные числа, числа $\omega + 1$, $\omega + n$, $\omega^2 + n$, $\omega^3 + \omega + n$ и т. д. Если же в $W(\xi)$ нет наибольшего числа, то каждый интервал (ξ', ξ), где ξ' — произвольное порядковое число $< \xi$, содержит бесконечное множество порядковых чисел, и число ξ называется *предельным порядковым числом* или *числом второго рода*. Таковы числа ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot n$, ω^n, ω^{ω^ω} и т. д.

Замечание. Принцип трансфинитной индукции. Пусть дано какое-нибудь вполне упорядоченное множество W и некоторое предложение $P = P(x)$, зависящее от переменного элемента этого вполне упорядоченного множества W (обычно W есть множество всех порядковых чисел, меньших данного числа α, т. е. в наших обозначениях $W = W(\alpha)$). В этих предположениях утверждение, называемое принципом трансфинитной индукции, может быть сформулировано так:

Если предложение P верно для первого элемента x_0 множества W и если из того, что оно верно для всех элементов x, предшествующих данному элементу x', следует, что предложение P верно и для элемента x', то предложение P верно и для каждого элемента $x \in W$. (При $W = W(\omega)$, т. е. когда W есть множество всех натуральных чисел, принцип трансфинитной индукции превращается в хорошо известный читателю обычный принцип полной индукции.)

Для доказательства принципа трансфинитной индукции достаточно заметить, что если бы существовали элементы $x \in W$, для которых предложение P неверно, то среди этих элементов x был бы первый элемент, пусть x_0. Но тогда предложение P, будучи верным для всех элементов $x \in W$, предшествующих элементу x_0, было бы в силу наших предположений верно и для элемента x_0. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

§ 4. Счётные трансфинитные числа (порядковые числа второго класса). Понятие конфинальности. Аксиома произвольного выбора

Назовём натуральные числа и число нуль *порядковыми числами первого класса*; таким образом, числа первого класса суть порядковые типы конечных вполне упорядоченных множеств. Порядковые типы счётных вполне упорядоченных множеств назовём *счётными трансфинитными числами* или порядковыми (*трансфинитными*) *числами второго класса*. Вполне упорядоченное множество всех чисел первого класса обозначается через W_0; вполне упорядоченное можество всех чисел первого и второго классов—через W_1; вполне упорядоченное множество всех чисел второго класса — через Z_1.

Теорема 15. *Каково бы ни было конечное или счётное множество порядковых чисел второго класса*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{1}$$

первое порядковое число α, следующее за всеми числами (1), *есть также число второго класса.*

Рассмотрим два случая:

а) Среди чисел (1) есть наибольшее, пусть это будет число α_m; число α_m+1, по самому своему определению являющееся числом второго класса, есть первое число, следующее за всеми числами (1).

б) Среди чисел (1) нет наибольшего. Обозначим через α первое порядковое число, следующее за всеми α_n. Рассмотрим множество $W(\alpha)$. Я утверждаю, что

$$W(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W(\alpha_n). \tag{2}$$

В самом деле, правая часть, очевидно, содержится в левой. Докажем, что и наоборот, левая содержится в правой. Пусть $\xi \in W(\alpha)$. Так как α есть первое число, следующее за всеми α_n, и $\xi < \alpha$, то существует $\alpha_m > \xi$ и, значит, $\xi \in W(\alpha_m)$. Равенство (2) этим доказано. Из (2) следует, что множество $W(\alpha)$ счётно. Но α есть порядковый тип множества $W(\alpha)$, т. е. порядковый тип счётного вполне упорядоченного множества, чем теорема 15 и доказана.

Из теоремы 15 вытекают очень важные следствия, а именно:

Теорема 16. *Множество Z_1 всех порядковых чисел второго класса несчётно.*

Действительно, в противном случае, в силу теоремы 15, существовало бы число второго класса α, следующее за всеми числами второго класса, т. е. было бы, в частности, $\alpha > \alpha$, что противоречит аксиомам порядка.

Мощность множества Z_1 обозначается через $\aleph_1$ (мы помним, что счётное множество W_0 имеет мощность $\aleph_0$). Первое порядковое число, следующее за всеми числами второго класса, обозначается через ω_1 (иногда через Ω). Итак, ω_1 есть порядковый тип вполне упорядоченного множества $W_1 = W(\omega_1)$. По самому своему определению, ω_1 есть первое несчётное трансфинитное число, всякое порядковое число $\alpha < \omega_1$ конечно или счётно. Отсюда следует, что всякое несчётное подмножество множества W_1 имеет тот же тип ω_1 (и, следовательно, ту же мощность $\aleph_1$). В частности, ω_1 можно определить и как порядковый тип вполне упорядоченного множества Z_1 всех порядковых чисел второго класса.

Следствие. *Не существует никакого кардинального числа m, удовлетворяющего неравенству*

$$\aleph_0 < m < \aleph_1. \tag{3}$$

В самом деле, пусть такое число m существует; так как $m < \aleph_1$, то существует подмножество M множества W_1, имеющее мощность m; но в силу неравенства (3) множество M несчётно, а потому, по только что доказанному, имеет мощность $\aleph_1$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Теорема 15 послужит нам поводом к введению важного понятия *конфинальности*, которое мы сразу дадим во всей его общности.

Определение конфинальности упорядоченного множества своему подмножеству. Мы будем говорить, что упорядоченное множество X конфинально своему подмножеству A, если в X не существует никакого элемента, следующего за всеми элементами $x \in A$.

Из этого определения следует сразу: в том, и только в том, случае, когда в упорядоченном множестве X имеется последний элемент x_1, всё множество X конфинально подмножеству, состоящему из одного элемента x_1. Например, сегмент $0 \leqslant t \leqslant 1$ числовой прямой конфинален своему концу 1.

Интервал $0 < t < 1$ конфинален подмножеству, состоящему из всех точек вида $\frac{n}{n+1}$, где n — натуральное число.

Определение конфинальности одного порядкового типа другому. Мы скажем, что порядковый тип ξ конфинален порядковому типу α, если некоторое (а следовательно, и любое) множество X, упорядоченное по типу ξ, конфинально некоторому своему подмножеству A, имеющему тип α.

Так, например, какой-нибудь порядковый тип ξ тогда и только тогда конфинален порядковому числу 1, если ξ есть порядковый тип упорядоченного множества, имеющего последний элемент. Порядковый тип интервала числовой прямой (совпадающий с порядковым типом всей числовой прямой) конфинален порядковому числу ω (так как числовая прямая конфинальна множеству натуральных чисел).

Замечание 1. Понятие конфинальности *) в применении к упорядоченным множествам, не обладая свойством симметрии, обладает свойством транзитивности: если упорядоченное множество X конфинально своему подмножеству X_1, а X_1 — своему подмножеству X_2, то X конфинально множеству X_2. То же верно и для порядковых типов.

Теорема 15 может быть теперь сформулирована и следующим образом:

Теорема 15′. *Множество W_1 всех порядковых чисел первого и второго классов не конфинально никакому своему конечному или счётному подмножеству.*

---

*) Так, как мы его определили.

В самом деле, в противном случае можно было бы найти такое конечное или счётное множество порядковых чисел второго класса, за которым не следовало бы никакого порядкового числа второго класса; но это противоречит теореме 15.

Переходя к порядковым типам, можно сказать:

Теорема 15″. *Трансфинитное число ω_1 не конфинально никакому меньшему трансфинитному числу (в частности, числу ω).*

За каждым порядковым числом $\alpha < \omega_1$ следует число $\alpha + 1 < \omega_1$, т. е. число первого рода; значит всё множество W_1 конфинально подмножеству всех чисел первого рода; последнее подмножество, следовательно, несчётно и, по доказанному, имеет тип ω_1 (читатель без труда и непосредственно докажет, что, ставя в соответствие каждому числу $\alpha < \omega_1$ число $\alpha + 1$, мы получим подобное отображение множества W_1 на подмножество всех чисел первого рода). С другой стороны, за каждым числом $\alpha < \omega_1$ следует предельное число (например, число $\alpha + \omega$). Отсюда вытекает, что множество W_1 конфинально подмножеству всех предельных трансфинитных чисел второго класса, так что это последнее множество также несчётно и имеет порядковый тип ω_1.

Теорема 17. *Если $\alpha < \omega_1$ есть предельное трансфинитное число, то существует счётная последовательность*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{4}$$

возрастающих порядковых чисел, меньших чем α, имеющая число α своим пределом:

$$\alpha = \lim_{(n)} \alpha_n.$$

(Другими словами, к каждому предельному числу α можно подобрать последовательность чисел (4) таким образом, что α окажется первым числом, превосходящим любое число из последовательности (4)).

Так, например, $\omega = \lim_{(n)} n$, $\omega \cdot 2 = \lim_{(n)} (\omega + n)$, $\omega^2 = \lim_{(n)} \omega \cdot n$,

$$\omega^\omega = \lim_{(n)} \omega^n, \quad \varepsilon = \lim_{(n)} \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n \text{ раз}} \text{ и т. д.}$$

Доказательство теоремы 17. Множество $W(\alpha)$ всех чисел, меньших чем α, счётно (имеет тип α), значит его элементы могут быть занумерованы в последовательность

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots \tag{5}$$

(причём порядок номеров m в этой последовательности, вообще говоря, ничего не имеет общего с порядком во вполне упорядоченном множестве $W(\alpha)$). Среди чисел (5) нет наибольшего (так как α — второго рода). Возьмём число $\alpha_0 = \xi_0$. Так как ξ_0 не есть наибольшее число в последовательности (5), то в этой последовательности существуют числа, бо́льшие чем ξ_0. Пусть $\alpha_1 = \xi_{p_1}$ — то из них, которое обладает наименьшим индексом $p_1 \geqslant 1$; имеем:

$$p_0 = 0 < p_1, \quad \xi_{p_0} < \xi_{p_1}.$$

Так как число ξ_{p_1} не является наибольшим в последовательности (5), то в этой последовательности существуют числа, бо́льшие чем ξ_{p_1}; среди них возьмём число $\alpha_2 = \xi_{p_2}$ с наименьшим индексом p_2; при этом $p_2 > p_1 > p_0 = 0$. Продолжая так рассуждать дальше, получим последовательность

$$\alpha_0 = \xi_{p_0}, \quad \alpha_1 = \xi_{p_1}, \quad \alpha_2 = \xi_{p_2}, \ldots, \quad \alpha_n = \xi_{p_n}, \ldots, \tag{6}$$

причём

$$0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots \tag{7}$$

Докажем, что $\alpha = \lim\limits_{(n)} \alpha_n$. Очевидно, α больше, чем любое α_n. Остаётся доказать, что не существует никакого $\xi \in W(\alpha)$, которое бы превосходило все числа (6). Возьмём произвольное $\xi \in W(\alpha)$. Так как в последовательности (5) фигурируют все элементы множества $W(\alpha)$, то ξ есть некоторое ξ_m. Так как натуральные числа p_n неограниченно растут, то существует одно единственное p_n такое, что

$$p_n \leqslant m < p_{n+1};$$

тогда непременно $\xi_m < \xi_{p_{n+1}} = \alpha_{n+1}$, так как в противном случае число $\xi_{p_{n+1}}$ было бы выбрано неправильно: ξ_m было бы больше, чем ξ_{p_n} и имело бы меньший индекс m, чем число $\xi_{p_{n+1}}$. Теорема 17 доказана.

Эта теорема может быть сформулирована и так:

Теорема 17′. *Всякое предельное трансфинитное число второго класса конфинально числу* ω.

Таким образом, всякое натуральное число конфинально 1, а всякое трансфинитное второго класса конфинально либо 1 (если оно — первого рода), либо числу ω (если оно — предельное).

Замечание 2. Из теоремы 17 вытекает одно следствие, которому придавалось большое значение особенно в первый, «классический» период развития теории множеств — период, не омрачённый никакими сомнениями в правомерности тех или иных, с наивной точки зрения очевидных теоретико-множественных конструкций. Следствие, о котором идёт речь, таково: если у нас уже построено тем или иным путём множество всех порядковых чисел $W(\alpha)$, меньших чем данное число α второго класса, то число α можно всегда построить одним из двух следующих способов: либо прибавлением 1 к некоторому вполне определённому числу $\alpha' \in W(\alpha)$ (именно, к наибольшему среди всех чисел $x \in W(\alpha)$, если такое наибольшее число существует), либо переходом к пределу некоторой возрастающей последовательности (4), составленной из чисел $< \alpha$. Таким образом, в то время как каждое натуральное число получается прибавлением 1 к наибольшему предшествующему ему натуральному числу, в области трансфинитных чисел одной этой операции прибавления 1 недостаточно, нужна ещё операция перехода к пределу возрастающей последовательности. Это положение вещей вызывает, однако, следующее замечание. В случае чисел натуральных (и трансфинитных первого рода) переход от чисел, меньших α, к числу α является действительно вполне определённым, так как существует одно единственное наибольшее число в множестве $W(\alpha)$, к этому числу и надо прибавить 1. Этой определённости, однако, нет, когда дело идёт о построении последовательности (4), имеющей своим пределом данное предельное число α. Действительно, последовательность (4) строится совершенно автоматически и, как говорят, «эффективно», как скоро нами выбрана некоторая определённая запись множества $W(\alpha)$ в виде последовательности (5). Но всё дело в том, что выбор этой записи (т. е. выбор некоторого взаимно однозначного отображения f_α множества $W(\alpha)$ на множество $W(\omega)$ всех натуральных чисел-индексов) при настоящем состоянии наших знаний является актом чистого произвола: мы не имеем никакого закона, по которому можно было бы построить отображение f_α для любого из несчётно-многих трансфинитных чисел α второго класса.

Мы, правда, знаем, что для каждого α, $\omega < \alpha < \omega_1$ такие отображения существуют, т. е. что множество F_α этих отображений непусто. Но мы не имеем никакого правила, позволяющего из всех этих множеств F_α выбрать по одному определённому элементу. Вместо того, чтобы говорить о множестве F_α всевозможных отображений f_α, можно было бы прямо говорить о множестве M_α всех последовательностей (6), сходящихся к предельному числу α: множества M_α непусты в силу теоремы 17, но непустота этих множеств ещё не означает наличия правила, которое позволило бы нам для всех предельных трансфинитных чисел $\alpha < \omega_1$ выбрать по одной определённой последовательности (6).

Существование множества M последовательностей (6), по одной последовательности для каждого предельного $\alpha < \omega_1$, может утверждаться нами лишь на основе следующего общего допущения, известного под названием аксиомы Церме́ло (Zermelo) или аксиомы произвольного выбора.

Аксиома произвольного выбора. *Пусть дано множество $\mathfrak{M}$, элементами которого являются попарно не пересекающиеся непустые множества M_α. Тогда существует множество M, каждый элемент которого есть элемент m_α некоторого множества M_α и которое пересекается с каждым множеством M_α лишь по одному элементу m_α.*

Другими словами, множество M, существование которого постулируется этой аксиомой, состоит из элементов, «выбранных по одному» из каждого множества $M_\alpha \in \mathfrak{M}$.

Аксимома произвольного выбора была высказана свыше 40 лет тому назад и вызвала многочисленные исследования о фактическом месте, занимаемом ею в логическом построении современной математики.

При этом оказалось, что мы не умеем обойтись без применения аксиомы Цермело при доказательстве некоторых элементарных теорем, относящихся даже не к теории множеств в собственном смысле слова, а просто к математическому анализу. Возьмём, например, следующие два определения непрерывности функции f, заданной на числовой прямой:

1° Функция f называется непрерывной в точке x_0, если ко всякому положительному ε можно подобрать такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x_0 - x| < \delta$, имеем $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

2° Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для всякой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к точке $f(x_0)$.

Эти два определения, как известно, эквивалентны. Проанализируем обычное доказательство их эквивалентности. Пусть f непрерывна в точке x_0 в первом смысле, и пусть дана какая-нибудь последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к x_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что для всех x, лежащих в интервале $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, имеем $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Взяв для данного ε такое δ, подбираем к нему натуральное N так, чтобы для всех $n \geqslant N$ было $|x_0 - x_n| < \delta$, значит $|f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon$. Так как это имеет место для любого $\varepsilon > 0$, то последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к $f(x_0)$. Итак, если функция непрерывна в смысле определения 1°, то она непрерывна и в смысле определения 2° *).

Пусть теперь f — функция, непрерывная в точке x_0 в смысле определения 2°. Докажем, что она непрерывна и в смысле определения 1°. Предположим противное. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\delta > 0$ в интервале $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ имеются точки $x_{(\delta)}$, для которых $|f(x_0) - f(x_{(\delta)})| \geqslant \varepsilon$. Давая числу δ значения $\delta_n = \frac{1}{n}$ и беря для каждого такого δ_n некоторое $x_{(\delta_n)}$, которое обозначим для краткости через x_n, получим последовательность точек x_n, сходящуюся к точке x_0, в то время как для всех этих точек x_n имеем $|f(x_0) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$. Доказательство эквивалентности определений 1° и 2° этим закончено.

Рассмотрим ближе вторую половину этого доказательства. Существование точек $x_{(\delta)}$, одновременно удовлетворяющих двум условиям $|x_0 - x_{(\delta)}| < \delta$ и $|f(x_0) - f(x_{(\delta)})| \geqslant \varepsilon$, не означает (согласно обычной точке зрения, принятой и в этой книге) того, что мы можем дать правило для фактического построения одной определённой такой точки: достаточно, чтобы могло привести к противоречию предположение, что множество этих точек пусто. Поэтому предположение, что функция f не является в смысле определения 1° непрерывной в данной точке x_0, означает лишь, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество $M_{(\delta)}$ тех точек x интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, для которых $|f(x_0) - f(x)| \geqslant \varepsilon$, непусто. Переход от последовательности непустых множеств

$$M_n = M_{(\delta_n)}$$

*) Заметим, что доказательство этого утверждения не опиралось на аксиому Цермело: выбор числа N производится однозначно, так как можно взять первое такое (натуральное) N, что для всех $n > N$ имеем $|x_0 - x_n| < \delta$.

к последовательности точек $x_n \in M_n$ может быть осуществлён, вообще говоря, лишь путём произвольного выбора*) в каждом из множеств M_n по одной точке, которую мы и обозначаем через x_n.

Применим аксиому произвольного выбора к доказательству следующего интересного предложения:

Теорема 18. *Существует множество E, состоящее из действительных чисел и имеющее мощность $\aleph_1$ (другими словами, верно неравенство $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{c}$,* где $\mathfrak{c}$, *как всегда, есть мощность континуума).*

Для доказательства теоремы 18 дадим принадлежащее Лебегу фактическое разбиение интервала $0 < t < 1$ на $\aleph_1$ попарно не пересекающихся множеств E_α, $\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$, т. е. дадим представление интервала $0 < t < 1$ в виде суммы $\bigcup\limits_{\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1} E_\alpha$ попарно не пересекающихся множеств, причём это представление будет совершенно эффективным (в том смысле, что, как скоро дана точка t интервала $(0; 1)$, можно однозначно определить то единственное множество E_α, которому она принадлежит). Разбиение интервала $(0; 1)$ на множества E_α осуществляется так.

Занумеруем раз навсегда все рациональные числа интервала $(0; 1)$ в последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{8}$$

Пусть t—произвольная точка интервала $(0; 1)$. Число t однозначно может быть представлено в виде суммы бесконечного ряда

$$t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} + \ldots \tag{9}$$

(в самом деле, достаточно взять разложение числа t в бесконечную двоичную дробь, причём, в случае, если t допускает два таких разложения, берём то из них, кото-

---

*) Множества M_n пересекаются: более того, очевидно $M_{n+1} \subseteq M_n$; поэтому, чтобы применить аксиому Цермело в том виде, как она была сформулирована, надо от множеств M_n перейти к множествам $M_n \setminus M_{n+1}$, непустые среди них обозначить через $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n, \ldots$ и из них уже выбирать на основании аксиомы Цермело по точке x_n (см., впрочем, стр. 101).

рое, начиная с некоторого места, состоит из одних единиц; числа $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ суть номера двоичных знаков нашего разложения, равных 1). Имея разложение (9), рассмотрим множество рациональных чисел

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots \tag{10}$$

Возможны два случая:

а) Множество (10) не является вполне упорядоченным (по величине входящих в него рациональных чисел): в этом случае относим точку к множеству E_{ω_1}.

б) Множество (10) вполне упорядочено и имеет тип α, $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$; в этом случае относим точку t к множеству E_α.

Таким образом, каждая точка t интервала (0; 1) попадёт в одно и только в одно множество E_α, где $\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$, так что эти множества попарно не пересекаются и дают в сумме весь интервал (0; 1). Докажем, что, каково бы ни было трансфинитное число α второго класса, множество E_α непусто.

В самом деле, на основании теоремы 1, существуют множества M_α, состоящие из рациональных чисел и имеющие порядковый тип α. Возьмём какое-нибудь одно такое множество M_α; пусть его элементы суть рациональные числа

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots$$

(записанные в порядке возрастания их номеров в последовательности (8)). Действительное число $t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{2^{n_k}} + \ldots$ содержится в множестве E_α.

Для доказательства теоремы 18 нам остаётся применить аксиому Цермело и выбрать из каждого множества E_α по точке x_α. Полученное множество $E = \{x_\alpha\}$ будет иметь мощность $\aleph_1$.

Замечание 3. Только что приведённый пример пользования аксиомой Цермело типичен: доказав при помощи этой аксиомы существование имеющих мощность $\aleph_1$ множеств E, состоящих из действительных чисел, мы в то же время лишены какой бы то ни было возможности указать индивидуальный пример такого множества: два лица, говорящие о каком-либо множестве вида $E = \{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in E_\alpha$ (по одной точке из каждого E_α), никак не могут быть уверены в том, что они говорят об одном и том же множестве, так как не существует объективного признака, позволяющего удостовериться в том, что оба эти лица выбрали из каждого множества E_α по одному и тому же элементу x_α. В этом смысле мы говорим, что построенное только что точечное множество E мощности $\aleph_1$ есть множество неэффективное (в противоположность множеству $\mathfrak{M}$ мощности $\aleph_1$, элементами которого являются сами множества E_α; это множество $\mathfrak{M}$ — эффективно, его элементы E_α определены совершенно однозначно, так как о каждой данной точке t интервала $(0; 1)$ мы можем сказать, какому именно множеству E_α она принадлежит).

Замечание 4. Приведём несколько дальнейших примеров на применение аксиомы произвольного выбора.

1° Доказательство теоремы: сумма счётного множества счётных множеств есть счётное множество — опирается на аксиому Цермело. В самом деле, пусть дано счётное множество счётных множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Для простоты предполагаем, что множества E_n попарно не пересекаются. Так как каждое из множеств E_n счётно, то для любого n существует по крайней мере одно взаимно однозначное отображение множества E_n на множество всех натуральных чисел. Другими словами, множество M_n, элементами которого являются взаимно однозначные отображения множества E_n на множество всех натуральных чисел, непусто. Множества M_n для различных n попарно не пересекаются. Применяя аксиому Цермело, выбираем из каждого M_n по одному элементу. Это даёт нам возможность для каждого n некоторым определённым способом записать множество E в виде бесконечной последовательности:

$$E_n = \{ e_1^n, e_2^n, \ldots, e_k^n, \ldots \}.$$

Таким образом, всё множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ записано в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{l}
e_1^1,\ e_2^1,\ e_3^1,\ e_4^1,\ \ldots,\ e_k^1,\ \ldots \\
e_1^2,\ e_2^2,\ e_3^2,\ e_4^2,\ \ldots,\ e_k^2,\ \ldots \\
e_1^3,\ e_2^3,\ e_3^3,\ e_4^3,\ \ldots,\ e_k^3,\ \ldots \\
\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\
e_1^n\ \ e_2^n\ \ e_3^n\ \ e_4^n,\ \ldots,\ e_k^n,\ \ldots \\
\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots
\end{array}$$

что даёт нам возможность занумеровать все элементы множества E уже совершенно эффективно (глава 1, § 4, стр. 28).

2° Проведём с полной аккуратностью (опирающееся на аксиому Цермело) доказательство теоремы 3 из § 4 главы 1:

Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Множество E бесконечно; это означает, что при любом натуральном n множество E содержит подмножество, состоящее из n элементов. Поэтому, обозначая через $\mathfrak{M}_n$ множество всех подмножеств множества E, каждое из которых содержит ровно $n!$ элементов, мы можем утверждать, что при любом натуральном n множество $\mathfrak{M}_n$ непусто. Очевидно, никакие два множества $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_q$, $p \neq q$, не пересекаются. Применяя аксиому Цермело, выберем из каждого множества $\mathfrak{M}_n$ по одному элементу M_n. Имеем последовательность

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

Так как множество M_n состоит из $n!$ элементов, а число элементов множества $M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1}$ меньше чем

$$(n-1)\,[(n-1)!] < n!,$$

то в множестве $M_n \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1})$ можно выбрать элемент x_n. Множество

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

есть счётное подмножество множества E.

Вопрос. Чем отличается только что приведённое доказательство от доказательства той же теоремы, данного в главе 1, § 4, и в чём преимущество теперешнего доказательства сравнительно с тогдашним?

§ 5. Теорема Цермело

Теорема Цермело гласит:

Всякое множество может быть сделано вполне упорядоченным *).

---

*) Мы даём теорему Цермело в её традиционной формулировке. По поводу этой формулировки вспомним, что мы определили упорядоченное множество, как совокупность двух понятий: во-первых, некоторого множества M и, во-вторых, имеющегося между любыми двумя различными элементами x, y множества M отношения $x < y$ (или $y < x$); поэтому выражения «данное (вполне) упорядоченное множество» и «множество всех элементов данного (вполне) упорядоченного множества» имеют неодинаковое содержание (так же как разное содержание имеют выражения «данное метрическое пространство» и «множество всех точек данного метрического пространства» или «данная группа» и «множество всех элементов данной группы»). Если соблюдать полную логическую аккуратность, то теорему Цермело следовало бы сформулировать так: *«Ко всякому множеству существует вполне упорядоченное множество, множеством всех элементов которого является данное множество»*. За исключением случаев, когда данное множество M пусто или

Доказательству (опирающемуся на аксиому Цермело) предпошлём одно общее замечание, касающееся отображений множеств.

В первой главе, § 3 понятие отображения множества X в множество Y было введено как новое элементарное понятие, не подлежащее определению: было просто сказано, что если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ множества Y, то имеется отображение f множества X в Y. Теперь мы заметим, что в действительности понятие отображения сводится к понятию множества. Именно, наряду с данными двумя множествами X и Y рассмотрим множество Z, элементами которого являются всевозможные пары (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Множество всех таких пар называется *произведением множества X на множество Y* (Кантор) и обозначается через $[X, Y]$. *Задать* (*однозначное*) *отображение f множества X в множество Y — значит задать некоторое подмножество Φ множества $Z = [X, Y]$, удовлетворяющее условию: каждый элемент x_0 множества X входит в одну и лишь в одну пару $z_0 = (x_0, y_0)$, являющуюся элементом множества Φ.* Если (x_0, y_0) есть (единственная) пара $z_0 \in \Phi$, содержащая данный элемент $x_0 \in X$, то элемент y_0 этой пары и есть по определению образ $y_0 = f(x_0)$ элемента x_0 при отображении f. Обратно, если дан элемент $y_0 \in Y$, то множество всех элементов $x \in X$, входящих в какую-нибудь из пар $(x, y_0) \in \Phi$, называется *прообразом* элемента $y_0 \in Y$ при отображении f и обозначается через $f^{-1}(y_0)$.

Мы можем теперь дать аксиоме Цермело такую формулировку:

Для всякого множества $\mathfrak{M}$ попарно не пересекающихся непустых множеств M_α существует отображение f множества $\mathfrak{M}$ в сумму $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$ всех данных множеств M_α, такое, что образом всякого элемента $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ при этом отображении является некоторый элемент m_α множества M_α:

$$f(M_\alpha) = m_\alpha \in M_\alpha.$$

состоит лишь из одного элемента, для него существует более одного вполне упорядоченного множества, множеством всех элементов которых оно является.

Докажем, что в этой формулировке аксиомы Цермело можно отказаться от требования, чтобы множества M попарно не пересекались. Докажем, другими словами, следующий

Обобщённый принцип произвольного выбора. *Для всякого множества $\mathfrak{M}$ непустых множеств M_α существует отображение множества $\mathfrak{M}$ в сумму $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$ множеств M_α, при котором образом каждого элемента $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ является некоторый элемент m_α множества M_α.*

Доказательство заключается в весьма простом сведении доказываемого предложения к аксиоме Цермело в её первоначальном виде. Рассмотрим, в самом деле, наряду с каждым данным множеством M_α множество M'_α, элементами которого являются всевозможные пары вида (M_α, m_α), где $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ фиксировано, а m_α суть всевозможные элементы множества M_α. Ставя в соответствие каждому элементу (M_α, m_α) множества M'_α элемент m_α множества M_α, содержащийся в паре (M_α, m_α), получим взаимно однозначное соответствие между множеством M'_α и множеством M_α. Множество всех множеств M'_α обозначим через $\mathfrak{M}'$. Двум различным элементам M_α и M_β множества $\mathfrak{M}$ соответствуют непересекающиеся множества M'_α и M'_β, так что к множеству $\mathfrak{M}'$ множеств M'_α можно применить аксиому Цермело в её первоначальном виде и выбрать из каждого множества M'_α по элементу $m'_\alpha = (M_\alpha, m_\alpha) \in M'_\alpha$. Ставя в соответствие каждому M_α элемент m_α (тот самый, который содержится в паре (m_α, M_α), являющейся выбранным нами элементом m'_α множества M'_α), получим отображение $m_\alpha = f(M_\alpha)$, существование которого утверждается в обобщённом принципе выбора. Обобщённый принцип произвольного выбора мы будем кратко формулировать так:

Если дано какое-нибудь множество $\mathfrak{M}$ непустых множеств M_α, то можно из всех множеств M_α выбрать по элементу m_α (причём среди выбранных элементов могут быть и совпадающие).

При доказательстве теоремы Цермело нам будет удобна ещё следующая

Лемма 1. *Для того чтобы данное упорядоченное множество M было вполне упорядоченным, достаточно (и очевидно необходимо), чтобы в множестве M и в верхнем классе любого сечения множества M был первый элемент.*

В самом деле, предположим, что в данном упорядоченном множестве M наше условие выполнено. Пусть E—какое-нибудь непустое подмножество множества M. Докажем, что в E имеется первый элемент. Это, очевидно, верно, если E содержит первый элемент x_0 всего множества M. Пусть элемент x_0 не содержится в E. Произведём сечение множества M, отнеся к первому классу A все те элементы $x \in M$, которые предшествуют всем элементам множества E, а ко второму классу B—все остальные элементы множества M. Так как $x_0 \in A, E \subseteq B$, то оба класса непусты; кроме того, из $x \in A$, $y \in B$ следует $x < y$, так что мы действительно имеем сечение. Пусть y_0—первый элемент в B (такой существует по условию). Докажем, что $y_0 \in E$ (так как $E \subseteq B$, то отсюда будет следовать, что y_0—первый элемент в E). Но если бы y_0 не содержалось в E, то для любого $y \in E$ мы имели бы $y_0 < y$, откуда $y_0 \in A$, вопреки предположению. Лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы Цермело. Это доказательство (заимствованное у Хаусдорфа) довольно точно воспроизводит доказательство самого Цермело.

Пусть дано произвольное множество M. Так как пустое (и вообще, всякое конечное) множество, очевидно, может быть вполне упорядочено, то мы можем предположить множество M непустым (даже бесконечным). Рассмотрим множество всех непустых подмножеств Q_α множества M и согласно обобщённому принципу выбора в каждом из этих множеств Q_α выберем по элементу p_α. Этот элемент p_α (который считаем определённым для каждого непустого $Q_\alpha \subseteq M$) называем *отмеченным* элементом в Q_α. Отмеченный элемент множества Q_α называем также *«придаточным»* элементом к множеству $P_\alpha = M \setminus Q_\alpha$ и обозначаем через $f(P_\alpha)$. Таким образом, для всякогом ножества $P_\alpha \subset M$ однозначно определён придаточный элемент $f(P_\alpha) = p_\alpha \in Q_\alpha = M \setminus P_\alpha$. Множество $P'_\alpha = P_\alpha \bigcup p_\alpha$ называем *«преемником»* множества P_α. *Преемник определён таким образом для каждого множества $P_\alpha \subset M$.*

Назовём теперь *цепью множества* M всякое множество K, удовлетворяющее следующим условиям:

а) элементами множества K являются подмножества множества M;

б) пустое множество является элементом множества K;

в) сумма любых множеств, являющихся элементами множества K, есть элемент множества K;

г) если $P_\alpha \in K$ и $P_\alpha \neq M$, то и $P'_\alpha \in K$.

Цепи существуют: в самом деле, множество всех подмножеств множества M является цепью.

Легко проверить, что пересечение любого множества цепей есть цепь; значит, существует так называемая *наименьшая цепь* множества M, именно цепь K_0, являющаяся пересечением всех цепей множества M. Относительно этой наименьшей цепи K_0, докажем следующее предложение:

Лемма 2. *Если* $A \in K_0$, $B \in K_0$, $A \neq B$, *то либо* $A \subset B$, *либо* $B \subset A$.

В самом деле, назовём какое-либо множество $P \in K_0$ *нормальным*, если, каково бы ни было $X \in K_0$, имеем либо $P \subseteq X$, либо $X \subset P$. Для доказательства леммы 2 достаточно убедиться в том, что все множества $P \in K_0$ нормальны. Для этого обозначим через K' множество всех нормальных $P \in K_0$. Достаточно доказать, что K' есть цепь: так как $K' \subseteq K$ и K_0 есть наименьшая цепь, то отсюда будет следовать, что $K' = K_0$.

Доказательство того, что K' есть цепь, в свою очередь, опирается на следующее вспомогательное предложение:

Лемма 2' (к лемме 2). *Пусть* $P \in K_0$, $P \subset M$; *если* P *— нормальное множество, то для любого множества* $X \in K_0$ *имеем либо* $X \subseteq P$, *либо* $X \supseteq P'$ (другими словами, если P нормально, то и P' нормально).

Для доказательства леммы 2' обозначим через $K(P)$ множество всех $X \in K_0$, удовлетворяющих (для данного, зафиксированного нормального $P \subset M$) условию: либо $X \subseteq P$, либо $X \supseteq P'$. Достаточно доказать, что $K(P)$ есть цепь: так как $K(P) \subseteq K_0$, а K_0 — наименьшая цепь, то отсюда будет следовать, что $K(P) = K_0$, т. е. что лемма 2' верна.

Итак, доказываем, что $K(P)$ есть цепь. Очевидно, пустое множество является элементом множества $K(P)$.

Пусть даны какие-нибудь $P_\alpha \in K(P)$; докажем, что их сумма $\bigcup_\alpha P_\alpha$ также есть элемент множества $K(P)$. В самом деле, если каждое слагаемое P_α содержится в P, то и $\bigcup_\alpha P_\alpha$ содержится в P; если же хоть одно слагаемое P_α не содержится в P, то из $P_\alpha \in K(P)$ следует, что $P_\alpha \supseteq P'$, а тогда тем более $\bigcup_\alpha P_\alpha \supseteq P'$.

Остаётся доказать, что из $P_\alpha \in K(P)$, $P_\alpha \neq M$ следует, что $P'_\alpha \in K(P)$. Но так как $P_\alpha \in K(P)$, то либо $P_\alpha \subseteq P$, либо $P_\alpha \supseteq P'$. Во втором случае и подавно $P'_\alpha \supseteq P'$. Рассмотрим первый случай: $P_\alpha \subseteq P$. Если $P_\alpha = P$, то $P'_\alpha = P'$, и снова $P'_\alpha \in K(P)$. Пусть $P_\alpha \subset P$; докажем, что в этом случае $P'_\alpha \subseteq P$. В самом деле, так как P предположено нормальным, то либо $P'_\alpha \subseteq P$, тогда всё готово, либо $P'_\alpha \supset P$; но в последнем случае мы имели бы $P'_\alpha \setminus P_\alpha = (P'_\alpha \setminus P) \cup \cup (P \setminus P_\alpha)$, причём каждое из двух заключённых в скобки слагаемых непусто; поэтому множество $P'_\alpha \setminus P_\alpha$ содержало бы по крайней мере два элемента, тогда как в действительности оно состоит из единственного элемента p_α. Итак, случай $P'_\alpha \supset P$ невозможен, и лемма 2′ доказана.

Переходим к доказательству леммы 2. Как уже было сказано, достаточно проверить, что множество K' всех нормальных $P \in K$ есть цепь. Делаем эту проверку. Очевидно, пустое множество нормально.

Пусть дано любое множество нормальных P_α. Докажем, что их сумма $\bigcup_\alpha P_\alpha$ также нормальна. В самом деле, пусть X — произвольное множество, являющееся элементом множества K_0. Если каждое P_α содержится в X, то тем же свойством обладает и их сумма; если хоть одно P_α содержит множество X, то тем более $\bigcup_\alpha P_\alpha \supseteq X$. Нормальность множества $\bigcup_\alpha P_\alpha$ этим доказана.

Остаётся доказать, что если P_α нормально, то тем же свойством обладает и множество P'_α. Но это утверждение, как мы видели, и есть утверждение леммы 2′.

Лемма 2 доказана. Из неё следует, что, полагая для двух каких-либо элементов $P_\alpha \in K_0$, $P_\beta \in K_0$

$$P_\alpha \prec P_\beta, \quad \text{если} \quad P_\beta \subset P_\beta,$$

мы превращаем множество K_0 в упорядоченное множество. Докажем, что упорядоченное таким образом множество K_0 вполне упорядочено. В самом деле, пустое множество является, очевидно, первым элементом множества K_0. В силу леммы 1, остаётся доказать, что при всяком сечении $K_0 = A \bigcup B$ в упорядоченном множестве K_0 верхний класс B содержит первый элемент. Рассмотрим сумму P всеех $P_\alpha \in A$. Множество P есть элемент множества K_0 [по свойству в) цепи], и поэтому либо $P \in A$, либо $P \in B$. Если $P \in A$, то, взяв какое-нибудь $P_\beta \in B$, имеем $P \prec P_\beta$, значит $P \subset P_\beta$. Поэтому $P \neq M$ и преемник $P' = P \bigcup p$ множества P существует. По самому определению множества P имеем $P' \in B$(так как иначе было бы $P' \subseteq P$).Множество P' есть первый элемент множества B (так как если бы был элемент $P_\beta \prec P'$, $P_\beta \in B$, то было бы $P \prec P_\beta \prec P'$, т. е. $P \subset P_\beta \subset P'$, чего не может быть, так как $P' \setminus P$ состоит из единственного элемента p). Итак, в случае $P \in A$ в B имеется первый элемент P'. Если же $P \in B$, то само P есть первый элемент в B. В самом деле, каков бы ни был элемент $P_\beta \in B$, для любого $P_\alpha \in A$ имеем $P_\alpha \prec P_\beta$, т. е. $P_\alpha \subset P_\beta$, значит и сумма P всех P_α содержится в P_β, т. е. $P \preceq P_\beta$. Итак, K_0 есть вполне упорядоченное множество.

Докажем, наконец, что между множеством M и множеством всех $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$ существует взаимно однозначное соответствие (позволяющее перенести на множество M порядок из вполне упорядоченного множества K_0 и тем сделать множество M вполне упорядоченным). Искомое взаимно однозначное соответствие осуществляется, как мы сейчас увидим, тем, что мы каждому $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$ ставим в соответствие его придаточный элемент $p_\alpha = f(P_\alpha)$. Покажем, что определённое таким образом отображение f множества всех $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$ в множество M взаимно однозначно. В самом деле, если P_α, P_β — два различных элемента множества K_0 и, например, $P_\alpha < P_\beta$, то это означает, что $P_\alpha \subset P_\beta$. Но тогда $P'_\alpha = P_\alpha \bigcup p_\alpha$ (как первый, следующий за P_α элемент вполне упорядоченного множества K_0) может находиться с множеством P_β лишь в отношении $P'_\alpha \leqslant P_\beta$, т. е. $P_\alpha \bigcup p_\alpha \subseteq P_\beta$. Значит $p_\alpha \in P_\beta$, тогда как p_β не содержится в P_β и поэтому не может совпадать с p_α.

Итак, различным элементам множества K_0 соответствуют различные элементы множества M. Остаётся доказать, что взаимно однозначное отображение f есть отображение на всё множество M. Для этого возьмём какой-нибудь элемент $p \in M$. Обозначим через P сумму всех множеств $P_\alpha \in K_0$, не содержащих элемент p (такие P_α заведомо существуют: к ним относится, например, пустое множество, являющееся элементом множества K_0). Так как K_0 — цепь, то $P \in K_0$. Докажем, что p есть придаточный элемент к P, т. е. $f(P) = p$. Но если бы p не было придаточным элементом множества P, то множество $P' \supset P$ также не содержало бы элемент p, что противоречит тому, что P есть сумма всех $P_\alpha \in K_0$, не содержащих p. Итак, действительно, $f(P) = p$, и доказательство теоремы Цермело доведено до конца.

Замечание 1. Наше последнее рассуждение содержит доказательство того, что (единственное) $P \in K_0$, которому, в силу отображения f, поставлен в соответствие данный элемент $p \in M$, есть сумма $P = f^{-1}(p)$ всех тех $P_\alpha \in K_0$, которые не содержат элемент p.

Замечание 2. Единственный элемент произвола, содержащийся в только что приведённом доказательстве теоремы Цермело, состоит в выборе для каждого множества $P \subset M$ его придаточного элемента $p = f(P) \in M \setminus P$. После того как этот выбор сделан, все рассуждения, приводящие к внесению в множество M полной упорядоченности, происходят совершенно автоматически и однозначно. Таким образом, если заданное множество M таково, что мы умеем эффективно осуществить для каждого $P \subset M$ выбор некоторого элемента $p \in M \setminus P$, то множество M может быть вполне упорядочено эффективным образом. Так, например, если мы за M возьмём множество всех натуральных чисел, и для каждого множества $P \subset M$ определим придаточный элемент $p = f(P)$ как наименьшее натуральное число, не принадлежащее множеству P, то применяя предыдущие рассуждения, мы и получим естественный порядок в множестве всех натуральных чисел. Если же мы определим $f(P)$ как то, не принадлежащее множеству P, натуральное число, которое состоит из наименьшего числа простых множителей и среди чисел с данным числом множителей является наименьшим, то мы получим полное упорядочение множества всех натуральных чисел по типу ω^2: сначала будут идти все простые числа в их естественном порядке, потом все числа, состоящие из двух простых множителей, также в их естественном порядке, и т. д.

Вообще, если нам дано какое-нибудь вполне упорядоченное множество и мы хотим восстановить этот порядок, рассуждая как при доказательстве теоремы Цермело, то нам надо объявить придаточным элементом $f(P)$ для любого $P \subset M$ первый элемент множества $M \setminus P$ (в том порядке, который дан в множестве M с самого начала и который мы хотим восстановить). В этом, если угодно, и заключается вся идея доказательства Цермело.

§ 6. Теоремы о кардинальных числах

Из теоремы Цермело вытекает, что всякое кардинальное число может быть рассматриваемо как мощность некоторого вполне упорядоченного множества. Это позволяет нам дополнить результаты § 6 главы 1 следующим весьма существенным предложением:

Теорема 19. *Всякие две мощности a и b сравнимы между собою, т. е. либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Другими словами, любое множество мощностей является упорядоченным (по величине*)).*

В самом деле, пусть A и B — два вполне упорядоченных множества, имеющих соответственно мошности a и b. Тогда, в силу теоремы 9', имеются лишь три возможности:

либо A и B подобны между собою (тогда $a = b$);

либо A подобно некоторому отрезку множества B (тогда $a \leqslant b$);

либо B подобно некоторому отрезку можества A (тогда $b \leqslant a$).

Теорема 19 этим доказана. Из этой теоремы и из следствия теоремы 16 вытекает:

Следствие. *Для всякой несчётной мощности m имеем $m \geqslant \aleph_1$ (т. е. $\aleph_1$ есть наименьшая несчетная мощность).*

Установим теперь некоторые соотношения между мощностями и порядковыми числами.

Пусть дано какое-нибудь бесконечное кардинальное число m. Рассмотрим все порядковые числа мощности m (т. е. все порядковые типы вполне упорядоченных множеств мощности m). *Совокупность этих порядковых чисел обозначается через $Z(m)$ и называется числовым классом, соответствующим мощности m.*

В частности, $Z(\aleph_0)$ есть множество всех счетных трансфинитных чисел, т. е. чисел «второго класса». Среди порядковых

---

*) Даже, как мы сейчас увидим, вполне упорядоченным (теорема 20).

чисел мощности m имеется наименьшее; оно обозначается через $\omega(m)$ и называется *начальным порядковым числом мощности* m.

Замечание 1. Всякое начальное число $\omega(m)$ есть предельное число: если бы было $\omega(m)=\alpha+1$, то число α, будучи $<\omega(m)$, по определению начального числа имело бы мощность $m'<m$. Но от прибавления одного элемента мощность бесконечного множества не меняется (глава 1, § 6), поэтому $m=m'$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Рассмотрим множество всех начальных чисел бесконечных мощностей, меньших чем m. Это множество вполне упорядочено. Пусть порядковое число α есть его порядковый тип. Тогда полагаем

$$\omega_\alpha=\omega(m),$$

т. е. снабжаем каждое начальное порядковое число индексом, равным порядковому типу множества всех начальных порядковых чисел, меньших чем данное. Так как α (как и всякое порядковое число) есть порядковый тип множества $W(\alpha)$ всех порядковых чисел $<\alpha$, то $W(\alpha)$ подобно множеству всех начальных чисел, меньших числа $\omega_\alpha=\omega(m)$, так что каждому $\beta<\alpha$ соответствует $\omega_\beta<\omega_\alpha$. Отсюда сразу следует, что любое множество начальных порядковых чисел подобно множеству индексов этих чисел (чем и оправдано введение индексов). В частности, порядковое число ω, являющееся первым бесконечным порядковым числом, получает теперь обозначение ω_0; обозначение ω_1 также уже было нами введено.

Мощность начального числа ω_α обозначается через $\aleph_\alpha$ (этому общему обозначению вполне соответствуют ранее введённые обозначения $\aleph_0$ для счётной мощности и $\aleph_1$ для первой несчётной мощности). Таким образом, каждая мощность m получает обозначение в виде некоторого $\aleph_\alpha$. Пусть нам дано любое множество кардинальных чисел. Ставя в соответствие любому из данных кардинальных чисел $m=\aleph_\alpha$ индекс α, получим взаимно однозначное отображение данного множества мощностей в множество порядковых чисел α; при этом если $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$, то $\omega_\alpha<\omega_\beta$ и, следовательно, $\alpha<\beta$, поэтому наше соответствие есть соответствие подобия. Отсюда и из того, что всякое множество порядковых чисел является вполне упорядоченным, следует:

Теорема 20. *Всякое множество мощностей является вполне упорядоченным (по величине).*

Замечание 2. При этом множество всех бесконечных мощностей n, меньших данной мощности $m=\aleph_\alpha$, подобно множеству $W(\alpha)$ всех порядковых чисел $\beta<\alpha$ (или множеству всех начальных порядковых чисел $\omega_\beta<\omega_\alpha$).

Мы можем определить число $\omega(m)=\omega_\alpha$ как порядковый тип множества всех порядковых чисел, мощность каждого из которых меньше чем данное кардинальное число $m=\aleph_\alpha$. (Это вытекает из того, что порядковое число тогда и только тогда меньше, чем данное $\omega(m)=\omega_\alpha$, когда его мощность меньше m.)

Естественно заняться исследованием числового класса

$$Z_\alpha = Z(\aleph_\alpha),$$

соответствующего данной мощности $m=\aleph_\alpha$*), и определить порядковый тип и мощность этого множества. Прежде всего, очевидно, что числовой класс Z_α есть множество всех порядковых чисел ξ, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega_\alpha \leqslant \xi < \omega_{\alpha+1},$$

т. е.

$$Z_\alpha = W_{\alpha+1} \setminus W_\alpha, \tag{1}$$

где для краткости положено

$$W_\alpha = W(\omega_\alpha).$$

Более того,

$$W_{\alpha+1} = W_\alpha + Z_\alpha, \tag{2}$$

где справа сложение вполне упорядоченных множеств определено как в § 2. Далее, для любого α имеем:

$$W_\alpha = W_0 + \sum_{\nu<\alpha} Z_\nu \tag{3}$$

(сумма берётся по вполне упорядоченному множеству всех $\nu < \alpha$).

Теорема 21. *Множество Z_α имеет порядковый тип $\omega_{\alpha+1}$ и, следовательно, мощность $\aleph_{\alpha+1}$.*

Эту теорему мы выведем из другой, являющейся непосредственным обобщением теоремы 2 главы 1:

Теорема 22. *Пусть m — бесконечное кардинальное число. Сумма m множеств M_α, каждое из которых имеет мощность $\leqslant m$, есть множество мощности $\leqslant m$.*

До того как доказывать теорему 22, покажем, как из неё вытекает теорема 21.

Прежде всего, применяя теорему 22 к случаю, когда все слагаемые, кроме конечного числа, пусты, видим, что частным случаем теоремы 22 является

Теорема 22_0. *Сумма конечного числа множеств, из которых каждое имеет мощность $\leqslant m$ (где m — бесконечное кардинальное число), есть множество мощности $\leqslant m$.*

Выведем теперь из теоремы 22_0 следующее предложение (содержащее теорему 21 как частный случай):

*) В частности, Z_0 есть множество порядковых чисел второго класса, W_0 — множество всех натуральных чисел, а W_1 — всех чисел $< \omega_1$.

Теорема 21′. *В множестве W_α (вообще, во всяком вполне упорядоченном множестве типа ω_α) хвост, отсечённый любым элементом ξ, имеет тип ω_α.*

(Чтобы получить из теоремы 21′ теорему 21, надо в формулировке теоремы 21′ заменить W_α через $W_{\alpha+1}$ и положить $\xi=\omega_\alpha$.)

Доказательство теоремы 21′. Для любого $\xi<\omega_\alpha$ имеем

$$W_\alpha = A(\xi)+B(\xi), \tag{4}$$

где $A(\xi)$ есть отрезок W_α, отсечённый элементом ξ (т. е. множество всех $\xi'<\xi$), а $B(\xi)$ есть хвост этого элемента (т. е. множество всех ξ'', удовлетворяющих неравенствам $\xi\leqslant\xi''<\omega_\alpha$). Тип множества $A(\xi)$ есть ξ; так как ω_α есть первое число мощности $\aleph_\alpha$, то мощность a множества $A(\xi)$ меньше, чем $\aleph_\alpha$. Тип множества $B(\xi)$ есть порядковое число $\eta\leqslant\omega_\alpha$. Пусть $\eta<\omega_\alpha$. Из того, что ω_α есть первое число мощности $\aleph_\alpha$, и из предположения $\eta<\omega_\alpha$ следует, что мощность b множества $B(\xi)$ меньше чем $\aleph_\alpha$. Пусть c есть наибольшее из кардинальных чисел a и b. Имеем $c<\aleph_\alpha$. Тогда из (4) и теоремы 22_0 вытекает, что мощность множества $W_\alpha=A(\xi)+B(\xi)$ не превосходит c, т. е. $<\aleph_\alpha$, тогда как на самом деле мощность множества W_α равна $\aleph_\alpha$.

Теорема 21′ доказана (в предположении, что доказана теорема 22).

Замечание 3. Если в формулировках теорем 22, 22_0 предположить, что хотя бы одно из слагаемых множеств имеет мощность m, то по теореме Кантора-Бернштейна (глава 1, § 6) мощность суммы будет $\geqslant m$, значит, в силу теорем 22, 22_0 равна m.

Введём теперь следующее определение. Назовём суммой (некоторого конечного или бесконечного числа) мощностей m_α мощность суммы попарно не пересекающихся множеств M_α, имеющих соответственно мощности m_α (очевидно, результат зависит лишь от самих мощностей m_α, а не от того, какое именно множество M_α мощности m_α мы взяли). Теорема 22 и её частный случай 22_0 дают нам следующий результат:

Теорема 22′. *Сумма m слагаемых, из которых каждое есть некоторое кардинальное число $\leqslant m$, есть кардинальное число $\leqslant m$, причём если хотя бы одно слагаемое равно m, то и сумма есть m* *). *В частности, сумма конечного или счётного числа*

---

*) То же утверждение верно, если ни одно из слагаемых не равно нулю (в этом случае сумма данных кардинальных чисел есть мощность суммы M попарно не пересекающихся непустых множеств M_α, данных в числе m). Очевидно, мощность множества M в этих условиях $\geqslant m$; с другой стороны, в силу теоремы 22′, она $\leqslant m$.

слагаемых, каждое из которых есть данное бесконечное кардинальное число $\mathfrak{m}$, равна $\mathfrak{m}$.

Переходя, наконец, к доказательству теоремы 22, заметим, что её достаточно доказать в предположении, что все заданные множества M_α в числе $\mathfrak{m} = \aleph_\tau$ попарно не пересекаются, и что каждое из них имеет мощность $\mathfrak{m} = \aleph_\tau$. Тогда множество всех множеств M_α можно упорядочить по типу ω_τ:

$$M_1,\ M_2, \ldots,\ M_\alpha, \ldots$$

(α пробегает все порядковые числа $< \omega_\tau$), и каждое множество M_α тоже можно упорядочить по типу ω_τ:

$$M_\alpha = \{x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2}, \ldots,\ x_{\alpha\beta}, \ldots\}$$

(β пробегает все порядковые числа $< \omega_\tau$).

Всё сводится, таким образом, к доказательству следующего предложения:

Теорема 22″. *Множество всех пар (α, β), где α и β пробегают (независимо друг от друга) множество всех порядковых чисел $< \omega_\tau$ (или вообще какое-нибудь множество мощности $\aleph_\tau$), имеет мощность $\aleph_\tau$.*

Другими словами: *Произведение* (см. § 5, начало) *двух множеств мощности $\aleph_\tau$ имеет ту же мощность $\aleph_\tau$.*

Эта теорема верна для $\aleph_0$. Предположим, что теорема 22″ верна для всех бесконечных кардинальных чисел $< \aleph_\tau$, и докажем, что тогда она верна и для $\aleph_\tau$; этим теорема 22″ и будет доказана для любого $\aleph_\tau$.

Итак, рассмотрим множество E всех пар (α, β), где α и β — всевозможные порядковые числа $< \omega_\tau$. Назовём высотою пары (α, β) порядковое число $\lambda = \alpha + \beta$. Докажем, что для любых $\alpha < \omega_\tau$, $\beta < \omega_\tau$ имеем $\lambda = \alpha + \beta < \omega_\tau$. В самом деле, пусть, например, $\alpha \leqslant \beta$; обозначим через a мощность порядкового числа α, через b — мощность порядкового числа β; тогда $a \leqslant b < \aleph_\tau$; так как теорема 22″ (а значит и теорема 22_0) предположена верной для кардинального числа $b < \aleph_\tau$, то $a + b = b < \aleph_\tau$, но тогда и $\alpha + \beta < \omega_\tau$, и наше утверждение доказано. Обозначим теперь для каждого $\lambda < \omega_\tau$ через E_λ множество всех пар (α, β), высота которых равна λ. Так как каждая пара (α, β) имеет высоту $\alpha + \beta < \omega_\tau$, то

$$E = \bigcup_{0 \leqslant \lambda < \omega_\tau} E_\lambda.$$

Теперь нам понадобится

Лемма. *Для каждого данного $\lambda < \omega_\tau$ и любого $\alpha \leqslant \lambda$ имеется одно единственное порядковое число β такое, что*

$$\alpha + \beta = \lambda;$$

при этом $\beta \leqslant \lambda$ (так как при $\beta > \lambda$ имели бы и $\alpha + \beta \geqslant \beta > \lambda$).

В самом деле, по самому определению сложения порядковых чисел, искомое β однозначно определяется как порядковый тип хвоста, отсекаемого в множестве $W(\lambda+1)$ элементом α.

Из леммы следует, что при заданном λ каждому $\alpha \leqslant \lambda$ однозначно соответствует элемент (α, β) множества E_λ, и так как различным α, естественно, соответствуют различные элементы множества E_λ, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством E_λ и множеством всех порядковых чисел $\alpha \leqslant \lambda$. Это соответствие позволяет перенести в множество E_λ порядок из множества $W(\lambda+1)$, т. е. считать E_λ упорядоченным по типу $\lambda+1$ (отсюда, в частности, следует, что для каждого $\lambda < \omega_\tau$ множество E_λ есть непустое множество).

Упорядочим теперь всё множество E следующим образом. Если пары $\zeta = (\alpha, \beta)$ и $\zeta' = (\alpha', \beta')$ имеют различные высоты $\lambda = \alpha + \beta$ и $\lambda' = \alpha' + \beta'$, то полагаем $\zeta < \zeta'$, если $\lambda < \lambda'$. Если же $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \lambda$, то сохраняем для ζ и ζ' в E тот порядок, который ζ и ζ' имели в E_λ, т. е. полагаем $\zeta < \zeta'$, если $\alpha < \alpha'$.

Отсюда сразу следует, что упорядоченное множество E есть сумма упорядоченного по типу ω_τ множества вполне упорядоченных множеств E_λ и, значит, само есть вполне упорядоченное множество, тип θ которого есть сумма

$$\theta = \sum_{0 \leqslant \lambda < \omega_\tau} (\lambda + 1). \tag{5}$$

Докажем, что $\theta = \omega_\tau$; достаточно доказать, что $\theta \leqslant \omega_\tau$, так как из (5), ясно, что не может быть $\theta < \omega_\tau$.

Предположим, что $\theta > \omega_\tau$. Тогда во вполне упорядоченном множестве E существует отсекаемый некоторым элементом $\xi_1 = (\alpha_1, \beta_1) \in E$ отрезок $A(\xi_1)$ порядкового типа ω_τ. Пусть $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Так как $\lambda_1 < \omega_\tau$, то мощность c порядкового числа λ_1 меньше чем $\aleph_\tau$. Для любого элемента $\xi = (\alpha, \beta)$ отрезка $A(\xi_1)$ имеем, согласно порядку, установленному в E, неравенство $\alpha + \beta \leqslant \lambda_1$, значит, и подавно $\alpha \leqslant \lambda_1$, $\beta \leqslant \lambda_1$. Так как $c < \aleph_\tau$, то мы можем утверждать (по теореме 22″, которая предполагается доказанной для мощности $c < \aleph_\tau$), что множество всех пар (α, β), где $\alpha < \lambda_1 + 1$, $\beta < \lambda_1 + 1$, имеет мощность c. Но тогда и всё множество $A(\xi_1)$ имеет мощность $\leqslant c < \aleph_\tau$ вопреки своему определению.

Теорема 22″ и вместе с нею и теоремы 22, 22_0, 22′, 21, 21′ доказаны.

Прежде чем сформулировать некоторые дальнейшие следствия теоремы 22, определим произведение двух кардинальных чисел a и b, как мощность множества, являющегося произведением какого-либо множества A мощности a и какого-либо множества B мощности b (результат, очевидно, не зависит от того, какие именно множества A и B заданных мощностей мы возьмём). Из теоремы 22 следует, что

$$m^2 = m \tag{6}$$

(для любого бесконечного кардинального числа m). Так как для любого бесконечного кардинального числа m и любого кардинального числа n, $1 \leqslant n \leqslant m$, имеем $m^2 \geqslant nm \geqslant m$, то формула (6) допускает следующее обобщение:

$$nm = m, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \quad m \geqslant \aleph_0. \tag{7}$$

В частности, $\aleph_0 \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ для любого $\alpha \geqslant 0$.

Из доказанного далее следует, что бесконечное кардинальное число m не может быть представлено в виде суммы какого-либо числа $a < m$ слагаемых, каждое из которых равно одному и тому же $b < m$ (так как эта сумма, очевидно, равна ab, а потому равна наибольшему из двух чисел a, b). В частности, кардинальное число вида $\aleph_{\alpha+1}$ (т. е. индекс которого есть порядковое число первого рода) вообще не может быть представлено как сумма меньшего чем $\aleph_{\alpha+1}$ числа слагаемых, каждое из которых меньше чем $\aleph_{\alpha+1}$ (так как каждое из этих слагаемых $\leqslant \aleph_\alpha$, число их $\leqslant \aleph_\alpha$, значит, сумма $\leqslant \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$). Однако уже кардинальное число $\aleph_\omega$ есть сумма счётного числа меньших кардинальных чисел:

$$\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots + \aleph_n + \ldots \quad (n < \omega).$$

Всякое кардинальное число m, являющееся суммой меньших чем m кардинальных чисел, взятых в числе $< m$, называется *иррегулярным*; таково, например, число $\aleph_\omega$. Только что была доказана

Теорема 23. *Всякое число вида $\aleph_{\alpha+1}$ регулярно (т. е. не может быть представлено как сумма, число слагаемых которой меньше, чем $\aleph_{\alpha+1}$, причём каждое слагаемое также меньше чем $\aleph_{\alpha+1}$).*

До сих пор неизвестно, существуют ли регулярные кардинальные числа вида $\aleph_\lambda$, где λ — предельное порядковое число. Такие кардинальные числа называются *эксорбитантными*; если они существуют, то должны быть чрезвычайно велики, что следует уже из того, что мощность их индекса λ (как легко видеть) должна быть равна самому кардинальному числу $\aleph_\lambda$.

Замечание 4. Из теоремы 22_0 далее следует

Теорема 24. *Никакое бесконечное кардинальное число m не может быть представлено в виде суммы конечного числа m кардинальных чисел, каждое из которых меньше чем m (никакое множество данной бесконечной мощности m не может* *быть представлено в виде суммы конечного числа множеств мощностей $< \mathfrak{m}$).*

В самом деле, если кардинальные числа $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ (данные в конечном числе) $< \mathfrak{m}$, то, обозначая через $\mathfrak{m}'$ наибольшее из чисел $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$, заключаем по теореме 22_0, что

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}' < \mathfrak{m}.$$

Замечание 5. Другой формой, по существу, той же теоремы о регулярности кардинальных чисел вида $\aleph_{\alpha+1}$ является следующая

Теорема 25. *Сумма вполне упорядоченного множества типа $< \omega_{\alpha+1}$ порядковых чисел $< \omega_{\alpha+1}$ есть порядковое число $< \omega_{\alpha+1}$.*

В самом деле, пусть

$$\theta = \sum_{\nu} \xi_{\nu},$$

где индекс ν пробегает все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\xi < \omega_{\alpha+1}$. Мощность каждого слагаемого этой суммы $< \aleph_{\alpha+1}$, значит $\leqslant \aleph_{\alpha}$, число слагаемых также $\leqslant \aleph_{\alpha}$, значит, вся сумма есть порядковое число мощности $\leqslant \aleph_{\alpha}$, т. е.

$$\theta \leqslant \omega_{\alpha} < \omega_{\alpha+1}.$$

Так же легко доказывается и следующее предложение естественно обобщающее теорему 15:

Теорема 26. *Если множество порядковых чисел ξ_{ν}, каждое из которых $< \omega_{\alpha+1}$, имеет порядковый тип $\theta < \omega_{\alpha+1}$, то первое порядковое число, следующее за всеми порядковыми числами ξ_{ν}, входящими в данное множество, также $< \omega_{\alpha+1}$.*

В самом деле, рассмотрим сумму $\xi = \sum\limits_{\nu} \xi_{\nu}$. Каждое из наших порядковых чисел ξ_{ν} во всяком случае меньше числа $\xi + 1$, но по теореме 25 имеем $\xi < \omega_{\alpha+1}$, значит, и

$$\xi + 1 < \omega_{\alpha+1}.$$

Поэтому первое число, следующее за всеми ξ_{ν} (будучи заведомо не больше чем $\xi + 1$), также $< \omega_{\alpha+1}$, что и требовалось доказать.

Замечание 6. Для всяких двух кардинальных чисел $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ мы в § 6 главы 1 обозначили через $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ кардинальное число, являющееся мощностью множества A^B, где A — какое-нибудь множество мощности $\mathfrak{a}$, B — какое-нибудь множество мощности $\mathfrak{b}$

и A^B есть множество всех отображений множества B в множество A. Легко определить произведение любого конечного или бесконечного числа кардинальных чисел a_α, переходящее в определение степени a^b в случае, когда все a_α равны между собою. Для этого определим произведение C данного множества B множеств A_α:

$$C = \prod_{A_\alpha \in B} A_\alpha$$

или просто $C = \prod\limits_\alpha A_\alpha$. Именно, элементами множества C являются по определению всевозможные отображения f множества B (элементами которого являются данные множества A_α) в множество $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, удовлетворяющие уже знакомому нам условию $f(A_\alpha) \in A_\alpha$. Если все множества A_α попарно не пересекаются (случай, к которому легко сводится и общий случай), то элементы множества C могут быть определены как всевозможные подмножества множества $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, пересекающиеся с каждым из множества A_α по данному элементу. Если нам дано какое-нибудь множество кардинальных чисел a_α, то, беря для каждого из этих кардинальных чисел a_α множество A_α мощности a_α, определим произведение заданных кардинальных чисел, как мощность произведения множеств A_α (их можно предположить непересекающимися).

В случае, если все A_α имеют ту же мощность a, а множество всех A_α имеет мощность b, получаем степень a^b. Чтобы убедиться в том, что это определение степени совпадает с данным в § 6 главы 1, берём множество B (мощности b), элементами которого являются все множества A_α и только они; так как все множества A_α имеют одну и ту же мощность a, то можно взять одно множество A той же мощности a, находящееся во вполне определённом взаимно однозначном соответствии с каждым из множеств A_α; это позволяет рассматривать отображение, ставящее в соответствие каждому элементу A_α множества B какой-либо элемент $x_\alpha \in A_\alpha$, как отображение множества B в A, и, обратно, любое отображение B в A — как выбор по элементу x_α в каждом A_α. Отсюда и следует тождественность обоих определений степени.

Читатель легко докажет следующее свойство общего умножения мощностей: если в данном произведении кардинальных чисел заменить некоторые множители бо́льшими кардинальными числами или присоединить новые множители, отличные от нуля, то произведение может только увеличиться (но может остаться и неизменным) *).

Легко проверяется также равенство

$$a^{b_1+b_2}=a^{b_1}\cdot a^{b_2}.$$

А именно, берём два непересекающихся множества B_1 и B_2 мощностей b_1 и b_2, а также множество A мощности a; каждое отображение множества $B=B_1\cup B_2$ в A однозначно определяет пару отображений: множества B_1 и множества B_2 в A, и обратно, каждая такая пара определяет отображение B в A. Аналогично доказывается и для любого числа слагаемых формула

$$a^{\Sigma b_\alpha}=\prod_\alpha a^{b_\alpha}.$$

Если все b_α равны одному и тому же кардинальному числу b, а число их равно c, то получаем формулу

$$a^{bc}=(a^b)^c.$$

Замечание 7. Читателю предоставляется проверить, что в случае конечных кардинальных чисел наши определения действий сложения, умножения, возведения в степень переходят в обычные определения элементарной арифметики.

Воспользуемся выведенными правилами для некоторых интересных подсчётов. Прежде всего, из теоремы 22 имеем

$$\aleph_\alpha^2=\aleph_\alpha$$

для любого бесконечного кардинального числа $\aleph_\alpha$. Отсюда по индукции получаем для любого натурального n

$$\aleph_\alpha^n=\aleph_\alpha.$$

Мощность $\aleph_0^{\aleph_0}$ есть мощность множества всех бесконечных последовательностей натуральных чисел. Легко непосредственно убедиться в том, что она равна мощности континуума $c=2^{\aleph_0}$, например, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей $(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots)$ натуральных чисел и множеством всех иррациональных чисел интервала (0; 1), данных их разложениями в бесконечную непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ldots}}}$$

*) Доказательство этой теоремы производится автоматически отправляясь от определения неравенства мощностей в главе 1 Заметим, однако, что, например, из $a<b$, $p<q$, вообще говоря не следует неравенство $a^p<b^q$ (а только $a^p\leqslant b^q$).

Однако имеются читатели, не знакомые с непрерывными дробями; таковые могут вывести формулу

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \tag{8}$$

из соотношений

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0}$$

и

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \tag{9}$$

Последнее соотношение доказывается так:

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Далее, имеем:

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant n^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

для любого натурального n, т. е. $n^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Далее,

$$\aleph_0! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ldots = \mathfrak{c}; \tag{10}$$

в самом деле,

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \leqslant 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Так как $\aleph_1$ есть наименьшая из несчётных мощностей, то $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{c}$ (что мы доказали в § 4 и непосредственно, построив множество действительных чисел, имеющее мощность $\aleph_1$). Вопрос о том, имеет ли место равенство $\mathfrak{c} = \aleph_1$ или неравенство $\mathfrak{c} > \aleph_1$, составляет знаменитую, до сих пор не решённую континуум-проблему.

Из

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

следует, что

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \tag{11}$$

Докажем, с другой стороны, формулу

$$\aleph_0^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} > \aleph_1$$

и даже для любого $\aleph_\alpha < \aleph_\beta'$ гораздо более общую формулу

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} > \aleph_\beta > \aleph_\alpha.$$

Именно, из

$$2 < \aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha} \leqslant 2^{\aleph_\beta}$$

выводим

$$2^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta},$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Регулярные и иррегулярные порядковые числа. О наименьшем начальном числе, которому конфинален данный порядковый тип

Порядковое число называется регулярным, если оно не конфинально никакому меньшему порядковому числу. Из конечных порядковых чисел регулярными являются лишь 0 и 1. Мы увидим далее (теорема 28), что всякое бесконечное регулярное число есть начальное число. Однако прежде всего докажем следующее предложение:

Теорема 27. Для того чтобы начальное число ω_τ было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его мощность $\aleph_\tau$ была регулярной.

Доказательство. 1° Если $\aleph_\tau$ — иррегулярная мощность, то и ω_τ — иррегулярное порядковое число. В самом деле, так как мощность $\aleph_\tau$, по предположению, иррегулярна, то она может быть представлена как сумма некоторого числа $b < \aleph_\tau$ слагаемых $\aleph_\alpha$, каждое из которых $< \aleph_\tau$. Сумма тех из этих слагаемых, которые не превосходят b, по теореме 22 и сама не превосходит b (ведь число этих слагаемых и подавно $\leqslant b$). Если бы сумма остальных слагаемых (т. е. тех $\aleph_\alpha$, которые $> b$) была равна некоторому $c < \aleph_\tau$, то сумма всех $\aleph_\alpha$ была бы $\leqslant b + c$, т. е. была бы равна наибольшему из чисел b и c и, значит, была бы, вопреки предположению, $< \aleph_\tau$. Итак, число $\aleph_\tau$ может быть представлено как сумма некоторого числа $a < \aleph_\tau$ слагаемых, каждое из которых $< \aleph_\tau$, но $> a$. В этих предположениях каждое слагаемое фигурирует в нашей сумме число раз, заведомо меньшее чем само это слагаемое. Поэтому каждая группа участвующих в нашей сумме равных слагаемых имеет сумму, равную самому этому слагаемому, так что мы не изменим нашу сумму $\aleph_\tau$, если каждое из её слагаемых будем считать лишь один раз. Итак, можем написать

$$\aleph_\tau = \sum_\alpha \aleph_\alpha, \tag{1}$$

где порядковое число α пробегает некоторое множество Θ значений, мощность которого $a < \aleph_\tau$, и, значит, порядковый тип θ которого $< \omega_\tau$ при этом a может быть предположено меньше любого $\aleph_\alpha$.

Рассмотрим подмножество Θ' множества W_τ, состоящее из всех ω_α, для которых $\alpha \in \Theta$. Множество Θ' подобно множеству Θ. Докажем, что W_τ конфинально своему подмножеству Θ'; этим и будет доказано, что число ω_τ конфинально числу $\theta < \omega_\tau$

и, следовательно, иррегулярно. Так как $\aleph_\tau$ иррегулярно, то число τ (в силу теоремы 23) является предельным. Отсюда следует, что за всяким числом $\xi < \omega_\tau$ следует начальное число $\omega_\sigma < \omega_\tau$: в самом деле, если бы за числом $\xi < \omega_\tau$, мощность которого обозначим через $\aleph_\nu$, не следовало бы никакого начального числа, то среди всех кардинальных чисел $< \aleph_\tau$ число $\aleph_\nu$ было бы наибольшим, т. е. было бы $\tau = \nu + 1$, тогда как τ — предельное число *).

Пусть множество W_τ не конфинально своему подмножеству Θ'. Тогда существует число $\xi < \omega_\tau$, большее чем все $\omega_\alpha \in \Theta'$, причём число ξ может быть предположено начальным, $\xi = \omega_\sigma < \omega_\tau$. Но тогда все слагаемые в правой части равенства (1) были бы меньше чем $\aleph_\sigma$, а так как число их меньше чем каждое из этих слагаемых, значит, и подавно, меньше чем $\aleph_\sigma$, то вся сумма в правой части равенства (1) была бы $\leqslant \aleph_\sigma < \aleph_\tau$. Полученное противоречие доказывает конфинальность числа ω_τ числу $\theta < \omega_\tau$.

2° Пусть ω_τ иррегулярно и конфинально числу $\theta < \omega_\tau$. Так как ω_τ — начальное число, то θ имеет мощность $b < \aleph_\tau$. Множество W_τ конфинально некоторому своему подмножеству Θ типа $\theta < \omega_\tau$ и мощности $< \aleph_\tau$. Отсюда следует, что

$$W_\tau = \bigcup_{\alpha \in \Theta} W(\alpha).$$

Но каждое W_α имеет мощность $< \aleph_\tau$, а число этих множеств есть $b < \aleph_\tau$. Поэтому $\aleph_\tau$ иррегулярно. Теорема 27 доказана.

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 28 (Хаусдорф). *Всякое упорядоченное множество A мощности $\aleph_\tau$ конфинально некоторому своему вполне упорядоченному подмножеству* **) *типа* $\xi \leqslant \omega_\tau$.

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем относительно неё некоторые замечания и выведем из неё некоторые следствия, которые позволяют оценить её важность.

---

*) Заметим, что если $\xi < \omega_\sigma < \omega_\tau$, то и $\omega_{\sigma+1} < \omega_\tau$ (так как иначе было бы $\tau = \sigma + 1$). Итак, для иррегулярного ω_τ (и даже для всякого ω_τ с предельным индексом τ) за каждым $\xi < \omega_\tau$ следует начальное число вида $\omega_{\sigma+1} < \omega_\tau$. Это замечание нам понадобится при доказательстве теоремы 29.

**) Напоминаем, что всякое подмножество A' упорядоченного множества A всегда рассматривается нами, как упорядоченное множество, причём порядок между элементами множества A' остаётся тем самым, который эти элементы имеют в A.

Прежде всего, уже было отмечено (в § 4), что упорядоченное множество A тогда и только тогда конфинально подмножеству, состоящему из одного лишь элемента, когда в A есть последний элемент.

Рассмотрим далее наиболее важный случай, когда A есть вполне упорядоченное подмножество, тип которого обозначим через θ. Так как мощность A обозначена через $\aleph_\tau$, то $\theta \geqslant \omega_\tau$. Теорема 28 утверждает, что число θ конфинально некоторому $\xi \leqslant \omega_\tau$. Поэтому, если $\theta > \omega_\tau$, т. е. если θ не есть начальное число, то оно конфинально числу $\xi \leqslant \omega_\tau < \theta$, т. е. не является регулярным. Итак, из теоремы 28 следует, что всякое бесконечное регулярное порядковое число есть непременно начальное число. Это позволяет нам сформулировать доказанную нами теорему 27 так:

Т е о р е м а 27'. *Регулярные порядковые числа суть не что иное, как начальные числа регулярных мощностей.*

Теперь мы можем несколько усилить и самоё теорему 28. Прежде всего, мы можем её формулировать так:

Всякий порядковый тип θ мощности $\aleph_\tau$ конфинален некоторому порядковому числу $\xi \leqslant \omega_\tau$.

Беря для данного порядкового типа θ наименьшее конфинальное ему порядковое число ξ, видим, что ξ есть регулярное, следовательно, начальное число $\xi = \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$ (так как если бы наше наименьшее ξ не было регулярным, то оно было бы конфинально некоторому $\xi' < \xi$ и этому ξ' было бы конфинально и θ).

Итак:

Т е о р е м а 28'. *Ко всякому порядковому типу θ мощности $\aleph_\tau$, в частности, ко всякому порядковому числу θ класса Z_τ существует конфинальное ему наименьшее регулярное $\omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$, причём порядковое число θ тогда и только тогда конфинально 1, когда оно первого рода.*

Эта теорема является, очевидно, далеко идущим обобщением теоремы 17'.

Выведем из теоремы 28 ещё одно следствие, касающееся иррегулярных мощностей. Если $\aleph_\tau$ иррегулярно, то множество W_τ конфинально некоторому подмножеству Θ' типа $\xi < \omega_\tau$. Оставляя в Θ' все элементы вида $\alpha = \omega_{\rho+1}$ (если таковые имеются) и заменяя каждый элемент α, не имеющий этого вида, ближайшим следующим за ним числом вида $\omega_{\rho+1}$ (такое имеется, см. сноску на стр. 119), можем предположить, что Θ' состоит из начальных чисел вида $\omega_{\rho+1}$. Множество тех порядковых чисел ρ, для которых $\omega_{\rho+1} \in \Theta'$, обозначим через Θ, причём предполагаем, что порядковый тип ξ множества Θ есть наименьший возможный, и, следовательно, есть регулярное число

$\omega_\sigma < \omega_\tau$. Так как, очевидно, $\aleph_\tau = \sum\limits_{\rho \in \Theta} \aleph_{\rho+1}$, то имеем такой результат:

Теорема 29. *Ко всякому (бесконечному) иррегулярному кардинальному числу $\aleph_\tau$ существует такое наименьшее регулярное кардинальное число $\aleph_\sigma < \aleph_\tau$, что $\aleph_\tau$ является суммой вполне упорядоченного по регулярному типу ω_σ множества строго возрастающих кардинальных чисел вида $\aleph_{\rho+1} < \aleph_\tau$.*

Переходим, наконец, к доказательству теоремы 28.

Пусть A есть упорядоченное множество мощности $\aleph_\tau$. Всякое множество мощности $\aleph_\tau$, значит, и наше множество A, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством W_τ. Это означает, что элементы множества A могут быть снабжены порядковыми числами $\alpha < \omega_\tau$ в качестве индексов, так что получится вполне упорядоченное множество B типа ω_τ

$$B = \{ x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots \}$$

(α пробегает все значения $< \omega_\tau$), состоящее из тех же элементов, что и A, причём порядок в B, вообще говоря, совершенно отличается от порядка в A (т. е. при $\alpha < \beta$ может быть и $x_\alpha \succ x_\beta$ в A). Назовём теперь элемент $x = x_\alpha$ множества A правильным, если для всех $\nu < \alpha$ имеем $x_\nu < x_\alpha$ в A. Элемент x_0 есть правильный элемент. Таким образом, множество C всех правильных элементов заведомо непусто. Кроме того, порядок в множестве C, как подмножестве упорядоченного множества A, совпадает с порядком, который это множество получает из вполне упорядоченного множества B (т. е. с порядком индексов, которыми снабжены элементы множества C): если $x_\alpha \in C$, $x_\beta \in C$ и $\alpha < \beta$, то, по самому определению правильного элемента, имеем $x_\alpha \prec x_\beta$ в A. Таким образом, упорядоченное множество C является подмножеством упорядоченного множества A и вместе с тем подмножеством (вполне) упорядоченного множества B. Будучи подмножеством вполне упорядоченного множества B, имеющего тип ω_τ, множество C само является вполне упорядоченным по типу $\leqslant \omega_\tau$.

Остаётся доказать, что упорядоченное множество A конфинально своему вполне упорядоченному подмножеству C. Предположим противное, и пусть элемент x_α в A есть элемент с наименьшим индексом α, следующий в A за всеми элементами C. Я утверждаю, что для любого $\nu < \alpha$ имеем $x_\nu \prec x_\alpha$ в A: в самом деле, в противном случае для некоторого $\nu < \alpha$ было бы $x_\nu \succ x_\alpha$, и, значит, уже x_ν с меньшим индексом $\nu < \alpha$ следовал бы за всеми элементами множества C.

Итак, действительно $x_\nu \dashv x_\alpha$ для всех $\nu < \alpha$. Но это означает, что x_α — правильный элемент, т. е., вопреки своему определению, x_α есть элемент множества C. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Доказательство теоремы 28 сводится к установлению следующего, хотя и простого, но всё же поучительного факта: каким бы способом мы ни превращали данное упорядоченное множество A мощности $\aleph_\tau$ во вполне упорядоченное множество B типа ω_τ, при всём имеющемся, вообще говоря, различии между порядком в A и в B, упорядоченное множество A содержит конфинальную часть C, для элементов которой порядок, взятый из A, совпадает с порядком, взятым из B.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

МНОЖЕСТВА НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Простейшие определения и примеры

В этой главе мы будем рассматривать множества, расположенные на числовой прямой R^1 и на плоскости R^2. При этом под плоскостью мы будем понимать так называемую «числовую» или «координатную» плоскость, т. е. мы будем считать, что на ней раз навсегда дана некоторая система прямоугольных координат, что позволяет отождествлять точки плоскости с упорядоченными парами действительных чисел (x, y). Расстояние между любыми двумя точками $a=(x, y)$ и $a'=(x', y')$ обозначается через $\rho(a, a')$ и определяется по формуле

$$\rho(a, a') = +\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Известно, и может быть легко проверено вычислением, что для любых трёх точек a, b, c имеет место так называемое *неравенство треугольника* *):

$$\rho(a, b)+\rho(b, c) \geqslant \rho(a, c).$$

Определение 1. *Окрестностью*, точнее ε-окрестностью (при данном $\varepsilon > 0$) точки a (на прямой или на плоскости) называется множество всех точек (прямой или соответственно плоскости), расстояние которых от точки a меньше чем ε; число ε называется *радиусом окрестности*. Очевидно, ε-окрестность точки a на прямой есть интервал

*) В более общих предположениях это неравенство будет доказано в § 2 главы 6.

$(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Аналогично, ε-окрестность точки a на плоскости есть внутренность круга («открытый круг») с центром a и радиусом ε. Мы будем обозначать ε-окрестность точки a через $U(a, \varepsilon)$.

Определение 2. Точка a называется *точкой прикосновения* множества M, если каждая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M. Множество всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* множества M и обозначается через $[M]$. Очевидно, $M \subseteq [M]$.

Пусть a — точка прикосновения множества M. Возможны два случая:

1° Каждая окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества M; в этом случае точка a называется *предельной точкой* множества M.

Предельная точка множества может принадлежать, но может и не принадлежать этому множеству (например, если M есть множество всех рациональных точек прямой, то каждая точка прямой есть предельная точка множества M).

2° Существует окрестность $U(a, \varepsilon)$, содержащая лишь конечное число точек множества M. Докажем, что в этом случае точка a (являющаяся, по предположению, точкой прикосновения множества M) принадлежит этому множеству и имеет окрестность $U(a, \varepsilon')$, не содержащую никакой точки множества M, отличной от точки a. В самом деле, пусть $x_1, \ldots, x_s$ суть все отличные от точки a точки множества $M \cap U(a, \varepsilon)$. Обозначим через ε' наименьшее из положительных чисел $\rho(a, x_1), \ldots, \rho(a, x_s)$. Окрестность $U(a, \varepsilon')$ не содержит ни одной точки множества M, отличной от точки a; но так как a есть точка прикосновения множества M, то множество $M \cap U(a, \varepsilon')$ непусто и, следовательно, состоит из одной точки a, чем наше утверждение доказано.

Определение 3. Точка множества M, не являющаяся предельной точкой этого множества, называется *изолированной точкой* множества M.

Мы только что видели, что *для того чтобы точка $a \in M$ была изолированной, необходимо и достаточно, чтобы она имела окрестность, не содержащую никакой отличной от a точки множества M.*

Множество всех предельных точек множества M называется *производным множеством* множества M и обозначается через M'.

Из предыдущего следует основное тождество:

$$[M] = M \bigcup M'. \tag{1}$$

Определение 4. Последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

называется *сходящейся к точке* a, если каждая окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки a содержит все точки x_n, начиная с некоторой (т. е. все точки x_n, номер n которых больше некоторого, зависящего от ε, числа n).

Предоставляем читателю убедиться в справедливости следующих почти очевидных утверждений: а) никакая последовательность не может сходиться к двум различным точкам; б) если последовательность (2) сходится к точке a, то всякая подпоследовательность последовательности (2) сходится к той же точке a.

Если a есть точка прикосновения множества M, то, давая числу ε значения $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и беря в каждом из множеств $M \bigcap U(a, \varepsilon_n)$ по точке x_n, получим последовательность (2), сходящуюся к точке a. Если при этом a есть изолированная точка множества M, то все полученные таким образом точки x_n, начиная с некоторой, будут совпадать с самой точкой a: последовательность (2) окажется, как говорят, *стационарной*. Если же a есть предельная точка множества M (принадлежащая или нет этому множеству), то всегда можно найти сходящуюся к точке a последовательность (2), состоящую из попарно различных точек. В самом деле, положим $\varepsilon_1 = 1$ и возьмём какую-либо точку $x_1 \in M \bigcap U(a, \varepsilon_1)$. Обозначим через ε_2 наименьшее из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\rho(a, x_1)$ и возьмём какую-либо точку x_2 множества $M \bigcap U(a, \varepsilon_2)$. Далее, обозначим через ε_3 наименьшее из чисел $\frac{1}{3}$ и $\rho(a, x_2) < \rho(a, x_1)$ и возьмём какую-либо точку $x_3 \in M \bigcap U(a, \varepsilon_3)$. Продолжая это рассуждение, мы и получим сходящуюся к точке a последовательность (2), состоящую из попарно различных точек.

Обратно, если имеется какая-либо последовательность (2) точек множества M, сходящаяся к точке a, то a, очевидно, есть точка прикосновения множества M; если при этом все точки (2) различны между собою, то каждая окрестность $U(a, \varepsilon)$, содержа все точки x_n, начиная с некоторой, содержит бесконечно много точек множества M, так что a есть предельная точка этого множества.

Итак, мы доказали следующее предложение:

Теорема 1. *Для того чтобы точка a была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность* (2) *точек множества M, сходящаяся к a; для того чтобы точка a была предельной точкой для множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала сходящаяся к a последовательность, состоящая из попарно различных точек множества M.*

Определение 5. Множество M называется:

замкнутым, если $M \supseteq M'$, т. е. если $M = [M]$;

плотным в себе, если $M \subseteq M'$;

совершенным, если $M = M'$.

Таким образом, совершенные множества могут быть определены как замкнутые множества, не имеющие изолированных точек, или как множества, одновременно замкнутые и плотные в себе.

Примеры:

1. Множество E_1 всех целых чисел (на числовой прямой) есть бесконечное множество, состоящее из одних изолированных точек; оно не имеет ни одной предельной точки, т. е. $E_1' = \Lambda$; поэтому $E_1 \supseteq E_1'$ и E_1 замкнуто.

2. Рассмотрим множество E_2, состоящее из всех точек $\frac{1}{n}$, где n принимает значения 1, 2, 3, ...; точка 0 есть единственная предельная точка множества E_2; она не содержится в этом множестве.

3. Множество E_3 состоит из всех точек вида $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и вида $1 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Предель-

ными точками этого множества являются лишь точки 0 и 1. Обе эти точки содержатся в множестве E_3, которое тем самым замкнуто.

4. Множество E_4 состоит из точки 0, всех точек вида $\frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, и всех точек вида $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n\cdot k}}$, $n=1, 2, 3, \ldots$; $k=1, 2, 3, \ldots$

Читатель легко докажет, что множество E_4 имеет бесконечное число предельных точек, а именно, точки

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Все эти предельные точки принадлежат множеству E_4, которое тем самым замкнуто.

5. Множество E_5 состоит из всех рациональных точек. Каждая точка числовой прямой есть предельная точка для E_5. Множество E_5 плотно в себе, но не замкнуто. При этом $[E_5]=E_5'=R^1$.

6. Множество E_6 состоит из всех точек интервала $(0; 1)$. Множество $E_6'=[E_6]$ есть сегмент $[0; 1]$.

7. Множество E_7 есть сегмент $[0; 1]$. Так как $E_7'=E_7$, то E_7 — совершенное множество.

8. Множество E_8 состоит из всех точек сегментов

$$\left[0; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right], \left[\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right], \ldots, \left[\frac{2n}{2n+1}; \frac{2n+1}{2n+2}\right], \ldots$$

и из точки 1. Множество E_8' совпадает с множеством E_8, которое таким образом оказывается совершенным.

9. Обозначим через M_n множество точек плоскости, состоящее из 2^{n-1} точек

$$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{3}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right).$$

Множество E_9 определяем как сумму всех множеств M_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности. Предельными для множества E_9 являются все точки сегмента $[0;1]$ оси абсцисс и только эти точки.

10. Множество N_n есть множество всех точек плоскости, лежащих на сегментах $\left(\text{длины } \frac{1}{2^n}\right)$, которые полу-

чатся, если из точек множества M_n предыдущего примера опустить перпендикуляры на ось абсцисс. Множество E_{10} есть сумма отрезка $[0; 1]$ оси абсцисс и всех множеств N_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности. Оно совершенно.

11. E_{11} есть сумма всех сегментов (параллельных оси ординат) вида

$$x=\frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

(где $n=1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности). Предельными точками множества E_{11} являются: все точки этого множества и все точки отрезка $0 \leqslant y \leqslant 1$ оси ординат. Множество E_{11} плотно в себе, но не замкнуто.

12. Множество E_{12} состоит из всех точек плоскости, лежащих на графике функции $y=\sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$. Множество E'_{12} состоит из всех точек множества E_{12} и из всех точек отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$ оси ординат. Множество E_{12} плотно в себе, но не замкнуто.

§ 2. Дальнейшие предложения теории точечных множеств. Открытые и замкнутые множества на прямой

Теорема 2. *Производное множество любого множества M замкнуто.*

Доказательство опирается на следующую почти очевидную лемму (см. черт. 3):

Лемма. *Для любой точки $x \in U(a, \varepsilon)$ можно найти $\delta > 0$ такое, что $U(x, \delta) \subseteq U(a, \varepsilon)$.*

В самом деле, так как $x \in U(a, \varepsilon)$, то $\rho(a, x) < \varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon - \rho(a, x)$. Для любой точки $x' \in U(x, \delta)$ имеем:

$$\rho(a, x') \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, x') < \rho(a, x) + \delta = \varepsilon,$$

т. е. $x' \in U(a, \varepsilon)$, чем лемма доказана.

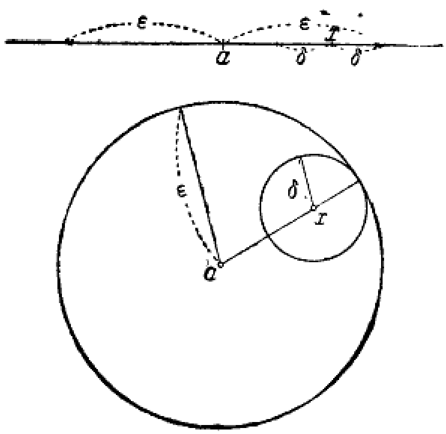
Докажем теперь теорему 2. Пусть a — предельная точка множества M'. Надо доказать, что $a \in M'$, т. е. что всякая окрестность $U(a, \varepsilon)$ содержит бесконечное множество точек множества M. Так как a — предельная точка множества M', то $U(a, \varepsilon)$ содержит бесконечно много точек множества M'. Пусть x — одна из этих точек.

Согласно лемме берём $U(x, \delta) \subseteq U(a, \varepsilon)$. Так как $x \in M'$, то в $U(x, \delta)$ лежит бесконечно много точек множества M и все они содержатся в $U(a, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается и

Теорема 2'. *Замыкание любого множества замкнуто.*

Определение 6. Множество M (лежащее в R^1 или в R^2) называется *открытым* (в R^1, соотв. в R^2), если его дополнение (т. е. множество $R^1 \setminus M$, соотв. $R^2 \setminus M$) замкнуто.



Черт. 3.

Другими словами: множество M открыто, если никакая его точка не является точкой прикосновения дополнительного множества ($R^1 \setminus M$, соотв. $R^2 \setminus M$). Но это последнее требование может быть высказано и в такой форме: *любая точка a множества M имеет окрестность, содержащуюся в множестве M.* Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы каждая его точка имела окрестность, содержащуюся в M.*

Мы видим, в частности, что лемма к теореме 1 выражает просто напросто, что всякая окрестность $U(a, \varepsilon)$ есть открытое множество. Называя множества вида $U(a, \varepsilon)$ «элементарными открытыми множествами», можно сформулировать теорему 3 и следующим образом:

Теорема 3'. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы оно могло быть представлено как сумма некоторого (конечного, счётного или даже несчётного) множества элементарных открытых множеств.*

Отсюда, в свою очередь, непосредственно вытекает

Теорема 4. *Сумма любого множества открытых множеств есть открытое множество.*

Из этого предложения легко выводится

Теорема 4′. *Пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто.*

В самом деле, пусть дано какое-либо множество $\mathfrak{S}$ замкнутых множеств. Пересечение всех множеств $F \in \mathfrak{S}$ обозначим через Φ. На основании формулы (1) § 2 главы 1, дополнение к множеству Φ есть сумма дополнений к множествам $F \in \mathfrak{S}$. По теореме 4 эта сумма открыта, значит, дополнительное к ней множество Φ замкнуто, что и требовалось доказать.

Рассмотрим более подробно открытые множества на прямой R^1. Элементарные открытые множества на прямой суть попросту интервалы, следовательно, теорема 3′ утверждает, что открытые множества на прямой могут быть определены как суммы любого конечного или бесконечного числа интервалов. Это утверждение может быть уточнено следующим образом:

Теорема 5. *Всякое открытое множество* $\Gamma \subset R^1$ *есть сумма конечного или счётного множества* попарно не пересекающихся *интервалов, концы которых принадлежат дополнительному к* Γ *замкнутому множеству* $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$; *среди этих интервалов могут оказаться один или два бесконечных интервала вида* $(-\infty;\ a)$ *или* $(a;\ +\infty)$.

Доказательство. Пусть a—произвольная точка открытого множества $\Gamma \subset R$. По теореме 3 существуют интервалы, содержащие точку a и содержащиеся в Γ. Обозначим через Γ_a сумму всех этих интервалов. Докажем, что множество Γ_a есть интервал (конечный или бесконечный). В самом деле, обозначим через c нижнюю, а через d верхнюю грань множества Γ_a (если Γ_a неограничено, то за c, соотв. d, берём $-\infty$, соотв. $+\infty$). Докажем, что $\Gamma_a = (c;\ d)$. Достаточно доказать, что любая точка x интервала $(c;\ d)$ содержится в Γ_a. Так как $a \in \Gamma_a$, то достаточно рассмотреть случай $x \neq a$. Пусть, например, $x < a$. Из того, что $x \in (c;\ d)$, вытекает, что в Γ_a имеется точка x', удовлетворяющая неравенству

$$x' < x < a. \qquad (1)$$

По определению множества Γ_a существует интервал $(\alpha';\ \beta')$, лежащий в Γ_a и содержащий точки x' и a, значит, и точку x. Если же $x > a$, то существуют точка $x'' \in \Gamma$, $a < x < x''$ и интервал $(\alpha''; \beta'') \subseteq \Gamma_a$, содержащий точки a и x'', значит, и точку x. Итак, $\Gamma_a = (c; d)$.

Интервал Γ_a обладает следующими двумя свойствами, непосредственно вытекающими из его определения:

1° $$\Gamma_a \subseteq \Gamma.$$

2° Интервал Γ_a не содержится ни в каком отличном от него интерале, лежащем в Γ.

Интервалы, обладающие этими двумя свойствами, называются *компонентами открытого множества* Γ. Мы доказали, что каждая точка множества Γ содержится в некоторой компоненте этого множества, т. е. что Γ есть сумма своих компонент. Две различные компоненты не имеют общих точек (так как иначе их сумма была бы лежащим в Γ интервалом, отличным от каждой из двух данных компонент, вопреки свойству 2°). Из свойства 2° следует далее, что концы какой-либо компоненты Γ_a множества Γ не принадлежат множеству Γ (т. е. содержатся в $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$). В самом деле, если бы конец компоненты Γ_a содержался в Γ, то он лежал бы в некоторой компоненте Γ_b, и интервалы Γ_a и Γ_b имели бы непустое пересечение. Наконец, множество всех компонент открытого множества Γ не более чем счётно, что вытекает из следующего общего предложения:

Теорема 6. *Всякое множество $\mathfrak{S}$ попарно непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.*

Чтобы доказать теорему 6, достаточно поставить в соответствие каждому из интервалов системы $\mathfrak{S}$ какую-либо из лежащих на нём рациональных точек: так как наши интервалы попарно не пересекаются, то этим будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathfrak{S}$ интервалов и некоторым подмножеством множества всех рациональных , чисел. Теоремы 6 и 5 доказаны.

Замечание 1. В только что проведённых рассуждениях содержится доказательство следующего утверждения: для того чтобы интервал δ был компонентой открытого множества Γ, необходимо и достаточно, чтобы интервал δ содержался в Γ, а его концы были точками дополнительного замкнутого множества $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$. Поэтому компоненты открытого множества Γ называются также *смежными интервалами* к замкнутому множеству $R^1 \setminus \Gamma$ и теорема 5 часто формулируется так:

Теорема 5'. *Всякое замкнутое множество Φ на прямой получается вычитанием из прямой конечного или счётного числа интервалов, смежных к множеству Φ.*

Докажем, наконец, следующее предложение:

Теорема 7. *Для того чтобы точка c замкнутого множества $\Phi \subset R^1$ была изолированной точкой множества Φ, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была общим концом двух смежных интервалов к множеству Φ.*

В самом деле, если точка c есть общий конец двух смежных к Φ интервалов $(a;\ c)$ и $(c;\ b)$, то интервал, $(a;\ b)$ содержит единственную точку множества Φ, именно точку c, которая, таким образом, оказывается изолированной.

Обратно, пусть c—изолированная точка множества Φ, и пусть интервал $(a;\ b)$, содержа точку c, не содержит никакой другой точки множества Φ. Возьмём какую-либо точку x' интервала $(a;\ c)$; она лежит в некоторой компоненте δ' множества $\Gamma = R^1 \setminus \Phi$, и эта компонента, в силу свойства 2°, содержит интервал $(a;\ c)$ *). Точно так же, компонента δ'', содержащая какую-либо точку x'' интервала $(c;\ b)$, содержит весь этот интервал. Точка c является, очевидно, правым концом интервала δ' и левым концом интервала δ'', что и требовалось доказать.

Следствие. *Для того чтобы замкнутое множество $\Phi \subset R^1$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы никакие два смежных к Φ интервала не имели общего конца.*

Замечание 2. Пусть A — какое-либо множество действительных чисел; всякое множество, являющееся пересечением множества A с некоторым интервалом, называется (открытым) *куском* множества A; всякое множество, являющееся пересечением множества A с некоторым открытым множеством, называется множеством,

---

*) Вообще, всякий интервал, содержащийся в открытом множестве Γ, лежит в некоторой компоненте этого множества.

открытым в A. Из теоремы 5 следует, что всякое множество, открытое в A, есть сумма конечного или счётного множества кусков множества A.

§ 3. Всюду плотные и нигде не плотные множества. Канторово совершенное множество

Пусть R—числовая прямая или любой лежащий на ней сегмент, полусегмент или интервал (конечный или бесконечный).

Определение 7. Множество M, состоящее из действительных чисел, называется *плотным на* R, если каждая точка $x \in R$ есть точка прикосновения множества M. (Множество M, плотное на всей числовой прямой, часто называют *всюду плотным*; таково, например, множество всех рациональных, а также множество всех иррациональных чисел.)

Множество M называется *нигде не плотным на* R, если на R нет такого интервала, на котором множество M было бы плотным. Например, множества E_1, E_2, E_3, E_4, § 1 являются нигде не плотными на прямой.

Если множество M нигде не плотно на R, то каждый интервал $(\alpha; \beta) \subset R$ содержит по крайней мере одну точку x, не являющуюся точкой прикосновения множества M. Тогда некоторая окрестность $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ точки x не содержит ни одной точки множества M. Итак, *для того чтобы множество M было нигде не плотным на R, необходимо* (*и очевидно достаточно*), *чтобы каждый интервал* $(\alpha; \beta) \subset R$ *содержал интервал* $(\alpha'; \beta')$, *свободный от точек множества* M.

Элементарные примеры показывают, что дополнение ко всюду плотному множеству также может быть всюду плотным: так, множество всех рациональных чисел и множество всех иррациональных чисел являются взаимно дополнительными множествами числовой прямой, причём каждое из этих множеств всюду плотно на R^1. Однако имеет место

Теорема 8. *Для того чтобы замкнутое множество Φ было нигде не плотным на R, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $\Gamma = R \setminus \Phi$ было плотным на R.*

В самом деле, если Ф нигде не плотно, то каждый интервал и, значит, каждая окрестность каждой точки $x \in R$ содержит точки дополнительного множества Г, т. е. каждая точка $x \in R$ есть точка прикосновения множества Г, и множество Г всюду плотно (эта часть теоремы 8 — необходимость высказанного в ней условия — верна и без предположения замкнутости множества Ф).

Докажем теперь вторую половину теоремы 8 — достаточность высказанного в ней условия. Пусть Г — всюду плотное открытое множество; докажем, что замкнутое множество $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$ нигде не плотно. Пусть $(a; b)$ — произвольный интервал; так как Г всюду плотно, то в $(a; b)$ содержится точка c множества Г; так как Г открыто, то существует интервал $(c'; c'')$, содержащий точку c и лежащий в Г. Пересечение интервалов $(a; b)$ и $(c'; c'')$ тем более содержится в Г и представляет собою интервал, лежащий на $(a; b)$ и не содержащий ни одной точки множества Ф. Теорема 8 доказана.

Замечание 1. В виде совсем лёгкого упражнения читатель докажет следующие предложения:

1. Если замкнутое множество Ф плотно на интервале $(a; b)$, то этот интервал (и весь сегмент $[a; b]$) содержится в Ф.

2. Если множество M нигде не плотно на R, то нигде не плотно и замыкание $[M]$ множества M.

Для множеств, расположенных на плоскости, понятия плотного и нигде не плотного множеств определяются аналогично случаю прямой: множество M называется плотным в круге $U(a, \varepsilon)$, если каждая точка этого круга есть точка прикосновения множества M; множество называется всюду плотным на всей плоскости, если оно плотно во всяком круге (т. е. если каждая вообще точка плоскости есть точка прикосновения множества M)*). Множество называется нигде не плотным на плоскости **), если оно не плотно ни в каком круге ***). Совершенно так же,

*) Вообще, множество M называется плотным в открытом множестве $\Gamma \subseteq R^2$, если каждая точка множества Г есть точка прикосновения множества M.

**) Соответственно, нигде не плотным в открытом множестве Г.

***) Соответственно, ни в каком круге, лежащем в Г.

как в случае прямой, доказывается, что для того чтобы множество M было нигде не плотным в R^2, необходимо и достаточно, чтобы в каждом круге лежал меньший круг, не содержащий ни одной точки множества M. Далее, для того чтобы замкнутое множество Φ было нигде не плотно на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы дополнительно открытое множество $\Gamma = R^2 \setminus \Phi$ было всюду плотным. Предложения, аналогичные сформулированным в замечании 1, верны и для плоскости. Любой отрезок, лежащий на плоскости, любая ломаная линия, а также такие кривые, как эллипс, гипербола, парабола, могут служить примерами нигде не плотных совершенных множеств на плоскости.

Напомним, что *плоской алгебраической кривой* называется множество A тех точек (x, y) плоскости, которые удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ есть многочлен от переменных x, y, не равный тождественно нулю. Докажем следующее предложение:

Теорема 9. *Всякая алгебраическая кривая есть множество, нигде не плотное на плоскости.*

Лемма. *Существует не более конечного числа таких значений переменного y, при подстановке которых в многочлен $f(x, y)$ получается многочлен от x, тождественно равный нулю.*

В самом деле, напишем тождество

$$f(x, y) = p_0(y)\,x^n + p_1(y)\,x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(y)\,x + p_n(y),$$

получаемое, если расположить многочлен $f(x, y)$ по убывающим степеням x. Здесь коэффициенты $p_0(y)$, $p_1(y), \ldots, p_n(y)$ суть многочлены от y с постоянными коэффициентами. Если при данном значении $y = y_0$ многочлен от x

$$f(x, y_0) = p_0(y_0)\,x^n + p_1(y_0)\,x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(y_0)\,x + p_n(y_0)$$

тождественно равен нулю, то это означает, что число y_0 является корнем алгебраических уравнений $p_0(y) = 0$,

$p_1(y)=0, \ldots, p_n(y)=0$. Так как каждое алгебраическое уравнение имеет лишь конечное число корней, то лемма доказана.

Докажем теперь, что алгебраическая кривая A, определяемая уравнением

$$f(x, y)=0,$$

есть множество, нигде не плотное на плоскости. Для этого достаточно доказать, что всякое открытое множество Γ на плоскости содержит открытое множество Γ_0, свободное от точек кривой A. Возьмём какую-нибудь точку $z_0=(x_0, y_0)$ множества Γ, выбранную под единственным условием, чтобы y_0 было отлично от каждого из того конечного числа значений y, при которых $f(x, y)$ превращается в тождественно равный нулю многочлен относительно x. Проведём прямую $y=y_0$; на ней $f(x, y)$ может обратиться в нуль лишь для конечного числа значений x. Прямая $y=y_0$ пересекается с открытым множеством Γ по открытому на этой прямой множеству H, содержащему точку z_0 и, следовательно, непустому. Значит можно найти интервал H_0, лежащий в H. Возьмём на интервале H_0 какую-нибудь точку $z=(x, y_0)$, в которой значение функции $f(x, y)$ отлично от нуля. В силу того, что многочлен $f(x, y)$ есть непрерывная функция от x, y *), существует такое $\varepsilon>0$, что во всех точках окрестности $U(z, \varepsilon)$ функция $f(x, y)$ отлична от нуля. С другой стороны, так как Γ открыто, то $\rho(z, R^2\setminus\Gamma)=\varepsilon'>0$. Множество $\Gamma_0=U(z, \varepsilon'')$, где ε'' есть наименьшее из чисел ε и ε', и есть искомое открытое множество, содержащееся в Γ и свободное от точек кривой A.

Примеры совершенных нигде не плотных множеств на прямой далеко не столь элементарны, как приведённые сейчас примеры, относящиеся к случаю плоскости. Простейшее такое множество было построено Кантором и известно под названием *канторова совершенного множества* или *канторова дисконтинуума*. Это замечательное множество представляет интерес значительно бо́льший, чем интерес отдельного примера. Оно имеет большое

---

*) Это мы предполагаем известным из анализа.

принципиальное значение и постоянно применяется всюду, где вообще применяется теория множеств.

Возьмём сегмент [0; 1] числовой прямой. Обозначим его через Δ и будем называть сегментом «нулевого ранга». На нём возьмём два сегмента $\Delta_0 = \left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\Delta_1 = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Эти сегменты будем называть сегментами «первого ранга», а лежащий между ними интервал $\delta = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ — интервалом «первого ранга». С каждым из сегментов Δ_0 и

Черт. 4.

Δ_1 поступим так же, как с сегментом Δ, а именно, на Δ_0 и на Δ_1 возьмём по два сегмента «второго ранга»: это будут первая и третья трети каждого из сегментов первого ранга, т. е.

$$\Delta_{00} = \left[0; \frac{1}{9}\right] \quad \text{и} \quad \Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \ (\text{на } \Delta_0)$$

и

$$\Delta_{10} = \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] \quad \text{и} \quad \Delta_{11} = \left[\frac{8}{9}; 1\right] \ (\text{на } \Delta_1);$$

между ними лежат соответственно интервалы «второго ранга»

$$\delta_0 = \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right), \text{ т. е. средняя треть сегмента } \Delta_0,$$

и

$$\delta_1 = \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \text{— средняя треть сегмента } \Delta_1$$

(черт. 4). Это построение продолжаем безгранично: пусть построены 2^n сегментов n-го ранга $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ (каждый из индексов $i_1, \dots, i_n$ принимает значения 0 и 1); каждый из сегментов $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ разелим на три равных по длине куска: два крайних сегмента $\Delta_{i_1 \dots i_n 0}$ и $\Delta_{i_1 \dots i_n 1}$ (первая и третья трети сегмента $\Delta_{i_1 \dots i_n}$) и лежащий между ними интервал $\delta_{i_1 \dots i_n}$ (средняя треть сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$); это и будут два сегмента и интервал $(n+1)$-го ранга, лежащие на данном сегменте n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$.

Замечание 2. Так как сегменты n-го ранга находятся, попарно, на положительном расстоянии $\geqslant \frac{1}{3^n}$ друг от друга, то это же и подавно справедливо для лежащих на них интервалов $(n+1)$-го ранга. Интервалы рангов $\leqslant n$ лежат между сегментами n-го ранга и потому находятся на положительном расстоянии от всех интервалов $(n+1)$-го ранга. Сумму всех сегментов n-го ранга обозначим через Π_n. Это — замкнутое множество, дополнение к которому состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ и из всех интервалов ранга $\leqslant n$. Поэтому пересечение $\Pi = \bigcap\limits_n \Pi_n$ всех множеств Π_n есть замкнутое множество, имеющее своим дополнением сумму всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ (всевозможных рангов) и двух бесконечных интервалов $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, а также точки 0 и 1 принадлежат множеству Π, так что интервалы $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, а также интервалы $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ суть все смежные интервалы к замкнутому множеству Π. Множество Π и называется *канторовым множеством* или *канторовым дисконтинуумом*. Из замечания 2 следует, что два смежных интервала к множеству Π не только не имеют общих точек, но не имеют и общего конца, поэтому в силу следствия теоремы 7 замкнутое множество Π — совершенное.

Установим некоторые свойства множества Π.

Прежде всего, длина каждого сегмента n-го ранга равна $\frac{1}{3^n}$. Мы уже видели, что расстояние между двумя различными сегментами n-го ранга $\geqslant \frac{1}{3^n}$. Поэтому каждая точка $x \in \Pi \subset \Delta_0$ принадлежит единственному сегменту Δ_{i_1} первого ранга, единственному (лежащему на Δ_{i_1}) сегменту второго ранга $\Delta_{i_1 i_2}$, вообще, единственному сегменту n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Другими словами, каждой точке $x \in \Pi$ однозначно соответствует последовательность сегментов

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \qquad (1)$$

а значит и последовательность индексов

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots; \text{ каждое } i_n = 0 \text{ или } = 1. \qquad (2)$$

При этом каждая последовательность (2) поставлена в соответствие одной единственной точке $x \in \Pi$, а именно, единственной точке x, принадлежащей всем сегментам (1). Итак:

1. Множество Π находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех последовательностей вида (2), или, что то же самое, всех бесконечных двоичных дробей

$$0, i_1 i_2 \ldots i_n \ldots, \qquad i_n = {0 \atop 1}, \qquad (3)$$

а потому имеет мощность континуума.

2. Множество всех конечных смежных интервалов к канторову совершенному множеству Π естественным образом упорядочено («слева направо»). Легко видеть, что это упорядоченное множество подобно множеству всех двоично-рациональных чисел интервала $(0; 1)$*).

В самом деле, для установления искомого подобного соответствия достаточно читать систему индексов $i_1 \ldots i_{n-1}$ каждого интервала $\delta_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ как конечную двоичную дробь

$$0, i_1 \ldots i_{n-1}\, 1 = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \ldots + \frac{i_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

Тогда наши смежные интервалы последовательно записываются при помощи дробных индексов так:

$$\delta = \delta_{\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\delta_0 = \delta_{\left(\frac{1}{4}\right)}, \quad \delta_1 = \delta_{\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\delta_{00} = \delta_{\left(\frac{1}{8}\right)}, \quad \delta_{01} = \delta_{\left(\frac{3}{8}\right)}, \quad \delta_{10} = \delta_{\left(\frac{5}{8}\right)}, \quad \delta_{11} = \delta_{\left(\frac{7}{8}\right)},$$

. . . .

При этом ясно, что взаимное порядковое расположение на прямой наших смежных интервалов таково же, как

*) Можно было бы вывести это утверждение из теоремы 1 главы 3, убедившись в том, что среди конечных смежных интервалов нет ни самого левого, ни самого правого, и что между любыми двумя смежными интервалами лежит бесконечно много смежных интервалов.

и расположение двоично-рациональных чисел, являющихся их индексами, чем наше утверждение доказано.

Замечание 3. Точки множества П, являющиеся концами смежных интервалов, называются *точками первого рода* (или *односторонними точками*) множества П. Их, очевидно, лишь счётное множество. Все остальные точки множества П называются *точками второго рода* (или *двусторонними точками*). Если x есть левый конец смежного интервала $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, то x является точкой пересечения сегментов

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n 0}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 01}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 011}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 0111}, \ldots,$$

а если x есть правый конец смежного интервала $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, то x является точкой пересечения сегментов

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n 1}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 10}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 100}, \quad \Delta_{i_1 \ldots i_n 1000}, \ldots$$

Если же точка x принадлежит сегментам

$$\Delta_0 \supset \Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots,$$

причём среди индексов i_n при сколь угодно большом n имеются как нули, так и единицы, то x — точка второго рода. Таким образом, *среди бесконечных двоичных дробей* (3), *взаимно однозначно соответствующих точкам множества* П, *точкам первого рода соответствуют дроби* (3), *у которых все* i_n, *начиная с некоторого, равны между собою* (и которые, следовательно, являются разложениями двоично-рациональных чисел).

3. Канторово множество П может быть определено как множество всех точек сегмента $[0; 1]$, имеющих разложение в троичную дробь, состоящее лишь из цифр 0 и 2.

В самом деле, точки смежного интервала $\delta = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ характеризуются тем, что их разложение в троичную дробь имеет первый троичный знак 1. Заметим, что концы интервала имеют по два разложения, а именно:

$$0{,}10000000\ldots = 0{,}02222222\ldots$$

и

$$0{,}20000000\ldots = 0{,}12222222\ldots$$

Для нас важно заметить, что каждая из этих точек имеет разложение, в котором участвуют лишь цифры 0 и 2. Таким образом, оба сегмента первого ранга состоят из точек, имеющих разложение в троичную дробь, первой цифрой которого является либо 0, либо 2. Среди этих точек те, троичное разложение которых имеет в качестве второй цифры непременно 1, суть интервалы $\delta_0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\delta_1 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, т. е. смежные. Итак, точки смежных интервалов второго ранга характеризуются тем, что они, не имея цифры 1 в качестве своего первого троичного знака, имеют её неизбежно своим вторым троичным знаком. Следовательно, удаляя из сегмента $[0; 1]$ смежные интервалы первых двух рангов, мы удалим все точки и только те точки, у которых цифра 1 непременно появляется в качестве первого или второго троичного знака. Точно так же убеждаемся в том, что смежные интервалы третьего ранга состоят из точек, первые два троичных знака которых отличны от 1, но третий непременно является единицей, и т. д. Вообще, удаляя из сегмента $[0; 1]$ все смежные интервалы рангов $\leqslant n$, мы удалим все точки, имеющие цифру 1 по крайней мере на одном из первых n мест троичного разложения. Отсюда следует, что сумма всех собственных смежных интервалов к множеству Π состоит из всех точек сегмента $[0; 1]$, троичное разложение которых непременно содержит хотя бы одну цифру 1. Утверждение 3 этим доказано. Заметим, что каждая из точек первого рода, будучи точкой вида $\frac{p}{3^n}$, имеет два троичных разложения (о д н о и з к о т о р ы х не содержит цифры 1).

4. Канторово множество Π нигде не плотно на числовой прямой.

В самом деле, так как Π замкнуто, то на основании теоремы 8 достаточно показать, что $R^1 \setminus \Pi$ всюду плотно на R^1, т. е. что каждая точка x числовой прямой есть точка прикосновения множества $R^1 \setminus \Pi$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \in \Pi$ и показать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, имеются точки $R^1 \setminus \Pi$, лежащие в $U(x, \varepsilon)$.

Для этого рассмотрим столь большое n, что $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Так как Π_n состоит из конечного числа попарно не пересекающихся сегментов длины $\frac{1}{3^n}$, то расстояние от каждой точки множества Π_n (значит, в частности, и от каждой точки $x \in \Pi$) до суммы интервалов, образующих дополнение к Π_n, меньше чем $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Следовательно, $U(x, \varepsilon)$ имеет с $R^1 \setminus \Pi_n$, а значит и подавно с $R^1 \setminus \Pi$, непустое пересечение, что и требовалось доказать.

5. Обозначим через $\Pi_{i_1 \ldots i_n}$ множество всех точек множества Π, лежащих на сегменте $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$. При подобном преобразовании $\left(\text{с коффициентом } \frac{1}{3^n}\right)$, переводящем сегмент $[0; 1]$ в сегмент $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, множество Π, очевидно, взаимно однозначно переходит в множество $\Pi_{i_1 \ldots i_n}$, откуда, в частности, следует, что множество $\Pi_{i_1 \ldots i_n}$ имеет мощность континуума. Пусть теперь a — произвольная точка множества Π. Докажем, что в любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ содержится не только бесконечное, но даже несчётное множество точек из Π (этим будет дано второе доказательство того факта, что замкнутое множество Π не содержит изолированных точек, т. е. является совершенным). Для этого возьмём столь большое n, что $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, и рассмотрим тот сегмент n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, на котором лежит точка a. Так как длина этого сегмента равна $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, то он, содержа точку a, целиком лежит в $U(a, \varepsilon)$, чем наше утверждение и доказано, ибо $U(a, \varepsilon)$ содержит часть $\Pi_{i_1 \ldots i_n}$ множества Π, имеющую мощность континуума.

Определение 8. Точка $a \in R^1$, в любой окрестности которой содержится несчётное множество точек данного множества $M \subseteq R^1$, называется *точкой конденсации* этого множества. Мы видим, что *каждая точка множества* Π *является его точкой конденсации.*

Подведём итог доказанному в этом параграфе:

Канторово множество Π *есть нигде не плотное совершенное множество на числовой прямой, каждая точка которого есть точка конденсации этого множества.*

Множество всех собственных смежных интервалов к множеству Π, *упорядоченное на числовой прямой естественным образом* (*«слева направо»*), *подобно множеству всех* (*двоично-*) *рациональных чисел.*

§ 4. Общие теоремы о совершенных множествах на прямой. Точки конденсации

Усилением свойства 2 канторова множества является следующая общая

Теорема 10. *Упорядоченное естественным образом (слева направо) множество всех конечных смежных интервалов к любому нигде не плотному непустому совершенному множеству подобно множеству всех двоично-рациональных чисел.*

В силу теоремы 1 главы 3 достаточно показать, что

1° среди конечных смежных интервалов к нигде не плотному совершенному множеству Φ нет ни самого левого, ни самого правого;

2° между любыми двумя конечными смежными интервалами к совершенному нигде не плотному множеству Φ лежит по крайней мере один смежный интервал к Φ.

Доказательство свойства 1°. Пусть $\delta = (a;\ b)$ — конечный смежный интервал к Φ. Тогда $a \in \Phi$. Однако не может быть $a = \inf \Phi$, так как тогда a была бы изолированной точкой множества Φ. Поэтому имеется точка $x \in \Phi$, расположенная влево от a. Так как Φ нигде не плотно на R^1, то на $(x;\ a)$ можно найти точку $x' \in \Gamma = R^1 \diagdown \Phi$. Точка x' принадлежит некоторому смежному интервалу δ' к Φ, который, содержа точку x' интервала $(x;\ a)$ и не содержа ни a, ни x, лежит на $(x;\ a)$, т. е. расположен влево от интервала $(a;\ b) = \delta$. Итак, никакой конечный смежный интервал к Φ не является самым левым. Таким же точно образом убедимся в том, что никакой конечный смежный интервал к Φ не является самым правым.

Доказательство свойства 2°. Пусть $\delta_1 = (a_1;\ b_1)$ и $\delta_2 = (a_2;\ b_2)$ — два смежных интервала к Φ и пусть δ_1 лежит влево от δ_2. Так как эти интервалы не имеют общего конца, то $b_1 \neq a_2$; так как Φ нигде не плотно, то на $(b_1; a_2)$ имеется точка $x \in R^1 \setminus \Phi$ и содержащий её смежный интервал лежит на $(b_1; a_2)$ т. е. между δ_1 и δ_2, что и требовалось доказать.

Следствие. *Упорядоченное множество Θ всех смежных интервалов к ограниченному совершенному нигде не плотному множеству подобно множеству всех двоично-рациональных точек сегмента* $[0; 1]$.

Из теоремы 10 вытекает, что всякое сечение (A, B) в указанном упорядоченном множестве Θ принадлежит к одному из следующих трёх типов:

1) в нижнем классе A есть самый правый, но в верхнем классе B нет самого левого интервала;

2) в A нет самого правого, но в B есть самый левый интервал;

3) ни в A нет самого правого, ни в B нет самого левого элемента.

Сечения этого третьего рода, как известно, называются «щелями» в упорядоченном множестве Θ. Мы сейчас приложим только что полученные результаты к доказательству очень важной теоремы, утверждающей, что все ограниченные нигде не плотные совершенные множества на прямой подобны между собою.

Определение 9. Точка совершенного множества Φ, являющаяся концом некоторого смежного к Φ интервала, называется *точкой первого рода* (или *односторонней точкой*) множества Φ; точка $x \in \Phi$, не являющаяся концом никакого смежного к Φ интервала, называется *точкой второго рода* (или *двусторонней точкой*) множества Φ.

Очевидно, если точка $a \in \Phi$ есть точка первого рода, то все достаточно близкие к a точки множества Φ расположены с одной стороны от точки a, а именно, слева от a, если a — левый конец некоторого смежного интервала, и справа, если a — правый конец смежного к Φ интервала. Если же a — точка второго рода, то в любой близости от точки a и справа, и слева имеются точки множества Φ.

Каждой точке $x \in \Phi$ второго рода соответствует вполне определённое сечение $\theta_x = (A_x, B_x)$ в упорядоченном множестве Θ: чтобы получить это сечение, достаточно отнести к нижнему классу A_x все смежные интервалы, лежащие левее точки x, тогда верхний класс B_x будет состоять из смежных интервалов, лежащих правее точки x. Сечение $\theta_x = (A_x, B_x)$ есть щель: в самом деле, пусть $\delta = (a; b)$ есть произвольный интервал, положим, нижнего класса; так как x — точка второго рода, то $x \neq b$, значит $b < x$. Так как Φ нигде не плотно, то на интервале $(b; x)$ лежит точка $x' \in \Gamma = R^1 \setminus \Phi$, а значит и весь смежный интервал, содержащий точку x', который, таким образом, оказывается справа от интервала δ, но ещё слева от точки x. Итак, никакой из интервалов нижнего класса не является самым правым среди интервалов этого класса. Точно так же мы убедимся в том, что среди интервалов верхнего класса нет самого левого.

Двум различным точкам второго рода x и x', $x < x'$, соответствуют различные щели θ_x и $\theta_{x'}$, так как все смежные интервалы, лежащие между x и x', попадают в B_x и в то же время в $A_{x'}$.

Докажем, наконец, что каждая щель $\theta = (A, B)$ в Θ оказывается поставленной в соответствие некоторой точке второго рода множества Φ. Другими словами, найдём такую точку второго рода $x \in \Phi$, что A состоит из всех смежных интервалов, лежащих левее, а B — из всех смежных интервалов, лежащих правее точки x. Рассмотрим верхнюю грань a множества, состоящего из концов всех интервалов, являющихся элементами класса A. Точно так же пусть b есть нижняя грань множества концов всех интервалов из B. Так как каждый интервал из A лежит левее каждого интервала из B, то $a \leqslant b$. Однако, если бы было $a < b$, то на $(a; b)$ не оказалось бы ни одного смежного интервала к Φ, а значит и ни одной точки множества $R^1 \setminus \Phi$, в противоречие с тем, что Φ нигде не плотно. Поэтому $a = b$. Полагая $x = a = b$, видим, что x — точка второго рода и что A действительно состоит из интервалов, лежащих левее, а B — из интервалов, лежащих правее точки x. Итак, наша конструкция даёт взаимно однозначное соответствие между всеми точками второго рода множества Φ и всеми щелями множества Θ. Но множество всех щелей множества Θ естественным образом оказывается упорядоченным: достаточно условиться, что щель $\theta_x = (A_x, B_x)$ предшествует щели $\theta_y = (A_y, B_y)$, если $A_x \subset A_y$. Далее, если из двух точек второго рода $x, y \in \Phi$

первая лежит левее второй, то $A_x \subset A_y$, так что установленное нами соответствие между точками второго рода множества Φ и щелями в Θ есть соответствие подобия.

Пусть теперь даны два ограниченных совершенных нигде не плотных множества Φ и Φ' на числовой прямой. Множества их точек первого рода обозначим соответственно через S и S', а упорядоченные множества их конечных смежных интервалов — через Θ и Θ'. Упорядоченные множества Θ и Θ' подобны между собою, так как каждое из них подобно множеству всех двоично-рациональных чисел. Соответствие подобия между Θ и Θ' порождает соответствие подобия между S и S': если $\delta = (x; y)$ и $\delta' = (x'; y')$ — соответствующие друг другу смежные интервалы к Φ и Φ', то считаем соответствующими друг другу x и x', y и y'. Кроме того, ставим в соответствие $a = \inf \Phi$ и $a' = \inf \Phi'$, $b = \sup \Phi$ и $b' = \sup \Phi'$. Соответствие подобия между Θ и Θ' порождает соответствие подобия между множествами всех щелей в Θ и в Θ', т. е. между точками второго рода в Φ и Φ'. Остаётся показать, что полученное взаимно однозначное соответствие между всем Φ и всем Φ' есть соответствие подобия. А для этого достаточно доказать следующее:

Если x — первого, y — второго рода в Φ, а x' и y' — соответствующие им точки в Φ', то из $x < y$, соотв. $x > y$, следует $x' < y'$, соотв. $x' > y'$.

Но отношение $x < y$ равносильно отношению $x \in A_y$, которое в силу соответствия между щелями в Θ и в Θ' переходит в отношение $x' \in A_{y'}$, равносильное отношению $x' < y'$. Аналогично и для отношения $x > y$ (равносильного отношению $x \in B_y$).

Предыдущими рассуждениями доказана

Теорема 11. *Все ограниченные совершенные нигде не плотные множества на прямой подобны между собою. В частности, всякое совершенное ограниченное нигде не плотное множество на прямой подобно канторову совершенному множеству.*

Теми же рассуждениями доказывается, что все совершенные нигде не плотные и в обе стороны неограниченные множества подобны между собою (наши рассуждения даже немного упрощаются от того, что такие множества имеют лишь конечные смежные интервалы). Между прочим, все в обе стороны неограниченные совершенные нигде не плотные множества подобны, например, канторову множеству, из которого удалены две его крайние (самая левая и самая правая) точки. Аналогично, совершенное нигде не плотное множество, ограниченное только снизу (только сверху), подобно канторову множеству без его самой правой (самой левой) точки.

Из изложенного следует, что *всякое нигде не плотное совершенное множество имеет мощность континуума*.

Наконец, если совершенное множество плотно на каком-нибудь интервале, то оно содержит этот интервал и, значит, тоже имеет мощность континуума; итак, имеет место следующий общий результат:

Теорема 12. *Всякое совершенное множество на прямой имеет мощность континуума.*

Эту теорему (сначала снова для ограниченных нигде не плотных множеств) можно вывести ещё и из других соображений. Мы видели, что множество точек второго рода совершенного нигде не плотного множества Φ подобно множеству щелей множества Θ. Но множество Θ в свою очередь подобно множеству рациональных чисел. Значит, множество всех точек второго рода множества Φ подобно множеству всех щелей множества рациональных чисел; но множество всех щелей множества рациональных чисел подобно множеству всех иррациональных чисел. Этот результат остаётся в силе и без предположения ограниченности множества Φ. Итак:

Теорема 13. *Множество всех точек второго рода любого совершенного нигде не плотного множества на прямой подобно множеству всех иррациональных чисел и, следовательно, имеет мощность континуума.*

В конце предыдущего параграфа мы определили точку конденсации данного множества M, как такую точку a (принадлежащую или нет множеству M), в каждой окрестности которой содержится несчётное множество точек множества M. Тогда же было доказано, что все точки канторова множества П суть его точки конденсации. Это свойство легко переносится и на любое совершенное множество Φ.

В самом деле, пусть a — произвольная точка совершенного множества Φ. Рассмотрим произвольную окрестность $U(a, \varepsilon) = (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ этой точки. Множество $\left[\Phi \cap U\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] = \Phi^*$ плотно в себе и замкнуто, т. е. совершенно, и поэтому имеет мощность континуума; так как $\Phi^* \subseteq \Phi \cap U(a, \varepsilon)$ и ε — произвольно, то a есть точка конденсации множества Φ, что и требовалось доказать.

Итак:

Теорема 14. *Все точки любого совершенного множества $\Phi \subseteq R^1$ суть точки конденсации этого множества.*

Докажем теперь следующую очень важную теорему.

Теорема 15. *Пусть M — произвольное несчётное множество на прямой. Множество M_0 всех точек множества M, не являющихся его точками конденсации, конечно (быть может пусто) или счётно*).*

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Каковы бы ни были точка a и её окрестность $U(a, \varepsilon)$, существует* рациональный *интервал U (т. е. интервал $U = (r';\ r'')$ с рациональными концами r', r''), удовлетворяющий условию*

$$a \in U \subseteq U(a, \varepsilon). \tag{1}$$

Лемма очевидна: достаточно взять рациональные точки r', r'', лежащие соответственно на интервалах $(a-\varepsilon;\ a)$ и $(a;\ a+\varepsilon)$.

Занумеруем теперь все рациональные интервалы, пересекающиеся с множеством M по (непустому) конечному или счётному множеству; получим последовательность

$$U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots \tag{2}$$

Пусть a — произвольная точка множества M_0; по определению этого множества, существует окрестность $U(a, \varepsilon)$,

*) Эту фундаментальную теорему обычно формулируют так: все точки несчётного множества M за исключением не более чем счётного их числа, суть точки конденсации множества M.

пересечение которой с множеством M конечно или счётно. Согласно лемме существует рациональный интервал U, удовлетворяющий условию (1); так как $U \cap M$ не более чем счётно, то U есть один из интервалов (2), пусть U_k, и $a \in M \cap U_k$. Итак, $M_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (M \cap U_k)$. Так как каждое из множеств $M \cap U_k$ конечно или счётно, то M_0 не более чем счётно, что и требовалось доказать.

Совершенно таким же способом, как теорема 2, доказывается

Теорема 16′. *Множество точек конденсации любого множества M замкнуто.*

Однако имеет место и

Теорема 16″. *Множество M_c точек конденсации любого множества M плотно в себе.*

Предположим противное, и пусть a есть изолированная точка множества M_c. Тогда существует окрестность $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, не содержащая никакой отличной от a точки множества M_c; но этого не может быть, так как множество $M \cap U(a, \varepsilon)$ несчётно, следовательно, все (за исключением не более чем счётного числа) точки множества $M \cap U(a, \varepsilon)$ суть точки конденсации множества $M \cap U(a, \varepsilon)$, а, значит, и подавно множества M.

Объединяя теоремы 16′ и 16″, получаем:

Теорема 16. *Множество M_c точек конденсации любого несчётного множества M есть совершенное множество (и, следовательно, имеет мощность континуума).*

Рассмотрим случай, когда M есть несчётное замкнутое множество. Тогда совершенное множество M_c содержится в M, а так как в силу теоремы 15 множество $M \setminus M_c$ не более чем счётно, то имеет место

Теорема 17. *Всякое несчётное замкнутое множество M есть сумма совершенного множества M_c (мощности континуума) и не более чем счётного множества.*

Следствие. *Всякое замкнутое множество либо конечно, либо счётно, либо имеет мощность континуума.*

Замечание. О перенесении этих теорем на случай плоских множеств — см. § 6.

§ 5. Ограниченные множества; теоремы Больцано-Вейерштрасса, Кантора и Бореля-Лебега; теорема Коши

С ограниченными множествами на числовой прямой мы имели много дела как в этой главе, так и ещё раньше в главе второй. Множество M, лежащее на плоскости, называется ограниченным, если оно целиком лежит в некотором круге (или, что то же самое, — в некотором квадрате). Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы проекции множества M на каждую из координатных осей были ограниченными. Если множество M ограничено, то множество D неотрицательных чисел вида $\rho(x, x')$, где x, x' — всевозможные пары точек множества M, ограничено; его верхняя грань называется *диаметром* множества M. Обратно, если множество M неограничено, то имеются пары точек $x, x' \in M$, для которых расстояние $\rho(x, x')$ сколь угодно велико; таким образом, диаметр неограниченного множества M равен $+\infty$.

Имеет место следующая фундаментальная теорема.

Теорема 18 (Больцано-Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное множество (на прямой или на плоскости) имеет хоть одну предельную точку.*

Докажем эту теорему отдельно для прямой и для плоскости.

Пусть на числовой прямой дано произвольное бесконечное ограниченное множество E. Рассмотрим множество M всех тех точек x числовой прямой, которые обладают следующим свойством: вправо от точки x имеется бесконечное множество точек множества E. Множество M непусто: в самом деле, оно содержит, например, нижнюю грань α_E множества E (и все точки числовой прямой, лежащие слева от α_E). Множество M ограничено сверху: в самом деле, вправо от верхней грани множества E нет уже ни одной точки множества M.

Раз множество M непусто и ограничено сверху, то оно имеет верхнюю грань; обозначим её через b. Докажем, что b есть предельная точка для E. В самом деле, пусть $(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$ — произвольная окрестность точки b. По основному свойству верхней грани сегмент $[b-\varepsilon;\ b]$ содержит хоть одну точку x множества M; в то же время справа от b нет ни одной точки множества M, так что, в частности, $b+\varepsilon$ не есть точка множества M. Так как x есть точка множества M, то вправо от x, следовательно, и подавно вправо от $b-\varepsilon$, имеется бесконечно много точек множества E. С другой стороны, так как $b+\varepsilon$ не есть точка множества M, то вправо от $b+\varepsilon$ имеется лишь конечное число точек множества E; следовательно, бесконечное множество точек множества E расположено на интервале $(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$. Но $(b-\varepsilon.\ b+\varepsilon)$ — произвольная окрестность точки b. Мы доказали таким образом, что b есть предельная точка множества E.

Как предельная точка множества E, точка b есть точка множества E'; нетрудно видеть, что b есть самая правая из всех точек множества E'.

Совершенно таким же способом можно найти точку a, являющуюся самой левой точкой множества E'. Итак, имеем следующее предложение:

Теорема 19. *Среди всех предельных точек бесконечного ограниченного множества E имеется самая левая точка a_E и самая правая точка b_E.*

Точка a_E называется *нижним пределом* множества E и обозначается $\underline{\lim}\, E$; точка b_E называется *верхним пределом* множества E и обозначается $\overline{\lim}\, E$. Очевидно, что $a_E \leqslant b_E$ и что все остальные предельные точки множества E (если они существуют) расположены между a_E и b_E.

К только что доказанному примыкает:

Теорема 20. *Если верхняя (нижняя) грань ξ множества E не содержится в E, то ξ есть предельная точка множества E.*

В самом деле, пусть ξ есть, например, верхняя грань множества E и пусть $(\xi-\varepsilon;\ \xi+\varepsilon)$ — произвольная окрестность точки ξ; возьмём точку y так, чтобы $\xi-\varepsilon<y<\xi$; сегмент $[y;\ \xi]$ (на основании теоремы 7 главы 2) содержит хоть одну точку множества E, притом непременно отличную от ξ (так как ξ, по предположению, не входит в E); отсюда следует, что ξ есть предельная точка множества E.

Следствие. *Всякое непустое ограниченное замкнутое множество содержит свою верхнюю и свою нижнюю грани (т. е., другими словами, верхняя грань замкнутого* *множества есть самая правая точка, а нижняя грань— самая левая точка этого множества*).

Докажем теперь теорему Больцано-Вейерштрасса для плоских множеств. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. *Всякая убывающая последовательность замкнутых прямоугольников, стороны которых параллельны сям координат и стремятся по длине к нулю, имеет пересечение, состоящее из одной единственной точки.*

В самом деле, пусть

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_n \supseteq \ldots$$

—данная последовательность прямоугольников. Спроектируем эти прямоугольники на ось абсцисс и на ось ординат. Получим последовательность сегментов

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$$

на оси абсцисс и последовательность сегментов

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots \supseteq Y_n \supseteq \ldots$$

на оси ординат. Каждая из этих последовательностей имеет в силу следствия 3 теоремы 10 главы 2 пересечение, состоящее из одной точки x_0, соотв. y_0. Точка $\xi_0 = (x_0, y_0)$ плоскости принадлежит всем прямоугольникам Q_n; их пересечение, таким образом, непусто. Если бы это пересечение, кроме точки ξ_0, содержало ещё какую-нибудь точку ξ, то, обозначив через d расстояние между точками ξ_0 и ξ и взяв столь большое n, чтобы обе стороны прямоугольника Q_n были меньше $\frac{d}{2}$, мы получили бы противоречие (всякие две точки прямоугольника Q_n имеют расстояние $< 2\frac{d}{2} = d$, а потому точки ξ_0 и ξ, отстоящие друг от друга на d, не могут в этом прямоугольнике уместиться).

Переходим непосредственно к доказательству теоремы Больцано-Вейерштрасса. Рассмотрим какое-нибудь ограниченное множество E на плоскости. В силу ограниченности множества E существует квадрат Q_0 со сторонами, параллельными осям координат, содержащий всё множество E. Разобьём квадрат Q_0 прямыми, параллельными его сторонам, на четыре конгруэнтных между собою квадрата. Так как множество E бесконечно, то по крайней мере один из этих четырёх квадратов—назовём его Q_1 — содержит бесконечно много точек множества E. Квадрат Q_1 имеет сторону, вдвое меньшую, чем сторона квадрата Q_0. Разобьём квадрат Q_1 на четыре равных квадрата прямыми, параллельными сторонам; хотя бы один из этих квадратов — обозначим его через Q_2 — содержит бесконечно много точек множества E. Квадрат Q_2 имеет сторону, вдвое меньшую, чем сторона квадрата Q_1. Продолжая это рассуждение, получим убывающую последовательность

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots$$

квадратов, со сторонами, параллельными осям координат, каждый из которых содержит бесконечно много точек множества E, причём сторона Q_{n+1} вдвое меньше стороны Q_n, так что мы находимся в условиях леммы и имеем точку ξ_0, принадлежащую всем квадратам Q_n.

Покажем, что ξ_0 — предельная точка множества E. В самом деле, пусть $U(\xi_0, \varepsilon)$ — произвольная окрестность точки ξ_0. Возьмём n столь большим, чтобы сторона квадрата Q_n была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Любые две точки этого квадрата отстоят друг от друга на расстояние $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, откуда следует, что квадрат Q_n, содержа точку ξ_0, целиком лежит в $U(\xi_0, \varepsilon)$. По определению квадрата Q_n, в нём содержится бесконечное подмножество множества E; и всё это подмножество содержится в $U(\xi_0, \varepsilon)$. Так как ε — произвольно малое положительное число, то ξ_0 есть предельная точка множества E, и теорема Больцано-Вейерштрасса доказана.

Замечание 1. Это же доказательство (даже в несколько упрощённом виде) применимо и к случаю числовой прямой: вместо того, чтобы делить квадрат на четыре равных квадрата, придётся отрезок делить пополам.

Установим ряд важных предложений, являющихся лёгкими следствиями теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 21. *Если множество всех точек бесконечной последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

ограничено), то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Покажем прежде всего, что из последовательности (1) всегда можно выбрать либо стационарную подпоследовательность (т. е. такую, все элементы которой, начиная с некоторого, совпадают между собою), либо подпоследовательность, состоящую из попарно различных элементов. В самом деле, положим $n_1 = 1$ и будем искать в последовательности (1) первый элемент x_{n_2}, не равный элементу x_{n_1}; если такого элемента нет, то

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \ldots$$

и вся последовательность (1) стационарна. Если же такой элемент x_{n_2} существует, то ищем первый элемент x_{n_3}, $n_3 > n_2 > n_1$, отличный как от x_{n_1}, так и от x_{n_2}. Продолжая этот процесс, мы либо найдём бесконечную подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots \tag{2}$$

последовательности (1), состоящую из попарно различных элементов, либо выделим конечное число элементов

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}, \tag{3}$$

обладающих тем свойством, что каждый из элементов последовательности (1) совпадает с одним из элементов (3). В этом втором случае некоторая бесконечная подпоследовательность

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_n}, \ldots \tag{4}$$

последовательности (1) будет состоять из элементов, которые все равны одному и тому же элементу конечного множества (3).

*) Говорят кратко «если последовательность (1) ограничена».

Подпоследовательность (4), очевидно, стационарна и, следовательно, сходится. Остаётся рассмотреть случай, когда в (1) имеется бесконечная подпоследовательность (2), состоящая из попарно различных элементов. Эти элементы образуют бесконечное ограниченное множество, имеющее в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса предельную точку ξ; выделяя из (2) подпоследовательность, сходящуюся к ξ, убедимся в справедливости теоремы 21.

Теорема 22 (Кантор). *Всякая последовательность непустых ограниченных убывающих замкнутых множеств*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots \tag{5}$$

имеет непустое пересечение.

Доказательство. Выбирая из каждого F_n по точке x_n, получаем ограниченную последовательность (1), из которой, по теореме 21, можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{6}$$

сходящуюся к некоторой точке a. Докажем, что точка a принадлежит любому множеству F_n нашей последовательности (5) и, следовательно, пересечению этих множеств. Возьмём какое-нибудь F_n и выделим подпоследовательность последовательности (6), состоящую из тех x_{n_k}, у которых индекс $n_k > n$; эта подпоследовательность (все элементы которой принадлежат F_n) сходится к той же точке a, которая, таким образом, оказывается точкой прикосновения множества F_n, а так как F_n замкнуто, то $a \in F_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 23 (Борель-Лебег). *Из всякой бесконечной системы Σ интервалов, покрывающей данный сегмент $[\alpha; \beta]$ (в том смысле, что каждая точка сегмента $[\alpha; \beta]$ содержится по крайней мере в одном интервале системы Σ), можно выделить конечную подсистему, также покрывающую сегмент $[\alpha; \beta]$.*

Доказательство. Назовём какую-либо точку $a \in [\alpha; \beta]$ отмеченной, если существует конечная подсистема системы Σ, покрывающая сегмент $[\alpha; a]$. Обозначим через M множество всех отмеченных точек. Легко видеть, что M не пусто (например, $\alpha \in M$). Пусть ξ — верхняя грань множества M. Так как $M \subseteq [\alpha; \beta]$, то $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$. Покажем, что $\xi = \beta$. В самом деле, точка ξ содержится в некотором интервале $\Delta = (x'; x'')$ системы Σ; по определению точки ξ, в $(x'; x'')$ содержится отмеченная точка x, следовательно, сегмент $[\alpha; x]$ покрыт конечной подсистемой Σ_x системы Σ. Пусть Σ_x состоит из интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$. Тогда система Σ_ξ, состоящая из интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_p, \Delta$, очевидно, покрывает сегмент $[\alpha; \xi]$.

Однако, система Σ_ξ покрывает не только сегмент $[\alpha; \xi]$, но даже сегмент $[\alpha; \xi']$, где ξ' — произвольная точка интервала $(\xi; x'')$, так что точка $\xi' > \xi$ оказывается отмеченной, если только $\xi' \in [\alpha; \beta]$. Но это лишь в том случае совместимо с определением точки ξ (как верхней грани множества M отмеченных точек, *лежащих* на $[\alpha; \beta]$), если $\xi = \beta$; значит, весь сегмент $[\alpha; \beta]$ покрыт конечной подсистемой $\Sigma_{\xi=\beta}$ системы Σ, и теорема 23 доказана.

Замечание 2. Из теоремы Бореля-Лебега в свою очередь легко выводится теорема Больцано-Вейерштрасса. В самом деле, пусть множество $M \subseteq [a; b]$ не имеет ни одной предельной точки; тогда каждая точка $x \in [a; b]$ имеет окрестность $U(x, \varepsilon_x)$, содержащую лишь конечное число точек x. Система Σ всех этих $U(x, \varepsilon_x)$ покрывает сегмент $[a; b]$ и, значит, по теореме Бореля-Лебега, содержит конечную подсистему

$$U_1, \ldots, U_s,$$

также покрывающую сегмент $[a; b]$. Так как каждое из множеств $M \cap U_1, \ldots, M \cap U_s$ конечно, то и всё множество $M = (M \cap U_1) \cup \ldots \cup (M \cap U_s)$ конечно, и теорема Больцано-Вейерштрасса доказана.

Замечание 3. Читателю рекомендуется доказать предложения, получающиеся путём замены в формулировке теоремы Бореля-Лебега сегмента $[\alpha; \beta]$:

1) произвольным ограниченным замкнутым множеством (на прямой);

2) замкнутым квадратом;

3) произвольным замкнутым ограниченным множеством на плоскости.

Докажем теперь следующее предложение:

Теорема 24 (**принцип сходимости Коши**). *Для того чтобы последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

точек числовой прямой была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа ε можно было найти такое натуральное число n_ε, чтобы было

$$\rho(x_p, x_q) = |x_p - x_q| < \varepsilon$$

для всех p и q, бо́льших чем n_ε.

Необходимость условия непосредственно следует из определения сходящейся последовательности.

Докажем, что условие достаточно. Обозначим (для $k = 1, 2, 3, \ldots$) через E_k множество точек

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$$

последовательности (1). Очевидно, множество E_1, значит, тем более, каждое из множеств E_k, ограничено*) и

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supset \ldots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supseteq \ldots$$

Положим

$$\alpha_k = \inf E_k, \quad \beta_k = \sup E_k.$$

На основании теоремы 8 и 9 главы 2 имеем:

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k \leqslant \ldots,$$

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k \geqslant \ldots,$$

причём $\alpha_k \leqslant \beta_k$. Если $\alpha_k = \beta_k$, то все точки $x_k, x_{k+1}, \ldots$ совпадают и тогда последовательность (1) сходится к точке $\xi = x_k = x_{k+1} = \ldots$ Если же ни при каком значении k точка α_k не совпадает с β_k, то сегменты $[\alpha_1; \beta_1]$. $[\alpha_2; \beta_2]$, $[\alpha_3; \beta_3], \ldots$ образуют убывающую последовательность. Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = 0.$$

Для любого данного $\varepsilon > 0$ возьмём n_ε столь большим, чтобы при $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ было $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть

*) В самом деле, возьмём, например, $\varepsilon = 1$ и определим для этого ε число n_ε; пусть x_λ — самая левая, а x_μ — самая правая из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_\varepsilon+1}$; тогда всё множество E_1 лежит на интервале $(x_\lambda - 1; x_\mu + 1)$.

$k > n_\varepsilon$. Из определения чисел α_k, β_k следует, что можно найти x_p, x_q, $p \geqslant k$, $q \geqslant k$ так, что

$$0 \leqslant x_p - \alpha_k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 0 \leqslant \beta_k - x_q < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{3}$ следует, что $\beta_k - \alpha_k < \varepsilon$, чем наше утверждение доказано.

В силу следствия 3 теоремы 10 главы 2 существует единственная точка ξ, принадлежащая всем сегментам $[\alpha_k; \beta_k]$. При этом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, имеется столь большое k, что $U(\xi, \varepsilon) \supset [\alpha_k; \beta_k]$, так что все точки x_k, x_{k+1}, ... содержатся в $U(\xi, \varepsilon)$. А это и означает, что $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Определение 10. Последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

действительных чисел называется *возрастающей*, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

и *убывающей*, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots{}^{*)}.$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяются одним названием *монотонных последовательностей*.

Теорема 25. *Всякая монотонная ограниченная последовательность есть последовательность сходящаяся, причём всякая ограниченная возрастающая последовательность сходится к своей верхней грани, а убывающая — к своей нижней грани.*

Доказательства в случае возрастающих и убывающих последовательностей совершенно аналогичны, рассмотрим

*) Таким образом, если последовательность является одновременно и возрастающей и убывающей, то все элементы её равны между собой.

поэтому лишь случай возрастающих последовательностей. Пусть имеем возрастающую последовательность

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \tag{7}$$

и пусть ξ есть верхняя грань множества всех точек, являющихся элементами нашей последовательности. Пусть $(\xi-\varepsilon;\ \xi+\varepsilon)$ — произвольная окрестность точки ξ. Сегмент $\left[\xi-\frac{\varepsilon}{2};\ \xi\right]$ содержит по крайней мере одну точку последовательности (7), пусть, например, точку x_k; так как никакая точка x_n, для которой $n>k$, не лежит влево от x_k и никакая вообще из точек x_n не лежит вправо от ξ, то все точки x_n, $n>k$, лежат на сегменте $\left[\xi-\frac{\varepsilon}{2};\ \xi\right]$, составляющем часть интервала $(\xi-\varepsilon;\ \xi+\varepsilon)$. Итак, какова бы ни была окрестность точки ξ, все x_n, начиная с некоторого, лежат в этой окрестности, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, что и требовалось доказать.

§ 6. Замечания о множествах, расположенных на плоскости

Теоремы 14—17 и следствие теоремы 17 доказаны нами лишь для множеств, лежащих на прямой; между тем эти предложения и теоремы 22—24 верны также и для множеств, расположенных на плоскости (и в ещё гораздо более широких предположениях, о которых будет речь в главах 6 и 7). Рассмотрим ближе случай плоских множеств. Прежде всего имеет место

Теорема 26. *Множество всех точек плоскости имеет мощность континуума.*

Доказательству предпошлём несколько элементарных фактов. Обозначим через r, φ полярные координаты на плоскости и установим на каждом луче $\varphi=\varphi_0\neq 0$ взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек $0<r<1$ и множеством всех точек $0<r<\infty$; на луче $\varphi=0$ установим взаимно однозначное соответствие между всеми точками $0\leqslant r<1$ и всеми точками $0\leqslant r<\infty$. В результате получится взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех точек открытого круга $r < 1$. Столь же легко установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех точек открытого квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

Итак, достаточно доказать, что множество Q всех точек (x, y) открытого квадрата $0 < x < 1, 0 < y < 1$ имеет мощность континуума. Запишем для этого координаты x, y произвольной точки $(x, y) \in Q$ в виде двоичных дробей, не имеющих единицы в периоде:

$$x = 0,\ x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n \ldots \left(\text{т. е. } x = \sum_n \frac{x_n}{2^n},\quad x_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right),$$

$$y = 0,\ y_1\ y_2\ y_3 \ldots y_n \ldots \left(\text{т. е. } y = \sum_n \frac{y_n}{2^n},\quad y_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right),$$

и поставим в соответствие точке (x, y) точку

$$t = 0,\ x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots x_n y_n \ldots \left(\text{т. е. } t = \sum_n \left(\frac{x_n}{2^{2n-1}} + \frac{y_n}{2^{2n}}\right)\right)$$

интервала $(0; 1)$. Каждая точка этого интервала, в двоичном разложении которой

$$t = 0,\ t_1\, t_1\, t_3 \ldots t_n \ldots$$

имеются нули как на местах с произвольно большими нечётными номерами, так и на местах с произвольно большими чётными номерами, окажется поставленной, таким образом, в соответствие одной единственной точке $(x, y) \in Q$, именно точке с координатами

$$x = 0,\ t_1\, t_3\, t_5 \ldots t_{2n-1} \ldots,$$
$$y = 0,\ t_2\, t_4\, t_6 \ldots t_{2n} \ldots$$

Итак, установлено взаимно однозначное отображение квадрата Q на часть интервала $(0; 1)$. С другой стороны, относя каждой точке t этого интервала точку $(t, \frac{1}{2})$ квадрата Q, мы получим, очевидно, взаимно однозначное отображение интервала $(0; 1)$ на часть квадрата Q. Следовательно, по теореме 13 главы 1, квадрат Q имеет ту же мощность, что и интервал $(0;\ 1)$, т. е. мощность континуума, и теорема 26 доказана.

Переходим теперь к доказательству того, что всякое ограниченное совершенное множество на плоскости имеет мощность континуума.

Лемма 1. *Проекция плоского ограниченного замкнутого множества F на прямую замкнута**).

Доказательство. Пусть $F^{(x)}$ — проекция ограниченного замкнутого множества F на прямую, которую без ограничения общности можем предположить осью абсцисс данной плоскости R^2; пусть x_0 есть предельная точка множества $F^{(x)}$. Докажем, что $x_0 \in F^{(x)}$. Возьмём какую-либо сходящуюся последовательность попарно различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ множества $F^{(x)}$, сходящуюся к точке x_0. По определению множества $F^{(x)}$, для каждого n существует по крайней мере одна точка $z_n = (x_n, y_n) \in F$ с абсциссой x_n; эти точки образуют бесконечное ограниченное множество на плоскости, имеющее в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса предельную точку $z_0 \in F$. Так как, по предположению, $\lim x_n = x_0$, то абсцисса точки z_0 равна x_0. Точка x_0, будучи проекцией точки $z_0 \in F$, есть точка множества $F^{(x)}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь на плоскости R^2 дано совершенное ограниченное множество F. Если проекция множества F на ось абсцисс есть несчётное множество $F^{(x)}$, то это множество, будучи по только что доказанному замкнутым, имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. Но тогда и всё множество F имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$, значит (в силу теоремы 26), мощность этого множества равна $\mathfrak{c}$.

Если же множество $F^{(x)}$ не более чем счётно, то F есть сумма не более чем счётного числа замкнутых множеств вида $F_c = F \cap \Delta_c$, где Δ_c есть прямая $x = c$.

Докажем, что все множества этого вида не могут быть конечными или счётными. В самом деле, если бы это было

*) Для неограниченных плоских замкнутых множеств утверждение леммы может быть неверно: возьмём в качестве множества F дугу гиперболы $y = \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$: проекция этой дуги на ось абсцисс есть полусегмент $0 < x \leqslant 1$, т. е. незамкнутое множество.

так, то мы могли бы взять в счётном замкнутом линейном множестве $F^{(x)}$ изолированную точку c_0, а в счётном замкнутом линейном множестве F_{c_0} изолированную точку (c_0, d_0); точка (c_0, d_0) была бы, очевидно, изолированной точкой множества F, чего не может быть, так как F—совершенное.

Итак, среди множеств F_c существует хотя бы одно несчётное множество; но это множество, будучи замкнутым на прямой $x = c$, имеет мощность континуума, откуда снова следует, что и всё множество F имеет мощность континуума.

Итак, имеет место

Теорема 12'. *Всякое непустое ограниченное совершенное множество, лежащее на прямой или на плоскости, имеет мощность континуума*).*

Теоремы 15, 16 и 17 вместе с их доказательствами переносятся на случай плоских множеств совершенно механически: надо только в лемме к теореме 15 говорить не о рациональном интервале, а о рациональном круге U, понимая под этим открытый круг, радиус и обе координаты центра которого суть рациональные числа. (Для доказательства видоизменённой таким образом леммы к теореме 15 надо взять точку $z_0 = (x_0, y_0)$ с рациональными координатами x_0, y_0, отстоящую от данной точки a на расстоянии $< \frac{\varepsilon}{3}$; обозначая через r_0 какое-нибудь рациональное число интервала $\left(\frac{\varepsilon}{3}; \frac{2\varepsilon}{3}\right)$, получим рациональный круг $U = U(z_0, r_0)$, удовлетворяющий условию (1) в формулировке леммы.)

Доказательство теоремы 14 для плоских множеств также может быть предоставлено читателю.

Замечание. Аналогичные теоремы можно доказать и для множеств, лежащих в трёхмерном (вообще, n-мерном) пространстве.

---

*) Читатель легко докажет, что всякое неограниченное плоское совершенное множество содержит в качестве подмножества ограниченное совершенное множество; поэтому из теоремы 12' следует, что всякое *непустое плоское совершенное множество имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

§ 7. Множества F_σ и G_δ; множества первой и второй категории

Теорема 27. *Всякое непустое открытое множество на прямой есть сумма счётного числа замкнутых множеств.*

Мы докажем даже более сильное утверждение: *всякое непустое открытое множество на прямой есть сумма счётного числа сегментов* *).

Так как каждое открытое множество есть сумма не более чем счётного числа (конечных или бесконечных) интервалов, то достаточно доказать наше утверждение для конечного интервала $(a; b)$ и бесконечных интервалов $(-\infty; a)$ и $(a; +\infty)$.

Но

$$(a; b) = \bigcup_{(n)} \left[a + \frac{1}{n},\ b - \frac{1}{n} \right],$$

где суммирование взято по всем натуральным числам n, для которых $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{3}$. Далее

$$(a; +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n};\ a + n \right]$$

и аналогично для $(-\infty; a)$.

Теорема 27′. *Всякое замкнутое множество F на прямой есть пересечение счётного числа открытых множеств.*

В самом деле, представляя на основании предыдущей теоремы открытое множество $R^1 \setminus F$ в виде суммы счётного числа замкнутых множеств Φ_n, заключаем согласно формуле (2) § 2 главы 1, что множество F есть пересечение счётного числа замкнутых множеств $R^1 \setminus \Phi_n$.

Замечание 1. Теоремы 27 и 27′ верны и для плоских множеств; в главе 6 обе эти теоремы будут доказаны в гораздо более общих предположениях.

---

*) Для пустого множества теорема 27 верна, но тривиальна: пустое множество есть сумма счётного числа замкнутых множеств, каждое из которых пусто.

Определение 11. Множество, являющееся суммой счётного числа замкнутых множеств, называется *множеством типа* F_σ или просто *F_σ-множеством*; множество, являющееся пересечением счётного числа открытых множеств, называется *множеством типа* G_δ или просто *G_δ-множеством*.

Теоремы 27 и 27′ можно теперь сформулировать так: открытые множества являются множествами типа F_σ, а замкнутые множества—множествами типа G_δ.

Если $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то на основании формулы (2) § 2 главы 1

$$R^1 \setminus M = \bigcap_{n=1}^{\infty} (R^1 \setminus F_n).$$

Обратно, если

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

то, на основании формулы (1) § 2 главы 1,

$$R^1 \setminus M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^1 \setminus G_n).$$

Поэтому: *дополнение к F_σ-множеству есть G_δ-множество, дополнение к G_δ-множеству есть F_σ-множество.*

Замечание 2. Одно и то же множество может быть одновременно и F_σ- и G_δ-множеством: таковы, например, все замкнутые и все открытые множества*).

Так как множество, состоящее из одной точки, замкнуто, то всякое счётное множество является множеством типа F_σ, а множество, дополнительное к счётному множеству, является множеством типа G_δ.

Счётное множество, состоящее из всех точек вида $\frac{1}{n}$, где n—натуральное число, является не только F_σ-, но

*) Если дано замкнутое множество F, то оно, очевидно, есть сумма счётного числа слагаемых, каждое из которых есть само это множество; поэтому каждое замкнутое множество является F_σ-множеством. Аналогично, каждое открытое множество есть G_δ-множество.

и G_δ-множеством. В своё время (глава 7, § 10, теорема 37) будет доказано, что среди счётных множеств те и только те являются G_δ-множествами, которые не содержат никакого непустого плотного в себе подмножества. Отсюда, в частности, следует, что всякое счётное плотное в себе множество, как, например, множество всех рациональных чисел, есть F_σ-множество, не являющееся G_δ-множеством. Поэтому множество всех иррациональных чисел, будучи G_δ-множеством, не является F_σ-множеством *).

Замечание 3. Сумма счётного числа множеств типа F_σ есть, очевидно, снова множество типа F_σ; точно так же пересечение счётного числа множеств типа G_δ есть множество типа G_δ. Множества, являющиеся суммами счётного числа множеств типа G_δ, называются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ или $G_{\delta\sigma}$-множествами; дополнения к множествам типа $G_{\delta\sigma}$ суть множества, могущие быть представленными в виде пересечения счётного числа множеств типа F_σ; такие множества называются множествами типа $F_{\sigma\delta}$ или $F_{\sigma\delta}$-множествами. Эту классификацию можно продолжить и далее (см. главу 6, § 6).

Пусть R—числовая прямая, либо какой-нибудь её сегмент, полусегмент или интервал (конечный или бесконечный).

Теорема 28. *Если каждое из открытых множеств* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ *плотно на* R **), *то пересечение этих множеств также плотно на* R.

Доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма. *Если открытое множество* Γ *плотно на* R, *то каков бы ни был интервал* $\Gamma_0 \subset R$ *имеется интервал* Γ' *с замыканием, содержащимся в* $\Gamma \cap \Gamma_0$.

В самом деле, так как Γ плотно на R, то $\Gamma \cap \Gamma_0$ есть непустое открытое множество; всякая точка $x \in \Gamma \cap \Gamma_0$ имеет окрестность $U(x, \varepsilon)$, содержащуюся в $\Gamma \cap \Gamma_0$; беря (произвольно малое) положительное $\varepsilon' < \varepsilon$, видим, что $[U(x, \varepsilon')] \subset \Gamma \cap \Gamma_0$, чем лемма доказана.

---

*) Прямое доказательство этих утверждений будет дано несколько дальше в настоящем параграфе.

**) Ср. § 3, определение 7.

Для доказательства теоремы 28 достаточно в любом интервале $\Gamma'_0 \subset R$ найти точку множества $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Берём согласно лемме интервал Γ'_1, удовлетворяющий условию $[\Gamma'_1] \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_0$. Предполагая, что построены интервалы $\Gamma'_0 = \Gamma_0, \Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_n$, удовлетворяющие условию

$$[\Gamma'_k] \subseteq \Gamma_k \cap \Gamma'_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

построим на основании леммы интервал Γ'_{n+1} такой, что $[\Gamma'_{n+1}] \subseteq \Gamma_n \cap \Gamma'_n$. Пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\Gamma'_n]$ полученных таким образом сегментов непусто и содержится в $M \cap \Gamma_0$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пересечение счётного числа плотных в R множеств*

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

типа G_δ есть плотное в R множество типа G_δ.

В самом деле, для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеем:

$$M_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_{n, k},$$

где $\Gamma_{n, k}$ есть открытое и, очевидно (так как $\Gamma_{n, k} \supseteq M_n$), плотное в R множество. Пересечение M всех множеств M_n совпадает с пересечением $\bigcap_{n,k} \Gamma_{n,k}$ всех множеств $\Gamma_{n,k}$ и потому, согласно только что доказанной теореме, есть плотное в R множество типа G_δ.

Доказанное предложение выражает очень важное свойство G_δ-множеств; если множества M_n плотны в R, но не являются множествами типа G_δ, то их пересечение может быть даже пустым. В самом деле, пусть M_0 есть множество всех рациональных точек

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

числовой прямой; положим

$$M_n = \{r_n, r_{n+1}, \ldots\}.$$

Очевидно, все множества M_n всюду плотны, между тем их пересечение пусто.

Отсюда легко вывести, что множество M_0 всех рациональных точек не есть G_δ-множество. В самом деле, если бы M_0 было множеством типа G_δ, то и каждое из множеств M_n, будучи пересечением множества M_0 с открытым множеством, дополнительным к конечному множеству $r_1, \ldots, r_{n-1}$, было бы множеством типа G_δ. Но тогда пересечение всех множеств M_n по только что доказанному должно было бы быть всюду плотным, между тем оно пусто.

Назовём теперь какое-либо множество *множеством первой категории* на R, если оно может быть представлено как сумма счётного числа нигде не плотных на R множеств (в частности, всякое нигде не плотное множество есть множество первой категории); так как множество, состоящее из одной лишь точки, нигде не плотно, то всякое счётное множество также есть множество первой категории, хотя и может, как, например, множество всех рациональных точек, оказаться всюду плотным.

Множество $M \subset R$ называется *множеством второй категории* на R, если $R \setminus M$ есть множество первой категории на R.

Очевидно, сумма конечного или счётного числа множеств первой категории есть множество первой категории.

Легко видеть, что *всякое множество первой категории содержится в некотором F_σ-множестве также первой категории*. В самом деле, если $M = \bigcup\limits_n M_n$, где все M_n — нигде не плотные множества, то каждое $[M_n]$ также нигде не плотно, так что $M^* = \bigcup\limits_n [M_n]$ есть F_σ-множество первой категории и очевидно $M \subseteq M^*$.

Пусть теперь $N \subseteq R$ — произвольное множество второй категории на R. Тогда $M = R \setminus N$ есть сумма счётного числа нигде не плотных множеств M_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Так как и $[M_n]$ нигде не плотно, то $\Gamma_n = R \setminus [M_n]$ — всюду плотные открытые множества; значит, по теореме 28 всюду плотным является и множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, содержащееся в $N = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R \setminus M_n$. Итак, *всякое множество второй категории на R содержит плотное в R множество типа*

G_σ, *и значит, и само плотно в* R, *а потому, в частности, никогда не может быть пустым.* Другими словами, числовая прямая, а также никакой её сегмент, полусегмент или интервал не есть множество первой категории (т. е. не допускает представления в виде суммы счётного числа нигде не плотных множеств). Отсюда далее следует, что *дополнение к множеству первой категории не может быть множеством первой категории*, т. е. *никакое множество не может быть одновременно множеством первой и второй категории.* В частности, множество J всех иррациональных чисел не есть множество первой категории. Отсюда легко вывести второе доказательство того факта, что множество всех иррациональных чисел J не есть множество типа F_σ.

В самом деле, если бы было $J = \bigcup\limits_n \Phi_n$, где все Φ_n замкнуты, то ни одно Φ_n не могло бы быть плотным на каком-либо интервале (если бы Φ_n было плотным на $(\alpha; \beta)$, то весь сегмент $[\alpha; \beta]$ содержался бы в Φ_n, тогда как множество Φ_n состоит из одних иррациональных точек). Поэтому все Φ_n нигде не плотны, но тогда множество J было бы первой категории, тогда как оно, как дополнение к счётному множеству,—второй категории.

Мы доказали, что всякое множество второй категории на R содержит плотное на R множество типа G_δ. Обратно, всякое множество M, содержащее плотное в R множество M_0 типа G_δ, есть множество второй категории на R. В самом деле, M_0 есть пересечение открытых множеств Γ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, очевидно, плотных на R. Дополнение N_0 к M_0 до R содержит дополнение к M и есть сумма нигде не плотных замкнутых множеств $R \setminus \Gamma_n$, откуда следует наше утверждение.

Итак, имеет место

Теорема 29. *Для того чтобы множество* $M \subseteq R$ *было второй категории, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало плотное в* R *множество типа* G_δ.

Замечание 4. Пусть Φ — какое-нибудь совершенное множество, а M — какое-нибудь подмножество множества Φ. Множество M называется плотным в каком-либо куске множества Φ, если каждая точка этого куска есть точка прикосновения множества M; множество M называется нигде не плотным в Φ, если оно не плотно ни в каком куске множества Φ.

Всякое замкнутое множество, содержащееся в Φ, называется множеством, замкнутым в Φ. Легко видеть, что множества, замкнутые в Φ, совпадают с множествами вида $\Phi \setminus G$, где G открыто в Φ. Теперь можно говорить и о множествах первой и второй категории в Φ, а также о F_σ- и G_δ-множествах в Φ; читатель легко докажет, что все результаты этого параграфа остаются в силе и для множеств M в Φ; при этом придётся в доказательстве леммы к теореме 28 опереться на то, что последовательность замыканий убывающих кусков множества Φ имеет непустое пересечение (частный случай теоремы Кантора).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Непрерывность и пределы функций. Элементарные свойства непрерывных функций

Напомним известные из курса анализа определение и основные свойства непрерывных функций. Если каждой точке x некоторого множества E поставлено в соответствие действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве E определена действительная функция $f(x)$ (или просто функция f). В этой главе мы будем предполагать, что само множество E (*«область определения функции f»*) есть некоторое множество, лежащее на числовой прямой R^1 или на плоскости R^2, причём в большинстве случаев мы будем рассматривать функции, для которых областью определения является либо вся числовая прямая, либо какой-нибудь её сегмент, полусегмент или интервал (конечный или бесконечный).

Функция f, определённая на множестве E, называется *непрерывной в точке* $x_0 \in E$, если к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, лежащих в $U(x, \delta)$, будем иметь $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ (т. е. $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$.

Точка $x_0 \in E$, в которой функция f непрерывна, называется *точкой непрерывности* функции f; точка x_0, в которой функция f не непрерывна, называется *точкой разрыва* функции f.

Функция, непрерывная во всех точках множества E, называется *непрерывной на множестве* E.

Теорема 1. *Пусть f и g — две функции, определённые на множестве E и непрерывные в точке a этого множества. Функции*

$$s(x)=f(x)\pm g(x),$$
$$p(x)=f(x)\cdot g(x),$$

а также — если только $f(a)\neq 0$ — функция

$$q(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$$

непрерывны в точке a.

Доказательство. 1) Непрерывность функции $s(x)$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и столь малое $\delta>0$, чтобы для всех точек $x\in E$, лежащих в $U(a, \delta)$, выполнялись неравенства

$$|f(a)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(a)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для тех же точек x будет

$$|s(a)-s(x)|=|[f(a)-f(x)]\pm[g(a)-g(x)]|\leqslant$$
$$\leqslant|f(a)-f(x)|+|g(a)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

чем непрерывность $s(x)$ в точке a доказана.

2) Непрерывность функции $p(x)$. Обозначим через m наибольшее из положительных чисел 1, $|f(a)|+\varepsilon$, $|g(a)|+\varepsilon$ и выберем $\delta>0$ столь малым, чтобы для всех точек $x\in E$, лежащих в $U(a, \delta)$, выполнялись неравенства

$$|f(a)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2m}, \quad |g(a)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2m},$$

следовательно, и подавно неравенства

$$|f(x)|<|f(a)|+\varepsilon\leqslant m, \quad |g(x)|<|g(a)|+\varepsilon\leqslant m.$$

Пользуясь этими неравенствами, имеем для всех точек

$$x\in E\cap U(a, \delta):$$

$$\begin{aligned}|p(a)-p(x)|&=|f(a)\cdot g(a)-f(x)\cdot g(x)|=\\&=|f(a)[g(a)-g(x)]+g(x)[f(a)-f(x)]|\leqslant\\&\leqslant|f(a)||g(a)-g(x)|+|g(x)||f(a)-f(x)|\leqslant\\&\leqslant m|g(a)-g(x)|+m|f(a)-f(x)|<\\&<m\frac{\varepsilon}{2m}+m\frac{\varepsilon}{2m}=\varepsilon.\end{aligned}$$

3) Непрерывность функции $q(x)$, в силу только что доказанного, достаточно доказать лишь для случая $q(x) = 1$, т.е. для $q(x) = \frac{1}{f(x)}$, в предположении, что $f(x)$ непрерывно в точке a и что $|f(a)| = c > 0$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через ε' наименьшее из чисел $\frac{c}{2}$, $\frac{c^2}{2}\varepsilon$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы для всех точек $x \in E$, лежащих в $U(a, \delta)$, выполнялось неравенство

$$|f(a) - f(x)| < \varepsilon',$$

откуда

$$|f(x)| > |f(a)| - \varepsilon' = c - \varepsilon' \geqslant c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}.$$

Тогда для этих точек x будем иметь:

$$|q(a) - q(x)| = \left| \frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(a)| \cdot |f(x)|} < \frac{\varepsilon'}{c \cdot \frac{c}{2}} \leqslant \varepsilon,$$

чем непрерывность функции $q(x)$ в точке a доказана.

Замечание о функциях от двух переменных. Пусть дана функция f, определённая на некотором множестве E, лежащем на плоскости R^2. Задавая точки $z \in E$ их координатами x, y:

$$z = (x, y),$$

можно вместо $f(z)$ писать $f(x, y)$ и говорить о функции двух независимых переменных x и y, заданной для тех пар значений этих переменных, которые определены требованием, чтобы соответствующая точка (x, y) принадлежала множеству E.

Функция f, непрерывная в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, рассматриваемая как функция двух переменных x и y, называется иногда *непрерывной в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ на множестве E относительно совокупности двух переменных x и y*. На основании теоремы 1 примером функции, определённой на всей плоскости и непрерывной в каждой её точке, может служить любой многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x и y. Если же взять дробную рациональную функцию от двух переменных, т. е. функцию, определённую равенством вида

$$f(x, y)=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены от двух переменных, то функция эта определена, вообще говоря, уже не на всей плоскости, а только в открытом всюду плотном множестве G всех тех точек, которые не лежат на алгебраической кривой $Q(x, y)=0$. В силу теоремы 1 функция (1) непрерывна в каждой точке множества G.

С понятием непрерывности функции $f(x, y)$ по совокупности переменных x и y не следует смешивать понятие непрерывности по каждому переменному в отдельности: мы говорим, что *функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $z_0=(x_0, y_0)$ по переменному x, если функция*

$$\varphi(x)=f(x, y_0)$$

от одного переменного x непрерывна в точке x_0. Аналогично определяется и непрерывность функции $f(x, y)$ по переменному y.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определённую следующим образом: в точке $x=0$, $y=0$ функция $f(x, y)$ принимает значение нуль, а во всякой точке (x, y), хотя бы одна координата которой отлична от нуля, имеем:

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

В силу теоремы 1 эта функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке, отличной от точки $(0, 0)$. В этой последней она разрывна.

В самом деле, если мы будем приближаться к точке, оставаясь на прямой $x=0$ или $y=0$, то значение функции будет постоянно равно нулю, и следовательно, будет иметь нуль своим пределом (откуда видно, что каждая из функций одного переменного $f(0, y)$ и $f(x, 0)$ непрерывна в точке $(0, 0)$). Если же мы будем приближаться к точке $(0, 0)$, например, по прямой $y=x$, то функция $f(x, y)$ будет постоянно равна 1, и следовательно, будет и пределом своим иметь 1. Итак, наша функция $f(x, y)$, будучи в точке $(0; 0)$ непрерывной по каждому из двух переменных x и y, не является функцией, непрерывной в этой точке по совокупности переменных x и y (таким образом, $f(x, y)$ есть функция, определённая на всей плоскости и имеющая точку $(0, 0)$ своей единственной точкой разрыва).

Определение 1. Пусть на множестве E (лежащем в R^1 или в R^2) определена функция $f(x)$. Пусть x_0 есть предельная точка множества E (принадлежащая или не принадлежащая множеству E). Мы называем число a *пределом функции* $f(x)$ при x *стремящемся* (или приближающемся) *к* x_0 *по множеству* E, и пишем

$$a = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \quad \text{или} \quad a = \lim_{x_0, E} f(x),$$

если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, лежащих в $U(x_0, \delta)$, будем иметь

$$|a - f(x)| < \varepsilon.$$

Очевидно, имеет место следующее предложение:

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$ определённая на множестве E, была непрерывна в данной точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она стремилась к некоторому пределу при приближении к точке x_0 по множеству E. Из наших определений следует, что этот предел (если он существует) равен $f(x_0)$.*

В руководствах по классическому анализу предпочитают называть пределом функции $f(x)$ при приближении к точке x_0 то, что мы называем $\lim_{x_0, E \setminus x_0} f(x)$. При этой терминологии (от которой мы здесь отказываемся) приходится говорить, что функция $f(x)$ тогда и только тогда непрерывна в точке x_0, если её значение в точке x_0 равно пределу функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0.

Примеры:

1. Функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, определённая на множестве E всех отличных от нуля действительных чисел, при приближении по множеству E к точке $x = 0$ стремится к пределу нуль.

2. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, определённая на том же множестве E, при приближении по множеству E к точке $x = 0$ не стремится ни к какому пределу.

3. Функция $f(x)=[x]$, где $[x]$ есть наибольшее неотрицательное целое число, не превосходящее данного действительного числа $x\geqslant 0$, определена для всех $x\geqslant 0$, и для целого x, очевидно, равна x. Если E_n состоит из всех точек $x\geqslant 0$, удовлетворяющих, при данном натуральном n, условию $x<n$, то функция $f(x)=[x]$ при приближении x к n по множеству E_n стремится к пределу $n-1$.

Определение 2. Пусть снова f — функция, определённая на множестве E, лежащем в R^1 или R^2. Мы говорим, что при приближении точки x по множеству E к точке x_0, принадлежащей или не принадлежащей множеству E, функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ (соотв. к $-\infty$), если, каково бы ни было положительное (соотв. отрицательное) число n, можно найти такое $\delta>0$, что для всех $x\in E$, лежащих в $U(x_0, \delta)$, имеем $f(x)>n$ (соотв. $f(x)<-n$).

Пример. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ при приближении к точке 0 по множеству всех точек $x>0$ стремится к $+\infty$, а при приближении к точке 0 по множеству всех точек $x<0$ стремится к $-\infty$. Функция $f(x)=\operatorname{tg} x$ при приближении к точке $\frac{\pi}{2}$ «справа» (т. е. по множеству всех точек $x>\frac{\pi}{2}$) стремится к $-\infty$, а «слева» — к $+\infty$.

Замечание 2. Рациональная функция

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые многочлены от переменного x) стремится при приближении к любому заданному x_0 по любому множеству E либо к конечному пределу, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Мы видели, что в применении к рациональным функциям двух переменных этого утверждать нельзя.

Для пределов функций имеют место общеизвестные свойства: если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при приближении точки x по множеству E к точке x_0 стремятся соответственно к пределам a_1 и a_2, то $f_1(x)\pm f_2(x)$ в тех же предположениях стремится к пределу $a_1 \pm a_2$, а $f_1(x) \cdot f_2(x)$ — к пределу $a_1 \cdot a_2$. Что же касается функции $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, то при $a_2 \neq 0$ функция $f(x)$ стремится к пределу $\frac{a_1}{a_2}$, если же $a_2 = 0$, то вопрос о поведении функции $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ при приближении x к точке x_0 требует в каждом данном случае отдельного рассмотрения.

Если функция $f(x)$ при приближении точки x к точке x_0 по некоторому множеству E не стремится ни к какому пределу, то приходится изучать два числа: верхний и нижний пределы функции $f(x)$ при приближении к точке x_0 по множеству E; при этом мы всё время предполагаем, что x_0 — предельная точка множества E. Эти пределы определяются так. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассматриваем ε-окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 и обозначаем через M_ε верхнюю, а через m_ε — нижнюю грани множества всех значений функции $f(x)$ в точках $x \in E \cap U(x_0, \varepsilon)$. Когда ε убывает, то M_ε может только убывать, так что существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon$; этот предел (равный $+\infty$ только если при любом $\varepsilon > 0$ имеем $M_\varepsilon = +\infty$) и называется *верхним пределом функции $f(x)$ при приближении точки x к точке x_0 по множеству E*; он обозначается через $\overline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} f(x)$ или короче $\overline{\lim}_{x_0, E} f$.

Число m_ε при убывающем ε может только возрастать и, следовательно, при ε, стремящемся к нулю, стремится к некоторому пределу, который мы обозначаем через $\underline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} f(x)$ или короче $\underline{\lim}_{x_0, E} f$ и называем *нижним пределом функции $f(x)$ при приближении точки x к точке x_0 по множеству E*. При этом может случиться, что $\underline{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}}} f(x) = -\infty$, но это будет тогда и только тогда, когда $m_\varepsilon = -\infty$ при любом ε. Очевидно, всегда

$$\underline{\lim}_{x_0, E} f \leqslant \overline{\lim}_{x_0, E} f.$$

В частности, если $a \in E$, то

$$\underline{\lim}_{a,\,E} f \leqslant f(a) \leqslant \overline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Если $E = R^1$, соотв. R^2, то пишем просто $\underline{\lim}_a f$, $\overline{\lim}_a f$.

Из наших определений непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для того чтобы при приближении к точке a по некоторому множеству E функция $f(x)$ (определённая на этом множестве) стремилась к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{\lim}_{a,\,E} f = \overline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Тогда

$$\lim_{a,\,E} f = \underline{\lim}_{a,\,E} f = \overline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Функция $f(x)$ тогда и только тогда непрерывна в точке a, принадлежащей области её определения, когда*

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f;$$

в этом случае само собою будет

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f = f(a).$$

Замечание 3. Если $\overline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$ (что может иметь место лишь когда a не содержится в E *)), то и $\underline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$, и потому

$$\lim_{a,\,E} f = -\infty.$$

Точно так же, если $\underline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$, то и $\lim_{a,\,E} f = +\infty$.

Пусть f — функция, определённая на множестве E.

Определение 3. *Колебанием функции f в точке $a \in E$* (по множеству E) называется разность

$$\omega_{a,\,E} f = \overline{\lim}_{a,\,E} f - \underline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Эта разность представляет собою неотрицательное число,

---

*) В самом деле, при $a \in E$ имеем $\overline{\lim}_{a,\,E} f \geqslant f(a)$.

если $\overline{\lim}_{a, E} f$ и $\underline{\lim}_{a, E} f$ конечны; она равна $+\infty$, если выполнено по крайней мере одно из условий

$$\overline{\lim}_{a, E} f = +\infty, \quad \underline{\lim}_{a, E} f = -\infty.$$

Никакого третьего случая представиться не может: случаи $\overline{\lim}_{a, E} f = -\infty$ и $\underline{\lim}_{a, E} f = +\infty$ невозможны, так как функция $f(x)$ принимает в точке a определённое числовое значение $f(a)$, и мы имеем $\overline{\lim}_{a, E} f \geqslant f(a) \geqslant \underline{\lim}_{a, E} f$.

Итак, всегда $\omega_{a, E} f$ есть либо неотрицательное число, либо $+\infty$. Если E есть сегмент или интервал, то вместо $\omega_{a, E} f$ пишем просто $\omega_a f$.

Следствие 1 из теоремы 3 мы можем теперь сформулировать так:

Теорема 4. *Для того чтобы функция f, определённая на E, была непрерывна в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы её колебание в этой точке (по множеству E) равнялось нулю.*

Приложим этот результат к доказательству следующего предложения:

Теорема 5. *Множество C всех точек непрерывности любой функции f, определённой на замкнутом или открытом множестве E числовой прямой, есть множество типа G_δ (которое, в частности, может оказаться пустым или совпадающим со всем E).*

Этой теореме эквивалентна

Теорема 5′. *Множество D всех точек разрыва функции f есть множество типа F_σ* *).

Доказательство теоремы 5′ опирается на следующую лемму:

Лемма. *Множество $E_f(\varepsilon)$ всех точек x, для которых при данном $\varepsilon > 0$ имеем $\omega_{x, E} f \geqslant \varepsilon$, замкнуто.*

Доказательство леммы. Пусть a есть точка прикосновения множества $E_f(\varepsilon)$. Тогда в любой окрестно-

---

*) Из теоремы 5′ следует, что множество $R \setminus D$ есть G_δ-множество; но $C = E \cap (R^1 \setminus D)$; так как E (будучи замкнутым или открытым множеством на R^1) есть G_δ-множество и пересечение двух G_δ-множеств есть G_δ-множество, то и C есть множество типа G_δ.

сти $U = U(a, \eta)$ точки a имеется точка a', для которой $\omega_{a', E} f \geqslant \varepsilon$.

Обозначим через M и m, соответственно, верхнюю и нижнюю грани множества значений функции f в U. Так как U содержит некоторую окрестность точки a', то

$$M \geqslant \overline{\lim}_{a'} f, \quad \underline{\lim}_{a'} f \geqslant m$$

и, значит, $M - m \geqslant \omega_{a', E} f \geqslant \varepsilon$. Но если бы было $\omega_{a', E} f < \varepsilon$, то окрестность U можно было бы выбрать так, чтобы для неё выполнялось неравенство $M - m < \varepsilon$. Лемма этим доказана.

Доказательство теоремы 5'. В силу теоремы 4 множество всех точек разрыва функции f есть сумма $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_f\left(\frac{1}{n}\right)$. Но в силу леммы каждое $E_f\left(\frac{1}{n}\right)$ замкнуто. Этим и доказана теорема 5', а значит, и теорема 5.

Часто оказывается полезной

Теорема 6. *Пусть на множестве E определены две функции f и g. Тогда при приближении к точке a (принадлежащей или не принадлежащей множеству E) имеют место соотношения*

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\lim}_a f + \underline{\lim}_a g \leqslant \overline{\lim}_a (f+g) \leqslant \overline{\lim}_a f + \overline{\lim}_a g, \\ \underline{\lim}_a f + \underline{\lim}_a g \leqslant \underline{\lim}_a (f+g) < \overline{\lim}_a f + \underline{\lim}_a g. \end{array}\right. \tag{2}$$

В самом деле, обозначим при данном произвольном $\varepsilon > 0$ через L_ε, M_ε, N_ε и l_ε, m_ε, n_ε, соответственно, верхние и нижние грани функций $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) + g(x)$ на множестве $E \cap U(a, \varepsilon)$. Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$L_\varepsilon + m_\varepsilon \leqslant N_\varepsilon \leqslant L_\varepsilon + M_\varepsilon,$$
$$l_\varepsilon + m_\varepsilon \leqslant n_\varepsilon \leqslant L_\varepsilon + m_\varepsilon,$$

что при переходе к пределу при ε, стремящемся к нулю, даёт искомые неравенства (2).

В частном случае, когда $\overline{\lim}_a g = \underline{\lim}_a g = \lim_a g$, имеем:

$$\overline{\lim}_a f + \lim_a g \leqslant \overline{\lim}_a (f+g) \leqslant \overline{\lim}_a f + \lim_a g,$$

т. е.

$$\overline{\lim}_a (f+g) = \overline{\lim}_a f + \lim_a g; \tag{3}$$

аналогично

$$\underline{\lim}_a (f+g) = \underline{\lim}_a f + \lim_a g. \qquad (3')$$

Переходим к дальнейшим основным теоремам о непрерывных функциях.

Теорема 7. *Для того чтобы функция f, определённая на множестве E, была непрерывна в точке $a \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой сходящейся к a последовательности*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

точек множества E последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad (4)$$

сходилась к точке $f(a)$.

Доказательство этой теоремы полностью приведено в главе 3, мелкий шрифт на стр. 96 *), и может быть прочитано независимо от остального текста главы 3.

Из теоремы 7 вытекает

Теорема 8. *Пусть f — непрерывная функция, определённая на замкнутом множестве E; пусть Φ — произвольное замкнутое множество на числовой прямой. Множество $f^{-1}\Phi$ всех тех точек $x \in E$, для которых $f(x) \in \Phi$, замкнуто (может быть и пусто).*

В самом деле, пусть a — предельная точка множества $f^{-1}\Phi \subseteq E$. Так как E замкнуто, то $a \in E$. Возьмём какую-нибудь последовательность (4) точек множества $f^{-1}\Phi$, сходящуюся к точке a. Тогда последовательность $f(x_n)$, в силу непрерывности функции f, сходится к точке $f(a)$. Так как все точки $f(x_n)$ принадлежат множеству Φ и Φ, по предположению, замкнуто, то и $f(a) \in \Phi$, а это значит, что $a \in f^{-1}\Phi$. Теорема 8 доказана. Её особенно часто приходится применять в случаях, когда множество Φ есть сегмент или состоит из одной точки.

Теорема 9_0. *Если функция f непрерывна на сегменте $[a; b]$ и принимает в концах его значения, противоположные по знаку, то в некоторой точке интервала $(a; b)$ функция f обращается в нуль.*

---

*) То обстоятельство, что на стр. 95 за множество E взят сегмент, не оказывает на доказательство никакого влияния.

Доказательство начнём со следующего очевидного замечания: если непрерывная функция в какой-либо точке ξ принимает отличное от нуля значение $f(\xi)$, то во всех точках, достаточно близких к точке ξ, значения функции f являются числами того же знака, что и число $f(\xi)$ (достаточно положить $\varepsilon = |f(\xi)|$ и подобрать $\delta > 0$ так, чтобы для всех $x \in U(\xi, \delta)$ было $|f(\xi) - f(a)| < \varepsilon$).

Пусть теперь, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Во всех точках x сегмента $[a; b]$, достаточно близких к точке b, функция f принимает положительные значения. Поэтому верхняя грань множества тех значений $x \in [a; b]$, для которых $f(x) < 0$, есть число $\xi < b$. Во всех точках $x \in [\xi; b]$ функция f принимает положительные значения, тогда как в любом сколь угодно малом интервале вида $(\xi - \delta; \xi)$ имеются точки x, в которых значения $f(x)$ отрицательны. Отсюда, в силу сделанного вначале замечания, следует, что число $f(\xi)$ не может быть ни положительным, ни отрицательным, так что $f(\xi) = 0$.

Из теоремы 9_0 сразу следует

Теорема 9. *Если функция f непрерывна на сегменте $[a; b]$, причём $f(a) \neq f(b)$, то каково бы ни было число γ, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, найдётся точка $\xi \in (a; b)$, в которой $f(\xi) = \gamma$.*

В самом деле, функция $\varphi(x) = f(x) - \gamma$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, следовательно, обращается в нуль в некоторой точке ξ, так что $f(\xi) = \gamma$.

Определение 4. Функция f, определённая на множестве E, называется *равномерно непрерывной* на этом множестве, если ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x' \in E$, $x'' \in E$, отстоящих друг от друга меньше чем на δ, имеем $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Функция f может быть непрерывной на некотором интервале, не будучи на этом интервале равномерно непрерывной. Так, например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$, непрерывная на интервале $(0; 1)$, не является на нём равномерно непрерывной (как бы ни было мало δ, взяв натуральное число N столь большим, чтобы было $\frac{1}{N^2} < \delta$, видим, что $0 < \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} < \delta$, в то время как $\left| f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{1}{N+1}\right) \right| = 1$.

Теорема 10. *Всякая функция f, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве Φ, равномерно непрерывна на этом множестве.*

В самом деле, если функция f, определённая на замкнутом ограниченном множестве Φ, не является на этом множестве равномерно непрерывной, то существует такое $\varepsilon > 0$, что ко всякому $\delta > 0$ можно подобрать две точки x'_δ и x''_δ так, что выполняются условия $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$, $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geqslant \varepsilon$. Дадим, в частности, числу δ значения $\delta_n = \frac{1}{n}$ Ф и обозначим через x'_n, x''_n точки x'_{δ_n}, x''_{δ_n}.

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots, \tag{5'}$$

причём предел $\lim x'_{n_k} = x_0$ последовательности (5′) принадлежит множеству Φ, так как Φ замкнуто. Ввиду того, что $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, последовательность

$$x''_{n_1}, x''_{n_2}, \ldots, x''_{n_k}, \ldots \tag{5''}$$

тоже сходится к точке x_0. Поэтому, в силу теоремы 7, обе последовательности $f(x'_{n_k})$ и $f(x''_{n_k})$ сходятся к $f(x_0)$, так что при достаточно большом k имеем $|f(x_0) - f(x'_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x_0) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}$, значит, и $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon$, вопреки определению точек x'_n и x''_n. Теорема 10 доказана.

Функция f, как известно, называется ограниченной (на множестве E), если множество значений, принимаемых ею в точках множества E, ограничено; верхняя и нижняя грани этого множества называются соответственно верхней и нижней гранями функции f на множестве E. Функция, непрерывная на интервале, может не быть ограниченной (такова, например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервале $(0;\ 1)$). С другой стороны, функция, непрерывная и ограниченная на данном интервале, может не принимать на этом интервале ни наибольшего, ни наименьшего значения (в этом случае верхняя и нижняя грани функции на данном интервале не являются значениями функции на этом интервале). Так обстоит дело с простейшей непостоянной функцией $f(x)=x$: верхняя грань функции $f(x)=x$ на интервале $(0;\ 1)$ равна 1, нижняя равна 0, и ни то ни другое значение функцией $f(x)=x$ на интервале $(0;\ 1)$ не принимается.

Теорема 11. *Функция $f(x)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве Φ, ограничена и принимает на этом множестве как наибольшее, так и наименьшее свои значения.*

Доказательство. Если бы функция f была на множестве Φ неограниченной, то для каждого натурального числа n можно было бы найти точку x_n, в которой $|f(x_n)|>n$. Рассмотрим полученную таким образом последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{6}$$

точек множества Φ. Перейдя, если надо, к подпоследовательности, можем предположить, что последовательность (6) сходится к некоторой точке $x_0\in\Phi$. В силу непрерывности функции f, имеем $f(x_0)=\lim\limits_n f(x_n)$, чего не может быть, так как $f(x_0)$ есть определённое действительное число, тогда как числа $|f(x_n)|$ неограниченно растут по абсолютной величине.

Итак, пусть M и m — верхняя и нижняя грани функции f на Φ. Докажем, что существует точка x_0, для которой $f(\xi)=M$.

По определению числа M существует точка x_n, для которой $M\geqslant f(x_n)>M-\frac{1}{n}$. Можно снова предположить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Phi$. Но тогда

$$M = \lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

Аналогично доказывается и существование точки x_0', для которой $f(x_0') = m$.

§ 2. Точки разрыва первого и второго рода. Точки поправимого разрыва

Пусть E — какое-нибудь множество действительных чисел, a — точка множества E. Пусть f — функция, определённая на множестве E. Обозначим через E^+ множество всех точек $x \in E$, лежащих справа от точки a; и через E^- — множество всех $x \in E$, лежащих слева от a. Предел функции при приближении к точке a по множеству E^+, если он существует, называется *правосторонним пределом функции f в точке a* (по множеству E) и обозначается через $f_E(a+)$ или просто через $f(a+)$; точно так же, предел функции f при приближении к точке a по множеству E^-, если он существует, называется *левосторонним пределом функции в точке a* (по множеству E) и обозначается через $f_E(a-)$ или $f(a-)$. Если функция f непрерывна в точке a (по множеству E), то и правосторонний и левосторонний пределы её в точке a существуют и равны $f(a)$. Если предел $f(a+)$ существует и равен $f(a)$, то функция f называется *непрерывной справа* (в точке a по множеству E). Аналогично определяется непрерывность слева. Если $f(a+)$ и $f(a-)$ существуют и равны между собою, но не равны числу $f(a)$, то эта точка называется *точкой поправимого разрыва* *). Название объясняется тем, что в этом случае, изменяя значение функции f в одной лишь точке a (а именно, полагая его равным $f(a+) = f(a-)$), получим функцию, непрерывную в этой точке. Точки

*) Точка поправимого разрыва может быть определена как такая точка a, что предел функции f при приближении к точке a по множеству $E \setminus a$ существует, но не равен $f(a)$; это определение сохраняет силу и в применении к функциям, определённым в любом метрическом пространстве (см. главу 6).

поправимого разрыва являются частным случаем так называемых точек разрыва первого рода: точка a называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке функция f, не будучи непрерывной, имеет и правосторонний и левосторонний пределы. Если точка a при этом не является точкой поправимого разрыва, то это означает, что $f(a+) \neq f(a-)$. В этом случае положительное число $|f(a+)-f(a-)|$ называется *скачком* *) функции в точке a; при этом удобно говорить, что в точках поправимого разрыва и в точках непрерывности скачок функции равен нулю. Наконец, если точка разрыва функции f не есть точка разрыва первого рода, то она называется *точкой разрыва второго рода*; в таких точках по крайней мере один из пределов $f(a+)$, $f(a-)$ не существует.

Заметим, наконец, что наиболее важным случаем является, естественно, тот, когда множество E есть либо вся числовая прямая, либо какой-нибудь её сегмент или интервал.

Примеры:

1. Функция равна 0 на всём сегменте $[-1; 1]$, за исключением точки O, в которой функция равна 1. Точка O есть точка поправимого разрыва.

2. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}+x & \text{для } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция f имеет в точке $x=\frac{1}{2}$ разрыв первого рода со скачком $\frac{1}{2}$. В точке $x=\frac{1}{2}$ она, кроме того, непрерывна слева.

*) При этом не исключается случай, когда по крайней мере один из пределов $f(a+)$, $f(a-)$ равен $+\infty$ или $-\infty$; если один из пределов равен, положим, $+\infty$, а другой — конечному числу или $-\infty$, то говорят о точках разрыва с бесконечным скачком; то же в случае, когда один из пределов $f(a+)$, $f(a-)$ равен $-\infty$, а другой—конечен. Если оба предела равны $+\infty$ или оба равны $-\infty$, то говорят, что функция при приближении к точке a и справа и слева стремится к $+\infty$ (соотв. к $-\infty$). Эта терминология, впрочем, не является общепринятой.

3. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{для } x < 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

Она имеет в точке O разрыв первого рода (со скачком 2).

4. Функция

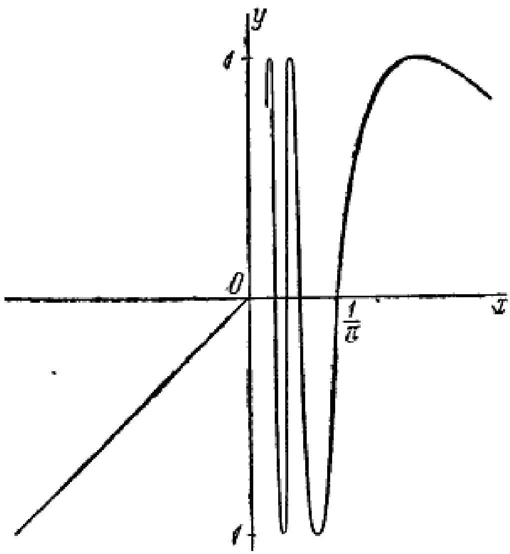
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

определена на всей числовой прямой и имеет точку O точкой разрыва первого рода с бесконечным скачком.

5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{для } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке O точку разрыва первого рода и стремится при приближении к этой точке и справа и слева к $+\infty$.



Черт. 5.

6. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{для } x > 0, \\ x & \text{для } x \leqslant 0 \end{cases}$$

(черт. 5) имеет точку $x = 0$ точкой разрыва второго рода (и в то же время непрерывна слева в этой точке).

7. Функция f определена так: если x — двоично-рациональная точка, а именно, если $x = \frac{m}{2^n}$, где m — нечётное число, то $f(x) = \frac{1}{2^n}$; если же x не есть двоично-

рациональная точка, то $f(x)=0$. Для этой функции каждая двоично-рациональная точка есть точка поправимого разрыва, а все остальные точки суть точки непрерывности. Таким образом, функция может иметь всюду плотное множество точек поправимого разрыва.

8. Функция

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ иррационально},\\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}\end{cases}$$

разрывна в каждой точке числовой прямой, причём каждая точка есть точка разрыва второго рода. Эту функцию называют иногда *функцией Дирихле*.

9. Функция $f(x)=[x]$ («целая часть числа x») имеет своим значением для каждого действительного числа x наибольшее целое число, не превосходящее x. Все целые значения x являются точками разрыва первого рода функции $[x]$ со скачком 1; функция $[x]$ непрерывна справа на всей числовой прямой.

10. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}} & \text{для } x\neq 0 \text{ и } x\neq \dfrac{1}{\ln 2},\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{для } x=0\end{cases}$$

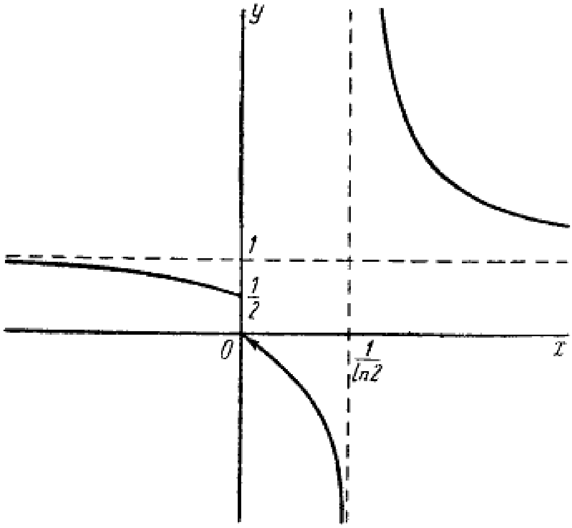
(черт. 6) непрерывна во всех точках числовой прямой, кроме точки 0, являющейся для этой функции точкой разрыва первого рода (причём функция непрерывна слева в этой точке) и точки $x=\frac{1}{\ln 2}$, являющейся точкой разрыва первого рода с бесконечным скачком.

11. Функция

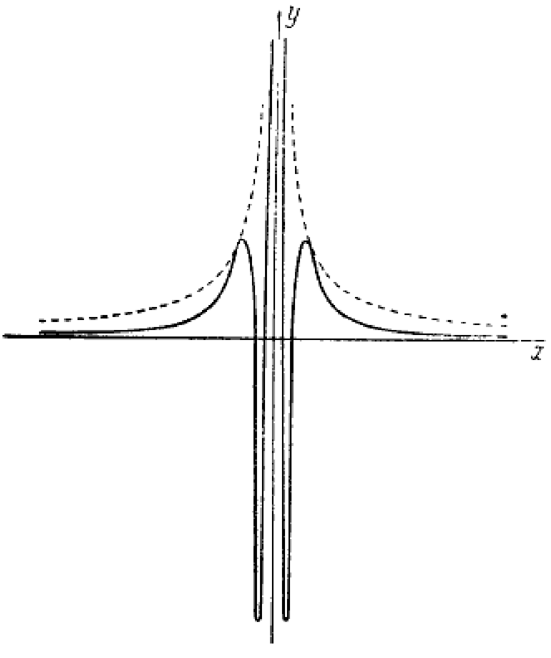
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} & \text{для } x\neq 0,\\ 0 & \text{для } x=0\end{cases}$$

(черт. 7) имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода; в этой точке верхний предел функции равен $+\infty$, а нижний равен $-\infty$ (и справа и слева).

12. *Функция Римана*: $f(x)=0$, если x иррационально, $f(x)=\frac{1}{q}$, если x рационально и выражается несократимой



Черт. 6.



Черт 7

дробью со знаменателем q. Эта функция непрерывна во всех иррациональных точках; каждая рациональная точка есть точка разрыва первого рода (поправимого).

§ 3. Монотонные функции

Функция f, определённая на некотором множестве E действительных чисел, называется *возрастающей* на E, если для любых $x' \in E$, $x'' \in E$ из $x' < x''$ следует $f(x') \leqslant f(x'')$. При этом, если из $x' < x''$ всегда следует $f(x') < f(x'')$, то функция называется *строго возрастающей*. Аналогично, если при $x' < x''$ всегда имеем $f(x') \geqslant f(x'')$, то f называется *убывающей*; при этом, если для $x' < x''$ всегда $f(x') > f(x'')$, то функция называется *строго убывающей*.

Возрастающие и убывающие на E функции образуют вместе класс *монотонных* (на E) функций. Очевидно, функция f тогда и только тогда является одновременно возрастающей и убывающей, когда она постоянна.

В дальнейшем мы ограничиваемся случаем, когда множество E, на котором определена функция, есть сегмент, либо (конечный или бесконечный) интервал числовой прямой.

Примеры непрерывных монотонных функций:

1. $f(x) = ax + b$ монотонна на всей числовой прямой, причём возрастает при положительном и убывает при отрицательном a.

2. $f(x) = x^2$ монотонна на любом интервале, не содержащем точки 0, причём убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна и убывает на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

4. Канторова ступенчатая функция. Эта функция определяется на сегменте $[0; 1]$ следующим образом. Прежде всего положим

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Теперь определяем функцию на смежных интервалах и в точках первого рода канторова совершенного множества; а именно, на всём смежном интервале $\delta_{i_1\ldots i_n}$ (см. обозначения § 3 главы 4) и в его концах полагаем

$$f(x)=\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\ldots+\frac{i_n}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

(т. е. в двоичной системе нумерации просто $f(x)=$ $=0.\ i_1i_2\ldots i_n1$ на $[\delta_{i_1i_2\ldots i_n}]$).

Остаётся определить f в точках второго рода канторова множества П. Пусть x — такая точка. Она определяет сечение в упорядоченном множестве всех смежных к П интервалов: нижний класс этого сечения состоит из всех смежных интервалов, лежащих влево от x, а верхний класс — из всех смежных интервалов, лежащих вправо от x; этому сечению в множестве смежных интервалов $\delta_{i_1\ldots i_n}$ соответствует сечение (A_x, B_x) в множестве всех двоично-рациональных чисел $0, i_1\ldots i_n$. Число, определяемое этим сечением (т. е. $\sup A_x=\inf B_x$), и объявляем значением функции f в точке x.

Читатель без труда убедится в том, что f есть непрерывная возрастающая функция (постоянная на каждом смежном интервале к канторову множеству П).

Замечание. Канторова ступенчатая функция f осуществляет взаимно однозначное отображение множества всех точек второго рода канторова множества П на множество всех двоично-иррациональных точек сегмента $[0; 1]$, причём и обратная функция f^{-1} непрерывна (на множестве двоично-иррациональных точек сегмента $[0; 1]$), что же касается множества точек первого рода множества П (включая и точки 0, 1), то оно непрерывно отображается на множество двоично рациональных точек сегмента $[0;1]$, причём прообраз каждой двоично-рациональной точки $0, i_1\ldots i_n1$ интервала $(0;1)$ состоит из двух точек первого рода, а именно, из двух концов интервала $\delta_{i_1\ldots i_n}$.

Переходим к примерам разрывных монотонных функций. Монотонная возрастающая функция $\operatorname{sgn} x$, постоянная (и, следовательно, непрерывная) на обоих интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, имеет в точке 0 разрыв первого рода.

Пример монотонной функции, определённой на $[0; 1]$ и имеющей всюду плотное на $[0; 1]$ множество точек разрыва. Занумеруем все рациональные числа интервала (0; 1) в последовательность

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

и положим $f(0)=0$, а для всякого x, $0<x\leqslant 1$ положим:

$$f(x)=\sum\nolimits^{(x)}\frac{1}{2^n},$$

где $\sum^{(x)}$ обозначает, что сумма берётся по всем n, для которых $r_n<x$ $\left(\text{в частности, } f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1\right)$. Каждая рациональная точка r_n интервала (0; 1) есть точка разрыва функции f, так как для $x>r_k$ имеем:

$$f(x)=\sum\nolimits^{(x)}\frac{1}{2^n}\geqslant\sum\nolimits^{(r_k)}\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^k}=f(r_k)+\frac{1}{2^k},$$

откуда следует, что $f(r_k+)\geqslant f(r_k)+\frac{1}{2^k}$, чем и доказано, что r_k есть точка разрыва нашей функции. Легко, между прочим, видеть, что $f(r_k+)=f(r_k)+\frac{1}{2^k}$, $f(r_k-)=f(r_k)$, так что скачок функции в точке r_k равен $\frac{1}{2^k}$.

Теорема 12. *Всякая точка разрыва монотонной функции есть точка разрыва первого рода.*

Доказательство достаточно провести для случая возрастающей функции f (случай убывающих функций сводится к случаю возрастающих простой переменой знака: если f — убывающая функция, то функция $-f$ является возрастающей).

Для доказательства теоремы 12 обозначим через y_0 верхнюю грань множества всех значений $f(x)$ для $x<x_0$. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно, по определению верхней грани, найти такое $x<x_0$, что

$$y_0-\varepsilon<f(x)\leqslant y_0.$$

Но тогда для любого x', $x<x'<x_0$ будет и подавно

$$y_0-\varepsilon<f(x')\leqslant y_0,$$

откуда и следует, что $y_0 = f(x_0 -)$. Таким же точно образом убеждаемся в том, что $f(x_0 +)$ существует и равно нижней грани множества всех $f(x)$ при $x > x_0$. Теорема 12 доказана.

Очевидно, для любой точки x_0 области определения возрастающей функции имеем:

$$f(x_0 -) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 +),$$

так что x_0 тогда и только тогда есть точка разрыва функции, когда скачок $f(x_0 +) - f(x_0 -)$ есть положительное число. Поэтому точек поправимого разрыва, равно как и точек разрыва с бесконечным скачком, монотонная функция иметь не может *).

Теорема 13. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно* **).

Доказательство. Из определений следует прежде всего:

Если $x' < x''$, то для возрастающей функции f имеем:

$$f(x' +) \leqslant f(x'' -) \leqslant f(x''). \tag{1}$$

Из теоремы 12 вытекает, что каждая точка разрыва x_0 возрастающей функции f определяет на оси ординат интервал $(f(x_0 -);\ f(x_0 +))$, причём из формулы (1) следует, что эти интервалы для двух различных точек разрыва x_0 не пересекаются; поэтому их множество не более чем счётно (см. теорему 6 предыдущей главы).

Закончим этот параграф следующим предложением, доказательство которого предоставляем читателю.

---

*) Если возрастающая функция стремится к $+\infty$ при приближении к точке x_0 (очевидно, слева), то в самой точке x_0 функция никакого конечного значения принимать не может. Таков, например, случай функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, определённой на интервале $(-\infty; 0)$, при $x_0 = 0$. Аналогичное замечание можно сделать, когда $f(x_0 +) = -\infty$ (функция $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на $(0; \infty)$ при $x_0 = 0$).

**) При этом на конечном сегменте $[a; b]$ число точек разрыва со скачком $\geqslant \varepsilon$ не превосходит конечного числа $\frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$.

Теорема 14. *Пусть f — непрерывная строго монотонная функция, определённая на сегменте $[a, b]$; пусть $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ и, например, $\alpha<\beta$. Тогда функция f осуществляет взаимно однозначное отображение сегмента $[a; b]$ на сегмент $[\alpha; \beta]$, причём обратное отображение f^{-1} есть строго монотонная функция, определённая на $[\alpha; \beta]$.*

Имеет место и обратное предложение:

Теорема 14'. *Пусть f — непрерывная функция на сегменте $[a; b]$, принимающая в любых двух различных точках этого сегмента различные значения. Тогда функция f есть строго монотонная функция (а значит, по теореме 14, строго монотонной будет и обратная функция f^{-1}).*

Указание. При доказательстве теоремы 14' следует воспользоваться теоремой 9.

§ 4. Функция с ограниченным изменением

Решёткой сегмента $[a; b]$ называется любое конечное множество точек этого сегмента, включающее в себя оба его конца. Всякую решётку сегмента мы будем записывать в виде

$$G=\{a=x_0,\ x_1,\ \ldots,x_n,\ x_{n+1}=b\},\tag{1}$$

причём всегда будем предполагать, что

$$x_1<\ldots<x_n.$$

Пусть f — какая-нибудь функция, определённая на $[a; b]$. *Изменением функции f вдоль решётки* (1) называется неотрицательное число

$$V_Gf=\sum_{k=0}^{n}|f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

Верхняя грань множества всех чисел V_Gf, когда G пробегает множество всех решёток сегмента $[a; b]$, есть либо неотрицательное число, либо $+\infty$; оно называется *полным изменением* (или *полной вариацией*) *функции f на сегменте* $[a; b]$ и обозначается через V_a^bf. Если V_a^bf конечно, то функция f называется *функцией с ограниченным изменением* (или *с ограниченной вариацией*) на $[a; b]$.

До каких бы то ни было рассуждений о полной вариации функции сделаем следующее замечание:

Лемма 1. *Каковы бы ни были точки a', b' сегмента $[a;\ b]$, всегда*

$$|f(b')-f(a')| \leqslant V_a^b f. \tag{2}$$

Для доказательства достаточно построить решётку, содержащую точки a', b' в качестве двух соседних точек. Если $a'=a$, $b'=b$, то такой решёткой является пара точек a, b; если же, например, $a<a'<b'\leqslant b$, то за искомую решётку можно принять

$$\{a,\ a',\ b\} \qquad \text{в случае } b'=b$$

и

$$\{a,\ a',\ b',\ b\} \text{ в случае } b'<b.$$

В частности,

$$|f(b)-f(a)| \leqslant V_a^b f. \tag{2_0}$$

Из леммы 1 следует, что всякая функция с ограниченным изменением на $[a;\ b]$ ограничена на $[a;\ b]$: для неограниченной функции f к любому положительному числу N можно подобрать такое $x \in [a;\ b]$, что $|f(x)-f(a)|>N$, значит, и подавно $V_a^b f > N$, т. е., так как N произвольно велико, $V_a^b f = +\infty$.

Теорема 15. *Всякая функция f, монотонная на сегменте $[a,\ b]$, есть функция с ограниченным изменением на $[a;\ b]$, причём*

$$V_a^b f = |f(b)-f(a)|.$$

В самом деле, для любой, скажем, возрастающей функции на $[a;\ b]$ и любой решётки $G=\{a=x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}=b\}$ имеем:

$$V_G f = \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1})-f(x_k)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [f(x_{k+1})-f(x_k)] = f(b)-f(a) = |f(b)-f(a)|.$$

Лемма 2. *Для любых двух функций f_1 и f_2, определённых на $[a;\ b]$, и любой решётки G имеем:*

$$V_G(f_1+f_2) \leqslant V_G f_1 + V_G f_2.$$

В самом деле, полагая $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, имеем:

$$V_G f=\sum_{k=0}^{n}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\sum_{k=0}^{n}|[f_1(x_{k+1})-f_1(x_k)]+$$

$$+[f_2(x_{k+1})-f_2(x_k)]|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|f_1(x_{k+1})-f_1(x_k)|+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}|f_2(x_{k+1})-f_2(x_k)|\leqslant V_G f_1+V_G f_2,$$

чем лемма 2 доказана. Из этой леммы вытекает, что и подавно для любой решётки G имеем:

$$V_G(f_1+f_2)\leqslant V_a^b f_1+V_a^b f_2,$$

а потому и

$$\sup_{(G)} V_G(f_1+f_2)\leqslant V_a^b f_1+V_a^b f_2.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 16. *Для любых двух функций f_1, f_2, определённых на $[a;\,b]$, имеем*

$$V_a^b(f_1+f_2)\leqslant V_a^b f_1+V_a^b f_2.$$

Следствие. *Сумма двух функций с ограниченным изменением на $[a;\,b]$ есть функция с ограниченным изменением на $[a;\,b]$.*

Если f — функция с ограниченным изменением, то, очевидно, тем же свойством обладает и функция $-f$. Поэтому из сформулированного сейчас следствия теоремы 16 вытекает, что и разность двух функций с ограниченным изменением есть функция с ограниченным изменением. Несколько труднее доказать, что произведение двух функций с ограниченным изменением на $[a;\,b]$ есть функция с ограниченным изменением. Для частного такая теорема уже неверна: функция, равная x на $(-1;\,0)$ и на $(0;\,1)$ и равная 1 в точке 0, имеет на $[-1;\,1]$ ограниченное изменение, тогда как $\frac{1}{f(x)}$, не будучи на $[-1; 1]$ ограниченной, не имеет ограниченного изменения.

В теории функций с ограниченным изменением основное значение имеет

Теорема 17. *Если $a < c < b$, то для любой функции f, определённой на $[a; b]$, верна формула*

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f. \tag{3}$$

Прежде всего, докажем следующую лемму:

Лемма 3. *Если решётка G сегмента $[a; b]$ является подмножеством решётки G' того же сегмента, то $V_G f \leqslant V_{G'} f$.*

Достаточно доказать лемму в том частном случае, когда решётка G' содержит, кроме точек $a = x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = b$ решётки G, лишь ещё одну точку *) c, лежащую, положим, на интервале $(x_i; x_{i+1})$. Тогда все слагаемые суммы

$$V_G = \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

войдут в качестве слагаемых и в сумму $V_{G'}$, за исключением члена $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$, который заменится суммой $|f(x_{i+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_i)|$. Но

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_i)|,$$

чем лемма доказана.

Доказательство теоремы 17. Назовём специальной решёткой сегмента $[a; b]$ всякую решётку этого сегмента, содержащую точку c. Очевидно, всякая специальная решётка сегмента $[a; b]$ имеет вид

$$G' = \{a = x_0, \ldots, x_i = c, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1} = b\}$$

и распадается на две решётки

$$G'_{ac} = \{a = x_0, \ldots, x_i\}$$

и

$$G'_{cb} = \{x_i, \ldots, x_{n+1} = b\}$$

*) Кстати, только этот частный случай нам дальше и понадобится.

соответственно сегментов $[a; c]$ и $[c; b]$. Обратно, произвольная решётка G_{ac} сегмента $[a; c]$ даёт в сумме с произвольной решёткой G_{cb} сегмента $[c; b]$ некоторую специальную решётку G' сегмента $[a; b]$. При этом

$$V_{G'}f = V_{G_{ac}}f + V_{G_{cb}}f.$$

Отсюда следует, что множество всех чисел $V_{G'}f$, где G' пробегает все специальные решётки сегмента $[a; b]$, тождественно с множеством чисел $V_{G_{ac}}f + V_{G_{cb}}f$, где G_{ac} пробегает все решётки сегмента $[a; c]$, а G_{cb} — все решётки сегмента $[c; b]$. Но верхняя грань множества всех чисел $V_{G_{ac}}f + V_{G_{cb}}f$ есть не что иное, как $V_a^c f + V_c^b f$. Поэтому $\sup\limits_{G'} V_{G'}f = V_a^c f + V_c^b f$ (где G' пробегает все специальные решётки на $[a; b]$).

Остаётся доказать, что

$$\sup_{G'} V_{G'}f = V_a^b f. \tag{4}$$

Но так как множество всех специальных решёток G' есть часть множества всех вообще решёток G сегмента $[a; b]$, то

$$\sup_{G'} V_{G'}f \leqslant \sup_{G} V_{G}f = V_a^b f. \tag{5}$$

С другой стороны, всякую решётку G можно добавлением одной точки c превратить в специальную решётку, причём при этом изменение функции вдоль решётки может только увеличиться (лемма 3). Другими словами, для каждой решётки G существует специальная решётка $G' \supset G$, для которой $V_G f \leqslant V_{G'}f$. Отсюда следует, что

$$\sup_{G} V_G f \leqslant \sup_{G'} V_{G'}f. \tag{6}$$

Сопоставляя неравенства (5) и (6), приходим к равенству (4), чем и доведено до конца доказательство формулы (3).

Из теоремы 17 сразу вытекает

Следствие. *Если существует такая решётка*

$$G = \{a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1} = b\} \tag{1}$$

сегмента $[a; b]$, *что функция* f, *определённая на* $[a; b]$, *есть функция с ограниченным изменением на каждом из сегментов* $[x_k; x_{k+1}]$, *то эта функция имеет ограниченное изменение и на всём сегменте* $[a; b]$.

В частности, если решётка (1) может быть выбрана так, что функция f монотонна на каждом из сегментов $[x_k; x_{k+1}]$, то f есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$. Отсюда далее следует, что непрерывная на $[a; b]$ функция, имеющая лишь конечное число максимумов и минимумов, имеет ограниченное изменение *).

Докажем более сильное предложение, а именно:

Теорема 18. *Если решётка* (1) *может быть выбрана так, что функция f монотонна на каждом из интервалов* $(x_k; x_{k+1})$, *то эта функция имеет на* $[a; b]$ *ограниченное изменение.*

Для доказательства теоремы 18, очевидно, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 4. *Если функция f, определённая на сегменте $[a; b]$, монотонна на интервале $(a; b)$, то она имеет на сегменте $[a; b]$ ограниченное изменение.*

Заметим, что лемма 4 очевидна в случае непрерывной на $[a; b]$ функции f, так как функция, непрерывная на $[a; b]$ и монотонная на $(a; b)$, будет монотонна и на $[a; b]$. Однако последнее утверждение может оказаться неверным для разрывных функций **).

Лемма 4, в свою очередь, вытекает из следующего более точного утверждения:

Лемма 4'. *Если функция, определённая на $[a; b]$, монотонна на $(a; b)$ и если M есть её верхняя, а m — нижняя грани на этом сегменте, то* $V_a^b f \leqslant 3\,(M-m)$.

(Как показывает пример, приведённый в сноске *), эта оценка не может быть улучшена.)

Лемма 4' вытекает из того, что для функции f, возрастающей на (a, b), и любой решётки (1) имеем:

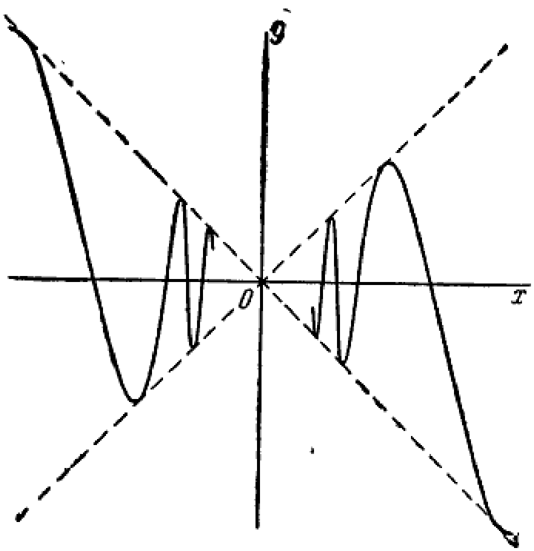
$$V_G f = |f(x_1) - f(a)| + [f(x_n) - f(x_1)] + |f(b) - f(x_n)| \leqslant \\ \leqslant (M-m) + (M-m) + (M-m) = 3\,(M-m).$$

---

*) В самом деле, если $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ суть все максимумы и минимумы непрерывной на $[a; b]$ функции f, то на каждом из сегментов $[x_i; x_{i+1}]$ функция f монотонна.

**) Определим функцию f на сегменте $[0; 1]$ так: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(x) = x$ для $0 < x < 1$; эта функция монотонна на $(0; 1)$, а на $[0; 1]$ не монотонна, причём $V_0^1 f = 3$.

Замечание. Мы видели, что все «простейшие» непрерывные функции, а именно, функции, имеющие лишь конечное число максимумов и минимумов, являются функциями с ограниченным изменением. Однако не



Черт. 8.

всякая функция, непрерывная на сегменте $[a; b]$, имеет на нём ограниченное изменение. Так, например, функция, определённая на всей числовой прямой равенствами

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{x} \text{ для } x \neq 0, \ f(0) = 0$$

(см. черт. 8), непрерывна и принимает в точках $c_n = \frac{1}{n}$ значения $f(c_n) = (-1)^n \frac{1}{n}$. Между c_{n+1} и c_n лежит точка $d_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$, в которой f принимает значение нуль. Поэтому вдоль решётки

$$G_{n,p} = \left\{0, c_{n+p}, d_{n+p-1}, c_{n+p-1}, d_{n+p-2}, \ldots, c_{n+1}, d_n, \frac{2}{\pi}\right\}$$

функция имеет изменение, равное

$$
\begin{gathered}
|f(c_{n+p})-f(0)|+|f(d_{n+p-1})-f(c_{n+p})|+\\
+|f(c_{n+p-1})-f(d_{n+p-1})+\ \dots+|f(d_n)-f(c_{n+1})|+\\
+\left|f\left(\frac{2}{\pi}\right)-f(d_n)\right|=\\
=\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p-1}+\dots+\frac{1}{n+1}>\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}.
\end{gathered}
$$

Вследствие расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ мы получаем при достаточно большом p решётку $G_{n,p}$, вдоль которой изменение функции сколь угодно велико. Следовательно,

$$V_0^1 f=+\infty.$$

Точно таким же путём убедимся в том, что и функция, определённая на всей числовой прямой равенствами

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ \text{для}\ x\neq 0,\ f(0)=0,$$

есть непрерывная функция с неограниченным изменением.

Полностью структура функций с ограниченным изменением выясняется из следующего предложения:

Теорема 19. *Каждая функция f с ограниченным изменением на $[a;b]$ может быть представлена как разность двух возрастающих на $[a;b]$ функций.*

Доказательство. Полагаем для любого $x\in[a;b]$

$$
\begin{cases}
\varphi(x)=V_a^x f\ \ (x>a),\ \varphi(a)=0,\\
\psi(x)=V_a^x f-f(x)\ (x>a),\ \psi(a)=f(a).
\end{cases}
$$

Очевидно,

$$f(x)=\varphi(x)-\psi(x).$$

По теореме 17, при $x'<x''$ имеем:

$$\varphi(x'')-\varphi(x')=V_{x'}^{x''}f\geqslant 0,$$

т. е. φ есть возрастающая функция на $[a; b]$. С другой стороны, по лемме 1

$$V_{x'}^{x''} f \geqslant |f(x'') - f(x')|,$$

значит,

$$\psi(x'') - \psi(x') = V_a^{x''} f - V_a^{x'} f - f(x'') + f(x') = \\ = V_{x'}^{x''} f - [f(x'') - f(x')] \geqslant 0,$$

т. е. ψ тоже есть возрастающая функция. Теорема 19 доказана.

Так как сумма и разность двух функций с ограниченным изменением, значит, в частности, двух моногонных функций, есть функция с ограниченным изменением, то класс всех функций с ограниченным изменением на $[a; b]$ совпадает с классом функций, могущих быть представленными как разности двух возрастающих или (что то же самое) как суммы двух монотонных функций. Отсюда и из теорем 12 и 13 следует:

Теорема 20. *Всякая точка разрыва функции с ограниченной вариацией есть точка разрыва первого рода.*

Теорема 21. *Множество всех точек разрыва всякой функции с ограниченной вариацией не более чем счётно.*

§ 5. Последовательности функций; равномерная и неравномерная сходимость

Мы говорим, что последовательность функций

$$f_1, \ f_2, \ \ldots, f_n, \ \ldots, \tag{1}$$

определённых на данном множестве E, *сходится* на этом множестве к функции f (или имеет функцию f своим *пределом*), если для каждой точки $x \in E$ числовая последовательность

$$f_1(x), \ f_2(x), \ \ldots, f_n(x), \ \ldots \tag{2}$$

сходится к значению функции f в точке x. Это значит, что для любой данной точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное N, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ при любом } n \geqslant N. \tag{3}$$

При этом число N *зависит, вообще говоря, не только от* ε, *но и от точки* x: при одном и том же ε, но различных x, приходится для достижения результата (3) брать различные N.

Например, пусть E — интервал $(0; 1)$ числовой прямой и пусть

$$\varphi_n(x) = x^n, \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Эти функции имеют своими графиками дуги парабол различных порядков: для $n=1$ имеем прямую, для $n=2$ — обыкновенную параболу, для $n=3$ — параболу третьего порядка и т. д. Для каждого $x \in E$, т. е. $0 < x < 1$, последовательность $x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ сходится к нулю, так что последовательность функций (2) сходится на всём E к функции $\varphi(x)$, тождественно равной нулю. Однако, взяв, например, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, видим, что, каково бы ни было число n, всегда для точек x, достаточно близких к 1, окажется $\varphi_n(x) > \frac{1}{2}$, т. е. $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| > \varepsilon$. Другими словами, для выбранного нами $\varepsilon = \frac{1}{2}$ нельзя подобрать такого числа n, которое бы для **всех** $x \in E$ обеспечивало выполнение неравенства $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим ту же последовательность (4), но не на интервале, а на сегменте $[0; 1]$. Так как для любого n имеем $\varphi_n(1) = 1$, то и $\varphi(1) = \lim \varphi_n(1) = 1$. Это значит, что на сегменте $[0; 1]$ последовательность (4) сходится к функции φ, равной нулю во всех точках интервала $(0; 1)$ и равной единице в точке $x = 1$. Отсюда видно, что пределом сходящейся последовательности непрерывных функций может быть разрывная функция.

В связи с этой возможностью напомним известное из анализа понятие равномерной сходимости.

Определение 5. Последовательность (1) называется *равномерно сходящейся* к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N_ε, что при $n > N_\varepsilon$ для **всех** точек $x \in E$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Последовательность $\varphi_n(x)=x^n$ сходится равномерно к нулю на сегменте $[0;\ c]$, где c — любое число, удовлетворяющее условию $c\in(0;\ 1)$.

Для доказательства этого утверждения достаточно ко всякому $\varepsilon>0$ подобрать такое N_ε, чтобы при $n>N_\varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих условию $x\in[0;\ c]$, было $|x^n-0|=x^n<\varepsilon$. Но для этого, при данном ε, достаточно взять такое N_ε, чтобы при $n>N_\varepsilon$ было $c^n<\varepsilon$, ибо из $x<c$ следует и $x^n<c^n$ и, значит, $x^n<\varepsilon$ для всех x, лежащих на сегменте $[0;\ c]$.

Сделаем несколько простых замечаний о равномерной сходимости:

1° Если последовательность (1) сходится равномерно на множестве E, то она сходится равномерно и на всяком множестве $E_0\subseteq E$.

2° Если множество M состоит из конечного числа точек, то всякая последовательность (1), сходящаяся на E, сходится на E равномерно.

3° Если каждая из функций $f_n(x)$ последовательности (1) постоянна на E и последовательность (1) сходится на E, то она сходится равномерно.

4° Если дано конечное число множеств $E_1,\ \ldots,\ E_s$, на каждом из которых последовательность (1) сходится равномерно, то эта последовательность сходится равномерно и на множестве $E_1\cup\ldots\cup E_s$.

Для случая счётного числа множеств M_k аналогичное утверждение, вообще говоря, перестаёт быть верным: последовательность $\varphi_n(x)=x^n$ сходится равномерно на каждом из сегментов $M_k=\left[\frac{k-1}{k};\ \frac{k}{k+1}\right]$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, а на сумме этих сегментов, т. е. на полуинтервале $[0;\ 1)$, сходится неравномерно.

Теорема 22. *Если функция f, определённая на множестве E, есть предел равномерно сходящейся (на E) последовательности непрерывных функций*

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots,\tag{1}$$

то f непрерывна на множестве E.

В самом деле, пусть x_0 — какая-нибудь точка множества E и $y_0=f(x_0)$. Возьмём произвольное $\varepsilon>0$. Требуется подобрать такую окрестность $U=U(x_0;\ \eta)$ точки x_0, чтобы при любом $x\in U$ было $|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$. Для этого, пользуясь равномерной сходимостью последовательности (1), подберём прежде всего такое n, чтобы было

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } x\in E. \tag{5}$$

Так как функция f_n непрерывна, то можно найти такую окрестность U точки x_0, что

$$|f_n(x_0)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех } x\in U. \tag{6}$$

Переписывая (5) для точки $x=x_0$, имеем:

$$|f(x_0)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Из неравенств (7), (6), (5) получаем для любого $x\in U$:

$$|f(x_0)-f(x)|\leqslant|f(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(x)|+$$
$$+|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Только что проведённое рассуждение показывает:

Для того чтобы предельная функция f последовательности непрерывных функций (1) *была непрерывна, достаточно следующее условие* (известное под названием **условия Дини**):

Ко всякому $\varepsilon>0$ можно подобрать такое натуральное число n, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon \text{ для всех } x\in E.$$

Однако, как мы сейчас увидим на примере, условие Дини, являясь достаточным, не является необходимым для того, чтобы предельная функция f была непрерывной (необходимое и достаточное условие будет дано в Прибавлении 2 к главе 7).

Определим, в самом деле, на сегменте $[0;1]$ последовательность функций следующим образом:

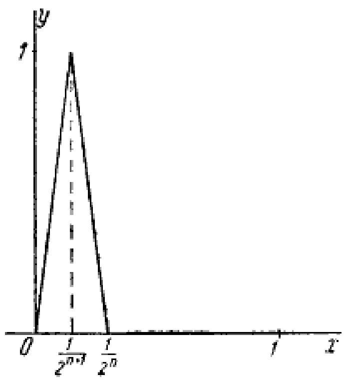
$$\psi_n(x)=\begin{cases} 2^{n+1}x & \text{для } x\in\left[0;\frac{1}{2^{n+1}}\right],\\ 2^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-x\right) & \text{для } x\in\left[\frac{1}{2^{n+2}};\frac{1}{2^n}\right],\\ 0 & \text{для } x\in\left[\frac{1}{2^n};1\right].\end{cases}$$

График функции ψ_n имеет вид, изображённый на черт. 9, так что геометрическое представление о всей последовательности можно получить из черт. 10.

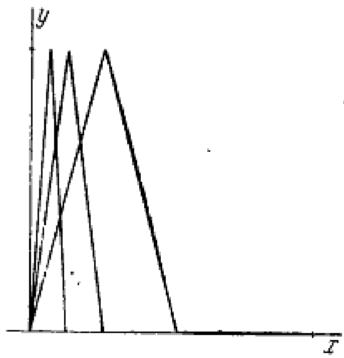
Последовательность

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{8}$$

сходится на всём сегменте $[0; 1]$ к нулю. В самом деле, в точке $x = 0$ все функции ψ_n равны нулю; если же $x > 0$,



Черт. 9.



Черт. 10.

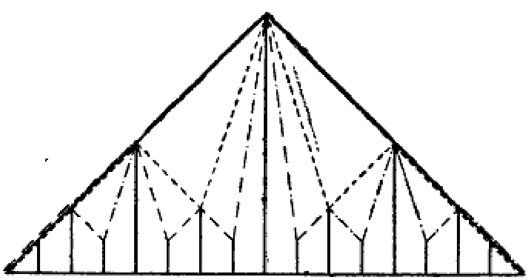
то можно найти такое N, что $\frac{1}{2^N} < x$, и тогда для всякого $n \geqslant N$ значение функции φ_n в этой точке x будет равно нулю.

Сходимость последовательности (8) неравномерна; более того, эта последовательность не удовлетворяет и условию Дини, так как для любого n можно найти точку, а именно $x = \frac{1}{2^{n+1}}$, в которой значение функции $\psi_n(x)$ равно 1 и, следовательно, на 1 отличается от значения предельной функции, равной тождественно нулю.

П р и м е р п о с л е д о в а т е л ь н о с т и н е п р е р ы в н ы х ф у н к ц и й, к о т о р а я н и н а к а к о м и н т е р в а л е н е с х о д и т с я р а в н о м е р н о. Определяем функцию $f_n(x)$ её графиком, который представляет собою ломаную линию, получаемую последовательным соединением прямолинейными отрезками точек плоскости с координатами

$$(0, f(0)), \left(\frac{1}{2^{n+1}}, f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right), \left(\frac{2}{2^{n+1}}, f\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)\right), \ldots$$
$$\ldots, \left(\frac{p}{2^{n+1}}, f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)\right), \ldots,$$

где $p = 0, 1, \ldots, 2^{n+1}$ и $f(x)$ есть функция примера 7 § 2. Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ изображены на черт. 11 (соответственно, сплошной линией, чёрточками и чёрточками с точками). Легко видеть, что последовательность $f_n(x)$ сходится на $[0; 1]$ к только что упомянутой функции $f(x)$. Так как эта функция $f(x)$ ни в каком интервале не является непрерывной, то последовательность $f_n(x)$ ни в каком интервале не сходится равномерно.



Черт. 11.

§ 6. Вопрос об аналитическом изображении функций; теорема Вейерштрасса; понятие о классификации Бэра.

Действительную функцию f действительного переменного x мы определили как отображение одного множества действительных чисел на другое, не ставя вопроса о существовании формулы, позволяющей для всякого данного значения аргумента x вычислить соответствующее значение функции $f(x)$. Между тем, нахождение таких формул, конечно, очень важно как с принципиальной точки зрения, так и с практической. Для непрерывных функций, определённых на каком-либо сегменте числовой прямой, поставленный вопрос вполне разрешается следующей теоремой:

Теорема 23. (Вейерштрасса). *Всякая функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a; b]$, является пределом равномерно сходящейся на $[a; b]$ последовательности мно-*

*гочленов $P_n(x)$ (и, следовательно, может быть представлена в виде суммы равномерно сходящегося на $[a; b]$ ряда многочленов *)).*

Приведём доказательство теоремы Вейерштрасса, принадлежащее С. Н. Бернштейну. Это доказательство — не только очень короткое, но имеет ещё и то преимущество, что позволяет фактически выписать многочлены, равномерно приближающие данную непрерывную функцию с любой точностью.

Предположим сначала, что $a = 0$, $b = 1$, и возьмём на сегменте $[0; 1]$ какую-нибудь непрерывную функцию f. Многочлен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

(где C_n^k суть биномиальные коэффициенты) называется n-м *многочленом Бернштейна*. Теорема Вейерштрасса для сегмента $[0; 1]$ содержится в следующем предложении, впервые доказанном С. Н. Бернштейном:

При $n \to \infty$ многочлены Бернштейна $B_n(x)$ от данной непрерывной на $[0; 1]$ функции $f(x)$ равномерно на $[0; 1]$ сходятся к функции $f(x)$.

Доказательству этой теоремы предпошлём два элементарно-алгебраических тождества **):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad (\text{для любого } x), \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{2}$$

---

*) Второе утверждение является очевидной перефразировкой первого: если $f(x) = \lim\limits_{n} P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно на $[a, b]$, то $u_0(x) = P_0(x), \ldots, u_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, суть также многочлены, и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a; b]$ к функции $f(x)$.

**) Вся приведённая здесь аранжировка доказательства С. Н. Бернштейна заимствована мною из книги И. П. Натансона «Основы теории функций вещественного переменного».

Первое из этих тождеств непосредственно получается из формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

если в ней положить $a = x$, $b = 1 - x$.

Второе тождество можно тоже естественно получить, не выходя за пределы элементарной алгебры. Однако самым простым доказательством является, вероятно, следующее. Берём тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n \tag{3}$$

и дифференцируем его по z. Получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^{k-1} = n(1+z)^{n-1}.$$

Умножая обе части на z, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}. \tag{4}$$

Снова дифференцируем и снова умножаем обе части на z. После элементарных упрощений получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{5}$$

Полагаем теперь в (3), (4), (5)

$$z = \frac{x}{1-x}$$

и умножаем полученные тождества на $(1-x)^n$.

После лёгких преобразований получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx). \tag{8}$$

Умножив (6) на n^2x^2, (7) на $-2nx$ и сложив результаты с (8), мы и придём к искомому тождеству (2).

Предполагая в тождестве (2) $0 \leqslant x \leqslant 1$ и замечая, что в этом предположении $x(1-x) < 1$, выводим из тождества (2) неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} < n, \tag{9}$$

которое будет существенно применяться при доказательстве теоремы С. Н. Бернштейна. Приступаем, наконец, непосредственно к этому доказательству. Достаточно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое n_ε, чтобы при $n \geqslant n_\varepsilon$ неравенство

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{10}$$

выполнялось для всех точек x сегмента $[0; 1]$. Для достижения этой цели подбираем к данному $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, чтобы при $|x'' - x'| < \delta$ было

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначаем через M максимум функции $f(x)$ на сегменте $[0; 1]$. Тождество (1) позволяет написать:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

для любого $x \in [0; 1]$, откуда (также для любого $x \in [0; 1]$)

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (11)$$

Выберем некоторую определённую точку x сегмента $[0; 1]$. Множество чисел $0, 1, 2, \ldots$ разобьём на два подмножества A и B, относя к A те целые k, $0 \leqslant k \leqslant n$, для которых

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta,$$

а к B — те k, для которых $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geqslant \delta$. Оценим отдельно суммы

$$\sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

и

$$\sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Если $k \in A$, то $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и, значит, принимая во внимание тождество (1):

$$\sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Если же $k \in B$, то $\frac{|k - nx|}{n\delta} \geqslant 1$, значит, и

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1.$$

Поэтому, умножив в правой части неравенства

$$\sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant 2M \sum_{k \in B} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

каждое слагаемое в сумме $\sum\limits_{k\in B}$ на $\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$, мы только усилим это неравенство и получим

$$\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k\in B}C_n^k(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}.$$

Оценивая последнюю сумму согласно формуле (9), получим окончательно

$$\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<\frac{2M}{n^2\delta^2}\,n=\frac{2M}{n\delta^2}. \quad (13)$$

Из (11), (12), (13) заключаем, что *для любой точки x сегмента* $[0;1]$ *выполнено неравенство*

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=\sum_{k\in A}+\sum_{k\ni B}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\delta^2}. \quad (14)$$

Пусть теперь n_ε — первое натуральное число, большее чем $\frac{4M}{\varepsilon\delta^2}$. Тогда для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ имеем $\frac{2M}{n\delta^2}\leqslant\frac{2M}{n_\varepsilon\delta^2}\leqslant\frac{2M\varepsilon\delta^2}{4M\delta^2}=$ $=\frac{\varepsilon}{2}$, что при подстановке в (14) даёт:

$$|B_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ для любого } x\in[0;1],$$

чем теорема С. Н. Бернштейна, а значит, и теорема Вейерштрасса для сегмента $[0;1]$, доказаны.

Чтобы доказать теорему Вейерштрасса для любого сегмента $[a;b]$, требуется ко всякой непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x)$ и ко всякому $\varepsilon>0$ построить многочлен $P(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \text{ для всех } x\in[a;b]. \quad (15)$$

Положим,

$$\varphi(t)=f(a+(b-a)t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[0; 1]$, поэтому существует полином $B_n(t)$, удовлетворяющий условию

$$|\varphi(t)-B_n(t)|<\varepsilon \quad \text{на} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Если $a\leqslant x\leqslant b$, то $t=\frac{x-a}{b-a}\in[0;1]$ и, значит,

$$\left|\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)-B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon,$$

т. е.

$$\left|f(x)-B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x\in[a; b].$$

Другими словами, многочлен $P(x)=B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ удовлетворяет условию (15), что и требовалось доказать.

Итак, всякая функция, непрерывная на каком-либо сегменте числовой прямой, может быть представлена как сумма равномерно сходящегося на этом сегменте ряда многочленов. Так как, и обратно, всякий равномерно сходящийся ряд имеет непрерывную сумму, то *класс функций, непрерывных на данном сегменте, совпадает с классом функций, могущих быть разложенными в ряды многочленов, равномерно сходящиеся на этом сегменте.* Мы получаем, таким образом, **класс аналитических выражений, адэкватный классу непрерывных функций.** Этот результат может рассматриваться, как осуществление несколько неопределённых мечтаний Эйлера, для которого непрерывными функциями были функции, допускающие «достаточно простое» аналитическое выражение.

Назовём теперь, следуя французскому математику Бэру, непрерывные функции (на данном сегменте $[a; b]$) *функциями нулевого класса.* Функциями *первого класса* назовём те функции, которые, не будучи непрерывными на сегменте $[a; b]$, являются пределами сходящихся на $[a; b]$ последовательностей непрерывных функций. Вообще, если α есть порядковое число $<\omega_1$, то, предполагая определёнными на $[a; b]$ все функции классов $<\alpha$, назовём функциями класса α те функции, которые, не принадлежа ни к одному из классов $<\alpha$, могут быть представлены как пределы сходящихся на $[a; b]$ последовательностей функций классов $<\alpha$. Полученные таким образом функции всевозможных $\alpha<\omega_1$ называются *функциями классификации Бэра,* или просто *бэровскими функциями.* Легко видеть, что совокупность всех бэровских функций (на данном сегменте $[a; b]$) может быть определена и следующим образом. Назовём *«бэровским телом»* на $[a; b]$ всякое множество $\mathfrak{S}$ определённых на $[a; b]$ функций, обладающее следующими свойствами:

1° Все непрерывные на $[a; b]$ функции являются элементами множества $\mathfrak{S}$.

2° Если последовательность функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots,$$

являющихся элементами множества $\mathfrak{S}$, сходится на $[a; b]$ к функции f, то и f есть элемент множества $\mathfrak{S}$.

Без труда доказывается (и это доказательство можно предоставить читателю), что пересечение любого множества бэровских тел есть бэровское тело. Поэтому можно говорить о наименьшем бэровском теле (на сегменте $[a; b]$), определяя его как пересечение всех бэровских тел (на $[a; b]$). Это *наименьшее бэровское тело состоит из всех бэровских функций и только из них.*

Заметим, что в силу теоремы Вейерштрасса условие 1° в определении бэровского тела может быть заменено условием

1′° *Все многочлены являются элементами множества* $\mathfrak{S}$.

Отсюда следует, что все бэровские функции и только они могут быть получены, отправляясь от многочленов, посредством конечного или счётного числа переходов к пределу. Это дало основание назвать функции классификации Бэра *аналитически представимыми функциями* (Лебег).

Основной теоремой, касающейся классификации Бэра, является доказанная Лебегом теорема о непустоте классов, составляющих эту классификацию: *каково бы ни было порядковое число* $\alpha < \omega_1$, *существуют функции класса* α. Доказательство этой замечательной теоремы можно найти в книге И. П. Натансона «Основы теории функций вещественной переменной» или в книге Хаусдорфа «Теория множеств».

Теорема 24 (Бэра). *Всякая функция первого класса имеет всюду плотное множество точек непрерывности.*

Лемма 1. *Пусть f — функция первого класса на сегменте* $R = [a; b]$. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует сегмент* $[U_\bullet] \subset R$, *для любых двух точек x, x' которого*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{16}$$

В самом деле, так как f — первого класса, то существует последовательность непрерывных функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, \tag{17}$$

сходящаяся к функции f. Возьмём какое-нибудь положительное $\varepsilon' < \frac{1}{4}\varepsilon$ и обозначим через $E_{n,p}$ (замкнутое в R) множество всех точек $x \in R$, в которых

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon'.$$

Положим далее $E_n = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_{n,p}$. По теореме 8, множества E_n замкнуты. Легко видеть, что

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

В самом деле, так как последовательность (17) сходится в любой точке $x \in R$, то, по самому определению сходимости, x входит в некоторое E_n.

Так как R, согласно § 7 предыдущей главы, не может быть первой категории на себе, то существует такое $n=n_0$, что E_{n_0} плотно в некотором интервале $H \subset R$; а так как E_{n_0} замкнуто, то $E_{n_0} \supseteq H$. Возьмём какую-нибудь точку $x_0 \in H$. Так как функция f_{n_0} непрерывна в x_0, то существует окрестность U этой точки, лежащая в H и обладающая тем свойством, что для любой точки $x \in [U]$ имеем $|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon'$. Поэтому для любых $x' \in [U]$, $x'' \in [U]$ имеем $|f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| < 2\varepsilon'$. Далее, по определению множества $E_{n_0} \supseteq [U]$ имеем для $x \in [U]$ и любого натурального p:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0+p}(x)| \leqslant \varepsilon',$$

значит, и

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon'.$$

Поэтому для любых $x' \in [U]$, $x'' \in [U]$ имеем:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| + \\ + |f_{n_0}(x'') - f(x'')| < \varepsilon' + 2\varepsilon' + \varepsilon' = 4\varepsilon' < \varepsilon,$$

так что сегмент $[U]$ и есть искомый сегмент $[U_*]$.

Из леммы 1 легко выводится

Лемма 2. *Во всяком непустом открытом в R множестве Γ содержится сегмент $[U] = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ такой, что для любых $x' \in [U]$, $x'' \in [U]$ удовлетворяется условие* (16).

В самом деле, возьмём произвольную точку $x_1 \in \Gamma$ и $r > 0$ столь малое, чтобы $[x_1 - r;\ x_1 + r] \subset \Gamma$. Рассматривая нашу функцию f на сегменте $[x_1 - r;\ x_1 + r]$, найдём лежащий на этом сегменте сегмент $[U_*]$, для любых точек x', x'' которого выполнено условие (16).

Возьмём теперь в сегменте R произвольный интервал Γ. Давая числу ε значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, стремящиеся к нулю, и применяя лемму 2, получим такую последовательность лежащих в Γ сегментов

$$[U_1], \ldots, [U_n], \ldots$$

с радиусами $\delta_n \to 0$, что $[U_{n+1}] \subset U_n$ и что колебание функции f в $[U_n]$ меньше чем ε_n. Единственная точка пересечения всех $[U_n]$ (являющаяся в то же время и точкой пересечения всех U_n) есть лежащая в Γ точка непрерывности функции f. Так как интервал $\Gamma \subset R$ выбран произвольно, то множество точек непрерывности функции f плотно в R, чем наше утверждение доказано.

Замечание 1. Только что проведённые рассуждения применимы (в силу сказанного в замечании 4 в § 7 главы 4) к любому совершенному множеству $\Phi \subset R$ и приводят к следующему замечательному предложению, известному под названием прямой теоремы Бэра:

Теорема 24'. *Пусть f — функция первого класса на сегменте R, а $\Phi \subseteq R$ — произвольное совершенное множество. Если рассматривать f лишь на Φ, то множество точек непрерывности этой функции есть всюду плотное в Φ множество* *).

Замечание 2. Читателю предоставляется самому доказать, что функция Дирихле $f(x)$, равная единице для всех рациональных и нулю для всех иррациональных значений действительного переменного x, может быть представлена в виде

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n}\right),$$

откуда следует, что это — функция класса $\leqslant 2$. С другой стороны, не имея на числовой прямой ни одной точки непрерывности, функция Дирихле не может принадлежать к первому (ни, тем более, к нулевому) классу и, следовательно, есть функция второго класса. Читатель легко докажет, что всякая функция, имеющая не более счётного множества точек разрыва (в частности, всякая функция с ограниченным изменением) есть функция нулевого или первого класса.

§ 7. Производная

Производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x называется, как известно, предел выражения

$$f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

---

*) Верна и обратная теорема Бэра: *всякая функция, определённая на сегменте R и имеющая на каждом совершенном множестве $\Phi \subseteq R$ всюду плотное множество точек непрерывности (относительно E) есть функция не выше первого класса на R*. Доказательство—см. И. П. Натансон «Основы теории функций вещественного переменного». Заметим, что в формулировке обратной теоремы Бэра достаточно потребовать, чтобы каждое совершенное множество $\Phi \subseteq R$ содержало хотя бы одну точку непрерывности функции f (относительно Φ): тогда само собой окажется, что множество точек непрерывности функции f относительно любого замкнутого множества E всюду плотно на E.

при h, стремящемся к нулю, т. е. такое число $f'(x)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при $|h| < \delta$ имеем:

$$|f'(x) - f_h(x)| < \varepsilon.$$

Если $f_h(x)$ не имеет предела при $h \to 0$, то говорят, что производная в точке x не существует.

Теорема 25. *Множество точек x, где производная $f'(x)$ непрерывной функции $f(x)$ существует, есть множество типа $F_{\sigma\delta}$*).*

Обозначим для этого через Φ_{mn} множество точек x, для которых выполнено следующее условие: при $|h| \leqslant \frac{1}{m}$, $|h'| \leqslant \frac{1}{m}$ имеем:

$$|f_h(x) - f_{h'}(x)| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Так как $f(x)$, по предположению, — непрерывная функция, то $f_h(x)$ и $f_{h'}(x)$ также непрерывны, а потому множество Φ_{mn} замкнуто. Обозначим, далее, через E_n сумму

$$E_n = \bigcup_m \Phi_{mn}.$$

Точки множества E_n характеризуются следующим свойством: можно найти такое m, что при $|h| \leqslant \frac{1}{m}$, $|h'| \leqslant \frac{1}{m}$ будем иметь неравенство (1).

Положим

$$D = \bigcap_n E_n.$$

Множество D является, по способу его построения, множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Покажем, что множество D совпадает с множеством точек, в которых существует производная $f'(x)$. Допустим, что $f'(x_0)$ существует. Тогда для любого n можно найти такое $\delta > 0$, что из $|h| < \delta$ следует

$$|f'(x_0) - f_h(x)| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

*) Определение множеств типа $F_{\sigma\delta}$ дано в § 7 главы 4.

Поэтому, если $\frac{1}{m} < \delta$, то при $|h| < \frac{1}{m}$ и $|h'| < \frac{1}{m}$ для $x = x_0$ будет выполнено неравенство (1). Таким образом, мы видим, что точка x_0 при любом n входит в E_n, а следовательно, и в пересечение всех E_n, т. е. в множество D. Допустим, обратно, что x_0 входит в D, и докажем, что $f'(x_0)$ существует. Рассмотрим последовательность $f_{\frac{1}{m}}(x_0)$. Так как $x_0 \in E_n$, то можно найти такое m_0, что при $m \geqslant m_0$ (и, следовательно, $\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{m_0}$) будет выполняться неравенство

$$|f_{\frac{1}{m}}(x_0) - f_{\frac{1}{m_0}}(x_0)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Так как при этом n было произвольно, то наша последовательность удовлетворяет критерию Коши, т. е. сходится к некоторому пределу $f^*(x_0)$. При надлежащем выборе m_0 из $|h| \leqslant \frac{1}{m_0}$ следует

$$|f_h(x_0) - f_{\frac{1}{m_0}}(x_0)| \leqslant \frac{1}{n},$$

т. е. $f_h(x_0)$ сходится к $f^*(x_0)$ при h, стремящемся к нулю (когда h пробегает всевозможные значения $\to 0$, а не только последовательность $h = \frac{1}{m}$), и мы можем написать $f^*(x_0) = f'(x_0)$.

Теорема 26. *Производная $f'(x)$ непрерывной функции $f(x)$ (определённая на множестве D) есть функция первого (или нулевого) класса.*

В самом деле, функции $f_{\frac{1}{n}}(x)$ непрерывны, функция же $f'(x)$ является их пределом.

Мы покажем сейчас, что даже тогда, когда $f'(x)$ существует всюду (во всех точках x области определения функции $f(x)$), она может и не быть непрерывной.

Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

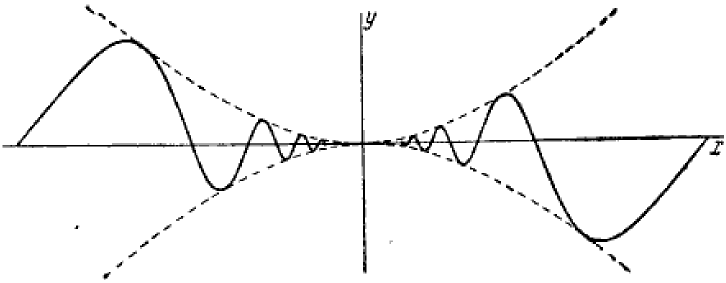
(черт. 12). При $x \neq 0$ имеем:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

С другой стороны,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Функция $2x\sin\frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x=0$ (если там положить её равной нулю), но второе слагаемое



Черт. 12.

$\cos\frac{1}{x}$ в выражении $f'(x)$ имеет при $x=0$ непоправимый разрыв. Следовательно, $f'(x)$ тоже разрывна при $x=0$. При этом разрыв этот — второго рода. Мы увидим дальше, что производная, если она существует в каждой точке, вообще не может иметь разрывов первого рода.

Пример 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Здесь, как и в первом примере, $f'(0)=0$, но при $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, $f'(x)$ существует всюду, но ни в какой окрестности точки $x=0$ не ограничена.

Если $f'(x)$ существует в каждой точке, то она, будучи функцией не выше первого класса, не может быть разрывной в каждой точке. Мы покажем, однако, что $f'(x)$ (определённая в каждой точке) может быть разрывна во всех точках любого замкнутого нигде не плотного множества на числовой прямой. (Делаемое дальше предположение, что это множество расположено на отрезке $[0; 1]$, несущественно.)

Пример 3. Пусть Φ — замкнутое множество, расположенное на отрезке $[0; 1]$ и нигде не плотное. Положим $f(x)=0$ на множестве Φ и в точках, лежащих правее всего множества Φ, как и в точках, лежащих левее всего Φ. В смежных же интервалах множества Φ определим функцию $f(x)$ следующим образом: пусть α и β — концы смежного интервала $\Delta=(\alpha; \beta)$; тогда положим на Δ

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \sin \frac{1}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}.$$

Читатель (которому рекомендуем сделать чертёж) легко докажет, что на Φ и во «внешних» точках (лежащих правее или левее всего Φ) производная $f'(x)$ существует и равна нулю. В точках же смежного интервала $\Delta=(\alpha; \beta)$ имеем:

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)\sin\frac{1}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}+$$
$$+\left(\frac{2}{x-\alpha}+\frac{2}{x-\beta}\right)\cos\frac{1}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}.$$

Первый член выражения для $f'(x)$ остаётся ограниченным, второй же вблизи точек α и β перестаёт быть ограниченным. Каждая точка x множества Φ является предельной для концевых точек смежных интервалов, следовательно, в окрестности такой точки x производная $f'(x)$ не ограничена и, тем более, разрывна.

§ 8. Правая и левая производные; производная принимает все промежуточные значения; верхняя и нижняя производные

В ряде случаев $f_h(x)$ не имеет определённого предела, когда h стремится к нулю, пробегая как положительные, так и отрицательные значения, и вместе с тем существуют два различных предела для $f_h(x)$ в зависимости от того, остаётся ли h при стремлении к нулю положительным или отрицательным.

Определение 6. Если для данной точки x функция $f_h(x)$ стремится к определённому пределу $D_d f(x)$, когда h стремится к нулю, оставаясь положительным, то этот предел называется *правой производной функции* $f(x)$ *в точке* x; аналогичный предел для отрицательных h называется *левой производной* и обозначается через $D_s f(x)$ *).

Пусть x_0 — точка (относительного) максимума функции f, т. е. точка, для которой можно подобрать столь малое $\eta > 0$, что при $|x - x_0| < \eta$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Известно, что если функция f имеет для $x = x_0$ производную $f'(x_0)$, то эта последняя равна нулю. В случае существования правой или левой производных можно только утверждать, что в точке максимума

$$D_d f(x) \leqslant 0, \quad D_s f(x_0) \geqslant 0,$$

а в точке минимума, наоборот,

$$D_d f(x_0) \geqslant 0, \quad D_s f(x_0) \leqslant 0.$$

Читатель легко сам докажет эти формулы.

Пример 1.

$$f(x) = |x|.$$

$$D_d f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < 0 \\ +1 & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}, \quad D_s f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ +1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

В точке минимума $x = 0$

$$D_d f(x) = +1, \quad D_s f(x) = -1.$$

Этот пример показывает, что существуют функции, у которых D_d и D_s принимают каждая только два значения. В противоположность этому для настоящей производной имеет место следующая замечательная теорема:

Теорема 27. *Пусть $f(x)$ имеет определённую производную $f'(x)$ в каждой точке сегмента $[a; b]$. Тогда $f'(x)$ принимает на $(a; b)$ все значения, лежащие между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

---

*) В этих обозначениях d и s суть начальные буквы латинских слов dexter (правый) и sinister (левый).

Доказательство. Допустим, что

$$f'(a) < z < f'(b).$$

(В случае $f'(a) > z > f'(b)$ доказательство вполне аналогично.) Так как $f_h(a)$ при неограниченно убывающем h стремится к $f'(a)$, а $f_h(b)$ при тех же условиях стремится к $f'(b)$, то можно найти столь малое $h > 0$, что

$$f_h(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b) - f(b-h)}{h} = \\ = f_h(b-h) = f_{-h}(b).$$

Выбрав такое h, рассмотрим $f_h(x)$ как функцию от x. При $x = a$ эта функция меньше z, при $x = b - h$, напротив, больше z; так как при этом она непрерывна, то существует x_0, удовлетворяющее соотношениям

$$a < x_0 < b - h,$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f_h(x_0) = z. \tag{1}$$

По теореме Лагранжа из (1) следует, что существует $x_1 = x_0 + \theta h$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, удовлетворяющее равенству

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = z,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если производная $f'(x)$ существует в каждой точке, то она не может иметь разрывов первого рода.*

Если отношение $f_h(x)$ не стремится к определённому пределу при $h \to 0$, то поведение $f_h(x)$ при очень малых $|h|$ можно до некоторой степени охарактеризовать с помощью верхнего и нижнего пределов $f_h(x)$ при $h \to 0$ (§ 1). Определение верхнего и нижнего пределов в нашем случае будет иметь такой вид: пусть $f^+_\Delta(x)$ есть верхняя грань $f_h(x)$ при $|h| < \Delta$; когда Δ уменьшается, $f^+_\Delta(x)$ не может возрастать, следовательно, стремится при $\Delta \to 0$ к определённому пределу; этот предел и есть верхний предел $f_h(x)$ при $h \to 0$. Будем называть его *верхней производной* функции $f(x)$ в точке x и обозначать $f^+(x)$. При этом $f^+(x)$ может быть как конечным, так и равным $+\infty$ или $-\infty$. Вполне аналогично определяется нижняя производная $f^-(x)$, как нижний предел $f_h(x)$ при $h \to 0$. Очевидно, всегда $f^+(x) \geqslant f^-(x)$.

В случае конечности верхней производной $f^+(x)$ она может быть охарактеризована так: при любом $\varepsilon > 0$ существует такое

$\delta > 0$, что при $|h| < \delta$

$$f_h(x) < f^+(x) + \varepsilon;$$

вместе с тем при любом δ найдётся такое h, что $|h| < \delta$ и

$$f_h(x) > f^+(x) - \varepsilon.$$

Геометрическое значение верхней и нижней производных таково: пусть функция $y = f(x)$ изображена при помощи кривой; будем соединять точку M, имеющую координаты $(x, y = f(x))$, с подвижной точкой M', имеющей координаты $(x', y' = f(x'))$, при помощи прямой MM'. При приближении точки M' к постоянной точке M в случае существования производной $f'(x)$ прямая MM' приближается к касательной

$$Y = y + f'(x)\ (X - x)$$

(здесь X, Y — текущие координаты точки касательной). Если же производной $f'(x)$ нет, то прямая MM' будет колебаться, но с приближением M' к M эти колебания будут со всё возрастающей точностью заключены в угле между прямыми

$$Y = y + f^+(x)\,(X - x)$$

и

$$Y = y + f^-(x)\,(X - x).$$

Очевидно, *для существования производной $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f^+(x)$ и $f^-(x)$ были конечны и равны между собой, причём в этом случае*

$$f'(x) = f^+(x) = f^-(x).$$

Если

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

и производные $f'(x)$, $g'(x)$ существуют, то, как известно, существует и $u'(x)$, причём

$$u'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Для верхней (или нижней) производной аналогичное равенство не было бы верно. Однако, если $g'(x)$ существует и $u(x) = f(x) + g(x)$, то

$$u^+(x) = f^+(x) + g'(x),$$
$$u^-(x) = f^-(x) + g'(x)$$

— формулы, имеющие многочисленные применения.

Докажем, что *для непрерывных на $[a; b]$ функций $f(x)$ функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суть функции не выше второго класса.*

Проведём доказательство только для $f^+(x)$. Рассмотрим $f^+_{\delta\Delta}(x)$, равное верхней грани $f_h(x)$, когда $\delta \leqslant |h| < \Delta$. Функция $f^+_{\delta\Delta}(x)$ непрерывна по x. В самом деле, в силу непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a; b]$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что из $|x' - x''| < \eta$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (на сегменте $[a; b]$). Тогда при $\delta \leqslant |h| < \Delta$ и $|x' - x''| < \eta$ будем иметь

$$|f_h(x') - f_h(x'')| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|h|} \{ |f(x') - f(x'')| + |f(x'+h) - f(x''+h)| \} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Следовательно, и верхние грани функций $f_h(x')$ и $f_h(x'')$ при $\delta \leqslant |h| < \Delta$ отличаются между собою не больше чем на $\frac{2\varepsilon}{\delta}$:

$$|f^+_{\delta\Delta}(x') - f^+_{\delta\Delta}(x'')| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Так как ε произвольно, то отсюда и следует непрерывность $f^+_{\delta\Delta}(x)$ по x.

Когда δ уменьшается, $f^+_{\delta\Delta}(x)$ не убывает и при $\delta \to 0$ стремится к пределу $f^+_\Delta(x)$. Выберем последовательность $\delta_n \to 0$; очевидно,

$$f^+_\Delta(x) = \lim_n f^+_{\delta_n\Delta}(x).$$

Функция $f^+_\Delta(x)$, как предел последовательности непрерывных функций $f^+_{\delta_n\Delta}$, есть функция не выше первого класса. Далее,

$$f^+(x) = \lim_n f^+_{\Delta_n}(x)$$

при $\Delta_n \to 0$. Отсюда и следует, что $f^+(x)$ есть функция не выше второго класса.

§ 9. Пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке

Мы построим сейчас непрерывную функцию $f(x)$, для которой отношение

$$f_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

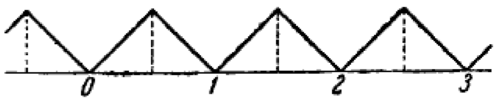
при $h \to 0$ не имеет конечного предела ни при каком значении x. Впервые такого рода функции были построены Вейерштрассом. Приведённый ниже пример принадлежит ван-дер-Вардену.

Положим $f_0(x)$ равным расстоянию точки x от ближайшей целочисленной точки. График функции $f_0(x)$ имеет вид, изображённый на черт. 13. Очевидно, $f_0(x)$ есть периодическая функция с периодом, равным единице. Кроме того, $f_0(x)$ линейна на каждом сегменте вида

$\left[\frac{s-1}{2}; \frac{s}{2}\right]$, где s — целое число. Угловой коэффициент графика $f_0(x)$ на каждом таком сегменте равен ± 1.

Положим теперь

$$f_n(x) = \frac{f_0(4^n x)}{4^n}.$$



Черт. 13.

График функции $f_n(x)$ имеет вид, изображённый на черт. 14. Функция $f_n(x)$ имеет период, равный $\frac{1}{4^n}$, и линейна на каждом сегменте вида $\left[\frac{s-1}{2\cdot 4^n}; \frac{s}{2\cdot 4^n}\right]$, причём угловой коэффициент её графика на каждом таком сегменте равен ± 1.

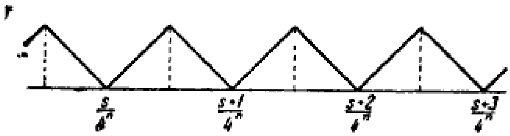
Положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Так как

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{4^n},$$

то ряд, определяющий $f(x)$, равномерно сходится, и из непрерывности функций $f_n(x)$ вытекает непрерывность



Черт. 14.

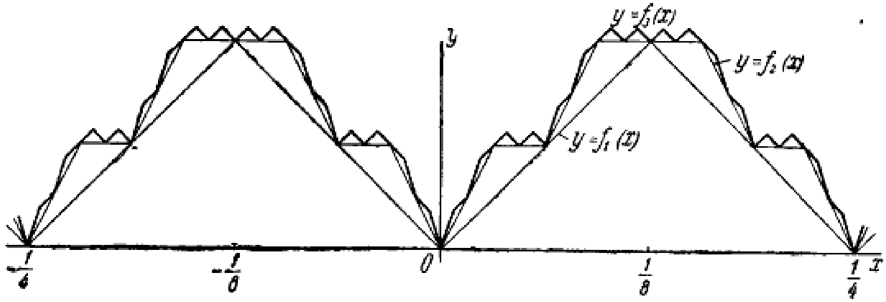
функции $f(x)$. Общее представление об этой функции можно получить из черт. 15.

Рассмотрим произвольную точку x. Всегда найдётся последовательность вложенных друг в друга сегментов Δ_n вида

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n - 1}{2\cdot 4^n}; \frac{s_n}{2\cdot 4^n}\right] \quad \text{(где } s_n \text{ — целые)},$$

содержащих эту точку x. На сегменте Δ_n длины $\frac{1}{2\cdot 4^n}$

всегда найдётся точка x_n, отстоящая от x на расстояние $\frac{1}{4^{n+1}}$. Так как $\frac{1}{4^{n+1}}$ является целым кратным от перио-



Черт. 15.

дов всех функций $f_k(x)$ при $k>n$, то мы будем иметь

$$\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x}=0 \quad \text{при} \quad k>n.$$

Далее, при $k\leqslant n$ функция $f_k(x)$ линейна на Δ_k. Поэтому

$$\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x}=\pm 1 \quad \text{при} \quad k\leqslant n.$$

Почленное сложение полученных соотношений даёт:

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)=$$

$$=\begin{cases}\text{чётному целому числу при нечётном } n,\\ \text{нечётному целому числу при чётном } n.\end{cases}$$

Мы видим, что отношение

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

не может стремиться при $n\to+\infty$ ни к какому конечному пределу. Так как при этом $x_n\to x$, то $f(x)$ не дифференцируема в x.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Определение метрического пространства

Простейшие понятия теории точечных множеств, введённые нами в главе 4 для множеств точек на числовой прямой и на плоскости, обладают тем свойством, что они формулируются и для прямой и для плоскости совершенно одинаковым образом. Основные понятия окрестности, предельной точки, замкнутого множества и т. д. выводятся из одного лишь понятия расстояния, совершенно независимо от того, имеются ли в виду множества, лежащие на прямой, или же множества, лежащие на плоскости. Более того, все доказанные в главе 4 предложения остаются верными и для множеств, лежащих в трёхмерном, вообще, в n-мерном евклидовом пространстве *): ε-окрестностью точки a в n-мерном пространстве R^n попрежнему называется множество всех точек $x \in R^n$, расстояние которых от точки a меньше ε. Таким образом мы совершенно естественно приходим к следующему общему понятию, охватывающему в качестве частных случаев и числовую прямую, и плоскость, и любое n-мерное евклидово пространство.

---

*) Под точками n-мерного евклидова пространства R^n понимаются всевозможные последовательности из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; расстояние между двумя точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определено формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}.$$

Определение метрического пространства. *Метрическим пространством* называется множество R элементов произвольной природы, называемых «точками», метрического пространства R, в котором для любых двух элементов x, y определено неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$, называемое *расстоянием* между точками x и y и удовлетворяющее трём следующим условиям:

1) аксиома тождества: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда точки x и y совпадают;

2) аксиома симметрии: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) аксиома треугольника: каковы бы ни были три точки x, y и z метрического пространства R, всегда

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z).$$

Примерами метрических пространств могут служить:

1. Числовая прямая и числовая плоскость с обычным определением расстояния.

2. Так называемое пространство Бэра. Точками этого пространства являются по определению всевозможные бесконечные последовательности

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$$

натуральных чисел. Расстояние между двумя различными точками

$$x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$$

и

$$y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$$

определяется как $\frac{1}{\lambda}$, где λ есть наименьшее натуральное число, для которого $n_\lambda \neq m_\lambda$; кроме того, по определению $\rho(x, x) = 0$.

3. Пространство C непрерывных функций, определённых на сегменте $[0; 1]$. Точки этого пространства суть действительные функции, непрерывные на сегменте $[0; 1]$. Расстояние между двумя точками f и g определяется как $\sup|f(x) - g(x)|$, когда x пробегает сегмент $[0; 1]$.

Читатель без труда проверит, что во всех этих примерах выполнены аксиомы метрического пространства.

Неограниченным источником примеров метрических пространств является следующее простое, но тем не менее совершенно фундаментальное замечание:

Всякое множество M, лежащее в данном метрическом пространстве R и рассматриваемое с теми расстояниями, которые определены в R, само является метрическим пространством.

Этим замечанием мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем, не оговаривая его особо каждый раз.

§ 2. Евклидовы пространства; замечание о метрическом произведении; гильбертово пространство

Мы уже упоминали, что точками n-мерного евклидова пространства R^n являются последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

из n действительных чисел, причём расстояние между двумя точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определяется формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Это расстояние, очевидно, удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии. Докажем, что оно удовлетворяет также аксиоме треугольника. Доказательство опирается на *неравенство Коши-Буняковского* (неправильно называемое также неравенством Шварца), а именно на неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1} y_k^2} \quad {}^{*}), \tag{1}$$

верное для любых действительных чисел x_k и y_k.

Начнём с доказательства этого неравенства. Рассмотрим сначала частный случай, когда расстояния точек

---

*) Для читателей, знакомых с простейшими понятиями, касающимися векторов в n-мерном пространстве, заметим, что неравенство (1) для двух векторов $\xi=\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\eta=\{y_1, \ldots, y_n\}$ особенно просто записывается в виде $(\xi, \eta)\leqslant|\xi|\cdot|\eta|$.

$x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ от *начала координат* $0=(0, \ldots, 0)$ равны 1 (т. е. $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$, $y_1^2+\ldots+y_n^2=1$).

Так как

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k-y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

значит, в силу наших предположений имеем $2 \geqslant 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant 1. \tag{1'}$$

Пусть теперь $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — какие угодно точки n-мерного пространства R^n.

Положим

$$x_k' = \frac{x_k}{\sqrt{\sum x_k^2}}, \quad y_k' = \frac{y_k}{\sqrt{\sum y_k^2}} \text{ при } k=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда расстояние точек $x'=(x_1', \ldots, x_n')$, $y'=(y_1', \ldots, y_n')$ от начала координат равно 1, и мы по только что доказанному можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} x_k' y_k' \leqslant 1,$$

т. е.

$$\frac{\sum x_k y_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}} \leqslant 1,$$

чем неравенство Коши-Буняковского доказано.

Докажем теперь, что в пространстве R^n выполнена аксиома треугольника, т. е. что для любых $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ имеем неравенство (суммирование везде от 1 до n):

$$\sqrt{\sum (x_k-z_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum (x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum (y_k-z_k)^2}. \quad (2)$$

Полагая $x_k-y_k=u_k$, $y_k-z_k=v_k$, имеем $x_k-z_k=u_k+v_k$, так что подлежащее доказательству неравенство (2) переписывается в виде

$$\sqrt{\sum (u_k+v_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_k^2}+\sqrt{\sum v_k^2}$$

или — по возведении обеих частей в квадрат — в виде

$$\sum (u_k+v_k)^2 \leqslant \sum u_k^2+\sum v_k^2+2\sqrt{\sum u_k^2}\cdot\sqrt{\sum v_k^2},$$

т. е.

$$\sum u_k^2+\sum v_k^2+2\sum u_k v_k \leqslant$$
$$\leqslant \sum u_k^2+\sum v_k^2+2\sqrt{\sum u_k^2}\cdot\sqrt{\sum v_k^2}.$$

Но для доказательства этого неравенства достаточно обе части неравенства Коши-Буняковского помножить на 2 и затем прибавить к ним по выражению $\sum u_k^2+\sum v_k^2$.

Замечание о метрическом произведении пространств. Это замечание совершенно естественно примыкает к определению евклидовых пространств R^n. Пусть даны метрические пространства

$$X_1, \ldots, X_n$$

(в конечном числе n). Точками метрического произведения $X=[X_1\times\ldots\times X_n]$ назовём всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов $x_1\in X_1, \ldots, x_n\in X_n$. Расстояние между двумя точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ пространства X определим по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{(\rho(x_1, y_1))^2+\ldots+(\rho(x_n, y_n))^2}.$$

Читателю предоставляется самому убедиться в том, что введённое таким образом расстояние удовлетворяет всем трём аксиомам метрического пространства.

Прежде чем определять гильбертово пространство R^∞, являющееся как бы бесконечномерным аналогом евклидова пространства, запишем одно арифметическое соотношение, непосредственно вытекающее из аксиомы треугольника, выполненной, как следует из предыдущих рассуждений, в n-мерном евклидовом пространстве. Именно, применим аксиому треугольника к трём точкам $o=(0, \ldots, 0)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства; получаем:

$$\rho(x, o)+\rho(o, y) \geqslant \rho(x, y),$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_n^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}. \qquad (1)$$

Пусть теперь последовательности действительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

суть последовательности со сходящейся суммой квадратов (т. е. ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходятся). Тогда, переходя в (1) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}. \qquad (2)$$

Так как все написанные ряды — с положительными членами, то из (2) следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2$.

Итак: *если ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2$. Это и есть арифметическое соотношение, нужное нам для определения пространства Гильберта.

Определение гильбертова пространства R^∞. Точками гильбертова пространства являются всевозможные бесконечные последовательности действительных чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

со сходящейся суммой квадратов. Расстояние между двумя точками $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ и $y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots)$ определяется формулой

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$$

(по только что доказанному, ряд справа сходится в наших предположениях, так что расстояние определено для любых двух точек гильбертова пространства). Проверяем аксиомы метрического пространства. Аксиомы тождества и симметрии выполнены очевидным образом. Аксиома треугольника получается предельным переходом при $n\to\infty$ из соответствующего неравенства для n-мерного евклидова пространства

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}.$$

[Множество всех точек $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ гильбертова пространства, для которых $0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^n}$ (при любом $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$), обозначается через Q и называется *основным параллелепипедом* гильбертова пространства (или просто *гильбертовым кирпичом*). Легко видеть, что Q замкнуто в R^∞.]

§ 3. Элементарные предложения теории точечных множеств

Основные определения теории точечных множеств для случая множеств, лежащих в любом метрическом пространстве R, сохраняют дословно свои формулировки, данные в главе 4 для частного случая, когда пространство R есть числовая прямая или плоскость: множество всех точек $x \in R$, расстояние которых от данной точки $a \in R$ меньше данного $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью* $U(a, \varepsilon)$ точки a; точка a называется *точкой прикосновения*, соответственно *предельной точкой* множества M, если каждая её окрестность содержит хотя бы одну точку, соответственно бесконечно много точек множества M; точка $a \in M$, не являющаяся предельной точкой множества M, называется *изолированной* точкой множества M; множество всех точек прикосновения, соответственно всех предельных точек множества M, называется *замыканием*, соответственно *производным множеством* множества M и обозначается через $[M]$, соответственно M', и т. д. Дословно, как в главе 4, мы говорим, что множество $M \subseteq R$:

замкнуто, если $M \supseteq M'$ (т. е. если $M = [M]$);

плотно в себе, если $M \subseteq M'$;

совершенно, если $M = M'$.

Множество $M \subseteq R$ называется *открытым*, если его дополнение $R \setminus M$ замкнуто.

Наконец, последовательность точек $x_n \in R$ называется *сходящейся к точке* $x \in R$, если любая окрестность $U(x, \varepsilon)$ содержит все точки x_n, начиная с некоторой (т. е. если $\lim \rho(x, x_n) = 0$).

Приведём несколько примеров сходящихся последовательностей.

В пространстве C всех непрерывных на $[0; 1]$ функций (§ 1, пример 3) последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ сходится к f, если числовая последовательность

$$\rho(f, f_n) = \sup_{x \in [0;\, 1]} |f(x) - f_n(x)|$$

сходится к нулю. Но последнее условие означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполнено для всех x на сегменте $[0; 1]$. Другими словами, *сходимость последовательности* $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ *в пространстве* C *есть не что иное, как равномерная сходимость последовательности функций* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *на сегменте* $[0; 1]$*). Поэтому функциональное пространство C часто называют «пространством равномерной сходимости».

В пространстве Бэра (§ 1, пример 2) сходимость последовательности точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots,$$

где

$$x_m = (n_1^{(m)}, n_2^{(m)}, \ldots, n_k^{(m)}, \ldots),$$

к точке

$$x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$$

означает, что для любого натурального числа λ можно найти такое m_λ, что для $m > m_\lambda$

$$n_1^{(m)} = n_1, \ldots, n_\lambda^{(m)} = n_\lambda,$$

т. е. что первые λ членов всех последовательностей x_m, $m > m_\lambda$, равны соответствующим членам последовательности

$$x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots).$$

Определение 1. *Расстоянием между двумя множествами* M и N в метрическом пространстве R называется неотрицательное число

$$\rho(M, N) = \inf \rho(x, y), \tag{1}$$

где x и y — произвольные точки, соответственно, из M и N.

Если множества M и N имеют непустое пересечение, то $\rho(M, N) = 0$ (так как в формуле (1) можно взять $x = y \in M \cap N$). Однако может быть $\rho(M, N) = 0$ и при непересекающихся M и N: достаточно взять в качестве пространства R числовую прямую и на ней определить M

---

*) Примеры равномерно и неравномерно сходящихся последовательностей функций читатель может найти в главе 5, § 5.

как интервал $(0; 1)$, а N — как интервал $(1; 2)$; можно было бы также взять за M множество всех рациональных, а за N — множество всех иррациональных точек прямой.

В частности, если одно из двух множеств, например N, состоит лишь из одной точки a, то получаем *расстояние* $\rho(a, M)$ *от точки* a *до множества* M, определённое формулой

$$\rho(a, M) = \inf \rho(a, x), \tag{2}$$

где x пробегает всё M.

Теорема 1. *Для того чтобы точка a была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\rho(a, M) = 0. \tag{3}$$

В самом деле, как условие (3), так и условие $a \in [M]$ означают, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти точку $x_\varepsilon \in M$, удовлетворяющую неравенству $\rho(a, x_\varepsilon) < \varepsilon$.

Если M есть произвольное множество, лежащее в метрическом пространстве R, и a есть произвольная точка этого пространства, то, согласно определению разности, данному в § 2 главы 1, множество $M \setminus a$ есть множество всех точек множества M, отличных от a (значит, если a не содержится в M, то $M \setminus a = M$). В качестве упражнения читатель легко докажет следующее предложение:

Теорема 1'. *Для того чтобы точка a была предельной точкой множества M, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\rho(a, M \setminus a) = 0.$$

Определение 2. Множество всех точек x, удовлетворяющих для данного множества $M \subseteq R$ и данного $\varepsilon > 0$ условию

$$\rho(x, M) < \varepsilon,$$

называется *ε-окрестностью множества* M и обозначается через $U(M, \varepsilon)$.

Теорема 2. *ε-окрестность $U(M, \varepsilon)$ любого данного множества M есть сумма ε-окрестностей $U(x, \varepsilon)$ для всех точек $x \in M$.*

Доказательство. Если $y \in U(M, \varepsilon)$, то $\inf\limits_{x \ni M} \rho(y, x) < \varepsilon$, т. е. существует такая точка $x \in M$, что $\rho(y, x) < \varepsilon$, значит, $y \in U(x, \varepsilon)$. Обратно, если $y \in U(x, \varepsilon)$, где $x \in M$, то $\rho(y, x) < \varepsilon$ и тем более $\rho(M, y) = \inf\limits_{x \in M} \rho(x, y) < \varepsilon$, так что $y \in U(M, \varepsilon)$.

Теорема 3. *Если расстояние между двумя множествами M и N равно d и $U = U(M, \varepsilon)$, $V = U(N, \varepsilon)$, то*

$$\rho(U, V) \geqslant d - 2\varepsilon.$$

В самом деле, для любых $x \in U$ и $y \in V$ можно найти такие $x' \in M$ и $y' \in N$, что $\rho(x, x') < \varepsilon$ и $\rho(y, y') < \varepsilon$. Значит,

$$\rho(x', y') \leqslant \rho(x', x) + \rho(x, y) + \rho(y, y') < \rho(x, y) + 2\varepsilon,$$

т. е.

$$\rho(x, y) > \rho(x', y') - 2\varepsilon \geqslant d - 2\varepsilon,$$

откуда $\inf\limits_{\substack{x \in U \\ y \in V}} \rho(x, y) \geqslant d - 2\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Определение 3. Верхняя грань множества всех чисел $\rho(x, x')$, где x и x' — произвольные точки данного метрического пространства R, называется *диаметром пространства* R и обозначается через $\delta(R)$.

Если $\delta(R)$ есть конечное число, то пространство R называется *ограниченным*; тогда при любом выборе точки $a \in R$ во всяком случае $R = U(a, d + \varepsilon)$, где $d = \delta(R)$, а ε — любое положительное число.

Примеры. Диаметр треугольника равен длине его наибольшей стороны; диаметр эллипса равен длине его большой оси; числовая прямая не ограничена: $\delta(R^1) = \infty$.

Теорема 4. *Диаметр замыкания $[M]$ любого множества M равен диаметру самого множества M.*

Очевидно, что $\delta(M) \leqslant \delta([M])$. Докажем, что $\delta(M)$ не может быть меньше, чем $\delta([M])$. Для этого заметим, что для любых двух точек $x \in [M]$ и $y \in [M]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти точки $x' \in M$ и $y' \in M$, отстоящие, соответственно, от x и от y меньше, чем на ε. Тогда по аксиоме треугольника $\rho(x', y') \geqslant \rho(x, y) - 2\varepsilon$, поэтому

$$\sup_{\substack{x' \in M \\ y' \in M}} \rho(x', y') \geqslant \sup_{\substack{x \in [M] \\ y \in [M]}} \rho(x, y) - 2\varepsilon,$$

т. е. $\delta(M) \geqslant \delta([M]) - 2\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, а это и означает, что $\delta(M) \geqslant \delta([M])$, что и требовалось доказать.

§ 4. Замкнутые множества метрического пространства

Так как множество, состоящее из конечного числа точек, не имеет предельных точек, то единственными его точками прикосновения являются точки самого этого множества; значит, *всякое конечное множество* (в том числе *и пустое множество*) *замкнуто*. Из самого определения точки прикосновения следует

Теорема 5. *Если $A \subseteq B$, то всякая точка прикосновения множества A есть точка прикосновения множества B, т. е. $[A] \subseteq [B]$.*

Из $[A] \subseteq [B]$ отнюдь не следует, что $A \subseteq B$; так, если A есть множество всех рациональных точек сегмента $[0; 1]$, а B — множество всех вообще иррациональных точек, то $[A]$ есть сегмент $[0; 1]$, а $[B]$—вся числовая прямая, и мы имеем $[A] \subset [B]$, в то время как $A \cap B = \Lambda$; если A—множество всех рациональных, а B — множество всех иррациональных точек числовой прямой, то $A \cap B = \Lambda$ и $[A] = [B]$.

Теорема 6. *Замыкание суммы двух и вообще любого конечного числа множеств есть сумма замыканий этих множеств.*

Доказательство. Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве R. Из теоремы 5 следует, что $[A] \subseteq [A \cup B]$ и $[B] \subseteq [A \cup B]$, значит, $[A] \cup [B] \subseteq$ $\subseteq [A \cup B]$. Докажем обратное включение $[A \cup B] \subseteq [A] \cup$ $\cup [B]$.

Пусть a — точка прикосновения множества $A \cup B$, не являющаяся точкой прикосновения множества A. Докажем, что $a \in [B]$. Для этого надо доказать, что любая окрестность $U(a, \varepsilon)$ содержит точки множества B. Так как a не есть точка прикосновения множества A, то существует окрестность $U(a, \varepsilon')$, не содержащая ни одной точки множества A. Пусть ε'' есть наименьшее из двух чисел ε и ε'. Тогда окрестность $U(a, \varepsilon'')$, содержащая точки множества $A \cup B$, не содержит ни одной точки множества A, так что все лежащие в $U(a, \varepsilon'')$ точки множества $A \cup B$ принадлежат B, и (в силу неравенства $\varepsilon'' \leqslant \varepsilon$) содержатся в окрестности $U(a, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 6 вытекает

Первое основное свойство замкнутых множеств. *Сумма любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

В самом деле, если A и B замкнуты, то

$$[A \cup B] = [A] \cup [B] = A \cup B.$$

Теорема 7. *Замыкание любого множества замкнуто*: $[[M]] = [M]$.

Лемма. *Для любой точки* $x \in U(a, \varepsilon)$ *можно найти* $d > 0$ *такое, что* $U(x, d) \subseteq U(a, \varepsilon)$.

Доказательство — см. доказательство леммы к теореме 2 главы 4.

Докажем теперь теорему 7. Пусть $a \in [[M]]$. Надо доказать, что всякая окрестность $U(a, \varepsilon)$ содержит хотя бы одну точку множества M. Так как a — точка прикосновения множества $[M]$, то $U(a, \varepsilon)$ содержит точку x множества $[M]$. Согласно лемме берём $U(x, d) \subseteq U(a, \varepsilon)$. Так как $x \in [M]$, то в $U(x, d)$ имеются точки множества M; но все они лежат в $U(a, \varepsilon)$, а это и требовалось доказать.

Замечание 1. Совершенно так же, как в главе 4, теорема 2, доказывается, что *множество M' всех предельных точек множества M замкнуто.*

Второе основное свойство замкнутых множеств. *Пересечение любого (конечного или бесконечного) множества замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть в метрическом пространстве R дана некоторая система замкнутых множеств A_α. Обозначим через A пересечение всех A_α. Надо доказать, что всякая точка прикосновения a множества A содержится в A. Но a, будучи точкой прикосновения множества A, является, в силу теоремы 5, точкой прикосновения любого A_α, значит, вследствие замкнутости A_α содержится в любом A_α, а потому содержится и в пересечении всех A_α, т. е. в A, что и требовалось доказать.

Непосредственным следствием определения точки прикосновения является

Третье основное свойство замкнутых множеств. *Всё пространство R, а также пустое множество Λ — замкнуты.*

Теорема 8. *Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество M, есть замыкание множества M.*

В самом деле, так как $[M]$ замкнуто и содержит M, то пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M, содержится в $[M]$. С другой стороны, если A_α есть какое-нибудь замкнутое множество, содержащее M, то из теоремы 5 следует, что $[M] \subseteq A_\alpha$; значит $[M]$ содержится и в пересечении всех A_α, что и требовалось доказать.

Теорему 8 иногда выражают так: *замыкание множества M есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество M.*

§ 5. Открытые множества метрического пространства R. Внутренние точки множества относительно пространства R

Первое основное свойство открытых множеств*). *Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

В самом деле, если G_1 и G_2 — открытые, то их дополнения F_1 и F_2 замкнуты, значит, и $F_1 \bigcup F_2$ замкнуто; но $F_1 \bigcup F_2$ есть дополнение к $G_1 \bigcap G_2$ (см. § 2 главы 1), значит, $G_1 \bigcap G_2$ — открытое.

Второе основное свойство открытых множеств. *Сумма любого (конечного или бесконечного) множества открытых множеств есть открытое множество.*

В самом деле, если дана система открытых множеств G_α, то их дополнения F_α замкнуты, значит пересечение всех F_α тоже замкнуто; но пересечение всех F_α есть дополнение к сумме всех G_α (см. главу 1, § 2), так что сумма всех G_α есть открытое множество, что и требовалось доказать.

Третье основное свойство открытых множеств. *Пустое множество Λ, а также*

*) Определение открытого множества дано в начале § 3.

всё пространство R — открытые в R (как дополнения к замкнутым множествам: всему пространству R и пустому множеству Λ).

Определение 4. Точка $a \in M$ называется *внутренней точкой* множества M относительно метрического пространства R, если a не есть точка прикосновения дополнительного множества $R \setminus M$.

Это же определение можно сформулировать и так:

Определение 4′. Точка $a \in M$ называется внутренней точкой множества M по отношению к R, если существует содержащаяся в M окрестность $U(a, \varepsilon)$ точки a в пространстве R.

Или:

Точка a называется внутренней точкой множества $M \subseteq R$ по отношению к R, если $\rho(a, R \setminus M) > 0$.

Очевидно, если a — внутренняя точка множества M по отношению к R и $M \subset N \subseteq R$, то a есть внутренняя точка и множества N по отношению к R.

Примеры:

1. Пусть M — сегмент $[a; b]$ числовой прямой R^1. Точки интервала $(a; b)$ и только они суть внутренние точки сегмента M по отношению к R^1; но по отношению к плоскости $R^2 \supset M$ ни одна точка сегмента M не внутренняя.

2. Пусть M — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ на плоскости R^2. Внутренними точками круга M по отношению к R^2 являются все точки «открытого круга» $x^2 + y^2 < 1$ и только они; но по отношению к трёхмерному пространству R^3, в котором лежит плоскость R^2, ни одна точка круга M не является внутренней.

Теорема 9. *Для того чтобы множество M было открытым в пространстве R, необходимо и достаточно, чтобы все точки множества M были его внутренними точками по отношению к R.*

В самом деле, условие, сформулированное в этой теореме, является лишь перефразировкой требования, чтобы множество $R \setminus M$ содержало все свои точки прикосновения, т. е. было замкнутым.

Теорема 10. *Всякая ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ в метрическом пространстве R есть открытое множество этого пространства.*

В самом деле, лемма, на которой основывалось доказательство теоремы 7, в точности утверждает, что все точки окрестности $U(a, \varepsilon)$ суть её внутренние точки по отношению к R.

Теперь мы будем называть ε-окрестности точек и множеств *сферическими* окрестностями (это выражение удобно употреблять, когда нет нужды указывать, для какого именно ε данная окрестность есть ε-окрестность).

Определение 5. Всякое открытое множество пространства R, содержащее данную точку $a \in R$ (или данное множество $M \subseteq R$), называется *окрестностью точки* a (соответственно множества M) в пространстве R.

Эта терминология законна, так как в силу теоремы 10 сферические окрестности точек являются действительно частными случаями окрестностей в новом, более широком смысле слова; для множеств аналогичное утверждение следует из того, что, согласно теореме 2, ε-окрестность множества M есть сумма ε-окрестностей всех точек $x \in M$ и поэтому представляет собою открытое множество.

Теорема 11. *Для того чтобы точка a была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы каждая окрестность $U(a)$ точки a содержала хотя бы одну точку множества M.*

Доказательство. Необходимость. Так как, согласно теореме 9 и определению 4′, существует $U(a, \varepsilon) \subseteq U(a)$, и так как $U(a, \varepsilon) \cap M \neq \Lambda$, то тем более $U(a) \cap M \neq \Lambda$.

Достаточность. Любая окрестность $U(a)$ содержит точки множества M, следовательно, в частности, и любая сферическая окрестность $U(a, \varepsilon)$.

Обозначим через $<M>$ сумму всех открытых множеств, содержащихся в данном множестве M. Множество $<M>$ может быть пусто, но оно во всяком случае открытое (в силу второго основного свойства открытых множеств). Множество $<M>$, являющееся «наибольшим» открытым множеством, содержащимся в M, называется *открытым ядром* множества M.

Теорема 12. *Множество $<M>$ совпадает с множеством всех внутренних точек множества M.*

В самом деле, всякая точка $a \in <M>$ есть внутренняя точка открытого множества $<M> \subseteq M$, значит, и подавно есть внутренняя точка множества M. Обратно, всякая внутренняя точка a множества M имеет содержащуюся в M окрестность $U(a)$ и значит (так как $U(a)$ — открытое и лежит в M) содержится в $<M>$.

Для того чтобы конечное множество M, лежащее в пространстве R, было открытым в R, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка множества M была изолированной точкой пространства R.

Доказательство может быть предоставлено читателю.

Так как каждая изолированная точка пространства R представляет собою открытое множество в R, то не только конечное, но и *любое множество изолированных точек пространства R открыто в R.*

Докажем теперь две теоремы, которые (хотя и с разных сторон) устанавливают связь между замкнутыми и открытыми множествами.

Теорема 13. *Всякие два непересекающиеся замкнутые множества F_1 и F_2 метрического пространства R имеют в этом пространстве две непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Так как F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества, то никакая точка одного из этих множеств не является точкой прикосновения другого. Поэтому для каждой точки $x \in F_1$ число $\rho_x = \rho(x, F_2)$ положительно. Точно так же, для каждой точки $y \in F_2$ имеем $\rho(y, F_1) > 0$. Положим

$$U_1 = \bigcup_{x \in F_1} U\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right),$$

$$U_2 = \bigcup_{x \in F_2} U\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right).$$

U_1 и U_2 суть открытые множества, содержащие, соответственно, F_1 и F_2. Докажем, что $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Пусть, в самом деле, имеется точка $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда имеется точка $x \in F_1$ такая, что $\rho(x, z) < \frac{\rho_x}{2}$, и точка $y \in F_2$ такая, что $\rho(y, z) < \frac{\rho_y}{2}$. Пусть для определённости $\rho_x \geqslant \rho_y$. Тогда

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) < \frac{\rho_x + \rho_y}{2} \leqslant \rho_x,$$

что противоречит определению числа ρ_x; это противоречие доказывает наше утверждение.

Два непересекающиеся замкнутые множества F_1 и F_2 могут не иметь непересекающихся сферических окрестностей. Дело в том, что F_1 и F_2 могут находиться друг от друга па расстоянии, равном нулю (как, например, гипербола и её асимптота на обыкновенной числовой плоскости), а тогда, очевидно, всякая сферическая окрестность одного из наших двух множеств пересекается со вторым множеством, и тем более со всякой его сферической окрестностью.

Теорема 14. *Всякое замкнутое множество данного метрического пространства R является множеством G_δ, т. е. пересечением счётного числа открытых множеств этого пространства.*

В самом деле, достаточно показать, что всякое замкнутое множество F есть пересечение своих сферических окрестностей вида $U_n = U\left(F, \frac{1}{n}\right)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ до бесконечности. Так как при всяком n имеем $F \subseteq U_n$, то, значит, $F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Остаётся только показать, что всякая точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ принадлежит множеству F. Но из $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ сразу следует, что при любом n имеем $\rho(x, F) < \frac{1}{n}$, т. е. $\rho(x, F) = 0$. А это значит, что x есть точка прикосновения множества F, т. е., в силу его замкнутости, есть точка самого множества F.

Теорема 15. *Всякое открытое множество метрического пространства R есть множество типа F_σ (т. е. сумма счётного числа замкнутых множеств этого пространства).*

В самом деле, для замкнутого множества F, дополнительного к данному открытому множеству G, имеем по только что доказанному $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n есть открытое множество. Но тогда в силу формул двойственности § 2 главы 1, дополнение к F, т. е. G, есть сумма замкнутых множеств, дополнительных к U_n, что и требовалось доказать.

§ 6. Борелевские множества

Мы определили (в главе 4, § 7) множества F_σ и G_δ точек прямой как множества, являющиеся счётными суммами замкнутых, соответственно счётными пересечениями открытых множеств; разумеется, это определение непосредственно переносится на любое метрическое пространство R. Там же мы наметили, как по этому пути итти и дальше: назовём множествами $G_{\delta\sigma}$ множества, являющиеся суммами счётного числа множеств типа G_δ; точно так же множествами типа $F_{\sigma\delta}$ назовём множества, являющиеся пересечениями счётного числа множеств типа F_σ. (Заметим, что сумма счётного числа множеств F_σ есть, очевидно, множество F_σ, а пересечение счётного числа множеств G_δ есть множество G_δ.) Далее, назовём множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ множества, являющиеся суммами счётного числа множеств типа $F_{\sigma\delta}$, а множествами типа $G_{\delta\sigma\delta}$ — множества, являющиеся пересечениями счётного числа множеств типа $G_{\delta\sigma}$.

Аналогично определяются множества типов $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$; $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$ и т. д., причём каждый раз значок σ означает счётное сложение, а значок δ — счётное пересечение.

В несколько более компактной форме те же множества можно получить следующим образом. Назовём замкнутые множества множествами типа $(0, \delta)$, а открытые множества — множествами типа $(0, \sigma)$. И те и другие множества вместе назовём множествами типа 0. Предположим, что построены множества типа $n-1$. Назовём множествами типа (n, σ) множества, являющиеся суммами счётного числа множеств типа $n-1$, а множествами типа (n, δ) множества, являющиеся пересечениями счётного числа множеств типа $n-1$.

(При этом для получения множеств типа (n, σ) достаточно брать счётные суммы множеств типа $(n-1, \delta)$, а для получения множеств типа (n, δ) — счётные пересечения множеств типа $(n-1, \sigma)$, так как счётные суммы множеств типа $(n-1, \sigma)$, соответственно, счётные пересечения множеств типа $(n-1, \delta)$ дают нам снова множества того же типа.)

Множества типов (n, σ) и (n, δ) образуют вместе тип n. Итак:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Тип } 0 & \begin{cases} (0, \sigma) = \text{открытые множества}, \\ (0, \delta) = \text{замкнутые множества}, \end{cases} \\
\text{Тип } 1 & \begin{cases} (1, \sigma) = \text{тип } F_\sigma, \\ (1, \delta) = \text{тип } G_\delta, \end{cases} \\
\text{Тип } 2 & \begin{cases} (2, \sigma) = \text{тип } G_{\delta\sigma}, \\ (2, \delta) = \text{тип } F_{\sigma\delta}, \end{cases} \\
\text{Тип } 3 & \begin{cases} (3, \sigma) = \text{тип } F_{\sigma\delta\sigma}, \\ (3, \delta) = \text{тип } G_{\delta\sigma\delta}, \end{cases} \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Эту классификацию можно продолжить, пользуясь трансфинитными числами второго класса: пусть построены множества всех типов $\alpha' < \alpha$, где α — какое-либо трансфинитное число второго класса. Называем множествами типа (α, σ), соответственно, типа (α, δ) множества, являющиеся суммами, соответственно, пересечениями счётного числа множеств типов $< \alpha$; множества типов (α, σ) и (α, δ) вместе называются множествами типа α. При этом, если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, то для получения множеств типа (α, σ) достаточно брать счётные суммы множеств типа α' (даже одних лишь множеств типа (α', δ)), а для получения множеств типа (α, δ) — счётные пересечения множеств типа (α', σ).

Получаемые таким образом множества, т. е. множества всевозможных типов α, где α есть любое порядковое число $< \omega_1$, называются *борелевскими множествами* или сокращённо *В-множествами* данного пространства R.

Замечание 1. Очевидно, всякое множество типа α является вместе с тем множеством типа β при любом $\beta > \alpha$.

Замечание 2. Замкнутые множества называются также множествами *нулевого класса*. Если α — какое-нибудь порядковое число, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, то *множествами класса* α *называются все множества типа* α, *не являющиеся множествами типа* α' *ни при каком* $\alpha' < \alpha$. Вопрос о том, в каких случаях действительно существуют множества всех классов $\alpha < \omega_1$ (вопрос о непустоте классов борелевских множеств), мы в этой книге оставляем открытым. Заметим лишь, что в случае, если пространство R состоит из счётного множества точек, все вообще лежащие в нём множества являются множествами типа F_σ (и типа G_δ), так что все классы, начиная со второго, — пусты. Наоборот, если R есть евклидово пространство любого числа измерений, или бэровское пространство, или гильбертово пространство, то существуют борелевские множества любого класса $\alpha < \omega_1$ (доказательство можно найти в «Теории множеств» Хаусдорфа, гл. 8).

Замечание 3. Мы видели, что любой конечный тип (n, σ) или (n, δ) получает естественное обозначение в виде типа F_* или G_*, где $*$ есть конечная совокупность значков σ и δ, удовлетворяющая следующим условиям:

А) две одинаковые буквы σ или δ никогда не встречаются подряд;

Б) в случае F_* первой буквой является σ, в случае G_* первой буквой является δ;

В) если данный тип есть (n, σ), соотв. (n, δ), то последней буквой в $*$ является σ, соотв. δ.

Однако из того, что всякое замкнутое множество есть множество типа G_δ, а всякое открытое множество есть множество типа F_σ, следует, что всякое множество F_σ есть вместе с тем $G_{\delta\sigma}$; всякое G_δ есть $F_{\sigma\delta}$; вообще, всякое F_* есть $G_{\delta *}$ и всякое G_* есть $F_{\sigma *}$. Таким образом, разница между F_* и G_* данного типа n стирается при переходе к следующему типу. Тем более каждый трансфинитный тип может быть записан и в виде F_* и в виде G_*, где $*$ есть некоторое вполне упорядоченное множество значков σ, δ, удовлетворяющее условиям А), Б), В).

Легко доказывается, что дополнение $R \setminus M$ к любому множеству M типа α есть множество типа α (а именно, дополнение к множеству типа (α, σ) есть множество типа (α, δ), и обратно).

В самом деле, это утверждение верно для множеств типа 0. Предположим, что оно доказано для множеств всех типов $\alpha' < \alpha$. Тогда из формул двойственности § 2 главы 1 и из самого определения множеств типа α следует, что дополнение к множеству типа (α, σ) есть множество типа (α, δ), и обратно.

Далее, сумма и пересечение счётного числа множеств типа α есть множество типа $\alpha+1$.

Рассмотрим теперь некоторую систему K множеств, лежащих в данном пространстве R. Эта система называется *телом множеств* (или просто телом) пространства R, если она удовлетворяет следующим условиям:

1° Сумма и пересечение счётного числа множеств, являющихся элементами системы K, есть элемент системы K.

2° Дополнение $R\setminus M$ ко всякому множеству $M\in K$ есть элемент системы K.

Замечание 4. Из этих условий следует, что всё пространство R и пустое множество являются элементами всякого тела K. В самом деле, если $M\in K$, то и $R\setminus M\in K$, значит, $R=M\bigcup(R\setminus M)\in K$ и $\Lambda=R\setminus R\in K$.

Далее, из наших условий следует, что разность двух множеств $M_1\in K$, $M_2\in K$ также есть элемент системы K, так как

$$M_1\setminus M_2=M_1\bigcap(R\setminus M_2).$$

Мы только что доказали, что суммы и пересечения счётного числа борелевских множеств пространства R суть борелевские множества этого пространства, а также, что дополнение к борелевскому множеству есть борелевское множество. Итак, *борелевские множества пространства R образуют тело множеств этого пространства R.*

Докажем теперь, что всякое тело K пространства R, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (или все открытые) множества, содержит и все борелевские множества. В самом деле, если все замкнутые множества являются элементами тела K, то элементами этого тела являются и все открытые множества (как дополнения к замкнутым; если бы было дано, что K содержит все открытые множества, то K содержало бы и все замкнутые множества, как дополнения к открытым). Итак, во всяком случае тело K содержит в качестве своих элементов все множества типа 0. Но если K содержит в числе своих элементов все множества всех типов $\alpha'<\alpha$, где α — любое фиксированное порядковое число $<\omega_1$, то K содержит и все множества типа α, так как эти множества являются суммами и пересечениями счётного числа множеств типов $\alpha' < \alpha$. Наше предложение доказано. Оно может быть сформулировано и так:

Теорема 16. *Система всех борелевских множеств данного пространства R есть наименьшее тело множеств пространства R, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (или все открытые) множества этого пространства.*

Доказанная теорема позволяет определить систему всех борелевских множеств пространства R (или, как говорят, «борелевское тело пространства R») без применения трансфинитных чисел.

Заметим прежде всего, что пересечение любого множества тел K_α данного пространства R есть снова тело пространства R. В самом деле, если дано счётное множество элементов M_i системы $K = \bigcap\limits_{\alpha} K_\alpha$, то сумма и пересечение множеств M_i (как элементов каждого из тел K_α) содержатся в любом K_α, значит, и в K. Дополнение к любому $M \in K$, содержась в любом K_α, также содержится в K.

С другой стороны, совокупность всех множеств пространства R, очевидно, есть тело, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (открытые) множества пространства R. Поэтому можно без каких бы то ни было предварительных рассуждений говорить о наименьшем теле пространства R, содержащем в числе своих элементов все замкнутые (все открытые) множества: этим телом является пересечение всех тел K пространства R, содержащих в числе своих элементов все замкнутые (все открытые) в R множества; это наименьшее тело и можно определить как борелевское тело пространства R.

Замечание 5. Борелевские множества являются частным случаем так называемых A-множеств (данного пространства R); определение A-множеств и A-операции, при помощи которой A-множества получаются из замкнутых множеств, будет дано в § 4 главы 7, замечание 4; теория A-множеств и борелевских множеств хорошо и подробно изложена в книге Хаусдорфа «Теория множеств», глава 8.

§ 7. Замкнутые и открытые в данном множестве E подмножества множества E

В самом начале этой главы было указано, что всякое множество E, лежащее в метрическом пространстве R, само есть метрическое пространство, в котором каждые две точки имеют друг от друга то самое расстояние, которое им приписано в пространстве R. Из этого обстоятельства непосредственно следует, что для любого подмножества M множества E точка $a \in E$ тогда и только тогда будет точкой прикосновения (соответственно предельной точкой) в E, если она будет точкой прикосновения (соответственно предельной точкой) в R. Другими словами, *замыкание множества $M \subseteq E$ в E есть пересечение множества E с замыканием множества M в R*. Мы записываем это так:

$$E[M] = E \cap R[M],$$

обозначая через $R[M]$ замыкание множества M в пространстве R, а через $E[M]$ замыкание того же множества в пространстве E.

Отсюда, далее, вытекает:

Теорема 17. *Среди множеств $M \subseteq E$ те и только те замкнуты в E, которые являются пересечениями с E множеств, замкнутых в R.*

В самом деле, если $M \subseteq E$ замкнуто в E, то

$$M = E[M] = E \cap R[M],$$

причём $R[M]$ замкнуто в R. Обратно, если M есть пересечение с E замкнутого в R множества F, то каждая точка прикосновения множества M в E, будучи содержащейся в E точкой прикосновения множества M, а значит и подавно, множества F в R, принадлежит и множеству E и множеству F, т. е. содержится в $M = E \cap F$.

Теорема 18. *Открытыми в E являются те и только те множества $M \subseteq E$, которые являются пересечениями с E множеств, открытых в R.*

В самом деле, если M открыто в E, то $E \setminus M$ замкнуто в E, значит, $E \setminus M = E \cap F$, где F замкнуто в R, а тогда $M = E \cap (R \setminus F)$, и $R \setminus F$ — открытое в R. Обратно, если $M = E \cap G$, где G — открытое в R, то $E \setminus M = E \cap (R \setminus G)$, значит, $E \setminus M$ замкнуто в E, а M — открытое в E.

В частности, всякое множество $M \subseteq E$, замкнутое (соотв. открытое) в R, будет замкнутым (соотв. открытым) в E, так как из $M \subseteq E$ следует $M = E \cap M$.

Это предложение естественно дополняется следующим (доказательство предоставляем читателю).

Теорема 19. *Если E замкнуто (соотв. открыто) в R, то всякое множество M, замкнутое (соотв. открытое) в E, будет замкнутым (соотв. открытым) в R.*

§ 8. Множества, всюду плотные и нигде не плотные в данном пространстве

Определение 6. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется *плотным* в открытом множестве G пространства R, если каждая точка множества G является точкой прикосновения множества M (т. е. если $G \subseteq [M]$).

Теорема 20. *Для каждого множества $M \subseteq R$ имеется наибольшее открытое множество G_M, в котором M плотно («наибольшее» в том смысле, что всякое открытое множество G, в котором M плотно, содержится в G_M).*

В самом деле, так как M плотно в G в том и только в том случае, когда $G \subseteq [M]$, то множеством G_M является сумма всех открытых множеств, лежащих в $[M]$, т. е. открытое ядро множества $[M]$.

Следующие два «крайних» случая являются основными:

а) Множество G_M совпадает со всем пространством R (т. е. $[M] = R$). В этом случае принято говорить, что M *всюду плотно* в пространстве R (хотя достаточно было бы просто сказать, что M плотно в пространстве R). Очевидно, для того чтобы M было всюду плотно в R, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $a \in R$ и любого $\varepsilon > 0$ существовала точка $x \in M$, отстоящая от a на расстояние $< \varepsilon$.

б) Множество G_M пусто, т. е. не существует в R непустого открытого множества, в котором M было бы плотно. В этом случае говорят, что множество M *нигде не плотно в пространстве* R.

Итак, для того чтобы M было нигде не плотным в R, необходимо и достаточно, чтобы $[M]$ не содержало ни одной внутренней относительно R точки.

Непосредственными следствиями наших определений являются

Теорема 21. *Множество M тогда и только тогда плотно в G (соотв. всюду плотно в R, соотв. нигде не плотно в R), если тем же свойством обладает множество $[M]$.*

Теорема 22. *Замкнутое множество F плотно в G тогда и только тогда, когда $G \subseteq F$ (в частности, единственное всюду плотное в R замкнутое множество есть само R). Замкнутое множество F тогда и только тогда нигде не плотно в R, если оно не содержит никакого открытого в R множества.*

Так как изолированная точка a пространства R лишь тогда есть точка прикосновения какого-либо множества M, если $a \in M$, то:

Теорема 23. *Всякое множество M, всюду плотное в R, содержит все изолированные точки пространства R.*

Если M плотно в G, то тем более — во всяком открытом $G_0 \subset G$, так что всякое непустое открытое $G_0 \subset G$ содержит точки множества M. Обратно, если M не является плотным в G, то существует точка $a \in G$, не являющаяся точкой прикосновения для M, значит, существует окрестность $U(a)$, не содержащая ни одной точки M; множество $G_0 = G \cap U(a)$ открыто, содержится в G и не содержит ни одной точки множества M. Итак, нами доказана

Теорема 24. *Для того чтобы множество M было плотно в G, необходимо и достаточно, чтобы всякое непустое открытое $G_0 \subset G$ содержало точки множества M.*

Непосредственными следствиями теоремы 24 являются:

Теорема 25. *Если M плотно в G, то и $M \cap G$ плотно в G.*

Теорема 26. *Для того чтобы M было нигде не плотно в R, необходимо и достаточно, чтобы каждое открытое в R множество G содержало открытое множество G_0, свободное от точек множества M.*

Докажем, наконец, следующее предложение:

Теорема 27. *Для того чтобы замкнутое множество F было нигде не плотно в R, необходимо и достаточно, чтобы дополнительное открытое множество $G = R \setminus F$ было всюду плотно в R.*

В самом деле, если F нигде не плотно в R, то каждое открытое G содержит не принадлежащие множеству F точки, так что множество $R \setminus F$ всюду плотно в R (эта часть доказательства и, следовательно, соответствующая часть теоремы 27 — необходимость высказанного в ней условия — верна и без предположения замкнутости F).

Обратно, если открытое множество $R \setminus F$ всюду плотно в R, то каждое непустое открытое множество G пространства R содержит непустое открытое множество $G_0 = G \cap (R \setminus F)$, свободное от точек множества F. Следовательно, F нигде не плотно в R.

Примеры всюду плотных и нигде не плотных множеств. Мы знаем, что множество всех рациональных (а также множество всех иррациональных) точек числовой прямой R^1 всюду плотно на ней.

Легко найти счётное всюду плотное множество и в n-мерном евклидовом пространстве R^n при любом n: таким множеством является, например, множество всех «рациональных» точек, т. е. точек, у которых все n координат рациональны. Счётность этого множества доказана в § 4 главы 1.

В гильбертовом пространстве R^∞ также имеется счётное всюду плотное множество: таким множеством, например, является множество D всех точек вида

$$x = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, 0, \ldots), \qquad (1)$$

у которых все координаты рациональны и среди них лишь конечное (однако сколь угодно большое) число отлично от нуля. Счётность множества D следует из того, что D есть сумма счётного множества множеств D_n, где D_n, по определению, состоит из всех точек вида (1) при данном n.

Чтобы получить множество, всюду плотное в бэровском пространстве, обозначим через H_1 множество всех последовательностей вида $(n_1, 1, 1, 1, \ldots)$, где n_1 пробегает все натуральные числа; через H_2 обозначим множество всех последовательностей вида $(n_1, n_2, 1, 1, 1, \ldots)$, где n_1 и n_2 пробегают независимо друг от друга множество всех натуральных чисел. Вообще, через H_k обозначим множество всех последовательностей вида

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k, 1, 1, 1, \ldots),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ пробегают независимо друг от друга множество всех натуральных чисел. Каждое из множеств H_k счётно; сумма H всех множеств H_k есть счётное множество, всюду плотное в бэровском пространстве.

Рассмотрим в качестве метрического пространства R множество (лежащее на плоскости R^2), состоящее из всех точек множества E_9 (глава 4, § 1) и из всех точек сегмента $[0; 1]$ оси абсцисс. В этом пространстве множество E_9 есть счётное всюду плотное множество.

Любопытно отметить, что множество E_9 есть минимальное всюду плотное множество пространства R в том смысле, что всякое множество, всюду плотное в R, содержит всё множество E_9. Читателю предоставляется убедиться в том, что минимальное всюду плотное множество существует в метрическом пространстве лишь тогда, когда множество всех изолированных точек этого пространства всюду плотно в нём. В частности, ни в евклидовых R^n, ни в гильбертовом R^∞, ни в бэровском пространствах минимальных всюду плотных множеств не существует: если из любого множества, всюду плотного в одном из поименованных пространств, вычесть конечное число точек, то оставшееся множество будет всюду плотным; можно из любого множества, всюду плотного в евклидовом, гильбертовом или бэровском пространстве, вычесть и некоторое бесконечное множество так, что оставшееся множество будет всюду плотным.

Теорема 28. *В пространстве C всех непрерывных на сегменте $[0; 1]$ функций содержится счётное всюду плотное множество.*

Доказательству этой теоремы предпошлём несколько элементарных замечаний. Назовём «допустимой» ломаной всякую простую ломаную

$$L = \overline{A_0 A_1 \ldots A_n}, \tag{2}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

а) ломаная L вся расположена в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ и с каждой лежащей в этой полосе прямой, параллельной оси ординат, пересекается в одной лишь точке;

б) вершинами ломаной L являются точки

$$A_0=(x_0, y_0),\ A_1=(x_1, y_1),\ \ldots,\ A_n=(x_n, y_n)$$

с рациональными абсциссами, причём $x_0=0$, $x_1=1$.

Очевидно, каждая допустимая ломаная L является графиком некоторой непрерывной на $[0; 1]$ функции $\lambda(x)$, линейной в каждом из сегментов $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, 1]$. Непрерывные функции этого рода называются *кусочно-линейными*. Кусочно-линейную функцию назовём «допустимой», если её график есть допустимая ломаная.

Среди допустимых ломаных и соответствующих им кусочно-линейных функций мы особо выделим «регулярные» ломаные и функции: допустимую ломаную мы назовём регулярной, если обе координаты каждой из её вершин рациональны. Функции, графиками которых являются регулярные ломаные, назовем также регулярными. Из теоремы 9 главы 1 следует, что множество всех регулярных ломаных счётно. Следовательно, регулярные функции образуют счётное подмножество C_0 пространства C. Наша задача — доказать, что множество C_0 всюду плотно в C. Это утверждение вытекает из следующих двух предложений:

А) Каковы бы ни были непрерывная на $[0; 1]$ функция $f(x)$ и положительное число ε, существует допустимая кусочно-линейная функция $\lambda(x)$, удовлетворяющая для всех $x\in[0; 1]$ неравенству $|f(x)-\lambda(x)|<\varepsilon$.

Б) Каковы бы ни были допустимая кусочно-линейная функция $\lambda(x)$ и положительное число ε, существует регулярная функция $\lambda'(x)$, удовлетворяющая для всех $x\in[0; 1]$ неравенству $|\lambda(x)-\lambda'(x)|<\varepsilon$.

Для доказательства предложения А) воспользуемся известной из анализа теоремой о том, что всякая непрерывная на сегменте $[0; 1]$ функция равномерно непрерывна на этом сегменте*). Поэтому для данной непрерывной на $[0; 1]$ функции $f(x)$ можно ко всякому $\varepsilon>0$ подобрать $\delta>0$ так, чтобы для любых x' и x'' на сег-

*) Доказательство этой теоремы и формулировка понятия равномерной непрерывности даны в § 1 главы 5.

менте $[0;\ 1]$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$, было $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. Разобьём теперь сегмент $[0;\ 1]$ рациональными точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на отрезки

$$[x_0=0;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\ x_n=1]$$

длины $<\delta$ и пусть

$$y_i=f(x_i)$$

для $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Если положить $A_i=(x_i,\ y_i)$ при $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, то ломаная (2) будет допустимой; обозначим изображаемую ею кусочно-линейную функцию через $\lambda(x)$. Для каждой точки x сегмента $[0;\ 1]$ определим x_i из условия $x_i\leqslant x<x_{i+1}$. Имеем оценки:

$$|f(x)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\lambda(x)-\lambda(x_i)|\leqslant|\lambda(x_{i+1})-\lambda(x_i)|=$$
$$=|f(x_{i+1})-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда, помня, что $\lambda(x_i)=f(x_i)$, получаем:

$$|f(x)-\lambda(x)|\leqslant|f(x)-f(x_i)|+$$
$$+|\lambda(x_i)-\lambda(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

чем утверждение А) доказано.

Утверждение Б) вытекает из следующего замечания:

Б′) Пусть даны допустимая ломаная (2) и число $\varepsilon>0$. Если $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ отличаются, соответственно, от $y_0, y_1, \ldots, y_n$ меньше чем на ε и $A'_i=(x_i,\ y'_i)$, то для функции $\lambda'(x)$, изображаемой ломаной $A'_0A'_1\ldots A'_n$, будет

$$|\lambda(x)-\lambda'(x)|<\varepsilon.$$

(Утверждение Б) следует из Б′), так как значения $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ можно выбрать рациональными.)

Действительно, пусть x — произвольная точка сегмента $[0,\ 1]$. Определим x_i из условия $x_i\leqslant x<x_{i+1}$. Имеем

$x = tx_i + (1-t)\,x_{i+1}$, где

$$0 < t = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \leqslant 1.$$

Тогда

$$\lambda(x) = ty_i + (1-t)\,y_{i+1}, \quad \lambda'(x) = ty'_i + (1-t)\,y'_{i+1}$$

и, следовательно,

$$|\lambda(x) - \lambda'(x)| \leqslant t\,|y_i - y'_i| + (1-t)\,|y_{i+1} - y'_{i+1}| < \\ < \varepsilon\,[t + (1-t)] = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 9. Связность

Пространство R называется *несвязным*, если его можно представить в виде суммы двух непересекающихся непустых замкнутых множеств:

$$R = \Phi_1 \bigcup \Phi_2. \tag{1}$$

Так как множества Φ_1 и Φ_2 взаимно дополнительны, то каждое из них, как дополнение к замкнутому, открыто. Поэтому в определении несвязного пространства можно замкнутые множества заменить открытыми, или «открыто-замкнутыми», т. е. такими, которые одновременно открыты и замкнуты.

В каждом пространстве имеются два «тривиальных» открыто-замкнутых множества: всё пространство и пустое множество. Если пространство несвязно, то в нём имеются *нетривиальные* открыто-замкнутые множества, т. е. непустые и в то же время несовпадающие со всем пространством: таковы каждое из множеств Φ_1 и Φ_2 разбиения (1). Обратно, если в пространстве имеется хотя бы одно нетривиальное открыто-замкнутое множество Φ_1, то его дополнение $\Phi_2 = R \diagdown \Phi_1$ также является нетривиальным открыто-замкнутым множеством, так что мы имеем разбиение (1). Итак:

Теорема 29. *Пространство тогда и только тогда несвязно, если в нём имеется нетривиальное открыто-замкнутое множество.* Если же в пространстве R единственными открыто-замкнутыми множествами являются два тривиальных (или, что то же самое, если при всяком представлении пространства R в виде суммы двух непересекающихся замкнутых слагаемых Φ_1 и Φ_2 по крайней мере одно из этих слагаемых пусто), то R называется *связным*.

Так как всякое множество, лежащее в каком-либо метрическом пространстве, само является метрическим пространством, то, определив связность метрического пространства, мы вместе с тем можем установить, будет ли данное множество M, лежащее в метрическом пространстве R, связным или нет. Только при рассмотрении разбиений множества M на сумму двух замкнутых множеств (или при рассмотрении открыто-замкнутых подмножеств множества M) надо помнить, что речь идёт о множествах, замкнутых и открытых *в* M, и что множество, замкнутое (или открытое) в M, может не быть замкнутым (соотв. открытым) в R. Например, если R есть плоскость, а M — сумма интервалов $(0; 1)$ и $(2; 3)$ на оси абсцисс, то каждый из этих интервалов представляет собою открыто-замкнутое множество в M, не являющееся в R ни замкнутым, ни открытым.

Теорема 30. *Сегмент числовой прямой есть связное множество.*

Доказательство от противного: пусть сегмент $[a; b]$ несвязен. Тогда он может быть представлен в виде суммы двух непустых непересекающихся открыто-замкнутых в $[a; b]$ множеств Φ_1 и Φ_2. Пусть, например, $a \in \Phi_1$. Так как Φ_1 открыто в $[a; b]$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что полусегмент $[a; a+\varepsilon)$ содержится в Φ_1. Назовём точку $x \in [a; b]$ «отмеченной», если полусегмент $[a; x)$ содержится в Φ_1. Все точки полусегмента $[a; a+\varepsilon)$, как мы видели, являются отмеченными; поэтому, обозначая через c верхнюю грань множества всех отмеченных точек, имеем во всяком случае $c > a$. Утверждаю, что c — отмеченная точка, т. е. что всякая точка $x \in [a; c)$ содержится в Φ_1. В самом деле, пусть дана произвольная точка $x \in [a; c)$; так как c — верхняя грань множества отмеченных точек, то имеется отмеченная точка $x' > x$, следовательно $[a; x') \subseteq \Phi_1$ и, в частности, $x \in \Phi_1$. Так как все точки полусегмента $[a; c)$ принадлежат Φ_1 и Φ_1 замкнуто, то и $c \in \Phi_1$. Но Φ_1, кроме того, и открыто. Поэтому, если $c \neq b$, то все точки некоторого полусегмента $[c, c+\varepsilon')$, $\varepsilon' > 0$, принадлежат Φ_1 и, значит, $c+\varepsilon'$ — «отмеченная» точка, вопреки предположению, что c — верхняя грань всех отмеченных точек. Итак, непременно $c = b$. Но в этом случае, по доказанному, $[a, b)$ содержится в Φ_1, а в силу замкнутости Φ_1 в Φ_1 содержится и точка b, так что Φ_2, вопреки нашим предположениям, пусто. Полученное противоречие доказывает теорему 30.

Примерами несвязных множеств могут служить:

1) сумма двух сегментов (или двух интервалов) числовой прямой, не имеющих общих точек (каждый из этих сегментов (соотв. интервалов) открыто-замкнут в их сумме); 2) множество R_0^1 всех рациональных точек числовой прямой (множество всех рациональных точек, лежащих на каком-нибудь интервале с иррациональными концами,—например, на интервале $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,—является открыто-замкнутым множеством в пространстве R_0^1). Подобным же образом убеждаемся в том, что и множество всех иррациональных точек прямой несвязно.

Теорема 31. *Пусть в пространстве R даны два непересекающихся замкнутых множества Φ_1 и Φ_2 и непустое связное множество M, содержащееся в сумме $\Phi_1 \cup \Phi_2$; тогда M непременно содержится в одном каком-нибудь слагаемом этой суммы, т. е. либо в Φ_1, либо в Φ_2.*

В самом деле, так как $M \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$, то

$$M = (M \cap \Phi_1) \cup (M \cap \Phi_2).$$

Так как Φ_1 и Φ_2 замкнуты в R, то $M \cap \Phi_1$ и $M \cap \Phi_2$ замкнуты в M, а так как M связно, то одно из множеств $M \cap \Phi_1$ или $M \cap \Phi_2$, например $M \cap \Phi_1$, пусто, так что $M = M \cap \Phi_2 \subseteq \Phi_2$, что и требовалось доказать.

Из этой простой теоремы вытекает ряд следствий:

Теорема 32. *Пусть в пространстве R дана система (любой мощности) связных множеств M_α, причём пересечение всех этих множеств M_α непусто; тогда сумма M всех множеств M_α связна.*

В самом деле, если бы M было несвязно, то существовало бы представление M в виде суммы двух непустых непересекающихся замкнутых в нём множеств Φ_1 и Φ_2:

$$M = \Phi_1 \bigcup \Phi_2,$$

и каждое из множеств M_α содержалось бы по предыдущей теореме либо в Φ_1, либо в Φ_2. По предположению, существует точка a, принадлежащая всем M_α; пусть, например, $a \in \Phi_1$. Тогда каждое M_α, имея в Φ_1 точку a, должно целиком содержаться в Φ_1. Значит, и $M \subseteq \Phi_1$, т. е. Φ_2 пусто, вопреки нашим предположениям.

Теорема 33. *Пусть для любых двух точек x и y пространства R можно найти содержащее эти две точки связное множество C_{xy}. Тогда всё R связно.*

В самом деле, если бы было

$$R = \Phi_1 \bigcup \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2—непустые непересекающиеся замкнутые множества, то можно было бы взять произвольные две точки $x \in \Phi_1$, $y \in \Phi_2$. Связное множество C_{xy}, содержащее x и y, пересекалось бы как с Φ_1, так и с Φ_2, между тем как по теореме 31 оно должно было бы лежать либо в Φ_1, либо в Φ_2. Противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 33, теоремы 30 и определения выпуклого множества*) вытекает:

Теорема 34. *Всякое выпуклое множество связно. В частности, n-мерное евклидово пространство при любом n связно.*

Теорема 35. *Связными множествами на прямой являются: пустое множество, одноточечные множества, сегменты, полусегменты (конечные и бесконечные) и интервалы (конечные и бесконечные). Никаких других связных множеств на прямой нет.*

Так как все перечисленные в теореме 35 множества связны (хотя бы в силу того, что они выпуклы), остаётся лишь доказать, что никаких связных множеств, кроме перечисленных, на прямой нет. Это доказательство опирается на следующую лемму:

---

*) Множество M, лежащее в евклидовом n-мерном пространстве, называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две точки множества M, целиком лежит в M.

Лемма. *Если a и b — две точки связного множества C на прямой, то всякая точка интервала $(a; b)$ содержится в C.*

Для доказательства леммы предположим, что точка c интервала $(a; b)$ не принадлежит C. Тогда, обозначая через Φ_1 множество всех точек множества C, лежащих влево от c, а через Φ_2—множество всех точек множества C, лежащих вправо от c, получим, в противоречие со связностью C, два непустых открытых в C множества Φ_1 и Φ_2, дающих в сумме всё C и не имеющих общих точек. Лемма доказана.

Пусть теперь C — произвольное связное множество на прямой R^1. Предположим сначала, что C ограничено, и пусть $a = \inf C$, $b = \sup C$. Если x — любая точка интервала (a, b), то, беря точки $a' \in C$, $b' \in C$, соответственно, на $[a; x)$ и $(x; b]$ (такие точки существуют в силу определения чисел a и b), сразу же заключаем из леммы, что $x \in C$. Итак, интервал $(a; b)$ во всяком случае содержится в C. Так как, с другой стороны, $C \subseteq [a; b]$, то C необходимо совпадает с одним из четырёх множеств $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ или $[a; b]$.

Если C ограничено лишь с одной стороны, например снизу, то, полагая $a = \inf C$, доказываем, что бесконечный интервал $(a; \infty)$ содержится в C: для любой точки $x \in (a; \infty)$ берём точки $a' \in C$, $b' \in C$, соответственно, на $[a; x)$ и $(x; \infty)$ и заключаем из леммы, что $x \in C$. Таким образом, в разбираемом случае C есть либо интервал $(a; \infty)$, либо полусегмент $[a; \infty)$. Наконец, если C не ограничено ни сверху, ни снизу, то для любой точки $x \in R^1$ берём точку $a' \in C$ слева от x и точку $b' \in C$ справа от x, откуда по лемме $x \in C$, так что $C = R^1$.

Конечную последовательность множеств

$$M_1, M_2, \ldots, M_s$$

(лежащих в каком-нибудь пространстве R) назовём *цепью множеств* (подробнее: *цепью, связывающею множества M_1 и M_s*), если все пересечения

$$M_1 \cap M_2 \neq \Lambda, \quad M_2 \cap M_3 \neq \Lambda, \quad \ldots, \quad M_{s-1} \cap M_s \neq \Lambda.$$

Последовательным применением теоремы 32 доказываем без труда, что сумма связных множеств, образующих цепь, есть связное множество. Отсюда и из теоремы 30 сразу следует, что всякая ломаная линия представляет собою связное множество. Из связности всех ломаных и из теоремы 33 в свою очередь вытекает, что всякое множество M из R^n, любые две точки которого могут быть соединены лежащей в M ломаной, связно. Мы этим доказали одну половину («достаточность») следующей теоремы:

Теорема 36. *Для того чтобы открытое множество* Γ *в* R^n *было связно, необходимо и достаточно, чтобы любые две точки множества* Γ *можно было соединить ломаной, лежащей в* Γ.

Остаётся доказать необходимость изложенного в этой теореме 36 условия. Другими словами, надо доказать, что *если в открытом* $\Gamma \subseteq R^n$ *имеются две точки* a *и* b, *которые не могут быть соединены лежащей в* Γ *ломаной, то* Γ *несвязно.*

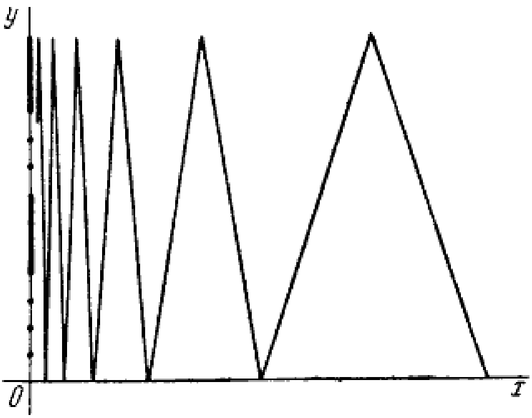
Для доказательства этого утверждения обозначим через Γ_a множество, состоящее из точки a и из всех точек множества Γ, которые можно соединить с a лежащими в Γ ломаными. По самому определению, $\Gamma_a \subseteq \Gamma$. Кроме того, Γ_a непусто (так как содержит a) и не совпадает с Γ, так как, по предположению, точка b не принадлежит множеству Γ_a. Остаётся доказать, что Γ_a открыто-замкнуто в Γ.

Докажем, что Γ_a открыто. Пусть $x \in \Gamma_a$, тогда существует $U(x, \varepsilon) \leqslant \Gamma$; какова бы ни была точка $x' \in U(x, \varepsilon)$, отрезок $\overline{xx'}$ лежит в $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma$. Возьмём какую-нибудь ломаную $\overline{ax}$, соединяющую точку a с x; если эта ломаная не имеет с $\overline{xx'}$ ни одной общей точки, кроме x, то, присоединяя отрезок $\overline{xx'}$, получим ломаную $\overline{ax'} \subseteq \Gamma$, соединяющую a с x'; если же ломаная $\overline{ax}$ имеет хотя бы одну отличную от x точку пересечения с отрезком $\overline{xx'}$, то обозначим через x'' ту из этих точек, которая ближе всего расположена к x. Тогда ломаная ax'' не имеет с отрезком $\overline{x''x'}$ никакой общей точки, кроме точки x'', и, присоединяя к ломаной $\overline{ax''}$ отрезок $\overline{x''x'}$, получим лежащую в Γ ломаную ax', соединяющую a с x'. Итак каждую точку $x \in U(x, \varepsilon)$ можно соединить с a ломаной, лежащей в Γ, так что $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma_a$, и следовательно, произвольная точка $x \in \Gamma_a$ есть внутренняя точка множества Γ (по отношению к R^n, значит, тем более по отношению к Γ), чем доказано, что Γ_a открыто.

Докажем, что Γ_a замкнуто в Γ. Пусть $x \in \Gamma$ — точка прикосновения множества Γ_a. Так как Γ открыто, то существует $U(x', \varepsilon) \subseteq \Gamma$. В $U(x', \varepsilon)$ существует точка $x \in \Gamma_a$, и её можно соединить с a ломаной $\overline{ax} \subseteq \Gamma$. Так как отрезок $\overline{xx'}$ лежит в Γ, то, повторяя дословно только что выполненное построение, получим снова ломаную $\overline{ax'}$, лежащую в Γ, так что $x' \in \Gamma_a$, что и требовалось доказать.

Теорема 37. *Пусть* C — *связное множество, лежащее в пространстве* R; *всякое множество* C_0, *содержащее* C *и содержащееся в* $[C]$, *связно.*

Обычно формулируют эту теорему так: *присоединяя к связному множеству C любое множество его предельных точек, получим связное множество.* Например, пусть C — множество всех точек бесконечнозвенной ломаной, изображённой на черт. 16, а B — любое множество (конечное или бесконечное), лежащее на отрезке $[0; 1]$ оси ординат. Так как C, как легко видеть, связно, а B состоит из предельных точек множества C, то в силу теоремы 37 множество $C_0 = C \bigcup B$ тоже связно.



Черт. 16.

Доказательство теоремы 37. Пусть C_0 удовлетворяет условиям теоремы 37. Если бы C_0 не было связно, то мы имели бы разбиение $C_0 = \Phi_1 \bigcup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 не пересекаются и замкнуты в пространстве C_0. Но тогда по теореме 31 связное множество C, содержась в сумме $\Phi_1 \bigcup \Phi_2$, содержалось бы в одном из слагаемых этой суммы, например в Φ_1. Так как Φ_1 замкнуто в C_0, то всякая точка множества C_0, будучи точкой прикосновения для $C \subseteq \Phi_1$, содержалась бы в Φ_1. Таким образом, Φ_2 пусто, и теорема 37 этим доказана.

Пусть a — произвольная точка пространства R. Назовём *компонентой точки* a в R сумму C_a всех связных множеств, лежащих в R и содержащих точку a. Множество C_a содержит точку a (так как множество, состоящее из одной точки, связно). Поэтому C_a непусто. По теореме 32 множество C_a связно. Таким образом, C_a есть наибольшее лежащее в R связное множество, содержащее точку a («наибольшее» в том смысле, что всякое лежащее в R связное множество, содержащее точку a, содержится в C_a). Наконец, из теоремы 37 следует, что C_a замкнуто (в противном случае, присоединяя к C_a какую-нибудь не содержащуюся в нём предельную точку x, мы получили бы «большее» связное множество $C_a \cup x$.

Если компоненты C_a и C_b двух точек a и b пространства R имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают, так как по теореме 32 множество $C_a \cup C_b$ связно. Итак, компоненты двух каких-нибудь точек данного пространства или совпадают, или не пересекаются между собою.

Поэтому каждая компонента C_a какой-либо точки a есть в то же время и компонента любой точки $x \in C_a$, так что *всё R распадается* (и притом однозначно) *на свои компоненты* (т. е. на компоненты различных точек $a \in R$). Каждая из компонент пространства R не содержится ни в каком отличном от неё связном подмножестве пространства R; в этом смысле компоненты данного пространства суть наибольшие связные подмножества пространства R.

Замечание 1. Как всегда, рассматривая какое-либо множество $M \subseteq R$ как пространство, можем говорить о компонентах данного множества (лежащего в некотором метрическом пространстве). При этом естественно, что компоненты множества M, будучи замкнуты в M, вообще говоря, не будут замкнуты в R.

Примеры:

1. Если R состоит из двух точек a и b, то компонентами являются эти точки.

2. Если R есть сумма двух или конечного числа попарно не пересекающихся сегментов числовой прямой, то эти сегменты и являются компонентами R.

3. В силу теоремы 35 единственными непустыми связными множествами, лежащими в множестве всех рациональных точек или в канторовом совершенном множестве, являются одноточечные множества. То же справедливо и для множества всех иррациональных точек. Поэтому: если возьмём за пространство R множество всех рациональных точек, или множество всех иррациональных точек числовой прямой, или канторово совершенное множество, то компонента каждой точки a в R будет состоять из одной этой точки a.

Замечание 2. Пространство R называется *вполне несвязным*, если компонента каждой его точки состоит из одной этой точки.

Пример 4. Возьмём на оси x канторово совершенное множество C и в каждой его точке $x \in C$ восставим перпендикуляр Q_x длины 1 в сторону положительных y. Сумма этих перпендикуляров есть совершенное множество Q на плоскости. Отрезки Q_x являются компонентами множества Q.

§ 10. Некоторые замечания об открытых множествах евклидовых пространств

Теорема 38. *Компоненты непустого открытого множества $\Gamma \subseteq R^1$ суть смежные интервалы к множеству $\Phi = R \setminus \Gamma$* (другими словами, употребление термина «компоненты» в § 2 главы 4 было законным).

Доказательство. Обозначим через x какую-либо точку открытого множества Γ, через $(a; b)$ — содержащий эту точку смежный интервал к множеству Φ, через Q — компоненту точки x. Очевидно $(a; b) \subseteq Q$. Пусть множество Q содержит не принадлежащую интервалу $(a; b)$ точку c, расположенную, положим, справа от b. Тогда множество

$$Q_1 = Q \cap (-\infty; b) + Q \cap (-\infty; b]$$

одновременно открыто и замкнуто в Q, вопреки связности множества Q.

Мы видели в § 9, что компоненты любого метрического пространства суть замкнутые множества. Приведённые там примеры показывают, что компоненты могут не быть открытыми множествами. Приведём ещё один пример. Пусть R состоит из отрезков

$$S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$$

на плоскости, параллельных оси ординат и определяемых условиями:

$$\text{для } S_0: x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\text{для } S_n: x = \frac{1}{n}, \; 0 \leqslant y \leqslant 1 \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти отрезки являются компонентами пространства R; S_n при $n \geqslant 1$ открыты в R, но S_0 открытым множеством в R не является.

Открытые связные множества называются *областями* (данного пространства R).

Ввиду изложенных примеров интересна

Теорема 39. *Компоненты любого открытого множества Γ евклидова n-мерного пространства суть области.*

Эта теорема является обобщением теоремы, утверждающей, что компоненты открытого множества на прямой являются интервалами.

Для доказательства рассмотрим какую-нибудь точку x компоненты C открытого множества $\Gamma \subseteq R^n$; точка x, будучи внутренней в Γ относительно R^n, имеет окрестность $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma$, и эта окрестность является связным множеством (так как она выпукла). Поэтому $C \cup U(x, \varepsilon)$ связно (теорема 32); а так как C — компонента точки x, то $U(x, \varepsilon) \subseteq C$. Итак, каждая точка компоненты C является внутренней, значит C — открытое, что и требовалось доказать.

Теорема 40. *Каждое открытое множество Γ в n-мерном пространстве R^n есть сумма конечного или счётного числа попарно не пересекающихся областей.*

Доказательство. Так как компоненты множества Γ суть области, не имеющие попарно общих точек, то остаётся доказать, что всякое множество S попарно не пересекающихся областей в R^n конечно или счётно. Это утверждение доказывается совершенно так же, как доказывалась счётность всякого множества попарно не пересекающихся интервалов на прямой: множество R_0^n всех рациональных точек n-мерного пространства (т. е. точек, все координаты которых рациональны) счётно и всюду плотно в R^n. Поэтому, беря первую рациональную точку пространства R^n, попавшую в данную область $\in S$, получим взаимно однозначное отображение системы S на некоторое подмножество счётного множества R_0^n, чем доказано, что и множество S не более, чем счётно.

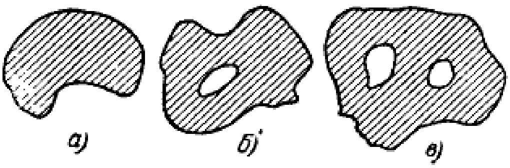
Замечание. Доказательство теоремы 39 опирается лишь на связность сферических окрестностей в R^n и применимо ко всем метрическим пространствам R, обладающим тем свойством, что для любой точки $x \in R$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеется связная окрестность точки x (т. е. связное открытое множество, содержащее точку x), лежащая в $U(x, \varepsilon)$. Пространства R, удовлетворяющие для любого $x \in R$ последнему условию, называются *локально связными* (таковы, например, евклидовы пространства, а также любые лежащие в них открытые множества). Таким образом, доказывая теорему 39, мы фактически доказали более общее предложение.

Теорема 41. *Компоненты любого локально связного пространства суть открытые множества.*

Единственными областями на прямой являются интервалы. Но уже на плоскости области могут иметь весьма сложный вид. Называя *границей* области Γ множество $[\Gamma] \setminus \Gamma$, можно прежде всего классифицировать плоские ограниченные области по числу компонент, на которые распадается их граница. Это число называется *порядком связности* области. В частности, область, граница которой есть связное множество, называется *односвязной* (см. черт. 17, *а*), область, граница которой состоит из двух компонент, называется *двусвязной* (черт. 17, *б*), область, граница которой состоит из трёх компонент, называется *трёхсвязной* (черт. 17, *в*) и т. д.

Теорема 42. *Как разность между замкнутым и открытым множеством, граница любой области является замкнутым множеством (как легко видеть, нигде не плотным на плоскости).*

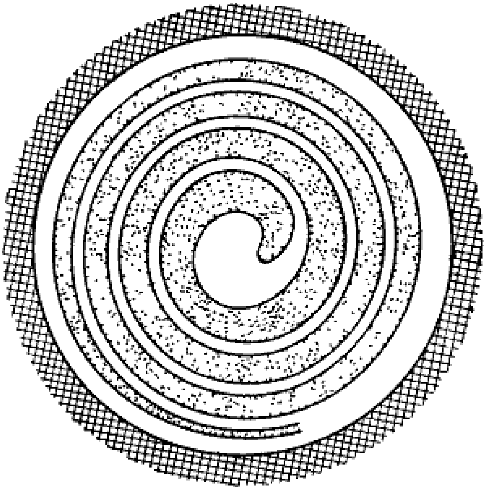
Однако строение этого замкнутого множества, даже в случае односвязных областей, может быть чрезвычайно сложным, как показывает черт. 18: граница заштрихованной спиралевидной области состоит из жирно-вычерченной кривой и окружности, на которую эта кривая (и вся область) спиралевидно навивается; эта граница связна*).



а) б) в)

Черт. 17.

Элементарные замкнутые кривые, как, например, окружность, эллипс и т. п., являются одновременно границами двух областей, одна из которых ограничена и составляет так называемую внутреннюю область к данной кривой, а другая — не ограничена («внешняя область к замкнутой кривой»). Однако граница заштрихованной спиралевидной области Г (на черт. 18) является в то же время границей и второй, также ограниченной области Г′ (область Г′ — разность между изображённым на черт. 18 кругом и замыканием области Г). Значительно труднее представить себе такое положение вещей, при котором один и тот же континуум C является границей трёх (или большего числа) попарно не пересекающихся односвязных областей.

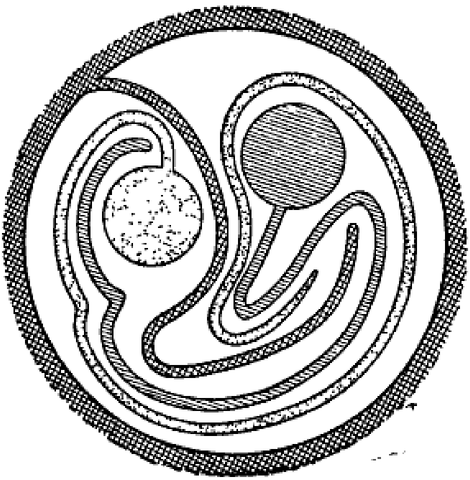


Черт. 18.

Чтобы понять, как это возможно, представим себе остров в открытом море и на нём три озера и вообразим себе следующую программу работ. В первый час ведётся канал от моря и от каждого из трёх озер таким образом, чтобы каждый из этих каналов был «слепым» (т. е. был в действительности заливом соответствующего водоёма), чтобы эти каналы нигде не соприкасались между собою и

*) Ограниченные связные замкнутые множества на плоскости называются *плоскими континуумами*.

чтобы в результате часовой работы расстояние от каждой точки суши до морской воды, а также до воды каждого из трёх озёр было меньше 1 *км*. В следующие полчаса каждый из проведённых четырёх каналов продолжается так, что попрежнему все каналы остаются слепыми и не соприкасаются между собою и что расстояние от каждой точки суши до воды каждого из четырёх водоёмов становится меньше чем $\frac{1}{2}$ *км*. В следующие затем четверть часа каналы продолжаются дальше так, чтобы, попрежнему не сообщаясь между собою, они с такой «плотностью» проникали бы внутрь острова, чтобы расстояние от каждой точки суши до воды каждого из четырёх водоёмов сделалось $< \frac{1}{8}$ *км*, и т. д. Через два часа такой деятельности от острова останется лишь некоторый нигде не плотный на плоскости континуум C, в любой близости от каждой точки которого будет находиться вода каждого из четырёх водоёмов, причём все эти водоёмы (море и три озера) попрежнему будут оставаться разобщёнными: воды никаких двух из них не будут смешиваться. Эти водоёмы (продолженные проведёнными из них каналами) и являются теми четырьмя областями, общую границу которых образует континуум C; одна из этих областей («море») — не ограничена, остальные три — ограничены (черт. 19).



Черт. 19.

Исследование плоских односвязных областей и их границ возникло в связи с теорией функций комплексного переменного (теорема Римана о возможности конформного отображения любой односвязной области на внутренность круга и — впервые решённая Каратеодори — задача о соответствии границ при этом отображении).

§ 11. Пространства со счётной базой

Дальнейшее построение теории точечных множеств требует наложения некоторых ограничений на пространство R; класс произвольных метрических пространств оказывается чересчур широким. Первое сужение этого класса достигается требованием, так сказать, чисто количественного характера, а именно *требованием, чтобы в данном пространстве R существовало некоторое счётное всюду плотное в R множество.* Мы видели, что такие важные для всей математики пространства, как евклидовы пространства любого числа измерений, как гильбертово пространство, как пространство C всех непрерывных функций, определённых на отрезке $[0; 1]$, а также пространство Бэра и ряд других пространств, удовлетворяют этому условию. Мы видели также, что при доказательстве теоремы 39 (и теоремы 40) наличие на прямой (соотв. в n-мерном пространстве) счётного всюду плотного множества имело основное значение.

Теорема 43. *Если в R имеется счётное всюду плотное множество, то всякая система S попарно не пересекающихся открытых множеств пространства R конечна или счётна.*

Так как каждая изолированная точка пространства R образует открытое множество, то в теореме 43 содержится

Теорема 44. *Если в R имеется счётное всюду плотное множество, то множество всех изолированных точек пространства R конечно или счётно.*

Доказательство теоремы 43. Пусть в R имеется всюду плотное счётное множество M. Ставя в соответствие каждому открытому множеству $\Gamma \in S$ некоторую определённую из содержащихся в нём точек множества M, получим взаимно однозначное соответствие между множеством S и некоторым подмножеством множества M, чем и доказано, что S конечно или счётно.

Примеры метрических пространств, не содержащих никакого счётного всюду плотного множества. 1. Обозначим через R какое-нибудь несчётное множество (о природе элементов которого не делаем никаких предположений). Для любых двух элементов $x \in R$, $y \in R$ полагаем $\rho(x, y) = 1$. Это определение расстояния превращает множество R в метрическое пространство, все точки которого изолированы в R. Поэтому единственное множество, всюду плотное в R, есть само R, которое, по предположению, несчётно.

2. Пусть R^2 — обыкновенная числовая плоскость, обычное расстояние между точками z, z' которой будем, как всегда, обозначать через $\rho(z, z')$. Пусть o — начало координат. Положим теперь для любых двух точек $z \in R^2$, $z' \in R^2$

$$\rho'(z, z') = \rho(z, z'),$$

если прямая zz' проходит через o, и

$$\rho'(z, z') = \rho(z, o) + \rho(o, z'),$$

если прямая zz' не проходит через o. Множество точек плоскости R^2 с расстоянием ρ' между ними есть метрическое пространство R. Если на какой-нибудь прямой, проходящей через o, возьмём множество всех точек, отличных от точки o, то это множество будет открыто. Значит, в пространстве R имеется несчётное множество попарно не пересекающихся открытых множеств и, следовательно, нет никакого счётного всюду плотного множества.

С понятием множества, всюду плотного в данном пространстве R, оказывается тесно связанным понятие базы этого пространства.

Определение 7. *Базой пространства R* называется всякая система S открытых множеств пространства R, обладающая тем свойством, что любое открытое множество $G \subseteq R$ может быть представлено как сумма некоторых множеств, являющихся элементами системы S.

Теорема 45. *Для того чтобы система S открытых множеств пространства R была базой этого пространства, необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе точки $x \in R$ и её окрестности $U(x)$ можно было найти $\Gamma_0 \in S$ так, чтобы*

$$x \in \Gamma_0 \subseteq U(x). \tag{1}$$

В самом деле, пусть S — база пространства R; так как $U(x)$, будучи открытым множеством, есть сумма некоторых $\Gamma \in S$, то, обозначая через Γ_0 одно из слагаемых этой суммы, содержащее точку x, получим $x \in \Gamma_0 \subset U(x)$, так что условие, высказанное в теореме 45, выполнено. Обратно, пусть это условие выполнено, т. е. каковы бы ни были открытое $G \subseteq R$ и точка $x \in G$, найдётся такое $\Gamma_0 \in S$, что $x \in \Gamma_0 \subseteq G$. Тогда для доказательства того, что произвольное открытое G есть сумма некоторых $\Gamma \in S$, достаточно взять все $\Gamma \in S$, лежащие в G: из принятого нами условия следует, что сумма этих Γ действительно есть G.

В формулировке теоремы 45 можно было бы произвольные окрестности $U(x)$ заменить сферическими окрестностями $U(x, \varepsilon)$.

Теорема 46. *Если множество M всюду плотно в метрическом пространстве R, то множества вида*

$U(a, r)$, где a пробегает все точки множества M, а r — все положительные рациональные числа, образуют базу пространства R.

В самом деле, пусть $x \in R$ и $\varepsilon > 0$ даны произвольно. Возьмём точку $a \in M$ на расстоянии, меньшем чем $\frac{\varepsilon}{3}$ от точки x, и рациональное число r, большее чем $\frac{\varepsilon}{3}$, но меньшее чем $\frac{2\varepsilon}{3}$. Тогда $x \in U(a, r)$, так как $\rho(a, x) < \frac{\varepsilon}{3} < r$; с другой стороны, $U(a, r) \subseteq U(x, \varepsilon)$, так как, какова бы ни была точка $x' \in U(a, r)$, имеем:

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, x') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Из теоремы 46 следует: если в метрическом пространстве R имеется счётное всюду плотное множество, то имеется и счётная база.

Обратно, если в R имеется счётная база, состоящая из открытых множеств

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots,$$

то, выбирая в каждом из множеств по точке $a_n \in \Gamma_n$, заключаем из самого определения базы, что в каждом открытом $G \subseteq R$ содержится хотя бы одна точка a_n, т. е. множество точек a_n всюду плотно в пространстве R. Итак, имеет место

Теорема 47. *Для того, чтобы метрическое пространство R имело счётную базу, необходимо и достаточно, чтобы в R было всюду плотно некоторое счётное множество.*

Удобство, которое может представлять пользование понятием базы, видно из следующего предложения:

Теорема 48. *Пусть S — база пространства R. Назовём S-окрестностью какой-либо точки $x \in R$ всякое содержащее точку x множество $\Gamma \in S$. Для того чтобы точка x была точкой прикосновения какого-либо множества $M \subseteq R$, необходимо и достаточно, чтобы каждая S-окрестность точки x содержала хотя бы одну точку множества M.*

В самом деле, если x — точка прикосновения множества M, то, согласно теореме 11, каждая окрестность точки x, т. е. каждое содержащее эту точку открытое множество, значит, и подавно, каждая S-окрестность точки x содержат по крайней мере одну точку множества M. Обратно, если каждая S-окрестность точки x содержит точки множества M, то и произвольная окрестность $U(x, \varepsilon)$, содержа некоторую S-окрестность точки x, содержит по крайней мере одну точку множества M.

Теорема 49. *Если R—пространство со счётной базой и $M \subseteq R$, то и M—пространство со счётной базой.*

В самом деле, пусть

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$$

—счётная база пространства R. Тогда множества

$$M \cap \Gamma_1, M \cap \Gamma_2, \ldots, M \cap \Gamma_n, \ldots$$

будут открыты в M и дадут нам счётную базу пространства M.

Отсюда из теорем 47 и 44 вытекает

Следствие. *Множество M, лежащее в пространстве R со счётной базой, может содержать не более счётного множества изолированных точек.*

В частности:

Всякое множество, лежащее в пространстве со счётной базой и состоящее из одних изолированных точек, конечно или счётно.

Только что доказанные предложения о счётности множества изолированных точек сейчас будут значительно усилены.

Вспомним, что точка a называется точкой конденсации множества M в пространстве R, если каждая окрестность точки a содержит несчётное множество точек множества M. Очевидно, что только несчётные множества могут иметь точки конденсации и что каждая точка конденсации и подавно является предельной точкой.

Имеет место следующая замечательная теорема, впервые доказанная Линделёфом:

Теорема 50. (Теорема Линделёфа.) *Пусть M—множество, лежащее в пространстве со счётной* *базой. Тогда точки множества M, не являющиеся точками конденсации этого множества, образуют конечное или счётное множество.*

Доказательство. Прежде всего замечаем: если

$$S = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots\}$$

— счётная база пространства R, то, для того чтобы точка x была точкой конденсации множества M, необходимо и достаточно, чтобы каждая S-окрестность точки x содержала несчётное множество точек из M. Доказательство этого утверждения совершенно таково же, как доказательство теоремы 48.

Итак, если x не есть точка конденсации множества M, то существует S-окрестность точки x, содержащая не более счётного множества точек из M. Выберем для каждой точки x множества M, не являющейся точкой конденсации этого множества, S-окрестность, содержащую не более счётного множества точек из M. Так как всех S-окрестностей — счётное множество, то число отобранных окрестностей и подавно не более чем счётно. В каждой из этих окрестностей помещается не более счётного множества точек из M, значит, не более чем счётно будет и множество всех точек множества M, попавших в сумму отобранных S-окрестностей. Так как каждая точка множества M, не являющаяся точкой конденсации, попала хотя бы в одну отобранную окрестность, то теорема доказана.

Теорема 51. *Множество Φ всех точек конденсации любого множества M, лежащего в пространстве со счётной базой, есть совершенное множество, пустое в том и только в том случае, если M не более чем счётно, и несчётное в случае несчётного M. Каждая точка $a \in \Phi$ есть точка конденсации и множества Φ.*

Доказательство. Обозначим через Φ множество всех точек конденсации множества M. Из предыдущей теоремы следует, что Φ в случае несчётного M несчётно; в случае, если M не более чем счётно, Φ, очевидно, пусто. Докажем, что Φ — совершенное множество.

1. *Множество Φ замкнуто.* В самом деле, пусть a — точка прикосновения множества Φ. Тогда любая окрест-

ность U точки a содержит некоторую точку $x \in \Phi$; в качестве открытого множества, содержащего точку x, множество U является окрестностью этой точки, а потому содержит несчётное множество точек из M. Так как U — произвольная окрестность точки a, то a есть точка конденсации множества M, т. е. $a \in \Phi$.

2. Докажем, что *каждая точка* $a \in \Phi$ *есть точка конденсации множества* Φ. В самом деле, пусть U — произвольная окрестность точки a. По определению точки a, множество $U \cap M$ несчётно, значит, по теореме Линделёфа, все его точки (за исключением, самое большее, счётного их числа) суть точки конденсации этого множества $U \cap M$, а значит, и подавно, точки конденсации множества M, т. е. принадлежат множеству Φ. Итак, любая окрестность точки a содержит не только бесконечное, но даже несчётное множество точек множества Φ.

Теорема 51 доказана.

Следствие. *Всякое замкнутое множество F, лежащее в пространстве со счётной базой, либо не более чем счётно, либо есть сумма несчётного совершенного множества своих точек конденсации и не более чем счётного множества остальных точек.*

В самом деле, обозначая через Φ множество всех точек конденсации множества F, имеем $\Phi \subseteq F$, в то время как $F \setminus \Phi$ по теореме 50 не более чем счётно.

Теорема 52. *Какова бы ни была несчётная система S открытых множеств G, заданная в пространстве R со счётной базой, в системе S можно найти счётную или конечную подсистему S_0, имеющую ту же сумму, что и вся система S.*

Для доказательства возьмём какую-либо счётную базу

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots \tag{2}$$

пространства R. Элемент Γ_n этой базы назовём «отмеченным», если Γ_n содержится по крайней мере в одном $G \in S$. Пусть

$$\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_k}, \ldots$$

все «отмеченные» элементы базы (2). Каждое Γ_{n_k} содержится, вообще говоря, в нескольких (возможно, и в бесконечно многих) различных $G\in S$; выберем для каждого «отмеченного» Γ_{n_k} вполне определённое содержащее его $G\in S$, которое обозначим через G_k. Получим не более чем счётную подсистему

$$G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots \tag{3}$$

системы S. Мы утверждаем, что сумма всех множеств (3) равна сумме всех вообще множеств $G\in S$. Достаточно показать, что какова бы ни была точка x, принадлежащая какому-нибудь $G\in S$, найдётся в (3) множество G_k, содержащее точку x. Но в самом деле, если $x\in G$, то (так как G открыто, а (2) есть база) существует Γ_n, содержащее x и содержащееся в данном G. Тогда Γ_n по самому определению есть отмеченный элемент базы (2) и, следовательно, содержится в некотором G_k из последовательности (3). Это G_k содержит и точку x, что и требовалось доказать.

Теорема 53. (Теорема Бэра-Хаусдорфа.) *Всякая вполне упорядоченная система возрастающих или убывающих множеств, которые либо все замкнуты, либо все открыты в пространстве R со счётной базой, содержит не более счётного числа различных элементов.*

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Вполне упорядоченная система строго возрастающих (строго убывающих) множеств*

$$M_1\subset M_2\subset\ldots\subset M_\alpha\subset\ldots$$
$$(\text{соотв. } M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_\alpha\supset\ldots),$$

состоящих из натуральных чисел, не более чем счётна.

В самом деле, пусть

$$x_\alpha\in M_{\alpha+1}\setminus M_\alpha, \quad \text{соотв.} \quad x_\alpha\in M_\alpha\setminus M_{\alpha+1}.$$

Если бы система всех M_α была несчётной, то мы имели бы несчётное множество попарно различных натуральных чисел x_α, чего не может быть.

Докажем теперь теорему Бэра-Хаусдорфа. Достаточно доказать её утверждение, касающееся вполне упорядоченных систем возрастающих и убывающих открытых множеств: переход к дополнительным множествам даст утверждения, касающиеся систем замкнутых множеств. Итак, предположим, что в данной вполне упорядоченной системе открытых множеств имеется несчётная подсистема различных множеств:

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots, \text{ соотв. } G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\alpha \supset \ldots$$

Возьмём какую-нибудь счётную базу пространства и раз навсегда занумеруем её элементы:

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

Построим теперь для каждого G_α множество M_α, состоящее из всех тех натуральных чисел n, для которых $U_n \subseteq G_\alpha$. Очевидно, из того, что $G_\alpha \subset G_\beta$, следует, что $M_\alpha \subset M_\beta$. Поэтому множества M_α находятся в условиях леммы, и значит среди них не может иметься несчётного числа различных множеств. Поэтому и среди множеств G_α не может иметься несчётного числа различных множеств. Теорема Бэра-Хаусдорфа этим доказана.

Та же теорема может быть высказана и следующим образом (привожу лишь формулировку, касающуюся систем убывающих замкнутых множеств, предоставляя остальные три формулировки читателю):

Теорема 53′. *Какова бы ни была вполне упорядоченная система убывающих замкнутых множеств пространства R со счётной базой, занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов*:

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \omega_1, \tag{4}$$

найдётся такое α, что все множества (4), *начиная с α-го, совпадают между собой*:

$$F_\alpha = F_{\alpha+1} = F_{\alpha+2} = \ldots$$

Доказательство от противного. Если такого α нет, то для каждого $\alpha < \omega_1$ можно найти наименьшее такое $\beta(\alpha)$, $\alpha < \beta(\alpha) < \omega_1$, что $F_\alpha \neq F_{\beta(\alpha)}$ и, следовательно, $F_\alpha \supset F_{\beta(\alpha)}$. Положим теперь $\nu_0 = 0$ и предположим, что для всякого порядкового числа ζ, меньшего чем некоторое $\alpha < \omega_1$, построено порядковое число $\nu_\zeta < \omega_1$ так, что при $\zeta < \zeta' < \alpha$ имеем $\nu_\zeta < \nu_{\zeta'}$ и $F_{\nu_\zeta} \supset F_{\nu_{\zeta'}}$. Для построения числа ν_α обозначим через α' наименьшее число $< \omega_1$, большее чем все ν_ζ, $\zeta < \alpha$, и положим $\nu_\alpha = \beta(\alpha') > \alpha'$. Тогда $F_{\nu_\alpha} \subset F_{\alpha'} \subseteq \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} F_\gamma \subset \bigcap\limits_{\zeta<\alpha} F_{\nu_\zeta}$, т. е. $F_{\nu_\alpha} \subset F_{\nu_\zeta}$ для любого $\zeta < \alpha$.

Таким образом для любого $\alpha < \omega_1$ строится ν_α так, что множества F_{ν_α}, число которых несчётно ($=\aleph_1$), все различны между собою в противоречие с теоремой 53. Теорема 53' этим доказана.

Пусть теперь E — произвольное множество, лежащее в пространстве со счётной базой. Обозначаем через $E^{(1)}$ производную множества E (т. е. множество всех предельных точек этого множества). Если дано $E^{(\alpha)}$, то определяем $E^{(\alpha+1)}$ как производную множества $E^{(\alpha)}$. Если β — предельное трансфинитное число второго класса, то обозначаем через $E^{(\beta)}$ пересечение всех $E^{(\alpha)}$, $\alpha < \beta$. Определённое таким образом для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ замкнутое множество $E^{(\alpha)}$ называется производной порядка α от множества E. Они образуют вполне упорядоченную систему убывающих замкнутых множеств и потому, начиная с некоторого $\alpha < \omega_1$, совпадают между собою. Очевидно, множество $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)}$ есть совершенное множество. Итак, имеет место

Теорема 54. (Теорема Кантора-Бендиксона.) *Для каждого множества E, лежащего в пространстве со счётной базой, имеется первое такое порядковое число $\alpha < \omega_1$, что производная α-го порядка множества E есть совершенное множество* (*быть может, пустое*), т. е. $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \ldots$

Из теоремы Линделёфа при этом следует, что $E^{(\alpha)}$ может быть пустым лишь в случае не более чем счётного E. В случае же несчётного E множество $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \ldots$ есть несчётное совершенное множество (содержащее множество всех точек конденсации множества E).

Пространства со счётной базой допускают дальнейшие теоремы, касающиеся мощностей различных систем множеств. Прежде всего:

Теорема 55_G. *Множество всех открытых множеств данного пространства R со счётной базой не превышает мощности $\mathfrak{c}$.*

В самом деле, пусть

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots \tag{2}$$

— база пространства R. Каждому открытому множеству G однозначно соответствует подпоследовательность последовательности (2), состоящая их всех Γ_n, содержащихся в G. Двум различным открытым множествам соответствуют различные подпоследовательности, так как, если G и G' различны, то существует точка x, принадлежащая одному из этих множеств, например G, и не принадлежащая другому; но тогда существует и окрестность Γ_n точки x, лежащая в G, но не лежащая в G'. Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми открытыми множествами пространства R и некоторыми последовательностями натуральных чисел (номеров элементов Γ_n последовательности (2)). Этим и доказано, что мощность множества всех открытых множеств пространства R не превосходит $\mathfrak{c}$.

Так как переход от открытого множества к его дополнению осуществляет взаимно однозначное отображение множества всех открытых множеств пространства R на множество всех замкнутых множеств этого пространства, то из теоремы 55_G следует

Теорема 55_F. *Мощность множества всех замкнутых множеств пространства со счётной базой не превосходит* $\mathfrak{c}$.

Из теоремы 55_F вытекает

Следствие. *Мощность множества всех точек пространства со счётной базой не превосходит* $\mathfrak{c}$.

Так как евклидово пространство любого числа измерений, а также гильбертово пространство являются пространствами со счётной базой, то теоремы 55_F и 55_G применимы, в частности, и к евклидовым, и к гильбертову пространству. Однако так как и в евклидовых пространствах, и в гильбертовом пространстве, и в фундаментальном параллелепипеде гильбертова пространства содержатся прямолинейные отрезки, например отрезок $\left[0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}\right]$, $x_2 = x_3 = \ldots = 0$, то мощность каждого из поименованных пространств по теореме Кантора-Бернштейна в точности равна $\mathfrak{c}$. Так как в множестве всех замкнутых множеств данного пространства содержится, в качестве подмножества, множество всех точек этого пространства, то множество всех замкнутых множеств, лежащих в евклидовом пространстве любого числа измерений, а также в гильбертовом пространстве и в его фундаментальном параллелепипеде, имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Итак,

Теорема 56. *Мощность n-мерного евклидова пространства при любом n, мощность гильбертова пространства и его фундаментального параллелепипеда, а также мощность множества всех замкнутых, равно как и мощность множества всех открытых множеств, лежащих в каждом из этих пространств, равны* $\mathfrak{c}$.

Заметим, что первые два утверждения теоремы 56 могут быть легко доказаны непосредственно, что мы и рекомендуем сделать читателю.

Вспомним, наконец, что пространство всех непрерывных функций, определённых на сегменте $[0; 1]$ (или любом другом сегменте), есть пространство со счётной базой (теорема 28) и, следовательно, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$. Так как в числе непрерывных функций имеются, в частности, все константы, то заключаем, что множество всех непрерывных функций, определённых на каком-либо сегменте, имеет мощность $\mathfrak{c}$. Этот факт также легко доказать непосредственно (пользуясь тем, что всякая непрерывная функция вполне определена её значениями в точках какого-либо всюду плотного множества, например, её значениями в рациональных точках).

§ 12. Непрерывные отображения

Об отображениях одного множества в другое мы уже говорили в первой главе. В частности, отображение f какого-либо множества X в множество Y действительных или комплексных чисел обычно называют действительной или комплексной *функцией*, определённой на множестве X. Если множество X также состоит из действительных или комплексных чисел, то мы получаем уже известное нам понятие функции *действительного* или *комплексного переменного*.

Из общих свойств любого отображения какого-либо множества X в какое-либо множество Y отметим следующие:

1. Образ суммы любого числа подмножеств множества X есть сумма образов этих множеств.

2. Образ пересечения любого числа подмножеств множества X содержится в пересечении образов этих множеств (но, вообще говоря, не совпадает с ним).

3. Прообраз суммы (пересечения) любого числа подмножеств множества Y есть сумма (пересечение) прообразов этих подмножеств. В частности:

4. Прообразы взаимно дополнительных подмножеств множества Y (т. е. двух подмножеств, из которых каждое есть дополнение к другому в Y) взаимно дополнительны в X.

Основное определение непрерывного отображения мы даём в так называемой форме Коши, знакомой читателю в применении к действительным функциям из главы 5.

Определение 8. Отображение f пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если ко всякой окрестности V точки $y_0 = f(x_0)$ в пространстве Y можно подобрать такую окрестность U точки x_0 в X, что образ её при отображении f будет содержаться в V.

Другими словами: f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in U(x_0, \delta)$ будем иметь $f(x) \in V(y_0, \varepsilon)$.

Если отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$, то оно называется *непрерывным отображением* пространства X.

Точка x, в которой отображение f непрерывно, называется *точкой непрерывности* этого отображения; точка, в которой отображение не непрерывно, называется *точкой разрыва*.

Определение 9. Взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства X на пространство Y называется *топологическим отображением*, если обратное отображение f^{-1} (пространства Y на пространство X) непрерывно *). Два пространства называются *гомеоморф-*

*) В замечании 1 приведён пример взаимно однозначного непрерывного отображения (полуинтервала на окружность), обратное отображение к которому не является непрерывным.

ными, если одно из них можно топологически отобразить на другое.

Теорема 57. *Для того чтобы отображение пространства X в пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого открытого множества $H \subseteq Y$ был открытым множеством в X.*

Доказательство. 1) Условие необходимо. Пусть f непрерывно и $H \subseteq Y$ открыто. Возьмём произвольную точку $x \in f^{-1}(H)$. Так как $y = f(x)$ содержится в H, т. е. имеет H своею окрестностью, то существует окрестность G точки x такая, что $f(G) \subseteq H$, и, значит, $G \subseteq f^{-1}(H)$. Итак, всякая точка $x \in f^{-1}(H)$ — внутренняя, т. е. $f^{-1}(H)$ открыто, что и требовалось доказать.

2) Условие достаточно. В самом деле, если оно выполнено, то, в частности, прообраз каждой окрестности $V(y)$ точки $y = f(x)$ есть открытое множество G, являющееся окрестностью точки x и удовлетворяющее условию $f(G) \subseteq V(y)$, так что отображение непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Так как прообразы взаимно дополнительных множеств взаимно дополнительны, то из теоремы 57 вытекает

Теорема 58. *Для того чтобы отображение f пространства X в пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого замкнутого множества пространства Y был замкнут в X.*

Замечание 1. Образ замкнутого множества $\Phi \subset X$ при непрерывном отображении может быть не замкнутым в Y; точно так же, образ открытого множества может быть не открытым. И то и другое видно из следующего примера. Пусть X есть полусегмент $[0, 2\pi)$ числовой прямой, а Y — окружность радиуса 1 Выберем на окружности Y определённое направление обхода в качестве положительного; кроме того, выберем на этой окружности определённую точку o. Поставим теперь в соответствие каждой точке x полусегмента X точку $y = f(x)$ окружности Y, являющуюся концом дуги, отложенной от точки o в положительном направлении и равной по длине отрезку $[0, x] \subset [0, 2\pi)$. Полученное отображение X на Y («навёртывание» полусегмента $[0, 2\pi)$ на окружность Y), очевидно, непрерывно; оно, кроме того, взаимно однозначно. Между тем, полусегмент $[1; 2\pi)$, являющийся замкнутым множеством в X, имеет своим образом незамкнутое множество в Y, а полусегмент $[0; 1)$, являющийся открытым множеством в X, имеет своим образом множество, не являющееся открытым в Y.

Непрерывное отображение пространства X в пространство Y называется *замкнутым* (*открытым*), если образ всякого замкнутого (открытого) множества в X является замкнутым (открытым) множеством в Y.

В следующей главе мы увидим, что всякое непрерывное отображение сегмента, вообще, любого замкнутого ограниченного множества евклидова пространства замкнуто. Примерами открытых отображений могут служить: проекция квадрата (или куба) на одну из его сторон, а также отображение любой плоской области, осуществляемое функцией комплексного переменного, аналитической в этой области. Уже из этих примеров видно, насколько важными являются классы замкнутых и открытых отображений.

Замечание 2. Пусть дано отображение f пространства X в пространство Y и пусть дана какая-нибудь база пространства Y. Для того чтобы f было непрерывно, достаточно (и, конечно, необходимо), чтобы прообраз каждого элемента данной базы был открыт. В самом деле, так как каждое открытое $H \subseteq Y$ есть сумма некоторых элементов данной базы, а прообраз суммы множеств есть сумма прообразов этих множеств, то из поставленного условия вытекает, что прообраз каждого открытого $H \subseteq Y$ открыт, чем непрерывность отображения f доказана. В частности, имеем такую теорему:

Теорема 59. *Для того чтобы действительная функция, определённая на пространстве X, была непрерывна, достаточно (и, конечно, необходимо), чтобы прообраз каждого интервала $(a; b) \subseteq Y$, т. е. множество тех точек x, для которых выполняется неравенство $a < f(x) < b$, было открытым.*

Это условие можно ещё упростить. Так как каждый интервал $(a; b) \subseteq Y$ есть пересечение полупрямых $(a; \infty)$ и $(-\infty; b)$, а прообраз пересечения множеств есть пересечение прообразов этих множеств, то верна

Теорема 60. *Для непрерывности функции $y = f(x)$, определённой на пространстве X, достаточно, чтобы при любом выборе действительного числа a множество тех точек $x \in X$, для которых $f(x) > a$, и множество тех точек x, для которых $f(x) < a$, были открытыми.*

Замечание 3. Множество тех точек $x \subset X$, в которых выполнено условие $f(x) > a$ или условие $f(x) < a$, или условие $a \leqslant f(x) \leqslant b$ и т. п., обозначается соответственно через $\mathcal{E}(f(x) > a)$, $\mathcal{E}(f(x) < a)$, $\mathcal{E}(a \leqslant f(x) \leqslant b)$ и т. п.

Так как открытые полупрямые $(a; \infty)$, $(-\infty; a)$ являются дополнительными множествами к замкнутым полупрямым $(-\infty; a]$, $[a; \infty)$, а прообразы взаимно дополнительных множеств взаимно дополнительны, то из теоремы 60 следует

Теорема 61. *Для непрерывности действительной функции $f(x)$, определённой в пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы все множества вида $\mathcal{E}(f(x) \leqslant a)$, $\mathcal{E}(f(x) \geqslant a)$ были замкнуты в X.*

Замечание 4. Из теоремы 61 следует, что для непрерывной функции f все множества вида $\mathcal{E}(f(x) = a)$ замкнуты. Обратно, каково бы ни было замкнутое множество A метрического пространства X, существуют непрерывные функции f, имеющие множество A множеством своих нулей: достаточно положить $f(x) = \rho(x, A)$.

Теорема 62. *Для того чтобы отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y было непрерывным в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности точек $\{x_n\}$ последовательность точек $f(x_n) = y_n$ сходилась к точке $y_0 = f(x_0)$.*

Доказательство. 1) Условие необходимо. Какова бы ни была окрестность $U(y_0, \varepsilon)$, существует отображающаяся в неё окрестность $U(x_0, \delta)$; так как $U(x_0, \delta)$ содержит все точки x_n, начиная с некоторой, то $U(y_0, \varepsilon)$ содержит все точки y_n, начиная с некоторой, т. е. $\lim\limits_{n} y_n = y_0$.

2) Условие достаточно. Пусть оно выполнено и пусть тем не менее f не непрерывна в точке x_0. Тогда существует окрестность $U(y_0, \varepsilon)$ такая, что в любой окрестности $U(x_0, \delta)$ найдётся точка $x_{(\delta)}$, удовлетворяющая условию $f(x_{(\delta)}) \in Y \setminus U(y_0, \varepsilon)$. Давая δ значения $\frac{1}{n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим последовательность точек $x_n = x_{\left(\frac{1}{n}\right)}$, сходящуюся к x_0, но такую, что $f(x_n) \in Y \setminus U(y_0, \varepsilon)$, вопреки условию.

Теорема 63. *Непрерывный образ связного пространства связен.*

В самом деле, пусть f есть непрерывное отображение связного пространства X на пространство Y. Требуется доказать, что Y связно. Но в противном случае мы имели бы разбиение пространства Y на два непустых непересекающихся замкнутых множества:

$$Y = \Phi_1 \bigcup \Phi_2.$$

Прообразы F_1 и F_2 множеств Φ_1 и Φ_2 были бы непустыми (так как f отображает X на всё Y) непересекающимися замкнутыми множествами, дающими в сумме всё пространство X, что противоречит его связности.

Из теоремы 63 вытекает следующее усиление теоремы 9 главы 5:

Теорема 64. *Действительная функция $y = f(x)$, непрерывная на связном пространстве X и принимающая два каких-нибудь значения a и b, принимает и всякое значение c, лежащее между a и b.*

В самом деле, множество Y действительных чисел, являющееся образом пространства X, по только что доказанному связно; поэтому, если $a \in Y$, $b \in Y$ и $a < c < b$, то, в силу леммы к теореме 35 (§ 9), имеем: $c \in Y$.

В частности, утверждение теоремы 64 имеет место для любой действительной непрерывной функции, определённой на сегменте или любом (конечном или бесконечном) интервале или полуинтервале числовой прямой (что даёт классическую теорему 9 главы 5), а также для любой непрерывной функции двух переменных, определённой на каком-либо связном множестве (в частности, на области), для модуля (а также для действительной части) непрерывной функции комплексного переменного (рассматриваемой на любом связном множестве) и т. д.

Замечание 5. Читателю, конечно, известно то огромное значение, которое в различных вопросах математического анализа имеет теорема 22 главы 5 о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Доказательство этой теоремы, данное в § 5 главы 5, дословно сохраняется и для функций, определённых в любом метрическом пространстве. Таким образом имеет место

Теорема 65. *Если функция f, определённая в метрическом пространстве R, есть предел равномерно сходящейся в R последовательности непрерывных в R функций*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, \tag{1}$$

то функция f непрерывна в пространстве R.

С применениями теоремы 65 мы встретимся уже в следующем параграфе.

Можно вместо функций f_n рассматривать и произвольные отображения f_n пространства X в пространство Y, причём по определению последовательность отображений f_n пространства X в метрическое пространство Y сходится к отображению f, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой данной точки $x \in R$ можно найти такое число n_ε (зависящее, вообще говоря, не только от выбранного ε, но и от точки x), что

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon \text{ для всех } n \geqslant n_\varepsilon. \tag{2}$$

Если к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать n_ε так, чтобы условие (2) выполнялось для всех $x \in R$, то говорим, что последовательность (1) сходится к отображению f *равномерно* в R. Совершенно так же, как теорема 22 главы 5, доказывается

Теорема 65'. *Если отображение f пространства X в метрическое пространство Y есть предел, равномерно сходящейся в X последовательности непрерывных отображений* (1) *пространства X в Y, то f есть непрерывное отображение пространства X в пространство Y.*

Доказательство теоремы 65' отличается от доказательства теоремы 22 главы 5 только тем, что выражения вида $|f(x) - f_n(x)|$, $|f_n(x_0) - f_n(x)|$ и т. п. должны быть заменены через $\rho(f(x), f_n(x))$, $\rho(f_n(x_0), f_n(x))$ и т. п.

§ 13. Теорема о продолжении непрерывных функций, заданных на замкнутых множествах

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей весьма важной теоремы:

Теорема 66. *Ко всякой ограниченной непрерывной функции φ, заданной на замкнутом множестве Φ метрического пространства R, существует непрерывная во всём пространстве R функция f, совпадающая с φ во всех точках множества Φ. При этом, если μ_0 есть* *верхняя грань функции* $|\varphi|$ *на* Φ, *то функцию* f *можно подобрать так, что верхней гранью её абсолютной величины* (*во всём пространстве* R) *также будет число* μ_0.

Часто пользуются краткой формулировкой этой теоремы, говоря, что *всякая непрерывная функция, заданная на замкнутом множестве пространства* R, *может быть непрерывно продолжена на всё пространство* R.

Лемма. *Ко всяким двум непересекающимся замкнутым множествам* A *и* B *пространства* R *и данным действительным числам* a, b, $a < b$, *можно построить определённую во всём пространстве* R *непрерывную функцию* $f_{a,b}$, *принимающую во всех точках множества* A *заданное значение* a, *во всех точках множества* B — *заданное значение* b *и удовлетворяющую во всём пространстве неравенству*

$$a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

Действительно, для $a=0$, $b=1$ функция $f_{0,1}$ определяется равенством

$$f_{0,1}(x)=\frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A)+\rho(x, B)}.$$

Для любых a, b полагаем

$$f_{a,b}(x)=(b-a)f_{0,1}(x)+a.$$

Замечание. Если оба множества A и B пусты, то лемма становится бессодержательной. Однако случай, когда одно множество, например B, пусто, может понадобиться в дальнейшем. В этом случае функция $f(x)=a$ для всех $x \in R$ удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство теоремы 66. Полагаем $\varphi_0(x)=\varphi(x)$; эта функция определена лишь на множестве Φ. Пусть $\mu_0>0$ есть верхняя грань функции $|\varphi_0|$. Обозначаем через A_0, соотв. B_0, замкнутое множество тех точек множества Φ, в которых $\varphi_0(x) \leqslant -\frac{\mu_0}{3}$, соотв. $\geqslant \frac{\mu_0}{3}$ *). Строим по лемме непрерывную во всём пространстве R

*) Одно из множеств A_0, B_0 при этом может оказаться пустым, что, однако, не оказывает влияния на дальнейшие рассуждения.

функцию f_0, равную $-\frac{\mu_0}{3}$ на A_0, равную $\frac{\mu_0}{3}$ на B_0 и удовлетворяющую всюду в R неравенству $|f_0| \leqslant \frac{\mu_0}{3}$. Полагаем теперь на Φ

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x).$$

Функция φ_1 непрерывна на Φ и верхняя грань μ_1 функции $|\varphi_1|$ удовлетворяет неравенству $\mu_1 \leqslant \frac{2}{3}\mu_0$.

Совершенно так же, как мы перешли от φ_0 к φ_1, переходим от φ_1 к φ_2: обозначаем через A_1, B_1 замкнутые множества тех точек множества Φ, в которых $\varphi_1(x) \leqslant -\frac{\mu_1}{3}$, соотв. $\varphi_1(x) \geqslant \frac{\mu_1}{3}$; строим функцию f_1, непрерывную во всём R, равную $-\frac{\mu_1}{3}$ на A_1 и равную $\frac{\mu_1}{3}$ на B_1; полагаем на Φ

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - f_1(x).$$

Верхняя грань μ_2 функции $|\varphi_2|$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_2 \leqslant \frac{2}{3}\mu_1.$$

Таким образом, шаг за шагом строим функции

$$\varphi_0 = \varphi, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_n, \ \ldots,$$

непрерывные на Φ, и функции

$$f_0, \ f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_n, \ \ldots,$$

непрерывные на всём R, причём на Φ имеем

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x). \tag{1}$$

Далее, обозначая через μ_n верхнюю грань функции $|\varphi_n|$, имеем:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\mu_n}{3}, \quad \mu_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

значит,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0, \quad |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{\mu_0}{3}. \tag{2}$$

Положим теперь

$$s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x).$$

В силу второго из неравенств (2) последовательность

$$s_1, \ s_2, \ s_3, \ \ldots, \ s_n, \ \ldots$$

равномерно сходится к непрерывной в R функции f, причём

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0, \tag{3}$$

так что функция $|f|$ ограничена в R тою же константой μ_0, что и функция φ на Φ.

Далее, по формуле (1) имеем в любой точке $x \in \Phi$

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

значит,

$$s_n(x) = \varphi_0(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

и так как в силу первого из неравенств (2) функции φ_{n+1} при $n \to \infty$ стремятся к нулю, то для любого $x \in \Phi$ имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x),$$

чем всё доказано.

ПРИБАВЛЕНИЕ К ГЛАВЕ ШЕСТОЙ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Если внимательно разобраться в содержании этой главы, то станет ясным, что, исследуя свойства множеств, лежащих в метрических пространствах, мы в очень малой степени пользовались метрикой: в действительности, мы пользовались понятием окрестности и введёнными при посредстве этого понятия дальнейшими понятиями (точки прикосновения, замкнутого и открытого множеств и т. д.). Это положение вещей (которое сейчас станет ещё гораздо более ясным) приводит к новому важному понятию — к понятию топологического пространства.

Определение 1. Под *топологическим пространством* понимается множество R элементов произвольной природы (называемых *точками* топологического пространства R), в котором выделены некоторые подмножества, называемые *открытыми множествами* пространства R, причём предполагается, что выполнены следующие аксиомы топологического пространства:

1. Всё множество R и пустое множество открыты.

2. Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств открыты *).

Определение 2. Множества $R \setminus \Gamma$, дополнительные к открытым множествам Γ пространства R, называются *замкнутыми*. Из аксиом 1 и 2 следует, что совокупность замкнутых множеств топологического пространства удовлетворяет следующим условиям:

1'. Пустое множество Λ и всё пространство R замкнуты.

2'. Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

Определение 3. Любое открытое множество пространства R, содержащее данную точку $x \in R$, называется *окрестностью* точки x в пространстве R (ср. определение 5, § 5).

После этого естественно вводится

Определение 4. Точка $x \in R$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subseteq R$, если каждая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества M. Множество всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* множества M и обозначается через $R[M]$ или просто через $[M]$.

Замечание 1. Так как любая окрестность какой-нибудь точки x содержит эту точку, то каждая точка множества M есть точка прикосновения множества M, т. е.

$$M \subseteq [M]. \tag{1}$$

---

*) Если считать, что сумма пустого множества любых слагаемых множеств всегда пуста, то второе утверждение аксиомы 1 является следствием аксиомы 2.

Установим некоторые свойства операции замыкания. Прежде всего очевидно, что $[R]=R$ и $[\Lambda]=\Lambda$. Очевидно также, что если множество M содержится в множестве N, то $[M]\subseteq[N]$ (свойство «монотонности» замыкания).

Теорема 1. *Множество M тогда и только тогда замкнуто (т. е. является дополнением к некоторому открытому множеству), когда $[M]=M$.*

В самом деле, пусть M замкнуто в R. Тогда $R\setminus M$ открыто и является окрестностью каждой своей точки. Значит, каждая точка $x\in R\setminus M$ имеет окрестность (например, окрестность $R\setminus M$), не пересекающуюся с M, следовательно, ни одна точка $x\in R\setminus M$ не входит в $[M]$, т. е. $[M]\subseteq M$. А так как, с другой стороны, $M\subseteq[M]$, то $[M]=M$.

Пусть, наоборот, дано, что $[M]=M$. Докажем, что M замкнуто в R, т. е. что $R\setminus M$ открыто в R. Действительно, из условия $[M]=M$ следует, что каждая точка $x\in R\setminus M$ имеет окрестность $U(x)$, не пересекающуюся с M, т. е. лежащую в $R\setminus M$. Множество $R\setminus M$ как сумма окрестностей $U(x)\subseteq R\setminus M$ своих точек x открыто, что и требовалось доказать.

Из включения (1) следует, что для любого $M\subseteq R$ имеем $[M]\subseteq[[M]]$. Докажем обратное включение $[[M]]\subseteq[M]$; этим будет доказано, что

$$[[M]]=[M], \tag{2}$$

т. е. что *замыкание любого множества $M\subseteq R$ замкнуто.*

Пусть $x\in[[M]]$. Возьмём произвольную окрестность $U(x)$. Она содержит хотя бы одну точку $y\in[M]$, а являясь окрестностью этой точки y, содержит и точки множества M. Итак, произвольная окрестность $U(x)$ точки x пересекается с M, т. е. $x\subset[M]$. Включение $[[M]]\subseteq[M]$, а значит, и равенство (2) этим доказаны.

Теорема 2. *Пересечение всех замкнутых множеств пространства R, содержащих данное множество M, есть $[M]$ (т. е. замыкание любого множества M есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество M *)).*

---

*) Замкнутые множества, содержащие M, несомненно существуют: например R.

Доказательство. Так как $[M]$ замкнуто и содержит M, то пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M, содержится в $[M]$. Для доказательства обратного включения надо только показать, что $[M]$ содержится в любом замкнутом $F \supseteq M$ (тогда $[M]$ будет содержаться и в пересечении всех этих F). Но если дано замкнутое $F \supseteq M$, то (в силу монотонности замыкания) $F = [F] \supseteq [M]$, что и требовалось доказать.

Докажем, наконец, что для любых $A \subseteq R$, $B \subseteq R$

$$[A \cup B] = [A] \cup [B].$$

Так как $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, то из монотонности замыкания следует, что $[A] \subseteq [A \cup B]$, $[B] \subseteq [A \cup B]$, значит, $[A] \cup [B] \subseteq [A \cup B]$. Для доказательства обратного включения вспомним, что $[A]$ и $[B]$, а значит, и $[A] \cup [B]$ замкнуты, а потому, по теореме 2, $[A \cup B] \subseteq$ $\subseteq [A] \cup [B]$.

Замечание 2. Следующие из только что установленных свойств операции замыкания (по причинам, которые сейчас же выяснятся) называют *основными свойствами замыкания*:

1° $[A \cup B] = [A] \cup [B]$ (дистрибутивность по отношению к конечному сложению);

2° $A \subseteq [A]$;

3° $[[A]] = [A]$;

4° $[\Lambda] = \Lambda$.

Замечание 3. Мы определили топологическое пространство при помощи аксиом 1, 2, налагаемых на открытые множества. Вместо этого можно было бы в основу положить понятие замкнутого множества, аксиоматически введённое при помощи аксиом 1′, 2′. При этом открытые множества были бы определены как множества, дополнительные к замкнутым; условия 1, 2 оказались бы для них выполненными (в силу того, что условия 1′, 2′ предположены выполненными для замкнутых множеств), так что мы получили бы тот же класс топологических пространств. Можно было бы отправляться и от понятия замыкания и рассматривать условия 1°—4° как аксиомы, которым подчиняется это понятие. Тогда замкнутые множества определились бы как множества, совпадающие со своими замыканиями, а открытые — как множества, дополнительные к замкнутым. При этом было бы легко доказать (и это предоставляется читателю сделать), что открытые множества снова удовлетворяли бы требованиям 1, 2 и приводили посредством определений 3 и 4 к тем же замыканиям, которые даны a priori. Таким образом, все эти подходы приводят к тому же классу топологических пространств.

Замечание 4. Мы доказали в § 5, что открытые множества в метрическом пространстве удовлетворяют условиям 1, 2. Следовательно, *всякое метрическое пространство может быть рассматриваемо как топологическое пространство*. Другой весьма важный пример топологических пространств получим, если рассмотрим какое-либо упорядоченное множество X и определим открытые множества в X как множества, являющиеся суммами порядковых интервалов, взятых в любом числе (при этом мы причисляем к интервалам и множества вида *) $\mathscr{E}(x > a)$, $\mathscr{E}(x < a)$, где a — любой элемент множества X. Нетрудно проверить, что это определение открытых множеств превращает упорядоченное множество X в топологическое пространство, — «пространство данного упорядоченного множества», — обозначаемое также через X. Если M есть произвольное множество, лежащее в X, то точка $a \in X$ тогда и только тогда является точкой прикосновения множества M, когда каждый интервал, содержащий точку a, содержит и точки множества M.

Замечание 5. Из нашего определения топологического пространства не следует, что множество, состоящее из конечного числа точек, непременно замкнуто. Возьмём, например, множество $\mathfrak{F}$, состоящее лишь из двух элементов a и b, и объявим открытыми множествами топологического пространства $\mathfrak{F}$ всё множество $\mathfrak{F}$, пустое множество и множество, состоящее из одной точки b. Обе аксиомы 1 и 2 выполнены, так что $\mathfrak{F}$ есть топологическое пространство. Замкнутыми множествами в $\mathfrak{F}$ являются: всё $\mathfrak{F}$, пустое множество и множество, состоящее из одной точки a. Множество, состоящее из точки b, замкнутым не является. Заметим, что у точки a имеется лишь одна окрестность, именно всё пространство $\mathfrak{F}$. Замыканием множества, состоящего из точки b, также является всё

*) Через $\mathscr{E}(x > a)$ обозначается множество всех $x > a$ (в X). Аналогичный смысл имеет $\mathscr{E}(x < a)$ и т. п.

пространство $\mathfrak{F}$. Это пространство называется «связным двоеточием»*).

Другой пример конечного топологического пространства получим, взяв множество R, состоящее из семи «точек»

$$a, b, c; \ \alpha, \beta, \gamma; \Delta,$$

и приняв, что открытыми множествами являются: пустое множество, а также следующие множества и всевозможные их суммы:

$$(\alpha, b, c, \Delta), (\beta, a, c, \Delta), (\gamma, a, b, \Delta),$$
$$(a, \Delta), \quad (b, \Delta), (c, \Delta),$$
$$(\Delta).$$

Легко проверить, что среди «одноточечных» множеств (т. е. множеств, состоящих из одной точки) замкнуты лишь α, β, γ. Замыканием множества, состоящего из точки a, является (a, β, γ) и т. д. Замыканием множества, состоящего из точки Δ, является всё пространство R. Если считать, что Δ есть треугольник с вершинами α, β, γ и соответственно противолежащими им сторонами a, b, c, то топология, введённая в пространстве R, приобретает простой элементарно-геометрический смысл. Имея это в виду, легко построить пространство, состоящее из девяти точек, соответствующее тетраэдру, со всеми его гранями, рёбрами и вершинами, и т. д.

Определение 5. Точка x топологического пространства R называется *предельной точкой* множества $M \subseteq R$, если каждая окрестность точки x содержит бесконечно много точек множества M. Точка x называется *изолированной* в R, если множество, состоящее из этой одной точки, открыто в R.

---

*) Простейшим топологическим пространством, состоящим из двух точек a и b, является «простое двоеточие» D, в котором все четыре содержащихся в нём множества: Λ, a, b, $a \cup b$ являются, по определению, открытыми (а следовательно, и замкнутыми). Это топологическое пространство может быть определено и как метрическое пространство, в котором $\rho(a, b)$ равно, например, 1 (или какому-нибудь другому положительному числу).

Кроме простого и связного двоеточий, из двух точек a и b можно построить ещё лишь одно топологическое пространство, а именно так называемое «слипшееся двоеточие», в котором открытыми множествами являются лишь всё пространство и пустое множество. Однако это пространство (в отличие от очень важных, при всей их простоте, пространств $\mathfrak{F}$ и D) никаких применений не находит (что связано с тем, что открытые множества слипшегося двоеточия находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми множествами пространства, состоящего из одной точки).

Замечание 6. Приведённые в замечании 5 примеры показывают, что в топологических пространствах может иметь место следующее явление: каждая окрестность точки x содержит отличные от точки x точки конечного множества M, поэтому точка x топологического пространства R, не являющаяся предельной точкой для множества всех точек пространства R, может в то же время не быть изолированной точкой этого пространства (такова, например, одна из двух точек связного двоеточия).

Естественно сказать что в топологическом пространстве последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ сходится к точке x, если любая окрестность точки x содержит все точки этой последовательности, начиная с некоторой. Частным случаем сходящихся последовательностей являются последовательности стационарные, для которых, начиная с некоторого n, имеем $x_n = x_{n+1} = \ldots$ Понятие сходимости имеет в теории топологических пространств значительно меньшее значение, чем в теории метрических пространств: может случиться, что точка x топологического пространства R является предельной точкой множества $M \subseteq R$ и в то же время в M нет никакой последовательности, сходящейся к точке x. Пусть, например, R есть множество всех действительных чисел. Назовём открытым в R всякое множество, получающееся вычитанием любого не более чем счётного множества точек из какого-либо множества точек, открытого *на числовой прямой*. Легко видеть, что в R никакое счётное множество не имеет предельной точки и что для несчётного множества M предельные точки в пространстве R совпадают с точками конденсации множества M на числовой прямой. Сходящимися в пространстве R являются лишь стационарные последовательности. Поэтому если точка x есть не принадлежащая множеству M предельная точка этого множества, то не существует никакой последовательности точек множества M, сходящейся к точке x.

Тем не менее, в некоторых случаях понятие сходимости представляет интерес и в теории топологических пространств; примеры этому мы увидим дальше; сейчас отмечу только, что, рассматривая вполне упорядоченное множество $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел первого и второго классов как топологическое пространство, мы замечаем, что сходимость в этом пространстве есть не что иное, как сходимость счётной последовательности порядковых чисел α_n к предельному числу $\lambda = \lim\limits_n \alpha_n$, определённая нами в § 4 главы 3. В связи с этим можно отметить, что трансфинитные числа второго рода (предельные трансфинитные числа) и только они являются предельными точками пространства $W(\omega_1)$. Эта характеристика трансфинитных чисел второго рода сохраняется, если от пространства $W(\omega_1)$ перейти к любому пространству вида $W(\xi)$, где ξ — произвольное трансфинитное число. Однако среди предельных трансфинитных чисел λ лишь числа, конфинальные ω, являются пределами нестационарных последовательностей (так, например, никакая нестационарная (счётная) последовательность трансфинитных чисел не сходится к ω_1). Трансфинитные числа первого рода являются изолированными точками пространства $W(\xi)$.

Ряд основных понятий, введённых нами для метрических пространств, сохраняет силу и для топологических пространств. К этим понятиям относится прежде всего понятие непрерывного (в частности топологического) отображения: определения и первые пять теорем § 12 (теоремы 57—61 включительно), а также теорема 65 сохраняются вместе с доказательствами для топологических пространств. Сохраняют свою силу и определение внутренней точки данного множества M относительно пространства R и относящиеся к этому понятию теоремы 9 и 12 из § 5. Понятия множества, плотного в данном открытом множестве пространства R (в частности, множества всюду плотного), а также множества, нигде не плотного в пространстве R, формулируются в случае топологических пространств совершенно так же, как и в случае метрических пространств. Полностью сохраняются для топологических пространств определение и вся теория связности *), изложенные в § 9, а также относящиеся к непрерывным отображениям связных пространств теоремы 63 и 64 из § 12.

Очень важное место в теории топологических пространств занимает понятие *базы пространства*; определение 7 и теоремы 45 и 48 из § 11 дословно сохраняются для топологических пространств вместе с доказательствами. Сохраняет свою силу и замечание, что во всяком пространстве со счётной базой содержится счётное всюду плотное множество **).

Замечание 7. Существуют топологические пространства, содержащие счётные всюду плотные множества, но не имеющие счётной базы. Таково, например, пространство $T_{2\theta}$ упорядочен-

*) В частности, пространство, названное нами «связным двоеточием», есть связное топологическое пространство (отсюда и его название).

**) Если $S=\{U_\alpha\}$ есть база пространства R, то, взяв в каждом множестве $U_\alpha \in S$ по точке x_α, получим всюду плотное в R множество.

ного множества, тип которого есть 2θ, где θ — порядковый тип сегмента числовой прямой.

Точки пространства $T_{2\theta}$ могут быть записаны в виде $x=(t, i)$, где t — есть произвольная точка сегмента $[0; 1]$, а $i=0$ или 1; при этом мы полагаем

$$(t, i) < (t', i'),$$

если $t < t'$, а также если $t=t'$, $i=0$, $i'=1$. Точки $x=(t, i)$ мы можем представлять себе лежащими на обыкновенной плоскости (так что t есть абсцисса, а i — ордината), что позволит придать нижеследующим отвлечённым рассуждениям своеобразный наглядно-геометрический смысл.

В пространстве $T_{2\theta}$ всюду плотно множество D, состоящее из всех точек вида (r, i), где r рационально (всюду плотными являются даже каждое из множеств $D_0 \subset D$, $D_1 \subset D$, состоящих из всех точек вида $(r, 0)$, соответственно $(r, 1)$.

Для доказательства того, что в $T_{2\theta}$ нет счётной базы, докажем сначала лемму, полезную во многих случаях, когда исследуются те или иные конкретные примеры топологических пространств.

Лемма. *Если топологическое пространство R имеет счётную базу S_0, то во всякой базе S содержится счётная база $S_1 \subseteq S$.*

Доказательство леммы. Пусть элементы базы S_0 суть

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$$

Назовём пару (v_i, v_k) элементов базы S_0 отмеченной, если существует такое $u \in S$, что

$$v_i \subseteq u \subseteq v_k. \tag{A}$$

Занумеруем все отмеченные пары $\pi=(v_i, v_k)$ в последовательность

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$$

и для каждой пары $\pi_n=(v_i, v_k)$ выберем определённый элемент $u=u_n \in S$, удовлетворяющий условию (A). *Полученное таким образом счётное множество $S_1 \subseteq S$ элементов u_n является базой пространства R.* В самом деле, каковы бы ни были точка $x \in R$ и её окрестность Γ, можно прежде всего подобрать элемент v_k базы S_0 так, чтобы

$$x \in v_k \subseteq \Gamma.$$

После этого находим элемент u' базы S и элемент v_i базы S_0, удовлетворяющие условиям

$$x \in u' \subset v_k, \quad x \in v_i \subseteq u',$$

Пара (v_i, v_k) есть отмеченная пара; пусть это — пара π_n. Тогда

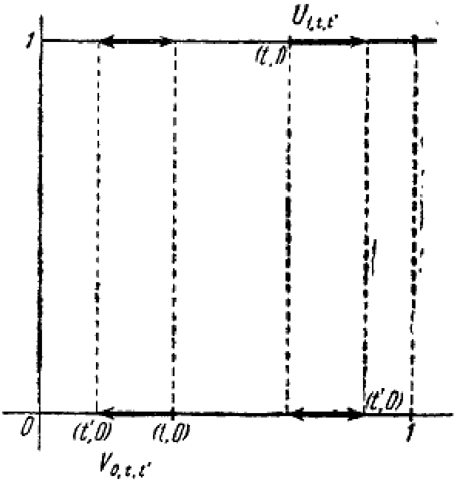
$$x \in v_i \subseteq u_n \subseteq v_k \subseteq \Gamma,$$

значит, в частности,

$$x \in u_n \subseteq \Gamma,$$

чем лемма и доказана.

Возратимся теперь к пространству $T_{2\theta}$. Обозначим через $U_{1, t, t'}$ полусегменты *) вида $[x; x')$, где $x = (t, 1)$ и $x' = (t', 0) > x$. Аналогично, обозначим через $V_{0, t, t'}$ полусегменты вида $(x'; x]$, где $x = (t, 0)$ и $x' = (t', 0) < x$.



Черт. 20.

При избранной нами геометрической интерпретации пространства $T_{2\theta}$ полусегменты $U_{1, t, t'}$ и $V_{0, t, t'}$ показаны на черт. 20.

Легко видеть, что полусегменты $U_{1, t, t'}$ и $V_{0, t, t'}$ образуют базу S пространства $T_{2\theta}$; докажем, что не существует никакой счётной базы $S_1 \subset S$; этим, на основании леммы, будет доказано, что пространство $T_{2\theta}$ и вообще не имеет счётной базы.

Пусть счётная база S_1 существует и пусть её элементы суть U_{1, a_n, a'_n} и V_{0, b_n, b'_n}. Возьмём точку $\xi = (\tau, 1) \in T_{2\theta}$, $0 < \tau < 1$, где τ отлично от всех a_n и b_n, и какую-нибудь окрестность $U_{1, \tau, \tau'}$ точки ξ. Так как очевидно, что не существует никакого V_{0, b, b'_n}, удовлетворяющего условию

$$\xi \in V_{0, b, b'_n} \subseteq U_{1, \tau, \tau'},$$

то достаточно доказать, что нет также никакого U_{1, a_n, a'_n}, удовлетворяющего включениям

$$\xi \in U_{1, a_n, a'_n} \subseteq U_{1, \tau, \tau'}. \tag{B}$$

Но при $a_n < \tau$ не выполнено второе из этих включений, а при $a_n > \tau$ не выполнено первое из них (черт. 18). Предположение, что S_1 есть база, этим приведено к противоречию.

*) Речь идёт всё время о полусегментах упорядоченного по типу 2θ множества $T_{2\theta}$.

Замечание 8. Всякое множество M, лежащее в топологическом пространстве R, можно рассматривать как топологическое пространство, причём открытые множества в пространстве M определяются как множества вида $M \cap \Gamma$, где Γ открыты в R. Аксиомы 1, 2 топологического пространства при этом, очевидно, выполнены *). Из этого определения топологии в M следует, что замкнутые в M множества суть множества вида $M \cap F$, где F замкнуты в R. Так как окрестности в M какой-либо точки $x \in M$ суть множества вида $M \cap U(x)$, где $U(x)$ — окрестности x в R, то точка $x \in M$ тогда и только тогда является точкой прикосновения в пространстве M для данного множества $A \subseteq M$, когда она является точкой прикосновения множества A в R. Другими словами,

$$M[A] = M \cap R[A] \text{ для любого } A \subseteq M.$$

Замечание 9. Мы говорили в своё время о том, что понятие метрического пространства есть совокупность двух понятий: множества R всех точек данного метрического пространства и метрики этого пространства, т. е. функции $\rho(x, y)$, дающей расстояние любых двух точек метрического пространства. Аналогичным образом, понятие топологического пространства также слагается из двух элементов: данного множества R и *топологии, введённой в это множество*; ввести в множество R топологию — значит определить те подмножества этого множества, которые являются открытыми в одноимённом топологическом пространстве.

Подмножества множества R, являющиеся открытыми множествами топологического пространства R, могут быть либо непосредственно указаны, либо выведены из тех или иных вспомогательных построений. Так, например, если в R введена метрика или введено отношение порядка, то отсюда, как мы видели, следует и определённая топология. Во многих конкретных случаях бывает удобно непосредственно указывать не все открытые множества подлежащего определению топологического пространства R, а только некоторые из них, а именно множества, которые составят одну из баз этого пространства (остальные открытые множества определятся как всевозможные суммы данных множеств). Так, например, определяя топологию какого-либо упорядоченного множества, обычно указывают на базу, состоящую из всех интервалов этого упорядоченного множества; подобным же образом топологию метрического пространства определяют, беря все сферические окрестности точек этого пространства и опреде-

*) Когда говорят о каком-либо множестве $M \subseteq R$ как о топологическом пространстве, то имеют в виду только эту «естественную» топологию.

ляя остальные открытые множества как суммы всевозможных сферических окрестностей. Для того, чтобы безошибочно определять топологию любого топологического пространства этим путём, полезно иметь признак, заранее дающий уверенность в том, что, выделив с самого начала некоторую систему $S=\{\Gamma_\alpha\}$ множеств конструируемого топологического пространства R и определяя открытые множества этого пространства как суммы всевозможных Γ_α, мы получим систему открытых множеств, удовлетворяющую условиям 1, 2. Этот признак даётся следующей теоремой:

Теорема 3. *Пусть в множестве R, состоящем из элементов любой природы, называемых точками, даны подмножества Γ_α, система которых, обозначаемая нами через S, обладает следующими свойствами:*

А) *Каждая точка $x\in R$ содержится по крайней мере в одном $\Gamma_\alpha\in S$.*

Б) *Если точка x содержится и в $\Gamma_\alpha\in S$ и в $\Gamma_\beta\in S$, то имеется некоторое $\Gamma_\gamma\in S$ такое, что $x\in\Gamma_\gamma\subseteq\Gamma_\alpha\cap\Gamma_\beta$.*

Если назвать пустое множество Λ и всевозможные суммы множеств Γ_α открытыми множествами, то аксиомы 1 и 2 топологического пространства окажутся выполненными, и в полученном топологическом пространстве R система S будет базой.

В самом деле, из наших предположений сразу следует, что сумма любого числа открытых множеств, а также всё пространство R и пустое множество являются открытыми. Докажем, что пересечение двух (а следовательно, и любого конечного числа) открытых множеств открыто: этим будет доказано, что R — топологическое пространство, после чего уже не потребует никакого доказательства утверждение, что S есть база пространства R.

Но если даны два открытых множества $\Gamma=\bigcup\limits_\alpha\Gamma_\alpha$ и $\Gamma'=\bigcup\limits_\beta\Gamma_\beta$, то $\Gamma\cap\Gamma'$ есть сумма мооɜжеств вида $\Gamma_\alpha\cap\Gamma_\beta$; поэтому достаточно показать, что всякое множество этого вида открыто. Последнее же утверждение следует из того, что, какова бы ни была точка $x\in\Gamma_\alpha\cap\Gamma_\beta$, имеется множество $\Gamma_\gamma\in S$ такое, что $x\in\Gamma_\gamma\subseteq\subseteq\Gamma_\alpha\cap\Gamma_\beta$ (условие Б); поэтому множество $\Gamma_\alpha\cap\Gamma_\beta$ есть сумма всех содержащихся в нём множеств $\Gamma_\gamma\in S$ и, следовательно, открыто.

Часто (особенно в более старых работах по топологической теории множеств, например, в первом издании «Теории множеств» Хаусдорфа, Лейпциг, 1914) даётся не просто система S-множеств Γ_α, удовлетворяющая условиям А) и Б), а система множеств $U(x)$, поставленных в соответствие точкам $x\in R$ и называемых окрестностями этих точек*), причём предписывается выполнение трёх условий:

---

*) Однозначность при этом не требуется ни в ту, ни в другую сторону: одно и то же множество U может быть отнесено в качестве

А′) Каждой точке $x \in R$ поставлено в соответствие по крайней мере одно множество $U(x)$ («каждая точка $x \in R$ имеет хотя бы одну окрестность»), причём всегда

$$x \in U(x).$$

Б) Для любых двух окрестностей $U_1(x)$ и $U_2(x)$ одной и той же точки $x \in R$ существует $U_3(x) \subseteq U_1(x) \cap U_2(x)$.

В) Каково бы ни было $y \in U(x)$, существует

$$U(y) \subseteq U(x).$$

Если назвать открытым всякое множество $\Gamma \subseteq R$ *такое, что для любой точки* $x \in \Gamma$ *существует* $U(x) \subseteq \Gamma$, *то получится топологическое пространство, и система* S *всех множеств* $U(x)$ (рассматриваемых независимо от того, каким точкам x они поставлены в соответствие) *есть база этого пространства.*

Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что в силу условия В) всякое множество $U(x)$ и сумма любого числа множеств $U(x)$ открыты. Обратно, если дано какое-нибудь открытое Γ, то, беря для каждой точки $x \in \Gamma$ некоторое $U(x) \subseteq \Gamma$, видим, что Γ есть сумма некоторых множеств $U(x)$. Итак, открытые множества могут быть просто определены как суммы*) всевозможных множеств $U(x)$ системы S; другими словами, оказываются выполненными условия теоремы 3, чем и доказывается наше утверждение.

Множества $U(x)$, отнесённые точкам $x \in R$ при условии соблюдения условий А′), Б), В), образуют то, что Хаусдорф называл *системой окрестностей в пространстве* R; а задание при их помощи топологии называется *заданием топологии при помощи системы окрестностей.*

П р и м е р. В метрических пространствах топология задаётся отнесением каждой точке x её сферических окрестностей $U(x, \varepsilon)$.

Для топологических пространств со счётной базой имеют место теоремы 49 (и следствия из теоремы 49), 50, 51, 52, 53, 53′, 54, 55_G, 55_F (хотя следствие из теоремы 55_F может и не иметь места, так как одноточечные множества могут быть не замкнутыми). Доказательства всех этих теорем остаются теми же, что и в метрическом случае.

окрестности $U(x)$ различным точкам (например, всем $x \in U$) и каждая точка может иметь, вообще говоря, бесконечно много окрестностей.

*) Не исключая и пустого множества слагаемых (см. сноску на стр. 288).

* * *

Та общность, с которой мы ввели понятие топологического пространства, и возможность в столь общих предположениях определить основные понятия теории точечных множеств имеют во многих случаях принципиальное значение, а также позволяют внести в изложение топологических свойств точечных множеств простоту и логическую прозрачность. Однако своё полное геометрическое содержание теория множеств получает лишь при постепенном сужении класса топологических пространств, что достигается введением дополнительных условий, которым рассматриваемые пространства должны удовлетворять. Мы уже познакомились с одним из важнейших условий такого рода: с требованием, чтобы пространство имело счётную базу. Однако при всей важности этого, так сказать, «количественного» ограничения оно не исключает все пространства, топология в которых чересчур мало похожа на топологию, скажем, метрических пространств: мы видели, что даже в пространствах, состоящих из конечного числа точек, могут, например, иметься незамкнутые одноточечные множества. Поэтому наряду с «количественными» условиями приходится налагать на топологические пространства требования совсем другой природы — прежде всего, так называемые условия, или аксиомы отделимости, к которым мы сейчас и обратимся.

«Нулевая» аксиома отделимости требует, чтобы *из любых двух различных точек x и y по крайней мере одна точка имела окрестность, не содержащую другую точку.* Примером топологического пространства, не удовлетворяющего этой аксиоме, может служить слипшееся двоеточие (см. сноску на стр. 292). Топологические пространства, удовлетворяющие нулевой аксиоме отделимости, называются *T_0-пространствами.* Топологические пространства, не являющиеся T_0-пространствами, едва ли представляют интерес для исследования.

Усилением нулевой аксиомы отделимости является первая аксиома отделимости, требующая, чтобы *для любых двух различных точек x и y существовала окрестность точки x, не содержащая точку y,* *и окрестность точки y, не содержащая точку x.* Докажем, что *первая аксиома отделимости равносильна требованию, чтобы каждое множество, состоящее лишь из одной точки, было замкнуто.* В самом деле, если в топологическом пространстве R выполнена первая аксиома отделимости, то никакая точка y, отличная от данной точки $x \in R$, не является точкой прикосновения одноточечного множества $\{x\}$ (так как имеется окрестность $U(y)$, не содержащая точку x). Поэтому замыкание одноточечного множества $\{x\}$ содержит лишь эту точку x. Обратно, если все одноточечные множества замкнуты, то, каковы бы ни были точки x и y пространства R, открытое множество $R \setminus y$ есть окрестность точки x, не содержащая точку y, а открытое множество $R \setminus x$ есть окрестность точки y, не содержащая точку x.

Пространства, удовлетворяющие первой аксиоме отделимости, называются *T_1-пространствами.* Примером T_0-пространства, не являющегося T_1-пространством, может служить связное двоеточие.

Важно отметить следующий факт:

Пусть M — множество, лежащее в T_1-пространстве R. Всякая точка прикосновения x множества M есть либо предельная точка множества M (принадлежащая или не принадлежащая множеству M), либо точка множества M, изолированная в этом множестве *).

В самом деле, пусть $x \in [M]$ и пусть существует окрестность $U(x)$ точки x, содержащая лишь конечное число точек множества M. Обозначим через $x_1, \ldots, x_s$ лежащие в $U(x)$ точки множества M, отличные от самой точки x. Так как одноточечные множества в R замкнуты, то, вычитая из $U(x)$ конечное множество $\{x_1, \ldots, x_s\}$, получим окрестность $U_1(x)$ точки x, не содержащую ни одной точки множества M, отличной от точки x. Но так как $x \in [M]$, то $U_1(x) \cap M$ всё же непусто и, следовательно, $x \in M$. При этом открытое в M множество $M \cap U_1(x)$ состоит из одной лишь точки x. Наше утверждение доказано. Из него следует, что *замкнутые множества*

*) Изолированность точки x в множестве M означает, естественно, что множество, состоящее из одной точки x, открыто в M.

в T_1-пространстве R могут быть определены как множества содержащие все свои предельные точки.

Замечание 10. Условие существования счётной базы в топологическом пространстве называется иногда «второй аксиомой счётности» (Хаусдорф). Первой аксиомой счётности называется условие существования для каждой точки $x \in R$ такой счётной системы открытых множеств, содержащих эту точку, т. е. окрестностей

$$U_1(x),\ U_2(x),\ \ldots,\ U_n(x), \ldots, \tag{3}$$

что для любой окрестности $U(x)$ точки x можно найти $U_n(x)$ из последовательности (3), содержащееся в $U(x)$.

Заметим, что всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности: достаточно положить $U_n[x) = U\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Имеет место теорема:

Если T_1-пространство R удовлетворяет первой аксиоме счётности, то для каждой точки прикосновения x множества M можно найти сходящуюся к точке x последовательность точек x_n этого множества (достаточно взять $x_n \in M \cap U_n(x)$). *При этом, если x есть предельная точка множества M, то все точки x_n могут быть предположены различными.*

Вторая или хаусдорфова аксиома отделимости заключается в требовании, чтобы *любые две различные точки x и y топологического пространства R имели непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$.* Пространства, удовлетворяющие этому требованию, называются *T_2-пространствами* или *хаусдорфовыми пространствами.*

Пример нехаусдорфова T_1-пространства R можно получить, взяв множество R, состоящее из всех действительных чисел и ещё какого-нибудь отличного от них всех элемента ξ произвольной природы. Открытыми в R объявляются, во-первых, все открытые на числовой прямой множества, во-вторых, все множества вида $R \setminus D$, где D — произвольные конечные множества действительных чисел. Легко проверить, что множество R с этой топологией есть T_1-пространство. Это пространство не удовлетворяет хаусдорфовой аксиоме отделимости: какова бы ни была точка $x \in R$, $x \neq \xi$, любые две окрестности $U(\xi)$ и $U(x)$ пересекаются (так как $U(\xi)$ содержит все действительные числа, кроме, быть может, некоторого конечного их множества, тогда как $U(x)$ есть открытое множество на числовой прямой, и, значит, содержит целый интервал).

Дальнейшее сужение класса пространств получим, если будем рассматривать так называемые нормальные пространства: *нормальным пространством* называется такое T_1-пространство R, в котором всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности.

Пример хаусдорфова ненормального пространства можно построить следующим образом. Назовём *произведением двух топологических пространств* X и Y произведение двух множеств X и Y (т. е. множество всех пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$), в котором открытыми множествами являются произведения любого открытого $A \subseteq X$ на любое открытое $B \subseteq Y$ и всевозможные суммы таких произведений. Легко доказывается, что произведение двух хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство. В частности, хаусдорфовым пространством является произведение S пространства всех порядковых чисел $\alpha \leqslant \omega_1$ на пространство всех порядковых чисел $\beta \leqslant \omega$. Пространство S, впрочем, есть не только хаусдорфово, но даже нормальное пространство (читателю рекомендуется доказать это утверждение в качестве упражнения). Однако, вычитая из пространства S одну лишь точку (ω_1, ω), получим ненормальное пространство S^*. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество X', состоящее из всех точек вида (α, ω), где α — любое порядковое число $< \omega_1$, и множество Y', состоящее из всех точек вида (ω_1, n), где n — любое натуральное число. X' и Y' суть замкнутые в S^* множества без общих точек, любые две окрестности $U(X')$ и $U(Y')$ которых в пространстве S^* пересекаются (последнее утверждение читатель также должен сам доказать, опираясь на простые свойства трансфинитных чисел второго класса) *).

*) Назовём *регулярным пространством* такое T_1-пространство, в котором для любой точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества F существуют непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(F)$. Пространство S^*, не будучи нормальным,

Теорема 13 (§ 5) может теперь быть сформулирована так: *Всякое метрическое пространство нормально.*

Так как всякое множество, лежащее в каком-нибудь метрическом пространстве, само является метрическим пространством, то метрические пространства могут служить примером так называемых наследственно нормальных пространств, понимая под наследственно нормальным такое нормальное пространство, всякое подмножество которого также нормально; наоборот, пространство S, будучи нормальным, не является наследственно нормальным, так как содержит в качестве множества ненормальное пространство S^*.

Одной из интереснейших проблем теории топологических пространств является установление необходимых и достаточных условий для того, чтобы топологическое пространство было, как говорят, *метризуемо*, т. е. *гомеоморфно некоторому метрическому пространству.* Из только что сказанного следует, что необходимым условием метризуемости топологического пространства является его нормальность *). Однако это условие недостаточно: можно легко доказать, что, например, пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $< \omega_1$ нормально **), между тем оно (как будет доказано в Прибавлении 1 к главе 7) не метризуемо. Тем более замечательна следующая теорема П. С. Урысона, полностью решающая задачу метризации в применении к пространствам со счётной базой:

Первая метризационная теорема Урысона. *Для того чтобы топологическое пространство со счётной*

является регулярным. Для получения примера нерегулярного хаусдорфова пространства рассмотрим множество R всех действительных чисел и определим в R топологию при помощи системы окрестностей (см. замечание 9) следующим образом: окрестности всех точек $x \neq 0$ — те же, что и на числовой прямой; окрестности точки 0 получаются вычитанием из любого содержащего эту точку интервала всех попавших в этот интервал точек вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Пространство R хаусдорфово; множество всех точек вида $\frac{1}{n}$ замкнуто в R; всякая окрестность этого замкнутого множества пересекается со всякой окрестностью точки 0.

*) Даже наследственная нормальность.

**) Оно даже наследственно нормально и, кроме того, удовлетворяет первой аксиоме счётности.

базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.

Доказательство этой теоремы опирается на другое важное предложение, доказанное П. С. Урысоном и известное под названием «большой» леммы Урысона:

Большая лемма Урысона. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества нормального пространства X. Для любых двух действительных чисел a, b, $a<b$ существует действительная непрерывная функция $f_{a,b}$, определённая во всём пространстве X, принимающая значение a во всех точках множества A, значение b во всех точках множества B и удовлетворяющая всюду в X неравенству*

$$a \leqslant f_{a,b}(x) \leqslant b.$$

Если одно из двух множеств, скажем A, пусто, то достаточно положить $f(x)=b$ для любого $x \in X$. Остаётся рассмотреть случай, когда ни одно из множеств A, B не пусто. При этом можно предположить, что $a=0$, $b=1$, так как $f_{a,b}(x)$ (для любых a, b) получается из $f_{0,1}(x)$ посредством формулы

$$f_{a,b}(x)=(b-a)f_{0,1}(x)+a.$$

Дальнейшие рассуждения и будут вестись в предположении $a=0$, $b=1$. Они опираются на следующую, так называемую «малую» лемму Урысона:

Если X нормально и A замкнуто в X, то к любой окрестности $U(A)$ множества A можно найти такую окрестность $U_0(A)$ множества A, что $[U_0(A)] \subseteq U(A)$ *).

*) В частности, в любой окрестности $U(x)$ любой точки x нормального пространства содержится замыкание $[U_0(x)]$ некоторой окрестности $U_0(x)$ той же точки x. Легко доказать, что последнее свойство выполнено не только в нормальных, но и в регулярных пространствах, и характеризует эти последние (т. е. может быть принято за определение регулярности). Подобным же образом малая лемма Урысона в её общем виде (т. е. для любого замкнутого A) характеризует нормальные пространства.

Характеризует нормальные пространства и большая лемма Урысона. В самом деле, будучи верной для любого нормального пространства, она выражает необходимое условие нормальности. Но это условие и достаточно. Назовём, в самом деле, два непере-

Для доказательства малой леммы достаточно взять непересекающиеся окрестности $U_0(A)$ и V замкнутых множеств A и $X \setminus U(A)$; тогда множества $[U_0(A)]$ и V также не имеют общих точек, т. е. $[U_0(A)] \subseteq X \setminus V \subseteq$ $\subseteq X \setminus (X \setminus U(A)) = U(A)$.

Переходим к доказательству «большой» леммы Урысона. Полагаем $U(A) = \Gamma_1 = X \setminus B$ и находим по малой лемме окрестность $U_1(A) = \Gamma_0$ такую, что $[\Gamma_0] \subseteq \Gamma_1$. Предположим, что уже построены открытые множества $\Gamma_{\frac{p}{2^n}}$ (для данного натурального n и $p = 0, 1, \ldots, 2^n$) так, что при $p < p'$ имеем $[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}] \subset \Gamma_{\frac{p'}{2^n}}$ (для $n = 0$ это действи-

---

секающихся замкнутых множества A и B функционально отделимыми (в топологическом пространстве R), если существует определённая во всём R непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ во всём R, равная нулю на A и единице на B. Если замкнутые множества A и B функционально отделимы в R, то они имеют непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $U(B)$. Действительно достаточно определить $U(A)$ и $U(B)$ как множества всех точек x, в которых $f(x) < \frac{1}{2}$, соотв. $f(x) > \frac{1}{2}$. Итак, нормальные пространства могут быть определены как T_1-пространства, в которых любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы.

Очень важен класс T_1-пространств, в которых каждая точка функционально отделима от любого не содержащего эту точку замкнутого множества. Эти пространства называются *вполне регулярными* (или $T_{3\frac{1}{2}}$-пространствами) или *тихоновскими пространствами* по имени открывшего их А. Н. Тихонова. Легко видеть, что всякое вполне регулярное пространство регулярно; очевидно, что всякое нормальное пространство вполне регулярно; легко, далее, доказать (см. Прибавление 1 к гл. 7, стр. 398), что всякое множество, лежащее во вполне регулярном пространстве, вполне регулярно (т. е. свойство полной регулярности, в отличие от свойства нормальности, есть наследственное свойство). Отсюда следует, что существуют вполне регулярные ненормальные пространства. А. Н. Тихонов построил также примеры регулярных, но не вполне регулярных пространств и доказал, что класс вполне регулярных пространств совпадает с классом множеств, лежащих в нормальных пространствах. См. по этим вопросам мою статью «О понятии пространства в топологии», Успехи математических наук, том 2, вып. 1 (17) (где имеются ссылки на классический мемуар А. Н. Тихонова) и статью Ю. Смирнова «О вполне регулярных пространствах» (Доклады Академии Наук СССР т. 62, № 6, 1948 г.).

тельно сделано). По малой лемме можно построить открытое $\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}$ так, чтобы

$$[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}] \subseteq \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq [\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}] \subseteq \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}}.$$

Отсюда следует, что для всех двоично-рациональных чисел r, т. е. для всех чисел вида $r = \frac{p}{2^n}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, можно построить открытые в X множества Γ_r так, что $A \subseteq \Gamma_0$ и при $r < r'$

$$[\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'}.$$

Положим теперь для всех остальных t, $0 < t < 1$,

$$\Gamma_t = \bigcup_{r<t} \Gamma_r.$$

Докажем, что всегда

$$[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'} \quad \text{при } t < t'.$$

В самом деле, беря двоично-рациональные r, r' так, чтобы было

$$t < r < r' < t',$$

имеем:

$$\Gamma_t \subseteq \Gamma_r, \quad \text{значит,} \quad [\Gamma_t] \subseteq [\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'} \subseteq \Gamma_{t'},$$

чем утверждение доказано. Наконец, положим $\Gamma_t = \Lambda$ для $t < 0$ и $\Gamma_t = X$ для $t > 1$.

Построим теперь для каждой точки $x \in X$ некоторое сечение (A^x, B^x) в множестве всех действительных чисел: именно, отнесём число t к нижнему классу A^x, если x не содержится в Γ_t, и к верхнему B^x, если $x \in \Gamma_t$. Это сечение определяет действительное число τ_x, причём, очевидно, $0 \leqslant \tau_x \leqslant 1$. Другими словами, определена функция

$$f_{0,1}(x) = \tau_x$$

во всём пространстве X. При этом $f_{0,1}(x) = 0$ при $x \in A$ и $f_{0,1}(x) = 1$ при $x \in B$. Докажем, наконец, непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x \in X$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность

$$U(x) = \Gamma_{\tau_x+\varepsilon} \setminus [\Gamma_{\tau_x-\varepsilon}]$$

точки x. Тогда по самому определению этой окрестности имеем для всех её точек $x' \in U(x)$

$$\tau_x - \varepsilon < \tau_{x'} < \tau_x + \varepsilon,$$

т. е. $|f_{0,1}(x) - f_{0,1}(x')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Применим теперь большую лемму Урысона к доказательству метризационной теоремы. Так как требуется доказать лишь достаточность условия этой теоремы, то наша цель будет, конечно, достигнута, если мы докажем следующее предложение:

Теорема Урысона (о погружении). *Всякое нормальное пространство со счётной базой гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в основном параллелепипеде гильбертова пространства* *).

Доказательство теоремы о погружении. Возьмём какую-нибудь счётную базу S данного нормального пространства X. Пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$$

— все элементы базы. Пару (U_i, U_k) назовём канонической, если

$$[U_i] \subseteq U_k.$$

Из малой леммы Урысона вытекает следующее замечание:

Каковы бы ни были точка $a \in X$ и её окрестность $U(a)$, можно найти каноническую пару (U_i, U_k) такую, что $a \in U_i$, $U_k \subseteq U(a)$. В самом деле, так как S есть база, то существует такой элемент U_k этой базы, что $a \in U_k \subseteq U(a)$; после этого по малой лемме Урысона находим окрестность $U_0(a)$ с замыканием, содержащимся в U_k; наконец, берём элемент U_i базы S, удовлетворяющий условию $a \in U_i \subseteq U_0(a)$. Очевидно, (U_i, U_k) есть искомая каноническая пара.

Канонические пары образуют счётное множество и поэтому могут быть раз навсегда занумерованы в счётную

*) «Основной параллелепипед» Q (или «кирпич») гильбертова пространства R^∞ состоит, по определению, из всех точек $y = (t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots) \in R^\infty$, удовлетворяющих (при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$) условию $0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

последовательность

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots, \pi_n = (U_i, U_k).$$

Согласно большой лемме Урысона строим для каждой канонической пары $\pi_n = (U_i, U_k)$ непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, определённую во всём пространстве X и удовлетворяющую условиям:

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1 \quad \text{для любого} \quad x \in X,$$

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in [U_i],$$

$$\varphi_n(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in X \setminus U_k.$$

Отнесём любой точке $x \in X$ последовательность чисел

$$t_n = t_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и поставим ей в соответствие точку

$$y = f(x) = (t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x), \ldots)$$

гильбертова кирпича Q. Докажем, что полученное отображение f пространства X на некоторое множество $Y \subseteq Q$ есть топологическое отображение. Прежде всего докажем, что отображение f взаимно однозначно. Покажем, другими словами, что для двух различных точек x, x' пространства X точки $f(x)$ и $f(x')$ различны. Для этого возьмём окрестность $U(x)$ точки x, не содержащую точку x', и построим каноническую пару $\pi_n = (U_i, U_k)$, удовлетворяющую условию $x \in U_i$, $U_k \subseteq U(x)$. Тогда $\varphi_n(x) = 0$, $\varphi_n(x') = 1$, т. е. $t_n(x) = 0$, $t_n(x') = \frac{1}{2^n}$, значит, точки $f(x)$ и $f(x')$ (имея различные n-координаты) различны.

Докажем, что отображение f непрерывно. Берём произвольную точку $x \in X$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, можем предположить, что $\varepsilon <$. Нам надо найти такую окрестность $U(x)$, чтобы для любой точки $x' \in U(x)$ было $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Для этого выбираем столь большое m, чтобы $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Вследствие непрерывности функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ можно найти такие окрестности $U_1(x), \ldots, U_m(x)$ точки x, что для $x' \in U_i(x)$ будем иметь $|\varphi_i(x) - \varphi_i(x')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через

$U(x)$ пересечение окрестностей $U_1(x), \ldots, U_m(x)$. Для $x' \in U(x)$ имеем:

$$\rho(f(x), f(x')) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} [t_i(x) - t_i(x')]^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty}} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{1}{2^{2i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}}} <$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

чем и доказана непрерывность отображения.

Докажем, наконец, непрерывность обратного отображения f^{-1} множества $Y \subseteq Q$ на X. Пусть дана произвольная точка $y \in Y$ и пусть $x = f^{-1}(y)$, т. е. $y = f(x)$. Для произвольной окрестности $U(x)$ требуется подобрать такое $\varepsilon > 0$, чтобы при $y' \in U(y, \varepsilon)$ было $f^{-1}(y') \in U(x)$. Для того чтобы найти нужное нам ε, подбираем сначала такую каноническую пару $\pi_n = (U_i, U_k)$, чтобы было $x \in U_i$, $U_k \subseteq U(x)$. Утверждаю, что $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ есть искомое ε.

В самом деле, пусть $y' \in U(y, \varepsilon)$. Докажем, что $x' = f^{-1}(y') \in U(x)$. Но если бы $x' \in X \setminus U(x)$, то и подавно $x' \in X \setminus U_k(x)$, т. е. $\varphi_n(x') = 1$. А так как $x \in U_i(x)$, значит, $\varphi_n(x) = 0$, то мы имели бы

$$t_n(x') - t_n(x) = \frac{1}{2^n}$$

и

$$\rho(y, y') = \rho(f(x), f(x')) \geqslant |t_n(x) - t_n(x')| = \frac{1}{2^n} = \varepsilon,$$

вопреки условию, что $y' \in U(y, \varepsilon)$.

Теорема о погружении полностью доказана.

Этой теореме можно дать такую формулировку:

Для того чтобы топологическое пространство X было гомеоморфно множеству, лежащему в гильбертовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально и имело счётную базу. (В самом деле, мы только что доказали достаточность этого условия; необходимость его очевидна, так как гильбертово пространство, будучи метрическим пространством со счётным всюду плотным множеством, имеет счётную базу; значит, и всякое множество, лежащее в гильбертовом пространстве, есть метрическое, т. е. и подавно нормальное пространство со счётной базой.)

Принципиальное значение этой теоремы огромно: оно полностью характеризует с топологической стороны множества, лежащие в гильбертовом пространстве, указывая неожиданно короткий путь, по которому можно придти от самых общих топологических построений — топологических пространств к совершенно конкретному объекту теории точечных множеств — к множествам, расположенным в гильбертовом пространстве.

Из теоремы о погружении далее вытекает:

Все метрические пространства, содержащие счётные всюду плотные множества, и только такие метрические пространства гомеоморфны множествам, лежащим в гильбертовом пространстве.

Замечание 11. Так как лемма § 13, на которую опирается данное в этом параграфе доказательство теоремы о продолжении непрерывных функций, есть не что иное, как частный случай большой леммы Урысона, доказанной нами теперь для любых нормальных пространств, то теорема о продолжении непрерывных функций вместе с приведённым в § 13 доказательством её дословно сохраняет свою силу для нормальных пространств (в этих предположениях приведённое в § 13 доказательство и было дано Урысоном *).

---

*) Теорема о продолжении непрерывных функций характеризует нормальные пространства (среди всех T_1-пространств): *если R не нормально, то существуют два непересекающихся замкнутых множества A и B, не отделимых функционально.* В самом деле, полагая $\varphi(x) = 0$ на A, $\varphi(x) = 1$ на B, имеем непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая определена на замкнутом множестве $A \cup B$ и не может быть продолжена на всё пространство R.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

КОМПАКТНЫЕ И ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Компактность в данном пространстве и компактность в себе

Определение 1. Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется *компактным в пространстве* R, если из каждой бесконечной последовательности точек множества M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства R. Если выполнено более сильное условие, а именно, что из каждой бесконечной последовательности точек множества M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества M, то множество M называется *компактным в себе*. Если говорят о компактности какого-либо метрического пространства (которое рассматривается само по себе, а не как множество, лежащее в каком-либо объемлющем пространстве), то естественно имеют в виду компактность в себе: метрическое пространство R называется *компактным пространством*, или просто *компактом*, если из каждой бесконечной последовательности точек этого пространства можно выделить сходящуюся в этом пространстве подпоследовательность.

Определению компактности может быть придана и такая форма:

Множество $M \subseteq R$ называется компактным в пространстве R, если каждое бесконечное подмножество множества M имеет (в пространстве R) хотя бы одну предельную точку.

В самом деле, пусть только что сформулированное условие выполнено. Докажем, что из любой бесконечной последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

точек множества M можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, положим $n_1 = 1$ и обозначим через n_2 наименьшее n такое, что точка x_n отлична от x_{n_1}. Такое n нельзя будет найти лишь в случае, если все точки (1) совпадают. Вообще, если $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ уже определены, то обозначим через n_{k+1} наименьшее n такое, что точка x_n отлична от $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$. При этом могут встретиться две возможности:

а) Для некоторого k (может быть, уже и для $k=1$) окажется, что $x_{n_{k+1}}$ построить нельзя, т. е. что каждая точка x_n совпадает с одной из точек $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$; тогда найдётся бесконечная подпоследовательность последовательности (1), состоящая из совпадающих между собою точек; эта последовательность сходится, и наше утверждение доказано.

б) Процесс выделения элементов $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ продолжается бесконечно и приводит к построению бесконечной подпоследовательности

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

последовательности (1), состоящей из попарно различных точек, так что (2) является бесконечным подмножеством множества M. Это подмножество имеет, по предположению, предельную точку x_0, и тогда из последовательности (2) можно выделить (на основании теоремы 1′ главы 6) подпоследовательность, сходящуюся к точке x_0.

Обратно, если выполнено это последнее условие и дано какое-нибудь бесконечное подмножество M' множества M, то в множестве M' содержится счётное множество M'', элементы которого можно занумеровать в виде последовательности (1), состоящей, таким образом, из попарно различных точек. Выделяя из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность и обозначая через x_0 её предел, видим, что x_0 есть предельная точка множества M'', а значит, и множества M. Итак, эквивалентность обоих определений компактности доказана. В частности, когда M совпадает со всем R, имеем предложение:

Компакты могут быть определены как такие метрические пространства, в которых каждое бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку.

В главе 4 была доказана для плоскости теорема Больцано-Вейерштрасса, утверждающая, что всякое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку. Доказательство, данное нами в главе 4, остаётся в силе для трёхмерного и, вообще, для n-мерного евклидова пространства, только вместо разбиения на квадраты надо брать разбиения на кубы (обыкновенные в случае $n = 3$ и n-мерные при любом n). Так как всякое подмножество ограниченного множества ограничено, то из теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что *всякое ограниченное множество евклидова n-мерного пространства компактно в этом пространстве.*

Пусть ε — какое-нибудь положительное число, а M — множество, лежащее в метрическом пространстве R. Конечное множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_s$, лежащих в M, называется *ε-сетью* множества M, если для любой точки $x \in M$ найдётся по крайней мере одна точка a_i, отстоящая от x на расстоянии $< \varepsilon$ [Пример: пусть M есть обыкновенный квадрат; разобьём его на квадраты $M_1, M_2, \ldots, M_s$, диаметр (т. е длина диагонали) каждого из которых меньше ε; если в каждом квадрате M_i возьмём по точке a_i, то множество этих точек будет ε-сетью квадрата M.] *Если множество M имеет при некотором данном $\varepsilon > 0$ хотя бы одну ε-сеть, то оно ограничено.* В самом деле, пусть $N_\varepsilon = \{a_1, \ldots, a_s\}$ есть ε-сеть множества M; обозначим через d диаметр множества N_ε, т. е. наибольшее среди чисел $\rho(a_i, a_j)$. Для любых двух точек x и x' множества M найдутся точки a_i, a_j нашей ε-сети такие, что $\rho(x, a_i) < \varepsilon$, $\rho(x', a_j) < \varepsilon$, так что

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, x') < \varepsilon + d + \varepsilon = d + 2\varepsilon,$$

откуда следует, что диаметр множества M не превосходит $d + 2\varepsilon$.

Назовём теперь множество M *вполне ограниченным*, если оно при любом $\varepsilon > 0$ содержит некоторую ε-сеть. Мы только что убедились в том, что всякое вполне ограниченное множество M и подавно является ограниченным, поэтому название выбрано законно. Докажем следующее предложение:

Теорема 1. *Всякое множество M, компактное в каком-либо метрическом пространстве R, вполне ограничено.*

В самом деле, если множество $M \subseteq R$ не вполне ограничено, то существует некоторое $\varepsilon > 0$, при котором M не содержит никакой ε-сети. Возьмём произвольную точку $a_0 \in M$. Так как в M нет ε-сети, то ε-сетью, в частности, не является множество, состоящее из единственной точки a_0; поэтому в M можно найти точку a_1, отстоящую от a_0 на расстоянии $\geqslant \varepsilon$. Но пара точек a_0, a_1 также не образует ε-сети множества M; поэтому в M можно найти точку a_2, отстоящую от каждой из точек a_0, a_1 на расстоянии $\geqslant \varepsilon$. Продолжая это рассуждение, мы шаг за шагом построим бесконечную последовательность точек

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \tag{3}$$

каждая из которых отстоит от всех предшествующих (в последовательности (3)) на расстояние $\geqslant \varepsilon$. Поэтому расстояние между любыми двумя точками последовательности (3) оказывается $\geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность (3) не содержит никакой сходящейся подпоследовательности, и теорема 1 доказана.

Так как ограниченные множества евклидова пространства компактны, а компактные множества ограничены (даже вполне), то из доказанного вытекает

Теорема 2. *Для того чтобы множество, лежащее в евклидовом пространстве R^n, было компактным в R^n, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Из теорем 1 и 2 следует, что *всякое ограниченное множество, лежащее в n-мерном евклидовом пространстве, является и вполне ограниченным* — обстоятельство, в котором легко убедиться и непосредственно.

Теорема 3. *Для того чтобы множество M, лежащее в метрическом пространстве R, было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и компактно в R.*

В самом деле, пусть M замкнуто и компактно в R. Тогда всякое бесконечное подмножество $M' \subseteq M$ имеет в R хотя бы одну предельную точку a. Так как M замкнуто, то $a \in M$ и, значит, M' имеет предельную точку в M, откуда и следует, что M — компакт. Обратно, пусть M компактно в себе. Тогда и подавно M компактно в R. Докажем, что M, кроме того, и замкнуто. Если бы это было не так, то существовала бы предельная точка a множества M, не принадлежащая этому множеству. Возьмём последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ множества M, сходящуюся к a. Всякая подпоследовательность этой последовательности также сходится к $a \in R \setminus M$, т. е. не сходится ни к какой точке множества M. Итак, последовательность точек $a_n \in M$ не содержит никакой подпоследовательности, сходящейся в M, и M не может быть компактно в себе.

Замечание 1. Одно из утверждений теоремы 3 обычно формулируют так: *всякий компакт замкнут в любом объемлющем метрическом пространстве* *).

Замечание 2. В гильбертовом пространстве легко найти ограниченное множество, не являющееся вполне ограниченным: таково, например, множество E, состоящее из всех точек, у которых одна какая-нибудь координата равна 1, а все остальные равны нулю. Любые две точки этого множества находятся друг от друга на расстоянии $\sqrt{2}$, откуда следует как то, что оно ограничено (имеет диаметр $\sqrt{2}$), так и то, что оно не вполне ограничено (при $\varepsilon < \sqrt{2}$ в E не существует ε-сети).

Теорема 4. *Во всяком компакте, состоящем из бесконечного числа точек, имеется счётное всюду плотное множество.*

В самом деле, пусть R — компакт. Так как R, по доказанному, вполне ограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ в R содержится ε-сеть N_ε. Давая ε значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим счётное множество

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}},$$

всюду плотное в R (так как, какова бы ни была точка $x \in R$, имеем $\rho(x, N) = 0$).

Замечание 3. Из определения компактности непосредственно следует:

---

*) В Прибавлении 1 к этой главе будет доказано, что всякий компакт замкнут и во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве.

Если R — компакт, то всякое $M \subseteq R$ компактно в R; поэтому *всякое замкнутое множество какого-либо компакта R само является компактом.*

Теорема 5. (Кантор.) *Пусть*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \Phi_3 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots \tag{4}$$

суть непустые замкнутые компактные множества метрического пространства R. Их пересечение $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ не пусто.

Замечание 4. Теорема Кантора может быть сформулирована и так:

Любая последовательность непустых убывающих замкнутых множеств (4) *компактного метрического пространства имеет непустое пересечение.*

Доказательство теоремы Кантора*). Для любого n возьмём произвольную точку $a_n \in \Phi_n$. Из последовательности полученных таким образом точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ выберем сходящуюся последовательность

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \tag{5}$$

(такая существует, так как все a_n лежат в Φ_1, а Φ_1 компактно). Пусть $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Докажем, что $a \in \Phi_n$ при любом n. Возьмём $n_k > n$. Последовательность a_{n_k}, $a_{n_{k+1}}, \ldots, a_{n_{k+l}}, \ldots$ состоит из точек множества Φ_n и сходится к той же точке a, что и вся последовательность (5). Поэтому a есть точка прикосновения множества Φ_n. Так как Φ_n замкнуто, то $a \in \Phi_n$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Всякая убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств n-мерного евклидова пространства имеет непустое пересечение* (ср. теорему 22 главы 4).

Замечание 5. Если диаметры множеств (4) стремятся к нулю, то пересечение всех множеств Φ_n (непу-

*) Оно совпадает с данным в главе 4 доказательством той же теоремы для замкнутых ограниченных множеств на прямой и плоскости.

стое в силу теоремы Кантора) состоит из одной единственной точки.

Наряду с теоремой Кантора одним из важнейших предложений в теории компактных пространств является так называемая теорема Бореля-Лебега (доказанная в главе 4 для сегмента числовой прямой).

Теорема 6. *Пусть Φ—компакт, лежащий в метрическом пространстве R* (т. е., в силу теоремы 3, Φ—замкнутое и компактное в R множество). *Из всякой системы Σ открытых множеств пространства R, покрывающих**) *множество Φ, можно выделить конечную подсистему, также покрывающую множество Φ.*

Другими словами, *всякое открытое покрытие компактного замкнутого множества Φ содержит конечное подпокрытие того же множества Φ.*

Доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма. *Всякий компакт Φ при любом $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$.*

Эта лемма весьма просто вытекает из того, что компакт Φ вполне ограничен. В самом деле, возьмём какую-либо $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть

$$N = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$$

компакта Φ. Тогда, по самому определению сети, Φ содержится в сумме множеств $U\left(a_1, \frac{\varepsilon}{3}\right), \ldots, U\left(a_s, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, значит, и подавно в сумме множеств $\left[U\left(a_1, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right], \ldots, \left[U\left(a_s, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$ (замыкания берутся также в Φ). Так как каждое из множеств $\Phi_i = \Phi \cap \left[U\left(a_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$ есть замкну-

---

*) Мы говорим, что система Σ множеств *покрывает* множество Φ или образует *покрытие* множества Φ, если каждая точка множества Φ содержится хотя бы в одном множестве системы Σ. Покрытие называется *открытым* (соотв. *замкнутым*), если все его элементы суть открытые (замкнутые) множества. Покрытие, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*.

тое множество диаметра $\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$ и $\Phi = \Phi_1 \bigcup \ldots \bigcup \Phi_s$, то лемма доказана.

Докажем теперь теорему Бореля-Лебега от противного. Пусть компакт $\Phi \subseteq R$ покрыт некоторой бесконечной системой Σ открытых множеств Γ пространства R и пусть никакая конечная подсистема системы Σ не покрывает Φ. Берём в лемме $\varepsilon = 1$ и представим Φ в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, диаметры которых < 1. Если бы каждое из этих Φ_i было покрыто некоторой конечной подсистемой системы Σ, то и всё Φ было бы покрыто конечной подсистемой системы Σ. Поэтому некоторое Φ_{i_1} не покрыто никакой конечной подсистемой системы Σ. Множество Φ_{i_1}, как замкнутое подмножество компакта Φ, есть компакт и потому может быть представлено в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_{i_1 1}, \Phi_{i_1 2}, \ldots, \Phi_{i_1 s_1}$ диаметра $< \frac{1}{2}$. По крайней мере одно из этих множеств $\Phi_{i_1 i_2}$ не покрыто никакой конечной подсистемой системы Σ. Это $\Phi_{i_1 i_2}$ мы представляем в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра $< \frac{1}{3}$, выбираем среди них одно, $\Phi_{i_1 i_2 i_3}$, не покрытое никакой конечной подсистемой системы Σ, и продолжаем этот процесс до бесконечности. В результате получаем последовательность

$$\Phi \supseteq \Phi_{i_1} \supseteq \Phi_{i_1 i_2} \supseteq \Phi_{i_1 i_2 i_3} \supseteq \ldots \supseteq \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supseteq \ldots \tag{6}$$

компактов, причём ни один из них не покрыт никакой конечной подсистемой системы Σ и диаметр $\delta(\Phi_{i_1 \ldots i_n})$ множества $\Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ меньше чем $\frac{1}{n}$. По доказанному, пересечение множеств (6) состоит из одной точки a. Это a содержится в некотором $\Gamma \in \Sigma$. Так как Γ открыто, то существует $U(a, \varepsilon) \subseteq \Gamma$. Возьмём n столь большим, чтобы было $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда из $a \in \Phi_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta(\Phi_{i_1 \ldots i_n}) < \frac{1}{n}$ следует, что $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subseteq U(a, \varepsilon) \subseteq \Gamma$, т. е. что $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ покрыто даже одним элементом Γ системы Σ (тогда как мы предположили, что никакое конечное число элементов системы Σ

не покрывает $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$). Полученное противоречие доказывает теорему Бореля-Лебега.

Теорема Бореля-Лебега полностью характеризует компакты. Другими словами, имеет место следующая

Теорема 7'. *Пусть множество $M \subseteq R$ удовлетворяет тому условию, что из всякой системы открытых множеств пространства R, покрывающих M, можно выделить конечную подсистему, обладающую тем же свойством. Тогда M есть компакт.*

В самом деле, предположим противное. Тогда в M существует бесконечное подмножество M', не имеющее в M никакой предельной точки. Отсюда следует, что любая точка $x \in M$ имеет окрестность $U(x, \varepsilon_x)$, содержащую не более конечного числа точек множества M'. Окрестности $U(x, \varepsilon_x)$ покрывают всё множество M. В силу наших предположений, существует конечное число этих окрестностей: $U_1 = U(x_1, \varepsilon_{x_1}), \ldots, U_s = U(x_s, \varepsilon_{x_s})$, также покрывающих M. Тогда

$$M' = (M' \cap U_1) \cup \ldots \cup (M' \cap U_s),$$

что невозможно, так как M' — бесконечное множество, а каждое из множеств $M' \cap U_i$ конечно.

Ограничиваясь наиболее важным частным случаем, когда $M = R$, мы приходим к такому предложению:

Теорема 7. *Для того чтобы метрическое пространство R было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из каждой системы открытых множеств, дающих в сумме пространство R, можно было выбрать конечную подсистему, обладающую тем же свойством.*

§ 2. Непрерывные отображения компактов

Теорема 8. *Метрическое пространство, являющееся непрерывным образом компакта, само есть компакт*).*

Доказательство. Пусть дано непрерывное отображение f компакта X на метрическое пространство Y. Чтобы доказать, что Y есть компакт, надо доказать, что из каждой системы Σ_Y открытых в Y множеств Γ_α, покрывающих Y, можно выделить конечную подсистему,

*) В частности, всякое метрическое пространство, гомеоморфное компакту, само есть компакт: свойство компактности в себе, как говорят, топологически инвариантно (что, впрочем, следует из самого определения компактности).

обладающую тем же свойством. Но система Σ_X открытых множеств $f^{-1}(\Gamma_\alpha)$ покрывает X и вследствие компактности X содержит конечную подсистему $\{f^{-1}(\Gamma_{\alpha_1}), \ldots, f^{-1}(\Gamma_{\alpha_s})\}$, также покрывающую X. Но тогда множества $\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_s}$ образуют конечную подсистему системы Σ, покрывающую пространство Y, что и требовалось доказать.

Из теорем 8 и 3 следует

Теорема 9. *Всякое множество M, лежащее в каком-либо метрическом пространстве R и являющееся непрерывным образом компакта, замкнуто в пространстве R.*

Отсюда, далее, следует:

Теорема 10. *Всякое непрерывное отображение компакта является замкнутым отображением.*

В самом деле, пусть f—непрерывное отображение компакта X в какое-либо метрическое пространство Y. Всякое замкнутое в X множество является компактом (§ 1, замечание 3), поэтому его образ при отображении f замкнут в Y, что и требовалось доказать.

Из теоремы 10 вытекает

Теорема 11. *Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение компакта непрерывно и в другую сторону и, следовательно, является топологическим отображением.*

В самом деле, пусть f есть взаимно однозначное и непрерывное в одну сторону отображение компакта X на какое-нибудь метрическое пространство Y. В силу теоремы 8 пространство Y есть компакт. Требуется доказать, что отображение f^{-1} компакта Y на компакт X, обратное отображению f, непрерывно, т. е. требуется доказать, что прообраз при отображении f^{-1} всякого замкнутого в X множества M является замкнутым в Y множеством. Но прообраз $(f^{-1})^{-1}M$ множества M при отображении f^{-1} совпадает с образом множества M при отображении f, который в силу теоремы 10 замкнут в Y. Теорема 11 доказана.

Из теоремы 8, далее, вытекает

Теорема 12. *Всякая действительная функция $y=f(x)$, определённая на некотором компакте X и непрерывная на нём, ограничена и принимает в некоторой точке*

$x_0 \in X$ *наибольшее и в некоторой точке* $x_1 \in X$ — *наименьшее значение* *).

В самом деле, образом пространства X при отображении f является некоторое множество Y действительных чисел, и это множество (в силу теоремы 8) есть компакт, т. е. (в силу теорем 2 и 3) — замкнутое и ограниченное множество действительных чисел. Верхняя и нижняя грани этого множества принадлежат ему и являются искомыми наибольшим и наименьшим значениями нашей функции в пространстве X.

Частными случаями теоремы 12 являются известные из анализа теоремы о том, что всякая непрерывная функция, определённая на замкнутом и ограниченном множестве Φ (на прямой, на плоскости или вообще в R^n, например, модуль непрерывной функции комплексного переменного), принимает на Φ как наибольшее, так и наименьшее значения.

Замечание 1. Из теоремы 35 главы 6, теоремы 63 главы 6 и теоремы 12 следует, что совокупностью значений действительной функции, определённой и непрерывной на связном и компактном метрическом пространстве (например, на сегменте числовой прямой или на замкнутом квадрате или круге), является всегда сегмент числовой прямой (или — если функция постоянна — одна точка).

* * *

Отображение f пространства X в пространство Y называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x' \in X$, $x'' \in X$, расстояние между которыми в X меньше чем δ, имеем:

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \text{ в } Y.$$

Очевидно, *всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно*.

Теорема 13. *Всякое непрерывное отображение f компакта X равномерно непрерывно* **).

---

*) Известный из анализа частный случай этой теоремы был доказан в § 1 главы 5 (теорема 11).

**) Эта теорема является обобщением известной из курса анализа теоремы 10 главы 5.

Доказательство (от противного). Если теорема 13 неверна, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно найти пару точек $x_{(\delta)}$, $x'_{(\delta)}$, удовлетворяющую условиям

$$\rho(x_{(\delta)}, x'_{(\delta)}) < \delta, \ \rho(f(x_{(\delta)}), \ f(x'_{(\delta)})) \geqslant \varepsilon.$$

Давая δ значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ и обозначая $x_{\left(\frac{1}{n}\right)}$, $x'_{\left(\frac{1}{n}\right)}$ просто через x_n, соотв., x'_n, выбираем из последовательности

$$x_1, \ x_2, \ldots, \ x_n, \ldots$$

сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_1}, \ x_{n_2}, \ldots, \ x_{n_k}, \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Так как $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$, то последовательность

$$x'_{n_1}, \ x'_{n_2}, \ldots, \ x'_{n_k}, \ \ldots$$

тоже сходится, и притом к тому же пределу x_0.

В силу непрерывности отображения имеем, полагая $y_k = f(x_{n_k})$, $y'_k = f(x'_{n_k})$, равенства:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} y'_k = f(x_0),$$

так что при достаточно большом k расстояние $\rho(y_k, y'_k)$ будет сколь угодно мало. Между тем, по предположению, $\rho(y_k, y'_k) \geqslant \varepsilon$ для всех k. Полученное противоречие доказывает теорему 13.

Замечание 2. Легко доказывается следующая

Теорема 14. *Метрическое произведение двух компактов есть компакт.*

В самом деле, пусть в произведении $X = [X' \times X'']$ двух компактов X' и X'' дана последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n = (x'_n, \ x''_n)$. Выбираем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} = (x'_{n_k}, x''_{n_k})$ так, чтобы последовательности $\{x'_{n_k}\}$, $\{x''_{n_k}\}$ были сходящимися, соответственно, к x'_0 и к x''_0. Тогда подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в X к точке $x_0 = (x'_0, \ x''_0)$.

Из теоремы 14 и из определения непрерывных функций двух и более переменных *) следует, что только что доказанные теоремы верны и в применении к функциям многих переменных, определённым на каком-нибудь компакте.

Пример непрерывного отображения отрезка на треугольник («кривая Пеано»). Возьмём разбиение отрезка $[0;1]=\delta$ на две его половины: $\delta_0=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\delta_1=\left[\frac{1}{2};1\right]$. Это разбиение отрезка $[0;1]$ назовём «разбиением первого ранга», а отрезки $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2};1\right]$ — «отрезками первого ранга». Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка δ_{00}, δ_{01}, δ_{10}, δ_{11} второго ранга, образующие разбиение второго ранга отрезка $[0;1]$, и т. д. Разбиение n-го ранга состоит из 2^n отрезков $\delta_{i_1i_2\ldots i_n}$ $\left(i_1,\ldots,i_n=\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, длина каждого из которых есть $\frac{1}{2^n}$.

Аналогичным образом, проводя в равнобедренном прямоугольном треугольнике Δ высоту **), разобьем его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника Δ_0 и Δ_1. Это — треугольники «первого ранга»; они образуют «разбиение первого ранга» исходного треугольника Δ. Разбивая каждый треугольник первого ранга его высотой, получим четыре треугольника второго ранга Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11}. Вообще, при любом n получим 2^n треугольников $\Delta_{i_1i_2\ldots i_n}$ $\left(i_1,\ldots,i_n=\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ранга n.

Замечание 3. Все треугольники в нашем построении считаются замкнутыми (т. е. к ним присоединяются их вершины и стороны).

Из нашей конструкции вытекает очевидным образом, что всегда $\delta_{i_1\ldots i_n}\supset\delta_{i_1\ldots i_ni_{n+1}}$ и $\Delta_{i_1\ldots i_n}\supset\Delta_{i_1\ldots i_ni_{n+1}}$.

Далее, так как длина $\delta_{i_1\ldots i_n}$ равна $\frac{1}{2^n}$, то она стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Легко видеть также, что и диаметр треугольника $\Delta_{i_1\ldots i_n}$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю. Отсюда вытекает:

а) Если для любого n мы обозначим через P_n либо один треугольник n-го ранга, либо сумму двух прилегающих друг к другу

---

*) См. § 1 главы 5, стр. 172—174.

**) Под высотой в прямоугольном треугольнике понимаем всё время перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу.

треугольников n-го ранга, то при неограниченном возрастании n диаметр множества P_n будет стремиться к нулю.

Нам понадобится ещё следующее свойство нашего построения, которое без труда доказывается (индукцией по рангу n):

б) Если два отрезка $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$ ранга n имеют общий конец, то треугольники $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\Delta_{j_1 \ldots j_n}$ прилегают друг к другу по общей стороне.

Пусть теперь t — какая-либо точка отрезка $[0; 1]$. Для каждого ранга n имеем либо один единственный отрезок $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ ранга n, содержащий внутри себя точку t, либо два отрезка $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$, имеющих точку t своим общим концом. Обозначим через $P_n(t)$ в первом случае треугольник $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, а во втором — сумму двух треугольников $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\Delta_{j_1 \ldots j_n}$, которые в этом случае, в силу замечания б), примыкают друг к другу. Легко видеть, что

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \ldots \supset P_n(t) \supset \ldots, \tag{1}$$

причём вследствие замечания а) пересечение всех $P_n(t)$ состоит из единственной точки, которую мы и обозначим через $f(t)$.

Мы получили, таким образом, отображение $f(t)$ отрезка $[0; 1]$ в треугольник Δ.

Докажем прежде всего, что это отображение есть отображение на весь треугольник Δ. В самом деле, пусть x — произвольная фиксированная точка треугольника Δ. Возьмём какую-нибудь последовательность наших треугольников

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots \tag{2}$$

под условием, чтобы x содержалось в каждом из треугольников $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ этой последовательности (для некоторых точек x такая последовательность оказывается определённой однозначно, для других — нет). Последовательности (2) соответствует последовательность

$$\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{3}$$

определяющая единственную точку $t \in [0; 1]$, являющуюся точкой пересечения всех отрезков (3), причём из нашего построения легко следует, что для любого n имеем:

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n} \subseteq P_n(t). \tag{4}$$

Из того, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \ldots i_n} = x,$$

из (4) и из того, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n(t)$ состоит из одной лишь точки, вытекает, что $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n(t)$, т. е. $x = f(t)$.

Докажем, наконец, что отображение f непрерывно в любой точке $t_0 \in [0; 1]$. Пусть

$$x_0 = f(t_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(t_0).$$

Берём произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое n, что $P_n(t_0) \subseteq U(x_0, \varepsilon)$. Выбираем это n; точка t_0 принадлежит либо к единственному отрезку $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, либо к двум отрезкам $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$ ранга n. В первом случае полагаем $\delta'_n = \delta_{i_1 \ldots i_n}$, во втором обозначаем через δ'_n отрезок, являющийся суммой отрезков $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$, и через η — расстояние от t_0 до ближайшего конца отрезка δ'_n. Тогда для всех $t \in [0; 1]$, отстоящих от t_0 меньше чем на η, имеем $P_n(t) \subseteq P_n(t_0)$ и, значит,

$$\rho(f(t_0), f(t)) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Дополним только что проведённое построение следующим замечанием (впервые сделанным, если не ошибаюсь, Н. Н. Лузиным): *в трёхмерном пространстве можно построить простую дугу* (т. е. множество, гомеоморфное отрезку $[0; 1]$) *таким образом, что проекцией этой дуги на плоскость будет треугольник* *). Для этого возьмём в плоскости $x_3 = 0$ трёхмерного (x_1, x_2, x_3)-пространства треугольник Δ и непрерывно отобразим на него отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$. Запишем это отображение f в виде системы двух непрерывных функций

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t),$$

где $x_1 = \varphi_1(t)$ и $x_2 = \varphi_2(t)$ суть координаты точки $x = f(t)$ треугольника Δ.

Ставя в соответствие точке t отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ точку x трехмерного пространства с координатами $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $x_3 = t$, получим топологическое отображение отрезка $[0; 1]$ на некоторую простую дугу, проекцией которой на плоскость $x_3 = 0$ является треугольник Δ.

Замечание 5. Лебегу принадлежит следующее изящное построение непрерывного отображения канторова совершенного множества Π на квадрат. Как известно, точки множества Π среди

---

*) Эта простая дуга может служить совершенно непроницаемой для дождя крышей дома!

всех точек числовой прямой R^1 характеризуются тем, что могут быть выражены в виде бесконечной троичной дроби

$$t=\frac{\theta_1}{3}+\frac{\theta_2}{3^2}+\ldots+\frac{\theta_n}{3^n}+\ldots, \tag{5}$$

где каждое θ_n есть либо 0, либо 2, и следовательно, может быть записано в виде $\theta_n=2t_n$, где t_n есть уже либо 0, либо 1; в соответствии с этим переписываем (5) в виде

$$t=2\cdot\left(\frac{t_1}{3}+\frac{t_2}{3^2}+\ldots+\frac{t_n}{3^n}+\ldots\right). \tag{6}$$

Поставим в соответствие каждой точке (6) множества П точку (x_1, x_2) единичного квадрата Q на плоскости R^2, полагая

$$x_1=\varphi_1(t)=\frac{t_1}{2}+\frac{t_3}{2^2}+\frac{t_5}{2^3}+\ldots+\frac{t_{2n-1}}{2^n}+\ldots,$$

$$x_2=\varphi_2(t)=\frac{t_2}{2}+\frac{t_4}{2^2}+\frac{t_6}{2^3}+\ldots+\frac{t_{2n}}{2^n}+\ldots$$

Получаем отображение f множества $\Pi\subset[0;1]$ в единичный квадрат $Q=[0\leqslant x_1\leqslant 1;\ 0\leqslant x_2\leqslant 1]$ плоскости R^2. Пусть $x=(x_1, x_2)$ — произвольная точка квадрата Q; записывая ее координаты в виде двоичных дробей

$$x_1=\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\ldots+\frac{p_n}{2^n}+\ldots,\quad p_n=\begin{matrix}0\\1\end{matrix},$$

$$x_2=\frac{q_1}{2}+\frac{q_2}{2^2}+\ldots+\frac{q_n}{2^n}+\ldots,\quad q_n=\begin{matrix}0\\1\end{matrix},$$

заключаем, что точка x, в силу отображения f, поставлена в соответствие точке множества П, определенной разложением (6), в котором на чётных местах стоят подряд $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, а на нечётных $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ Итак, отображение f есть отображение множества П на весь квадрат Q.

Докажем, что это отображение непрерывно. В самом деле, если имеем две точки

$$t'=2\left(\frac{t_1'}{3}+\frac{t_2'}{3^2}+\ldots+\frac{t_n}{3^n}+\ldots\right)$$

и

$$t''=2\left(\frac{t_1''}{3}+\frac{t_2''}{3^2}+\ldots+\frac{t_n''}{3^n}+\ldots\right)$$

множества П, у которых $t_n'\neq t_n''$, то

$$|t'-t''|\geqslant\frac{1}{3^n}.$$

Поэтому, если последовательность точек $\{t^{(k)}\}$, $t^{(k)} \in \Pi$,

$$t^{(k)} = 2\left(\frac{t_1^{(k)}}{3} + \frac{t_2^{(k)}}{3^2} + \ldots + \frac{t_n^{(k)}}{3^n} + \ldots\right)$$

сходится к $t = 2\left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \ldots\right)$, то для любого n можно найти такое k_n, что при $k > k_n$ будем иметь

$$t_1^{(k)} = t_1, \ \ldots, \ t_n^{(k)} = t_n.$$

Но из этого условия следует, что и $x_1^{(k)} = \varphi_1(t^{(k)})$ и $x_2^{(k)} = \varphi_2(t^{(k)})$ будут при неограниченно возрастающем k стремиться соответственно к $x_1 = \varphi_1(t)$ и $x_2 = \varphi_2(t)$, чем непрерывность функций φ_1 и φ_2, а значит, и отображения f доказана.

Функции φ_1 и φ_2, определённые на канторовом множестве Π, проинтерполируем линейно на смежных интервалах к этому множеству, т. е. положим на каждом смежном интервале $(\alpha; \beta)$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \dfrac{\beta - t}{\beta - \alpha}\varphi_1(\alpha) + \dfrac{t - \alpha}{\beta - \alpha}\varphi_1(\beta), \\ \varphi_2(t) = \dfrac{\beta - t}{\beta - \alpha}\varphi_2(\alpha) + \dfrac{t - \alpha}{\beta - \alpha}\varphi_2(\beta); \end{cases}$$

получим непрерывные функции (которые тоже обозначим через φ_1, φ_2), определённые уже на всём сегменте $[0; 1]$. Полагая для каждого $t \in [0; 1]$, как прежде, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, получим непрерывное отображение f отрезка $[0; 1]$ на квадрат Q (это отображение будет отображением на весь квадрат, потому что, как мы видели, даже $f(\Pi) = Q$).

Интерес лебеговского построения заключается, в частности, в том, что оно сразу же обобщается на случай любого числа измерений и приводит к непрерывному отображению канторова совершенного множества Π на куб любого числа измерений и даже на гильбертов кирпич *).

Закончим этот параграф доказательством следующей теоремы.

Теорема 15. *Если монотонная последовательность непрерывных функций* **), *определённых на компакте* X,

---

*) Определение гильбертова кирпича дано в § 2 главы 6; из того, что гильбертов кирпич является непрерывным образом отрезка, следует (на основании теоремы 8) его компактность, которая, впрочем, будет непосредственно доказана в § 8.

**) Последовательность действительных функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, \qquad (7)$$

определённых в пространстве X, называется *монотонной*, если *сходится к функции, непрерывной на X, то эта последовательность сходится на X равномерно.*

Достаточно доказать эту теорему для случая возрастающей последовательности

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots \tag{8}$$

функций, сходящейся во всех точках компакта X к непрерывной функции $f(x)$.

Требуется доказать, что для любого данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ для всех точек $x \in X$ будет

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ дано. Обозначим через Γ_n множество всех точек $x \in X$, для которых выполнено условие

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Так как и $f(x)$ и $f_n(x)$ — непрерывные в X функции, то непрерывна и функция $|f(x) - f_n(x)|$ и потому множество Γ_n при любом n открыто. Далее, так как последовательность (8) возрастает, то во всякой точке $x \in X$ имеем

$$|f(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)|.$$

она является возрастающей или убывающей последовательностью; при этом последовательность (7) называется возрастающей (соотв. убывающей) на X, если для любого $x \in X$ имеем

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$$

соотв.

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots \geqslant f_n(x) \geqslant \ldots$$

Если, кроме того, по крайней мере для одной точки $x \in X$ имеем

$$f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_n(x) < \ldots,$$

соотв.

$$f_1(x) > f_2(x) > \ldots > f_n(x) > \ldots,$$

то последовательность (7) называется *строго возрастающей* (соотв. *строго убывающей*).

Поэтому, если $x \in \Gamma_n$, то $x \in \Gamma_{n+1}$, т. е. $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ при любом n и, значит,

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots \tag{9}$$

Наконец, так как последовательность (8) сходится в любой точке $x \in X$, то каждая точка x содержится в некотором Γ_n. Таким образом, открытые множества Γ_n в своей совокупности покрывают всё пространство X. В силу его компактности отсюда следует, что пространство X покрыто конечным числом множеств Γ_n, пусть множествами Γ_{n_1}, $\Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_s}$. Считая индексы $n_1, n_2, \ldots, n_s$ возрастающими, заключаем из (9), что Γ_{n_s} совпадает со всем пространством X. А это означает, что при $n \geqslant n_s$ для любой точки $x \in X$ имеем

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Связность в компактных пространствах

Теорема 16. *Всякие два непустых непересекающихся замкнутых множества метрического пространства R, из которых хотя бы одно компактно, находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

Частными случаями этой теоремы являются:

Следствие 1. *Всякие два непустых непересекающихся замкнутых множества компакта R находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

Следствие 2. *Всякие два непустых непересекающихся замкнутых множества евклидова n-мерного пространства, из которых хотя бы одно ограничено, находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

С другой стороны, ветвь гиперболы и одна из её асимптот могут служить примером пары непересекающихся неограниченных замкнутых множеств на плоскости, расстояние между которыми равно нулю.

Если пространство R есть сумма двух интервалов $(0; 1)$ и $(1; 2)$ числовой прямой, то каждый из этих интервалов есть замкнутое ограниченное множество пространства R, а расстояние между ними равно нулю.

Доказательство теоремы 16. Пусть F и Φ замкнуты в R, непусты, но имеют пустое пересечение. Пусть, кроме того, Φ компактно. Докажем, что $\rho(F, \Phi) > 0$. В противном случае мы имели бы две последовательности точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \quad x_n \in F \tag{1}$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, \quad y_n \in \Phi, \tag{2}$$

такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Вследствие компактности множества Φ из (2) можно выбрать подпоследовательность

$$y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots,$$

сходящуюся к некоторой точке $y \in \Phi$. Так как $\rho(x_n, y_n)$ стремится к нулю, то последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

также сходится к точке y, причём из замкнутости множества F следует, что $y \in F$. Таким образом, точка y оказывается общей точкой множеств F и Φ, вопреки нашему предположению. Теорема 16 доказана.

Для всех вопросов о связности компактов следующее понятие (введённое ещё Кантором) является основным:

Определение 2. Конечная последовательность точек $a_1, \ldots, a_s$ метрического пространства R называется ε-*цепью*, а именно, ε-цепью, соединяющей точку a_1 с точкой a_s, если $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ для $i < s$. Множество M называется ε-*сцепленным*, если любые две его точки могут быть соединены ε-цепью, составленной из точек множества M. Множество M называется *сцепленным*, если оно является ε-сцепленным при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 17. *Всякое связное пространство R является сцепленным.*

Доказательство. Пусть R не сцеплено. Докажем, что R не может быть связным. В самом деле, так как R не сцеплено, то в R можно найти две точки a и b, которые при некотором $\varepsilon > 0$ не могут быть соединены никакой ε-цепью. Обозначим через A_ε множество всех точек пространства R, которые могут быть соединены с a посредством ε-цепи. Множество A_ε не пусто (так как содержит точку a). Оно не совпадает со всем R (так как не содержит точки b). Далее, A_ε замкнуто: если a' — точка прикосновения множества A_ε, то имеется точка $a_s \in A_\varepsilon$, отстоящая от a' на расстояние $< \varepsilon$. Но a_s может быть соединено с a посредством ε-цепи $a = a_1$, $a_2, \ldots, a_s$, поэтому имеем и ε-цепь $a = a_1, a_2, \ldots, a_s$, $a_{s+1} = a'$, соединяющую a с a', т. е. $a' \in A_\varepsilon$. Наконец, множество A_ε открыто: если $a' \in A_\varepsilon$, то a' может быть соединено с a посредством ε-цепи; но тогда и всякая точка $a'' \in U(a', \varepsilon)$ может быть соединена с a посредством ε-цепи. Теорема 17 доказана.

Теорема, обратная к теореме 17, неверна: сумма двух интервалов $(0; 1)$ и $(1; 2)$, а также множество всех рациональных точек числовой прямой могут служить примерами множеств сцепленных, но не связных. Однако имеет место

Теорема 18. *Всякий сцепленный компакт является связным.*

В самом деле, если компакт Φ несвязен, то он может быть представлен в виде суммы двух непустых непересекающихся замкнутых множеств: $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$. По теореме 16 имеем $\rho(\Phi_0, \Phi_1) = \varepsilon > 0$. Взяв по произволу точки $x_0 \in \Phi_0$ и $x_1 \in \Phi_1$, видим, что эти две точки не могут быть соединены никакой ε-цепью.

Непустые связные компакты называются *континуумами*; среди них *собственно континуумами* называются континуумы, содержащие более одной точки (мы скоро увидим, что всякий собственно континуум имеет мощность $\mathfrak{c}$). Из теорем 17 и 18 следует:

Для того, чтобы компакт был континуумом, необходимо и достаточно, чтобы он был сцеплен.

Теорема 19. *Пересечение убывающей последовательности континуумов есть континуум.*

Мы докажем даже более сильное предложение:

Теорема 19′. *Пусть* $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots$, *причём* Φ_n *есть непустой* ε_n*-сцепленный компакт и* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. *Тогда* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ — *континуум.*

Доказательство основывается на лемме, полезной и во многих других случаях.

Лемма. *Пусть дана убывающая последовательность непустых компактов*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots, \tag{3}$$

лежащих в метрическом пространстве R. Какова бы ни была окрестность Γ пересечения $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ этих компактов, найдётся такое n_Γ, что для всех $n > n_\Gamma$ будет $\Phi_n \subseteq \Gamma$.

В самом деле, множество Γ есть открытое множество, содержащее Φ. Поэтому каждое множество $\Phi'_n = \Phi_n \setminus \Gamma$ (как пересечение двух замкнутых множеств Φ_n и $R \setminus \Gamma$) замкнуто в R, значит, и подавно в Φ_1. Кроме того, очевидно, $\Phi'_n \supseteq \Phi'_{n+1}$. Итак, множества Φ'_n образуют убывающую последовательность компактов. Их пересечение пусто, так как содержится, с одной стороны, в $\Phi \subseteq \Gamma$, а с другой стороны, в $R \setminus \Gamma$. Поэтому все Φ'_n, начиная с некоторого $n = n_\Gamma$, пусты. Но если $\Phi'_n = \Phi_n \bigcap (R \setminus \Gamma)$ пусто, то, значит, $\Phi_n \subseteq \Gamma$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 19'. Предположим, что Φ_n есть ε_n-сцепленный компакт (причём $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) и что (непустой) компакт $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ не является континуумом. Тогда $\Phi = \Phi' \bigcup \Phi''$, где Φ' и Φ'' замкнуты, непусты и не пересекаются, и по теореме 16 имеем $\rho(\Phi', \Phi'') = \varepsilon > 0$. Положим $\Gamma' = U\left(\Phi', \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\Gamma'' = U\left(\Phi'', \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Открытое множество $\Gamma = \Gamma' \bigcup \Gamma''$ является окрестностью компакта Φ; поэтому для любого достаточно большого n имеем $\Phi_n \subseteq \Gamma' \bigcup \Gamma''$. При этом $\Phi'_n = \Phi_n \bigcap \Gamma' \supseteq \Phi' \neq \Lambda$, $\Phi''_n = \Phi_n \bigcap \Gamma'' \supseteq \Phi'' \neq \Lambda$, $\Phi'_n \bigcup \Phi''_n = \Phi_n$ и $\rho(\Phi'_n, \Phi''_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Взяв при этом n столь большим, чтобы было $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{3}$, увидим, что Φ_n, вопреки предположению, не может быть ε_n-сцепленным.

Приведём несколько примеров континуумов. Очевидно, единственными собственно континуумами, лежащими на прямой, являются сегменты. Так как при непрерывных отображениях сохраняется как связность (теорема 63 главы 6), так и компактность (теорема 8), то *непрерывный образ всякого континуума есть континуум*. Отсюда, в частности, следует, что *непрерывный образ прямолинейного сегмента есть континуум*. Поэтому всякая система n непрерывных функций

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

заданных на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяет в n-мерном пространстве некоторый континуум, являющийся в силу самих уравнений (4) непрерывным образом отрезка $[0; 1]$ и называемый обычно *непрерывной кривой* в n-мерном пространстве (система уравнений (4) называется *параметрическим представлением* этой кривой).

Как мы знаем, понятие непрерывной кривой n-мерного пространства, определённое так, как мы это только что сделали, может даже при $n = 2$ включать в себя геометрические образы, вовсе не похожие на то, что́ мы привыкли называть «линиями». Так, например, треугольник или квадрат в смысле только что приведённого определения являются непрерывными кривыми. Поэтому континуумы, являющиеся непрерывными образами прямолинейного сегмента, в настоящее время предпочитают называть не кривыми, а *жордановыми континуумами*. В книге Хаусдорфа «Теория множеств», § 31, читатель может найти доказательство теоремы, устанавливающей, что жордановы континуумы тождественны с локально связными континуумами.

Один из простейших локально несвязных континуумов получим, если возьмём график функции $y = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$, и присоединим к нему все точки сегмента $[-1; 1]$ оси ординат. Континуум этот гомеоморфен континууму C, являющемуся суммой вертикальных сегментов

$$C_0 = \{x = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

$$C_n = \left\{x = \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

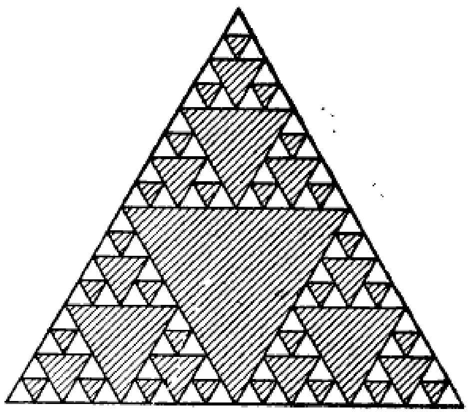
и горизонтальных сегментов D_n, причём D_n при нечётном n лежит на оси абсцисс и соединяет точки $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$, тогда как D_n при чётном n лежит на прямой $y=1$ и соединяет точки $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ *).

Приведём несколько примеров локально связных континуумов. Если из всех точек

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

опустить перпендикуляры на ось ординат и присоединить их к континууму C, то получится локально связный континуум.

Весьма замечательны следующие два локально связных континуума, впервые построенных польским математиком Серпинским.



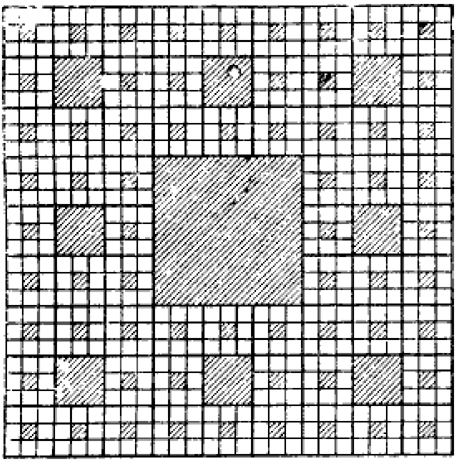
Черт. 21.

П е р в ы й к о н т и н у у м С е р п и н с к о г о получается следующим образом. Берётся равносторонний треугольник (черт. 21) и тремя его средними линиями разбивается на четыре равных треугольника. Внутренность среднего треугольника (на черт. 21 она заштрихована) выкидывается, а на каждом из оставшихся трёх замкнутых треугольников (мы называем их треугольниками первого ранга) повторяется то же построение: каждый из этих треугольников тремя средними линиями делится на четыре равных треугольника, из которых внутренность среднего выбрасывается, так что получаются девять замкнутых треугольников второго ранга, и т. д.

Обозначим через π_n сумму всех 3^n треугольников n-го ранга; так как все эти треугольники — замкнутые, то их сумма π_n есть компакт. Этот компакт, очевидно, связен (любые две его точки могут быть соединены ломаной, лежащей на π_n). Так как $\pi_n \supset \supset \pi_{n+1}$, то пересечение всех π_n есть континуум S, который и называется «кривой Серпинского». Чтобы иметь представление о её виде, даём на чертеже изображение континуума π_3. На континууме S имеется всюду плотная бесконечнозвенная ломаная L — сумма контуров всех треугольников нашего построения. Легко

*) Читателю рекомендуется сделать чертёж.

видеть, что множество L связно, как сумма растущей последовательности континуумов L_n (где L_n есть сумма контуров всех треугольников рангов $\leqslant n$). Однако L далеко не исчерпывает собою всего континуума S: на S имеется ещё несчётное множество точек, не лежащих ни на одном из контуров наших треугольников. Легко видеть, что каждая точка континуума S имеет связную окрестность сколь угодно малого диаметра, так что континуум локально связен.



Черт. 22.

Второй континуум Серпинского, так называемый «ковёр Серпинского», строится так (черт. 22). Квадрат Q со стороной 1 (назовём его квадратом «нулевого ранга») делим на 9 равных квадратов со сторонами $\frac{1}{3}$ и удаляем внутренность среднего из них. Остаются 8 замкнутых квадратов «первого ранга», сумма которых образует континуум C_1. На каждом из них повторяем то же построение, так что получаем 64 замкнутых квадрата второго ранга, сумма которых есть континуум C_2. Построение продолжается неограниченно и приводит к последовательности убывающих континуумов

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots,$$

причём C_n есть сумма 8^n квадратов со сторонами $\frac{1}{3^n}$.

Пересечение C всех континуумов C_n и есть континуум, называемый «ковром Серпинского».

Замечание 1. Только что рассмотренные континуумы обладают тем свойством, что каждый из них нигде не плотен на плоскости. Собственно континуумы, лежащие на плоскости и нигде не плотные на ней, называются (плоскими) *канторовыми кривыми*. Из приведенных примеров видно, что канторова кривая может не быть жордановой, и обратно, жорданов континуум (например квадрат) может не быть канторовой кривой. Свойство континуума быть жордановым, очевидно, топологически инвариантно: если C_1 есть жорданов континуум, а C_2 гомеоморфно C_1, то и C_2 является жордановым континуумом (потому что, если f_1 есть непрерывное отображение отрезка на C_1, а f_2 — топологическое отображение C_1 на C_2, то $f = f_2 f_1$ есть непрерывное отображение отрезка на C_2). Возникает естественный вопрос: является ли свойство плоского множества быть канторовой кривой топологически инвариантным? Другими словами: если C_1 — канторова кривая, а C_2 — плоское множество, гомеоморфное множеству C_1, то будет ли C_2 канторовой кривой. Из предыдущего нам известно, что C_2 во всяком случае — континуум. Остаётся доказать, что C_2 нигде не плотно на плоскости. Тонкость этого вопроса видна из того, что само по себе *свойство плоского множества быть нигде не плотным на плоскости топологической инвариантностью не обладает*: обозначим через R_1 множество всех рациональных точек на прямой, а через R_2 множество всех рациональных точек на плоскости (т. е. множество всех точек плоскости, у которых обе координаты рациональны). Можно доказать, что множества R_1 и R_2 гомеоморфны; между тем R_1 нигде не плотно на плоскости, а R_2 всюду плотно. Однако *если из двух лежащих на плоскости п гомеоморфных между собою компактов один нигде не плотен на плоскости, то тем же свойством обладает и другой.* Это предложение вытекает из одной из основных теорем топологии плоскости, а именно из так называемой теоремы об инвариантности плоской области: *если из двух гомеоморфных между собою плоских множеств одно содержит внутренние точки, то и другое множество содержит внутренние точки.*

Вполне доступное доказательство этой фундаментальной теоремы и аналогичной теоремы для n-мерного пространства можно найти в главе 5 моей книги «Комбинаторная топология».

Назовём ε-компонентой $Q_\varepsilon(a)$ точки a компакта Φ множество всех тех точек этого компакта, которые могут быть соединены с точкой a посредством ε-цепи. Очевидно, $Q_\varepsilon(a)$ есть ε-сцепленное множество; при доказательстве теоремы 17 мы видели, что ε-компонента есть замкнуто-открытое множество. Замкнутым множеством будет и пересечение $Q(a)$ всех ε-компонент точки a, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$; причём, полагая $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и $Q_n = Q_{\frac{1}{n}}(a)$, имеем $Q(a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$, так что по теореме 19' компакт $Q(a)$ связен и, значит, содержится в компоненте $C(a)$ точки a. Обратно, $C(a) \subseteq Q_\varepsilon(a)$ при любом ε, так что $C(a) \subseteq Q(a)$ и, значит, $C(a) = Q(a)$.

Итак.

Теорема 20. *Компонента любой точки a компакта Φ совпадает с пересечением ε-компонент этой точки, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$.*

Обозначая, как только что, $\frac{1}{n}$-компоненту точки a в Φ через Q_n, заключаем из равенства $C(a) = Q(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ (по лемме к теореме 19), что к любой окрестности Γ множества $C(a)$ можно подобрать такое n, что $Q_n \subseteq \Gamma$. Так как Q_n открыто-замкнуто, то имеем такое следствие из теоремы 20:

Следствие. *Какова бы ни была окрестность* Γ *компоненты* C *компакта* Φ, *можно найти содержащуюся в* Γ *окрестность множества* C, *являющуюся не только открытым, но и замкнутым множеством.*

Пусть теперь компакт Φ не содержит никакого собственно континуума. Такие компакты назовём *нульмерными*. Очевидно, нульмерный компакт может быть определён как компакт, каждая точка которого совпадает со своей компонентой. Из только что сформулированного следствия вытекает, что в нульмерном компакте Φ каждая точка содержится в открыто-замкнутом множестве произвольно малого диаметра. Возьмём же произвольно малое $\varepsilon > 0$ и заключим каждую точку x данного нульмерного компакта в открыто-замкнутое множество диаметра $< \varepsilon$. По теореме Бореля-Лебега из полученного таким образом покрытия компакта Φ можно выделить конечное подпокрытие, состоящее, положим, из множеств

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s.$$

Положим теперь:

$$H_1 = \Gamma_1, \quad H_2 = \Gamma_2 \setminus H_1, \ldots$$
$$\ldots, H_n = \Gamma_n \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}), \ldots$$
$$\ldots, H_s = \Gamma_s \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_{s-1}).$$

Так как Γ_1 и Γ_2 открыто-замкнуты, то открыто-замкнутым множеством будет и разность $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ *), т. е. H_2. Вообще, всякое H_n (где $n = 1, 2, \ldots, s$) открыто-замкнуто (как разность между открыто-замкнутыми множествами Γ_n и $H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}$).

*) В самом деле, разность между замкнутым и открытым множеством замкнута, а разность между открытым и замкнутым множеством открыта.

Итак, Φ представлено как сумма конечного числа попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$. Обратно, если компакт Φ при любом $\varepsilon > 0$ допускает такое представление, то, очевидно, он не может содержать никакого связного множества, состоящего более чем из одной точки. Таким образом мы пришли к следующему результату:

Теорема 21. *Для того чтобы компакт Φ не содержал никакого собственно континуума, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ он мог быть представлен как сумма конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$. Каждое из этих замкнутых множеств (как дополнение к сумме остальных) будет при этом и открытым.*

Замечание 2. За определение нульмерного компакта, кроме каждого из двух эквивалентных свойств, фигурирующих в теореме 21, может быть, как легко видеть, принято еще и следующее свойство:

Каковы бы ни были две точки a и b компакта Φ, его можно представить в виде суммы двух непересекающихся замкнутых множеств, из которых первое содержит точку a, а второе — точку b. Это свойство называется *«разделённостью между любыми двумя точками»*. Таким образом, в случае компакта R следующие свойства пространства R оказываются эквивалентными:

1) R не содержит никакого собственно континуума;

2) R не содержит никакого связного множества, состоящего более чем из одной точки;

3) R разделено между любыми двумя точками;

4) каждая точка $a \in R$ содержится в сколь угодно малом открыто-замкнутом множестве.

В случае компактного R каждое из этих свойств может быть принято за определение нульмерности; без предположения компактности пространства R никакие два из этих свойств не эквивалентны.

Среди нульмерных компактов наиболее существенны совершенные (т. е. не содержащие изолированных точек); они называются *дисконтинуумами*. Примерами дисконтинуумов могут служить канторово совершенное множество и все компакты, ему гомеоморфные. В следующем параграфе мы увидим, что этими примерами и исчерпывается всё разнообразие дисконтинуумов: именно, мы докажем, что всякий дисконтинуум гомеоморфен канторову совершенному множеству.

§ 4. Компакты как непрерывные образы канторова совершенного множества

Теорема 22. *Каждый совершенный (т. е. не имеющий изолированных точек) компакт содержит подмножество, гомеоморфное канторову совершенному множеству.*

Доказательство. Пусть Φ — компакт, не содержащий ни одной изолированной точки. Возьмём две какие-нибудь точки a_0 и a_1 компакта Φ и положительное ε, меньшее чем $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}\rho(a_0, a_1)$. Так как Φ не содержит изолированных точек, то нет изолированных точек и ни в одном из множеств $U(a_0, \varepsilon)$, $U(a_1, \varepsilon)$, а следовательно, и ни в одном из множеств $\Phi_0 = [U(a, \varepsilon)]$, $\Phi_1 = [U(a_1, \varepsilon)]$, которые являются непересекающимися компактами диаметров $< \frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что для данного $n \geqslant 1$ и для любой системы из n индексов $i_1, \ldots, i_n$, каждый из которых равен 0 или 1, построены совершенные компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subseteq \Phi$, обладающие следующими свойствами:

1) они попарно не пересекаются;

2) каждый из них имеет диаметр $< \frac{1}{2^n}$.

Для $n = 1$ такими компактами как раз и являются наши Φ_0 и Φ_1. Построим компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ следующим образом. В $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ возьмём две точки $a_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $a_{i_1 \ldots i_n 1}$ и возьмём $\varepsilon > 0$, меньшее чем $\frac{1}{2}\rho(a_{i_1 \ldots i_n 0}, a_{i_1 \ldots i_n 1})$ и $\frac{1}{2^{n+2}}$. Тогда, беря в $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ окрестности $U(a_{i_1 \ldots i_n 0}, \varepsilon)$ и $U(a_{i_1 \ldots i_n 1}, \varepsilon)$, получим два непересекающихся совершенных компакта

$$\Phi_{i_1 \ldots i_n 0} = [U(a_{i_1 \ldots i_n 0}, \varepsilon)],$$
$$\Phi_{i_1 \ldots i_n 1} = [U(a_{i_1 \ldots i_n 1}, \varepsilon)]$$

диаметра $< \frac{1}{2^{n+1}}$, что нам и требовалось.

Итак, для любого натурального n нами построены совершенные компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ — «компакты ранга n», удовлетворяющие условиям 1, 2. При этом из нашего построения следует, что всегда $\Phi_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} \subset \Phi_{i_1 \ldots i_n}$. Обозначая теперь через Φ^n сумму всех 2^n компактов n-го ранга $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$, получим компакт $\Phi^\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi^n \subset \Phi$. Каждой бесконечной последовательности

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots, \quad i_n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \tag{1}$$

соответствует единственная точка

$$\xi_{i_1 \ldots i_n \ldots} = (\Phi_{i_1} \cap \Phi_{i_1 i_2} \cap \ldots \cap \Phi_{i_1 \ldots i_n} \cap \ldots) \in \Phi^\omega,$$

и обратно, для каждой точки $\xi \in \Phi^\omega$ существует лишь одно i_1 такое, что $\xi \in \Phi_{i_1}$, лишь одно i_2 такое, что $\xi \in \Phi_{i_1 i_2}$, и т. д., значит, существует однозначно определённая последовательность (1) такая, что

$$\xi = \Phi_{i_1} \cap \Phi_{i_1 i_2} \cap \ldots \cap \Phi_{i_1 \ldots i_n} \cap \ldots,$$

т. е. что

$$\xi = \xi_{i_1 \ldots i_n \ldots}.$$

Вспомним теперь, что при построении канторова совершенного множества Π мы для каждого натурального n имели 2^n сегментов ранга n, обозначенных через $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, и что, ставя в соответствие каждой точке x канторова совершенного множества единственный содержащий её сегмент $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ ранга n, мы также имели взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями (1) и всеми точками канторова множества, так что каждая точка $x \in \Pi$ однозначно записывалась в виде

$$x = x_{i_1 \ldots i_n \ldots}.$$

Поставим теперь в соответствие каждой точке $x_{i_1 \ldots i_n \ldots} \in \Pi$ точку $\xi_{i_1 \ldots i_n \ldots} \in \Phi$. Это соответствие есть, очевидно, взаимно однозначное соответствие между Π и Φ^ω. Легко доказать, что оно взаимно непрерывно. В силу теоремы 11, достаточно доказать, что оно непрерывно в одну сторону, например в сторону от Π к Φ^ω. Для этого возьмём произвольную окрестность $U(\xi, \varepsilon)$ точки $\xi = \xi_{i_1 \ldots i_n \ldots}$

и возьмём n столь большим, чтобы $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $\Phi_{i_1 \dots i_n} \subseteq \subseteq U(\xi, \varepsilon)$. Возьмём $\delta < \frac{1}{3^n}$. Так как расстояние между двумя различными сегментами ранга n больше или равно $\frac{1}{3^n}$, то для всех точек $x \in \Pi$, отстоящих от $x_{i_1 \dots i_n \dots}$ меньше чем на δ, имеем $x \in \Delta_{i_1 \dots i_n}$. Значит, образы этих точек x при нашем отображении Π на Φ^ω содержатся в $\Phi_{i_1 \dots i_n} \subseteq \subseteq U(\xi, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 22 и результата, полученного в § 4 главы 4, следует

Теорема 23. *Всякий совершенный компакт (в частности, всякий собственно-континуум) имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Отсюда

Теорема 23'. *Всякое совершенное ограниченное множество евклидова пространства любого числа измерений имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Замечание 1. Читателю самому предоставляется убедиться в том, что эта теорема верна и для совершенных неограниченных множеств, расположенных в евклидовом пространстве любого числа измерений.

Из теоремы 23 в соединении с теоремой 51 главы 6 следует далее, что *всякий несчётный компакт (в частности, всякое несчётное замкнутое ограниченное множество евклидова пространства любого числа измерений) имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Теорема 24. *Всякий компакт есть непрерывный образ канторова совершенного множества.*

Замечание 2. Из теоремы 8 следует, что всякое метрическое пространство, являющееся непрерывным образом канторова совершенного множества, есть компакт; это обстоятельство, вместе с теоремой 24, позволяет сказать.

Для того чтобы метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным образом канторова совершенного множества.

Доказательство теоремы 24. Пусть дан компакт Φ. Как мы знаем, он при любом $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ диаметра $< \varepsilon$. При этом всегда можно заменить число s этих слагаемых любым заданным числом $s' > s$, положив

$$\Phi_{s+1} = \Phi_{s+2} = \ldots = \Phi_{s'} = \Phi_s,$$

так как мы вовсе не предполагаем, что множества Φ_i попарно различны между собою. В частности, можно всегда предположить, что число s имеет вид 2^n.

Представим теперь Φ в виде суммы $s_1 = 2^{n_1}$ замкнутых слагаемых $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s_1}$ диаметра $< \frac{1}{2}$, которые будем называть компактами первого ранга. Каждый компакт Φ_{h_1} первого ранга представим в виде суммы 2^{n_2} компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ диаметра $< \frac{1}{2^2}$. Таким образом весь компакт Φ представится теперь в виде суммы $s_2 = 2^{n_1+n_2}$ компактов второго ранга $\Phi_{h_1 h_2}$. Каждый из компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ представляем в виде суммы одного и того же числа 2^{n_3} компактов $\Phi_{h_1 h_2 h_3}$ диаметра $< \frac{1}{2^3}$ (компакты третьего ранга) и т. д. Вообще, для любого натурального числа m мы будем иметь представление компакта Φ в виде суммы $s_m = 2^{n_1 + \ldots + n_m}$ компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ ранга m, причём каждый компакт $\Phi_{h_1 \ldots h_{m-1}}$ ранга $m-1$ будет представлен в виде суммы 2^{n_m} компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_{m-1} h_m}$ и диаметр каждого компакта m-го ранга будет $< \frac{1}{2^m}$. Параллельно с этим рассмотрим для каждого m данные нам в числе $s_m = 2^{n_1 + \ldots + n_m}$ сегменты $\Delta_{i_1 \ldots i_{r_m}}$ ранга $r_m = n_1 + \ldots + n_m$ $\left(\text{длины } \frac{1}{3^{r_m}}\right)$, служившие для построения канторова совершенного множества. Каждый сегмент $\Delta_{i_1 \ldots i_{r_m}}$ ранга r_m обозначим теперь просто через $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$, где h_k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^{n_k}$. Это обозначение основано на том, что каждый сегмент ранга $r_m = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ лежит на некотором сегменте $\Delta_{i_1 \ldots i_{n_1}} = \Delta^{h_1}$ ранга n_1, на некотором сегменте $\Delta_{i_1 \ldots i_{n_1} \ldots i_{n_2}} = \Delta^{h_1 h_2}$ ранга $n_1 + n_2$ и т. д., следовательно, естественно получает обозначение $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ (где h_k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^{n_k}$). В силу этих обозначений оказывается установленным взаимно однозначное соответствие между всеми сегментами $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ ранга r_m и компактами $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ ранга m.

Каждой точке $x \in \Pi$ однозначно соответствуют последовательность

$$\Delta^{h_1} \supset \Delta^{h_1 h_2} \supset \ldots \supset \Delta^{h_1 h_2 \ldots h_m} \supset \ldots \tag{2}$$

содержащих её сегментов, а следовательно, последовательность

$$\Phi_{h_1} \supset \Phi_{h_1 h_2} \supset \ldots \supset \Phi_{h_1 h_2 \ldots h_m} \supset \ldots \tag{3}$$

и единственная точка $\xi = f(x)$, составляющая пересечение компактов (3). С другой стороны, для каждой точки $\xi \in \Phi$ можем взять некоторый содержащий её компакт Φ_{h_1} первого ранга (таких компактов первого ранга может быть, вообще говоря, несколько, тогда мы из них берём, например, тот, у которого индекс — наименьший). Далее, берём некоторый компакт второго ранга $\Phi_{h_1 h_2}$, содержащий точку ξ (помня, что индекс h_1 при этом был уже зафиксирован), некоторый компакт третьего ранга $\Phi_{h_1 h_2 h_3}$ и т. д. Получаем, таким образом, последовательность (3), пересечением элементов которой и является точка ξ. Соответствующая последовательность (2) даёт в пересечении точку $x \in \Pi$, и $\xi = f(x)$.

Итак, отображение f есть отображение канторова совершенного множества Π на весь компакт Φ. Легко видеть, что отображение это непрерывно. В самом деле, при заданном $\varepsilon > 0$ берём столь большое m, чтобы было $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. После этого полагаем $\delta = \frac{1}{3^{r_m}}$. Рассмотрим теперь какую-либо точку $x = \Delta^{h_1} \cap \Delta^{h_1 h_2} \cap \ldots \cap \Delta^{h_1 \ldots h_m} \cap \ldots$ Все точки $x' \in \Pi$, отстоящие от x меньше чем на δ, принадлежат тому же сегменту $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ ранга r_m, что и x. Поэтому их образы будут принадлежать компакту $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$, содержащему $\xi = f(x)$, и, значит, $\rho(f(x), f(x')) < \delta(\Phi_{h_1 \ldots h_m}) < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Если бы в предыдущем построении можно было выбрать компакты $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ так, чтобы два компакта одного и того же ранга не имели общих точек, то каждая точка $\xi \in \Phi$ **однозначно** определяла бы последовательность (2) содержащих её компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ различных рангов, а тогда однозначно определялась бы и точка x, для которой $\xi = f(x)$.

Другими словами, отображение канторова совершенного множества на компакт Φ было бы **взаимно** однозначным и, в силу теоремы 11, сам компакт Φ был бы гомеоморфен канторову совершенному множеству. Очевидно, для этого необходимо, чтобы компакт Φ был нульмерным и притом совершенным компактом, т. е. дисконтинуумом. Это условие оказывается и достаточным. В самом деле, пусть Φ — совершенный нульмерный компакт. Тогда Φ при всяком $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы попарно не пересекающихся компактов $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ диаметра $< \varepsilon$. Если бы хоть один из компактов Φ_i содержал изолированную точку, то она была бы изолированной точкой в Φ. Итак, все Φ_i суть дисконтинуумы диаметра $< \varepsilon$. Мы утверждаем, что, каково бы ни было натуральное $s' > s$, всегда можно заменить представление

$$\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_s, \quad \Phi_i \cap \Phi_j = \Lambda, \quad \delta(\Phi_i) < \varepsilon,$$

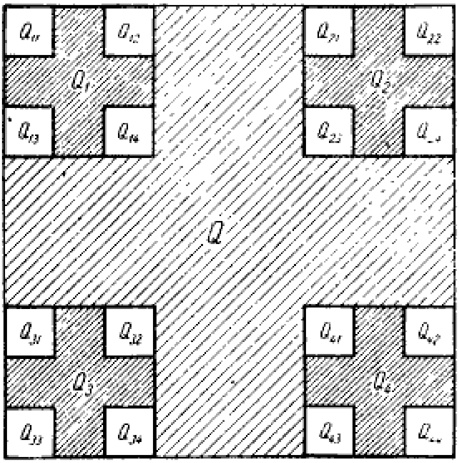
представлением

$$\Phi = \Phi'_1 \cup \ldots \cup \Phi'_{s'}, \ \Phi'_i \cap \Phi'_j = \Lambda, \quad \delta(\Phi'_i) < \varepsilon.$$

Достаточно доказать это утверждение для $s' = s + 1$. Но в этом случае достаточно представить дисконтинуум Φ_s в виде суммы двух непересекающихся непустых компактов Φ'_s и Φ'_{s+1} и положить $\Phi'_i = \Phi_i$ для любого $i \leqslant s - 1$. Из этого замечания, в частности, следует, что дисконтинуум Φ можно представить в виде суммы попарно непересекающихся непустых компактов $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, где $s = 2^{n_1}$. После этого представляем каждый из компактов Φ_{h_1} $(h_1 = 1, \ldots, 2^{n_1})$ в виде суммы одного и того же числа 2^{n_2} попарно непересекающихся компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ диаметра $< \frac{1}{4}$, и т. д. Другими словами, мы можем провести всю конструкцию компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ так, чтобы два компакта одного ранга не имели общих точек, откуда, как мы только что видели, следует гомеоморфизм между данным дисконтинуумом Ф и канторовым совершенным множеством. Итак:

Теорема 24'. *Для того чтобы метрическое пространство R было гомеоморфно канторову совершенному множеству, необходимо и достаточно, чтобы оно было дисконтинуумом.*

Из теоремы 24' следует, что как бы сложно данный дисконтинуум ни был расположен — например, в евклидовом пространстве того или иного числа измерений, он всё равно топологически эквивалентен канторову совершенному множеству.



Черт. 23.

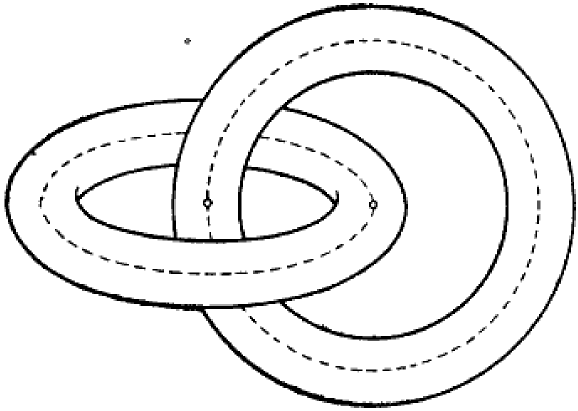
Примеры:

1. Пример плоского дисконтинуума, не лежащего на прямой. Возьмём квадрат Q со стороной 1 и разобьём его на девять равных квадратов (черт. 23). Удалив внутренность заштрихованной крестообразной фигуры, состоящей из пяти квадратов, получим четыре замкнутых квадрата Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 («квадраты первого ранга»), расположенных по углам квадрата Q. С каждым из квадратов первого ранга повторим то же построение. Получим 16 квадратов второго ранга $Q_{i_1 i_2}$, изображенных на черт 23 (незаштрихованные квадраты). Вообще, для любого n получаем 4^n попарно не пересекающихся замкнутых квадратов со стороной $\frac{1}{3^n}$ («квадраты n-го ранга»). Сумму всех замкнутых квадратов n-го ранга обозначим через Q^n. Пересечение всех Q^n есть дисконтинуум Ф. Если Q есть «единичный квадрат» $[0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$, то Ф состоит из всех тех точек этого квадрата, обе координаты которых имеют троичное разложение, состоящее лишь из нулей и двоек. Отсюда легко следует, что наш компакт Ф представляет собою метрическое произведение канторова совершенного множества на себя. Легко сделать аналогичное построение в трёхмерном и, вообще, в n-мерном пространстве, т. е. построить дисконтинуумы, являющиеся метрическими произведениями трёх и более экземпляров канторова

совершенного множества. Все такие компакты являются дисконтинуумами, а следовательно, гомеоморфны канторову совершенному множеству.

2. Пример Антуана. Это — один из самых замечательных дисконтинуумов трёхмерного пространства. Его построению предпошлём несколько замечаний.

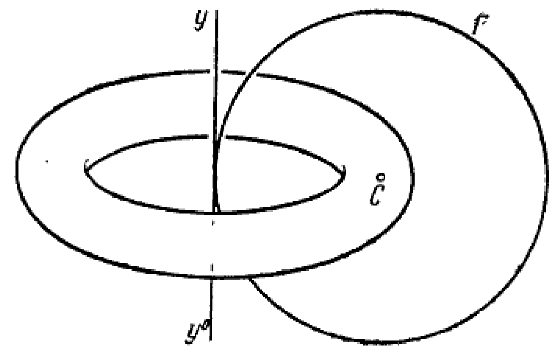
Под *тором* мы в последующем всё время понимаем тело, полученное от вращения замкнутого круга K вокруг оси, лежа-



Черт. 24.

щей в плоскости этого круга и его не пересекающей. Когда круг K, вращаясь вокруг прямой yy', описывает тор, то центр круга K описывает окружность, называемую *осевой окружностью тора*; её центр назовём *центром тора*. Плоскость осевой окружности тора назовём *экваториальной плоскостью тора*. Назовём два тора *зацепленными*, если они не имеют общих точек и их экваториальные плоскости взаимно перпендикулярны; причём осевая окружность каждого из двух торов проходит через центр другого тора (черт. 24).

Конечная система торов $T_1, T_2, \ldots, T_s$ образует по определению замкнутую цепь, если каждые два из этих торов находятся друг от друга на положительном расстоянии и если T_1 и T_s, а также при любом $i=1, \ldots, s-1$ торы T_i и T_{i+1} зацеплены между собою. Замкнутая цепь торов называется ε-цепью, если каждый из составляющих её торов имеет диаметр $< \varepsilon$. Положим теперь $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и возьмём какой-либо тор T^0 диаметра $< \varepsilon_0 = 1$. Внутри тора T^0 возьмём замкнутую ε_1-цепь торов $T_1, T_2, \ldots, T_s$, центры которых лежат на осевой окружности тора T_0. Это — торы первого ранга. Внутри каждого тора T_{i_1} первого ранга возьмём замкнутую ε_2-цепь торов $T_{i_1 1}, \ldots, T_{i_1 s_{i_1}}$ (торы второго ранга), центры которых лежат на оси тора T_{i_1}. Продолжая это построение, получим при любом n систему торов n-го ранга $T_{i_1 \ldots i_n}$ диаметра $< \varepsilon_{n_1}$, причём торы одного и того же ранга не имеют общих точек, каждый тор n-го ранга $T_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$ лежит внутри тора $T_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ ранга $n-1$, и все торы n-го ранга, лежащие внутри данного тора $(n-1)$-го ранга, образуют замкнутую ε_n-цепь и имеют свои центры на осевой окружности тора $T_{i_1 \ldots i_{n-1}}$. Обозначая через T^n сумму всех торов n-го ранга, получим дисконтинуум $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n$. Это и есть дисконтинуум Антуана. Его расположение в трёхмерном пространстве очень замечательно. В самом деле, возьмём какую-либо точку C на осевой окружности тора T^0 и проведём через прямую yy^0 (черт. 25) и точку C плоскость α. В этой плоскости возьмём окружность Γ с центром в C, проходящую через центр тора T^0. Можно доказать следующую теорему: *возьмём какой-нибудь круг Q, например круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, и любое его непрерывное отображение в трёхмерное пространство, при котором окружность $x^2 + y^2 = 1$ взаимно однозначно* (а следовательно, и взаимно непрерывно) *отображается на окружность Γ. Тогда образ внутренности круга Q непременно имеет общие точки с множеством* Φ. Наглядный смысл этой очень трудно доказываемой теоремы заключается в том, что если представлять себе окружность сделанной, например, из резины, то при всякой непрерывной деформации (всяком «стягивании») этой окружности в одну точку она в процессе этой деформации непременно заденет за множество Φ. Между тем дисконтинуум Φ, как всякий дисконтинуум, гомеоморфен канторову совершенному множеству.



Черт. 25.

* *
*

Замечание 4. Во всех рассуждениях этого параграфа основное место занимало построение в том или ином метрическом пространстве некоторой системы компактных замкнутых множеств $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$, снабжённых конечными системами индексов $i_1 \ldots i_m$, причём каждый из этих индексов принимал конечное число значений, число же m этих индексов — всевозможные значения 1, 2, 3, ... до бесконечности. При этом всегда

$$\Phi_{i_1 \ldots i_m} \supseteq \Phi_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}}.$$

Такие системы множеств $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$ называются *конечно-ветвящимися системами.* Последовательности вида

$$\Phi_{i_1} \supseteq \Phi_{i_1 i_2} \supseteq \ldots \supseteq \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_m} \supseteq \ldots$$

называются цепями ветвящейся системы, пересечение всех множеств, образующих цепь, называется ядром цепи, а сумма ядер всех цепей ветвящейся системы называется ядром этой системы.

Все эти понятия остаются в силе, если перейти от конечно-ветвящейся к счётно-ветвящейся системе множеств. *Счетно-ветвящейся системой* или *A-системой* множеств пространства R называется система множеств $M_{i_1 \ldots i_m}$, каждое из которых снабжено конечным числом индексов $i_1, \ldots, i_m$, принимающих любые целые положительные значения (так что любой комбинации $i_1 \ldots i_m$ любого числа m натуральных чисел соответствует теперь элемент $M_{i_1 \ldots i_m}$ данной A-системы). Кроме того, требуется, чтобы всегда было $M_{i_1 \ldots i_m} \supseteq M_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}}$. Таким образом, A-система содержит счётное множество элементов $M_1, M_2, \ldots, M_{i_1}, \ldots$ первого ранга (т. е. несущих по одному индексу); каждому элементу M_{i_1} первого ранга «*подчинено*» счётное множество содержащихся в нём элементов второго ранга $M_{i_1 1}, \ldots, M_{i_1 i_2}, \ldots$, каждому элементу $M_{i_1 i_2}$ второго ранга подчинено счётное множество элементов третьего ранга $M_{i_1 i_2 1}, \ldots, M_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$, и т. д. Последовательность вида

$$M_{i_1}, M_{i_1 i_2}, \ldots, M_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots,$$

каждый элемент которой (кроме первого) подчинён предыдущему, называется *цепью* A-системы; пересечение элементов, образующих цепь, называется *ядром этой цепи* и, наконец, сумма ядер всех цепей A-системы называется *ядром данной A-системы.* Существенно заметить, что в определении A-системы отнюдь не содержится требования, чтобы два множества, являющиеся элементами одного и того же ранга, не пересекались между собою; более того, различные элементы одного и того же ранга могут быть и тождественными точечными множествами; в связи с этим следует заметить, что каждый элемент $M_{i_1 \ldots i_{m-1} i_m}$ ранга $m > 1$ подчинён единственному элементу ранга $m-1$, а именно, элементу $M_{i_1 \ldots i_{m-1}}$, но может быть подмножеством и других элементов ранга $m-1$. Поэтому, обозначая через M^m сумму всех элементов m-го ранга, мы получаем множество $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} M^m$, вовсе не совпадающее, вообще говоря, с ядром данной A-системы (а лишь содержащее это ядро); в случаях, когда это совпадение имеет место, сама A-операция, т. е. переход от заданной A-системы множеств $M_{i_1 \ldots i_m}$ к её ядру, не представляет интереса, так как может быть заменена сложением множеств каждого данного ранга и взятием пересечения полученных множеств M^m. Чаще всего рассматриваются A-системы, элементами которых являются замкнутые множества данного пространства R. Те множества пространства R, которые могут быть получены в качестве ядра некоторой A-системы, составленной из замкнутых множеств пространства R, называются *A-множествами* пространства R. *Все борелевские множества являются частным случаем A-множеств* *).

A-множества, расположенные в евклидовых, а также в гильбертовом пространстве, допускают очень далеко идущее изучение. В то же время за пределами A-множеств многие самые естественные задачи теории множеств оказываются, по крайней мере в настоящее время, неразрешимыми. Такова, например, простейшая из задач теории множеств — задача определения мощности множества: оказывается, всякое несчётное A-множество любого евклидова или гильбертова пространства непременно содержит некоторый дисконтинуум, а потому имеет мощность $\mathfrak{c}$, тогда как даже на числовой прямой задача определения мощности множеств, дополнительных к A-множествам, сталкивается с трудностями, представляющимися в настоящее время совершенно непреодолимыми. Множество, дополнительное к A-множеству, может само не быть A-множеством: *A-множества, дополнения к которым также являются A-множествами, суть не что иное, как борелевские множества.* Эту замечательную теорему доказал основатель теории A-множеств — М. Я. Суслин, построивший при помощи своей теоремы и первый пример A-множества, не являющегося борелевским множеством. Только после этого примера и стало возможным говорить о классе A-множеств, как о классе множеств, действительно более широком, чем класс борелевских множеств. Теория A-множеств является наиболее разработанной главой так называемой *дескриптивной теории множеств*; читателей, желающих познакомиться с ней, мы отсылаем к книге Хаусдорфа «Теория множеств», гл. 8 и 9 **).

---

*) Это доказать нетрудно, так как все замкнутые множества суть A-множества, а все борелевские множества могут быть получены из замкнутых, применением счётного числа раз операции сложения и пересечения, то достаточно доказать, что сумма и пересечение счётного числа A-множеств суть A-множества. Это последнее доказательство может быть проведено читателем самостоятельно.

**) Название «A-множество» было предложено М. Я. Суслиным; Хаусдорф называет A-множества *суслинскими множествами*.

§ 5. Определение и примеры полных метрических пространств

Последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

метрического пространства R называется *фундаментальной последовательностью*, если ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное число n_ε, что для любых $p \geqslant n_\varepsilon$, $q \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь $\rho(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Очевидно, *всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Если в данной фундаментальной последовательности (1) *имеется сходящаяся подпоследовательность*

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{2}$$

с пределом a, то и вся последовательность (1) *сходится к пределу a.* В самом деле, выберем число n_ε столь большим, чтобы для любых $p \geqslant n_\varepsilon$, $q \geqslant n_\varepsilon$ выполнялось условие $\rho(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем, что для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем:

$$\rho(a, x_n) < \varepsilon.$$

В самом деле, достаточно взять в последовательности (2) такое x_{n_k}, чтобы одновременно выполнялись условия: $n_k \geqslant n_\varepsilon$, $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. При $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$\rho(a, x_n) \leqslant \rho(a, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Замечание 1. Только что доказанное утверждение можно высказать и так: если фундаментальная последовательность не является сходящейся, то она *вполне расходящаяся* (в том смысле, что никакая её подпоследовательность не сходится). Чтобы получить примеры расходящихся фундаментальных последовательностей, достаточно взять в качестве пространства R множество всех рациональных точек числовой прямой с обычными расстояниями между ними (для двух рациональных точек r, r' расстояние $\rho(r, r') = |r - r'|$). Возьмём последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{3}$$

рациональных чисел, сходящихся на прямой к некоторому иррациональному пределу ξ. Тогда в пространстве R последовательность (3) будет расходящейся фундаментальной последовательностью.

Определение 3. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его фундаментальная последовательность является сходящейся.

Замечание 2. Из этого определения сразу следует, что *всякое замкнутое множество, лежащее в полном пространстве, само является полным пространством.*

Легко видеть, что *всякий компакт является полным метрическим пространством*. В самом деле, так как из всякой последовательности точек компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то согласно замечанию 1 всякая фундаментальная последовательность точек компакта является сходящейся.

Далее, мы видели ещё в главе 4, что всякая фундаментальная последовательность точек числовой прямой есть последовательность сходящаяся (в этом и заключается принцип сходимости Коши), так что *числовая прямая есть полное метрическое пространство.*

Докажем полноту n-мерного евклидова пространства. Пусть дана в R^n фундаментальная последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, \tag{4}$$

где $a_m = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$. Так как, очевидно,

$$\rho(x_i^{(p)}, x_i^{(q)}) \leqslant \rho(a_p, a_g)$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждая из последовательностей

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(m)}, \ldots \tag{5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$) есть фундаментальная последовательность действительных чисел и потому сходится к некоторому

$$x_i = \lim_{n \to \infty} x_i^{(m)} \tag{6}$$

(при $i = 1, 2, \ldots, n$). Но тогда и последовательность (4) сходится к точке $a = (x_1, \ldots, x_n)$.

Докажем теперь, что *гильбертово пространство есть полное метрическое пространство.* Доказательство аналогично только что приведённому доказательству для евклидова пространства, но осложняется, естественно, некоторыми вопросами сходимости. Пусть (4) есть снова фундаментальная последовательность, но теперь уже в гильбертовом пространстве, так что

$$a_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots). \tag{4'}$$

Для любого i, принимающего теперь любое из значений $1, 2, 3, \ldots$, имеем фундаментальную последовательность (5), с пределом (6). Надо прежде всего доказать, что

$$a = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{7}$$

есть точка гильбертова пространства, т. е. что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится. Это доказательство опирается на неравенство Коши-Буняковского

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|b_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}, \tag{8}$$

верное для любых двух последовательностей действительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \text{*)}.$$

*) Конечный случай этого неравенства (в котором вместо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ стоит $\sum\limits_{n=1}^{N}$) был доказан в § 2 главы 6.

Докажем неравенство Коши-Буняковского для бесконечных

Докажем прежде всего, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое m_ε, что для $m > m_\varepsilon$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2 < \varepsilon^2. \qquad (9)$$

В самом деле, возьмём m_ε столь большим, чтобы для $l > m_\varepsilon$, $m > m_\varepsilon$ было $\rho(a_l, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(l)} - x_n^{(m)})^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Тогда для любого натурального числа k и подавно будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{k} (x_n^{(l)} - x_n^{(m)})^2 < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

значит, после предельного перехода $l \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{k} (x_n - x_n^{(m)})^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4},$$

сумм. Неравенство (8) несомненно верно, если хотя бы один из двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ является расходящимся, так как тогда справа стоит $+\infty$. Предположим, что оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Тогда, беря в гильбертовом пространстве точки

$$o = (0, 0, 0, \ldots 0, \ldots),$$
$$a = (|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_n|, \ldots),$$
$$c = (|a_1| + |b_1|, |a_2| + |b_2|, \ldots, |a_n| + |b_n|, \ldots)$$

и записывая для них неравенство треугольника $\rho(o, c) \leqslant \rho(o, a) + \rho(a, c)$, получаем:

$$\sqrt{\sum (|a_n| + |b_n|)^2} \leqslant \sqrt{\sum a_n^2} + \sqrt{\sum b_n^2},$$
$$\sum (|a_n| + |b_n|)^2 \leqslant \sum a_n^2 + \sum b_n^2 + 2\sqrt{\sum a_n^2 \cdot \sum b_n^2}$$

или, после очевидных сокращений,

$$\sum |a_n| \, |b_n| \leqslant \sqrt{\sum a_n^2 \cdot \sum b_n^2}.$$

что при $k \to \infty$ даёт

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2,$$

т. е. неравенство (9). Для любого $m > m_\varepsilon$ имеем теперь по неравенству Коши-Буняковского

$$\left| \sum_n x_n^{(m)} \cdot (x_n - x_n^{(m)}) \right| \leqslant \sqrt{\sum_n (x_n^{(m)})^2 \cdot \sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2},$$

где справа под знаком радикала ряды сходятся. Следовательно, в выражении

$$\sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2 + \sum_n (x_n^{(m)})^2 + 2 \sum_n x_n^{(m)} (x_n - x_n^{(m)})$$

все ряды — абсолютно сходящиеся, так что имеем тождество

$$\sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2 + \sum_n (x_n^{(m)})^2 + 2 \sum_n x_n^{(m)} (x_n - x_n^{(m)}) = \sum_n x_n^2,$$

из которого и следует сходимость ряда $\sum\limits_n x_n^2$.

Итак, (7) есть действительно точка гильбертова пространства. Остаётся доказать, что к ней сходится последовательность (4). Но при $m > m_\varepsilon$ имеем в силу (9) и определения точки (7)

$$\rho(a, a_m) < \varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Доказать полноту пространства Бэра.

В заключение этого параграфа приведём ещё один важный пример полного метрического пространства, являющийся непосредственным обобщением рассмотренного в главе 6, § 1 пространства непрерывных функций, определённых на отрезке числовой прямой.

Назовём отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y *ограниченным*, если множество $f(X) \subseteq Y$ ограничено (т. е. имеет конечный диаметр).

Если f и g — два ограниченных отображения пространства X в Y, то множество $f(X) \cup g(X) \subseteq Y$ ограничено, поэтому и

$$\sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

есть конечное неотрицательное число. Это число назовём *расстоянием* $\rho(f, g)$ *между отображениями* f *и* g. Если $f \neq g$, т. е. есть хотя бы одна точка $x \in X$, для которой $f(x) \neq g(x)$, то, очевидно, $\rho(f, g) > 0$; так как, с другой стороны, $\rho(f, f) = 0$, то введённое нами расстояние удовлетворяет аксиоме тождества. Удовлетворяет оно, очевидно, и аксиоме симметрии. Аксиома треугольника

$$\rho(f_1, f_3) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3)$$

выполнена для любых трёх ограниченных отображений f_1, f_2, f_3. В самом деле, какова бы ни была точка $x \in X$, имеем:

$$\rho(f_1(x), f_3(x)) \leqslant \rho(f_1(x), f_2(x)) + \rho(f_2(x), f_3(x)) \leqslant \\ \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3),$$

поэтому и

$$\rho(f_1, f_3) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_3(x)) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3).$$

Итак, множество всех ограниченных отображений метрического пространства X в метрическое пространство Y с определённым нами в этом множестве расстоянием есть метрическое пространство; обозначим его через $B(X, Y)$. При этом последовательность

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

точек пространства $B(X, Y)$ тогда и только тогда сходится в $B(X, Y)$ к точке f, если отображения f_n сходятся в X равномерно к отображению f. Отсюда и из теоремы 65 главы 6 следует, что множество $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений пространства X в Y замкнуто в пространстве $B(X, Y)$. Мы теперь и будем рассматривать лишь пространство $C(X, Y)$ (с метрикой, взятой из пространства $B(X, Y)$) и докажем следующее предложение:

Пространство $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений произвольного метрического пространства X в полное метрическое пространство Y есть полное метрическое пространство.

Отметим особо два частных случая:

1. *Пространство всех непрерывных отображений любого метрического пространства в ограниченное полное метрическое пространство (в частности, в компакт) есть полное пространство.*

2. *Пространство всех непрерывных ограниченных действительных функций, определённых в любом метрическом пространстве, есть полное пространство.*

Переходим к доказательству полноты пространства $C(X, Y)$ в общем случае любого X и любого полного Y.

Пусть

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{10}$$

есть фундаментальная последовательность точек пространства $C(X, Y)$. Так как для каждой точки $x \in X$ последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{10_x}$$

есть фундаментальная последовательность точек полного пространства Y, то последовательность (10_x) сходится к некоторой точке пространства Y; обозначим её через $f(x)$. Таким образом определено отображение

$$y = f(x)$$

пространства X в пространство Y. Надо доказать, во-первых, что отображение f непрерывно и, следовательно, является точкой пространства $C(X, Y)$, и, во-вторых, что последовательность (10) сходится в $C(X, Y)$ к f. Оба утверждения будут доказаны, если мы покажем, что непрерывные отображения (10_x) пространства X в пространство Y сходятся к отображению f равномерно. Но это следует из того, что в силу определения метрики пространства $C(X, Y)$ последовательность (10), будучи фундаментальной в $C(X, Y)$, удовлетворяет условию: к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое n_ε, что при любых $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ неравенство

$$\rho(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon \tag{11}$$

выполнено для всех $x \in X$. Переходя при произвольном, но фиксированном $x \in X$ к пределу при $q \to \infty$, получаем:

$$\rho(f_p(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$$

для всех $p \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in X$, чем и доказана равномерная сходимость последовательности отображений (10_x).

§ 6. Пополнение метрического пространства

Мы приводили в качестве примера неполного метрического пространства пространство всех рациональных точек числовой прямой. Пространство это является всюду плотным подмножеством полного пространства, а именно всей числовой прямой. Мы сейчас покажем, что это всегда бывает так: имеет место

Теорема 25 *). *Всякое метрическое пространство R является всюду плотным подмножеством некоторого пол-*

*) Как сама эта теорема, так и приведённое здесь её доказательство принадлежат Хаусдорфу.

ного пространства $\tilde{R}$. При этом полное пространство $\tilde{R}$ определено однозначно с точностью до изометрического отображения *), *оставляющего неподвижными все точки множества $R \subseteq \tilde{R}$* **), *и является наименьшим полным метрическим пространством, содержащим R* (т. е. всякое полное метрическое пространство R', содержащее R, содержит множество $R'' \supseteq R$, изометричное пространству $\tilde{R}$).

Определение 4. Пространство $\tilde{R}$ называется *пополнением* пространства R.

Доказательство. Введём сначала понятие расстояния между двумя фундаментальными последовательностями

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{1}$$

и

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots). \tag{2}$$

Замечаем для этого, что при любых m, n мы имеем:

$$\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m),$$
$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m),$$

откуда следует, что числовая последовательность

$$\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2), \ldots, \rho(x_n, y_k), \ldots$$

является фундаментальной, значит, сходящейся. Её предел мы и назовём расстоянием между фундаментальными последовательностями (1) и (2):

$$\rho(x, y) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Из определения (3) следует: для любых трёх фундаментальных последовательностей $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, $z = \{z_n\}$

---

*) Отображение f метрического пространства X на метрическое пространство Y называется *изометрическим* (или конгруэнтным), если оно сохраняет расстояния, т. е. если для любых $x' \in X$, $x'' \in X$ имеем $\rho(f(x'), f(x'')) = \rho(x', x'')$.

**) Т. е. если R' — какое-нибудь полное метрическое пространство, содержащее R в качестве всюду плотного множества, то существует изометрическое отображение f пространства R' на $\tilde{R}$, удовлетворяющее условию $f(x) = x$ для любой точки $x \in R$.

выполнено неравенство треугольника

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z). \tag{4}$$

В самом деле, имеем: $\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$, откуда неравенство (4) получается переходом к пределу при $n \to \infty$. В частности, если $\rho(x, y) = 0$, $\rho(y, z) = 0$, то и $\rho(x, z) = 0$. Поэтому, называя две фундаментальные последовательности *эквивалентными*, если расстояние между ними равно нулю, получаем разбиение всего множества фундаментальных последовательностей на классы эквивалентных между собою последовательностей. Эти классы для краткости будем называть *пучками пространства* R. Пусть ξ и η — два пучка. Выбирая в ξ и η по фундаментальной последовательности $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, без труда убеждаемся в том, что $\rho(x, y)$ сохраняет своё значение, если заменим x, y последовательностями x', y', эквивалентными, соответственно, последовательностям x и y. Это позволяет определить расстояние $\rho(\xi, \eta)$ между двумя пучками по формуле

$$\rho(\xi, \eta) = \rho(x, y),$$

где $x \in \xi$, $y \in \eta$ выбраны произвольно. Расстояние $\rho(\xi, \eta)$, очевидно, удовлетворяет аксиоме симметрии: $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$, а также аксиоме тождества $\rho(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$. Наконец, это расстояние $\rho(\xi, \eta)$ удовлетворяет и аксиоме треугольника (так как ей удовлетворяет, как мы только что видели, расстояние между фундаментальными последовательностями).

Итак, наше определение расстояния между пучками превращает множество всех пучков пространства R в метрическое пространство; обозначим его через $\tilde{R}_0$. Назовём отмеченным пучком такой пучок ξ, который в числе своих элементов содержит стационарную последовательность, т. е. последовательность вида

$$(x, x, \ldots, x, \ldots), \quad x \in R.$$

Так как всякие две различные стационарные последовательности $\{x\}$ и $\{y\}$ имеют между собою положительное расстояние (равное расстоянию между точками x и y), то в каждом отмеченном пучке содержится лишь одна стационарная последовательность. Таким образом, отмеченные пучки взаимно однозначно соответствуют точкам пространства R, причём соответствие это сохраняет расстояние (расстояние между двумя отмеченными пучками равно расстоянию между соответствующими им точками пространства R). Заменим теперь в пространстве $\tilde{R}_0$ все отмеченные пучки соответствующими этим пучкам точками пространства R (все расстояния при этой замене остаются теми же, что и до замены). В результате получается метрическое пространство $\tilde{R}$, очевидно, изометричное пространству $\tilde{R}_0$. Это пространство $\tilde{R}$ и есть то, которое мы хотели построить. Пространство R содержится в $\tilde{R}$ как подмножество. Докажем, что R всюду плотно в $\tilde{R}$. В самом деле, при произвольном $\xi \in \tilde{R} \setminus R$ и $x \in \xi$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \tag{5}$$

расстояние между точками ξ и x_n пространства $\tilde{R}$ есть $\rho(\xi, x_n) = \rho(x, x_n)$, где $\rho(x, x_n)$ есть расстояние между фундаментальными последовательностями

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

и

$$x_n = (x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots).$$

Но это расстояние стремится к нулю при возрастании n. Следовательно, для любой фундаментальной последовательности (5), взятой в пучке ξ, имеем:

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ в } \tilde{R}. \tag{6}$$

Этим доказано, что каждая точка $\xi \in \tilde{R} \setminus R$ есть точка прикосновения множества $R \subseteq \tilde{R}$, и значит, R плотно в $\tilde{R}$.

Докажем теперь, что $\tilde{R}$ есть полное пространство. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{7}$$

— фундаментальная последовательность точек пространства $\tilde{R}$. Если ξ_n есть пучок, берём в нём фундаментальную последовательность $\{x_m\}$ и в ней точку $x'_n = x_{m_n}$ так, чтобы было $\rho(\xi_n, x_{m_n}) < \frac{1}{n}$. Если же ξ_n есть точка пространства R, то обозначаем эту точку через x'_n. Полученные точки

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \tag{8}$$

пространства R образуют фундаментальную последовательность, которая однозначно определяет содержащий её пучок ξ. Последовательность (8), а значит и последовательность (7), сходится к ξ, чем полнота пространства $\tilde{R}$ доказана.

Пусть теперь $\tilde{R}'$ — какое-нибудь полное метрическое пространство, содержащее пространство R в качестве всюду плотного множества. Тогда каждая точка $\xi' \in \tilde{R}'$ однозначно определяет пучок сходящихся к этой точке фундаментальных последовательностей пространства R и, следовательно, точку ξ пространства $\tilde{R}$. Различным точкам пространства $\tilde{R}'$ соответствуют при этом различные точки пространства $\tilde{R}$. В силу полноты пространства $\tilde{R}'$, каждый пучок пространства R состоит из последовательностей, сходящихся к некоторой точке $\xi' \in \tilde{R}'$, так что только что установленное соответствие есть взаимно однозначное соответствие между точками пространств $\tilde{R}'$ и $\tilde{R}$, при котором каждая точка из R соответствует самой себе. Более того, легко видеть, что полученное соответствие является изометричным. Наконец, если R' — какое-нибудь полное пространство, содержащее R, то замыкание множества R в R' есть полное пространство, содержащее пространство R уже в качестве всюду плотного множества, и потому изометричное пространству $\tilde{R}$. Теорема Хаусдорфа плотностью доказана.

Замечание. Взяв пространство рациональных чисел R и построив его пополнение $\tilde{R}$, можно было бы не принадлежащие пространству R точки пространства $\tilde{R}$ назвать иррациональными числами. При этом пришлось бы ввести следующие дальнейшие замечания и определения. Если дано иррациональное число ξ и рациональное число x, то, взяв в пучке ξ какую-нибудь фундаментальную последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

можно было бы легко доказать, что для всех достаточно больших n имеем либо $x_n > x$, либо $x_n < x$. В первом случае полагаем $\xi > x$, во втором $\xi < x$; при этом без труда доказывается, что результат не зависит от того, какую именно последовательность $\{x_n\} \in \xi$ мы взяли. Точно так же, если ξ' и ξ'' — два различных иррациональных числа, то при любом выборе последовательностей $\{x'_n\} \in \xi'$ и $\{x''_n\} \in \xi''$ имеем для всех достаточно больших n либо $x'_n < x''_n$, либо $x'_n > x''_n$. В первом случае полагаем $\xi' < \xi''$, во втором $\xi' > \xi''$; при этом результат снова не зависит от специального выбора последовательностей $\{x'_n\} \in \xi'$ и $\{x''_n\} \in \xi''$. Таким образом, в множестве всех действительных (т. е. рациональных и иррациональных) чисел устанавливается отношение порядка, удовлетворяющее, как можно доказать, обычным аксиомам.

Далее, как мы видели (формула (6)), всякая последовательность $\{x_n\}$, взятая из пучка ξ, сходится в $\tilde{R}$ к точке ξ; итак, всякое иррациональное число ξ есть предел некоторой последовательности рациональных чисел (а именно предел любой последовательности $\{x_n\} \in \xi$). Это позволяет определить *действия* над действительными числами: чтобы получить, например, сумму двух действительных чисел ξ' и ξ'', возьмём какие-нибудь последовательности $\{x'_n\} \in \xi'$, $\{x''_n\} \in \xi''$, сходящиеся соответственно к ξ', ξ'' (если при этом, например, ξ' рационально, то можно положить $x'_n = \xi'$ для всех n), и рассмотрим последовательность $\{x'_n + x''_n\}$. Эта последовательность оказывается фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому действительному числу, которое и называется суммой двух данных чисел ξ' и ξ''. Читателю предоставляется доказать, что таким образом определённые действия над действительными числами обладают всеми установленными в элементарной алгебре свойствами основных четырёх действий.

Намеченная в этом замечании теория иррациональных чисел известна под названием *теории Кантора* и с успехом может состязаться с более распространённой в учебниках дедекиндовой теорией в отношении своей простоты и естественности.

§ 7. Простейшие свойства полных метрических пространств

Мы уже видели, что всякое замкнутое множество в полном пространстве само является полным. Докажем некоторые дальнейшие свойства полных пространств.

Теорема 26. *В полном метрическом пространстве всякая последовательность убывающих замкнутых множеств*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots,$$

диаметры которых стремятся к нулю, имеет пересечение, состоящее из одной точки.

В самом деле, так как диаметры множеств Φ_n стремятся к нулю, то пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ во всяком случае не может содержать более одной точки. Беря в каждом из множеств Φ_n по точке x_n, получаем фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, предел которой содержится в $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$.

Теорема 27. *Если каждое из открытых множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ полного метрического пространства R плотно в R, то их пересечение $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ также плотно в R.*

Доказательство по существу тождественно с доказательством теоремы 28 главы 4. Сначала доказывается

Лемма. *Если открытое множество Γ плотно в метрическом пространстве R, то, каково бы ни было непустое открытое множество Γ_0, имеется открытое множество Γ' произвольно малого диаметра, замыкание которого содержится в $\Gamma \cap \Gamma_0$.*

В самом деле, так как Γ плотно в R, то $\Gamma \cap \Gamma_0$ — непустое открытое множество; всякая точка $x \in \Gamma \cap \Gamma_0$ имеет положительное расстояние ρ_x от дополнительного к $\Gamma \cap \Gamma_0$ замкнутого множества. Беря произвольно малое $\varepsilon < \rho_x$, видим, что замыкание ε-окрестности точки x содержится в $\Gamma \cap \Gamma_0$; лемма доказана.

Для доказательства теоремы 27 достаточно в любом открытом множестве Γ_0 найти точку множества $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Берём в силу леммы открытое Γ_1' диаметра < 1, удовлетворяющее условию $[\Gamma_1'] \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_0$. Предполагая, что построены открытые множества

$$\Gamma_0' = \Gamma_0, \Gamma_1', \ldots, \Gamma_n',$$

$\delta(\Gamma_k') < \frac{1}{k}$, при $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, удовлетворяющие условию

$$[\Gamma_k'] \subseteq \Gamma_k \cap \Gamma_{k-1}' \text{ (при } k = 1, 2, \ldots, n),$$

построим, на основании леммы, открытое Γ_{n+1}' диаметра $< \frac{1}{n+1}$ такое, что $[\Gamma_{n+1}'] \subseteq \Gamma_n \cap \Gamma_n'$. Пересечение $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n']$ непусто (состоит из одной точки) и содержится в $M \cap \Gamma_0$, что и требовалось доказать.

Понятия множеств первой и второй категории вводятся так же, как в главе 4, § 7; все доказанные там результаты опираются лишь на теорему 28 и потому остаются в силе, если заменить числовую прямую любым полным метрическим пространством.

Упражнение. Может ли в полном метрическом пространстве R счётное (или даже конечное) множество быть множеством второй категории и при каких условиях?

§ 8. Компактность и полнота. Теорема Урысона о погружении

Мы видели, что всякий компакт является полным пространством; ещё раньше (в § 1) было доказано, что всякий компакт вполне ограничен. Докажем теперь обратное предложение: всякое вполне ограниченное полное метрическое пространство является компактом. Этим будет доказана

Теорема 28. *Для того чтобы метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.*

Достаточно показать, что из всякой последовательности точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

вполне ограниченного пространства R можно выбрать фундаментальную подпоследовательность: в самом деле, если это утверждение будет доказано, то мы из любой последовательности (1) точек вполне ограниченного полного пространства R сможем выбрать фундаментальную, т. е. (вследствие полноты пространства R) сходящуюся подпоследовательность, а это и значит, что R — компакт.

Итак, пусть дана последовательность (1). Докажем сначала, что при любом $\varepsilon > 0$ из последовательности (1) можно выбрать бесконечную подпоследовательность диаметра $< \varepsilon$.

Доказательство не представляет затруднений: из полной ограниченности пространства R следует (лемма к теореме 6) возможность представить R в виде суммы конечного числа множеств диаметра $<\varepsilon$. По крайней мере одно из этих множеств содержит бесконечную подпоследовательность последовательности (1) и диаметр этой подпоследовательности, очевидно, $<\varepsilon$.

Основываясь на этом, можно из последовательности (1) выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{1_1}$$

диаметра <1; далее, из последовательности (1_1) можно выбрать подпоследовательность

$$x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_i}}, \ldots \tag{1_2}$$

диаметра $<\frac{1}{2}$, из последовательности (1_2) — подпоследовательность (1_3) диаметра $<\frac{1}{3}$ и т. д. «Диагональная» последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_{k_2}}, \ldots {}^{*)} \tag{2}$$

обладает тем свойством, что совокупность её членов, начиная с m-го, является подпоследовательностью последовательности (1_m) и потому имеет диаметр $<\frac{1}{m}$. Отсюда следует, что подпоследовательность (2) последовательности (1) есть фундаментальная последовательность, что и требовалось доказать.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 мы показали, что во всяком не вполне ограниченном пространстве существует такая бесконечная последовательность (1), что расстояние между любыми двумя различными её элементами больше некоторого $\varepsilon>0$. Последовательность (1), обладающая этим свойством, очевидно, не может содержать никакой фундаментальной подпоследовательности. Итак, имеет место

Теорема 29. *Для того чтобы метрическое пространство было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы из всякой бесконечной последова-*

---

*) Третий член этой последовательности есть x с индексом $n_{k_{i_3}}$ и т. д.

тельности точек этого пространства можно было выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Замечание 2. При помощи теоремы 28 легко доказывается компактность гильбертова кирпича Q (§ 2 главы 6). Так как Q, как легко видеть, представляет собою замкнутое множество в гильбертовом пространстве и, следовательно, является полным пространством, то достаточно доказать, что Q обладает свойством полной ограниченности, т. е. при каждом $\varepsilon > 0$ содержит ε-сеть. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмём n столь большим, чтобы было $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, и рассмотрим лежащий в Q евклидов n-мерный параллелепипед Q^n, состоящий из всех точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in Q$, удовлетворяющих условию $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$. Очевидно, для каждой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in Q$ точка $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in Q^n$ отстоит от x на расстояние

$$<\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} < \sqrt{\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что всякая $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в Q^n будет вместе с тем и ε-сетью в Q, чем полная ограниченность пространства Q доказана.

Замечание 3. В Прибавлении к предыдущей главе мы доказали теорему Урысона о том, что всякое метрическое пространство со счётным всюду плотным множеством гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в гильбертовом кирпиче. Однако теорема эта была получена как следствие из более общей теоремы, касающейся топологических пространств. Поэтому целесообразно дать здесь второе (также принадлежащее Урысону) доказательство этой теоремы, не пользующееся понятием топологического пространства.

Теорема Урысона. *Всякое метрическое пространство со счётным всюду плотным множеством гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в гильбертовом кирпиче Q.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что всякое метрическое пространство X гомеоморфно метрическому пространству X' диаметра $\leqslant 1$: пространство X' строим из тех же точек, что и пространство X, но с другим определением расстояния, а именно, если расстояние между точками x_1 и x_2 в X есть $\rho(x_1, x_2)$, то расстояние между этими же точками в X' определяем по формуле

$$\rho'(x_1, x_2) = \frac{\rho(x_1, x_2)}{1+\rho(x_1, x_2)}.$$

Тождественное отображение пространства X на X' есть отображение топологическое, так как условия $\rho(x, x_n) \to 0$ и $\rho'(x, x_n) \to 0$ эквивалентны между собою.

Итак, при доказательстве теоремы Урысона можно с самого начала предположить, что данное метрическое пространство X имеет диаметр $\leqslant 1$. В X, по предположению, имеется счётное всюду плотное множество A, точки которого обозначим через

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{3}$$

Положим теперь для любой точки $x \in X$

$$t_n(x) = \frac{1}{2^n}\rho(x, a_n)$$

и поставим в соответствие точки $x \in X$ точку

$$y = f(x) = (t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x), \ldots) \in Q.$$

Этим определится отображение f пространства X на некоторое множество $Y \subseteq Q$.

Отображение f взаимно однозначно. В самом деле, пусть x и x' — две различные точки пространства X. Так как множество A всюду плотно в X, то найдётся точка $a_n \in A$ такая, что $\rho(x, a_n) < \frac{1}{2}\rho(x, x')$. Тогда непременно $\rho(x', a_n) > \frac{1}{2}\rho(x, x')$ и, значит, $t_n(x) < t_n(x')$, а потому $f(x) \neq f(x')$.

Отображение f непрерывно. Мы докажем, более того, что из $\rho(x, x') < \varepsilon$ следует $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$ и, значит, отображение f даже равномерно непрерывно.

В самом деле, из аксиомы треугольника вытекает, что для любого n

$$|\rho(x, a_n) - \rho(x', a_n)| \leqslant \rho(x, x') < \varepsilon,$$

т. е.

$$|t_n(x) - t_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

значит,

$$\rho(f(x), f(x')) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (t_n(x) - t_n(x'))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{2^{2n}}} < \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} < \varepsilon,$$

чем наше утверждение доказано.

Докажем, наконец, что и обратное отображение f^{-1} множества Y на множество X непрерывно, т. е. что f^{-1} непрерывно в каждой точке $y \in Y$ (равномерную непрерывность здесь, вообще говоря, утверждать нельзя). Пусть $f^{-1}(y) = x$ и пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется подобрать такое $\delta > 0$, чтобы при $y' \in U(y, \delta)$ было $x' = f^{-1}(y') \in U(x, \varepsilon)$. Возьмём $a_n \in A$ так, чтобы $\rho(x, a_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Утверждаю, что $\delta = \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}$ есть искомое δ. В самом деле, если $\rho(y, y') < \delta$, то и подавно $|t_n(x) - t_n(x')| < \delta$, значит,

$$|\rho(x, a_n) - \rho(x', a_n)| < 2^n \delta = \frac{\varepsilon}{3},$$

т. е.

$$\rho(x', a_n) < \rho(x, a_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

и по аксиоме треугольника

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x, a_n) + \rho(a_n, x') < \\ < 2\rho(x, a_n) + \frac{\varepsilon}{3} < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема Урысона позволяет при изучении топологических свойств метрических пространств со счётной базой рассматривать эти пространства как множества, лежащие в компактах, и даже как множества, лежащие в одном и том же компакте, а именно в гильбертовом кирпиче.

§ 9. Локально компактные метрические пространства

Наряду с полными метрическими пространствами очень важным классом пространств, более общих, чем компакты, является класс локально компактных пространств. Мы говорим, что метрическое пространство R *компактно в точке* $x \in R$ (или имеет точку x своей *точкой локальной компактности*), если у точки x существует окрестность $U(x)$, замыкание $R[U(x)]$ которой есть компакт; пространство R называется *локально компактным*, если каждая его точка есть точка локальной компактности.

Всякий компакт, очевидно, обладает свойством локальной компактности. Примером локально компактного пространства, не являющегося компактом, может служить числовая прямая и вообще евклидово пространство любого числа измерений. Гильбертово пространство R^∞ ни в какой своей точке не компактно *).

Основным предметом этого параграфа являются локально компактные пространства со счётной базой. Мы начнём, однако, с некоторых замечаний, касающихся множества точек локальной компактности любого метрического пространства. Прежде всего имеет место

---

*) В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в ε-окрестности любой точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ можно найти расходящуюся последовательность, например последовательность $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m, \ldots$, где $x_m = \left(a_1, a_2, \ldots, a_m + \frac{\varepsilon}{2}, a_{m+1}, \ldots\right)$. Гильбертово пространство является примером полного, но не локально компактного пространства. С другой стороны, любой интервал числовой прямой может служить примером локально компактного неполного пространства. Однако всякое локально компактное метрическое пространство гомеоморфно некоторому полному пространству: мы сейчас увидим (теорема 33), что локально компактные пространства гомеоморфны открытым множествам, лежащим в компактах; с другой стороны, всякое множество типа G_δ (следовательно, и подавно, всякое открытое множество) любого компакта (даже любого полного пространства) гомеоморфно полному пространству (см. Хаусдорф, Теория множеств, § 36, теорема I на стр. 215).

Теорема 30. *Множество* Γ *всех точек локальной компактности произвольного пространства* R *есть открытое в* R (*быть может, пустое*) *множество, являющееся локально компактным пространством.*

В самом деле, для любой точки $x \in \Gamma$ существует окрестность $U(x)$ (относительно R), замыкание которой $R[U(x)]$ есть компакт. Отсюда сразу следует, что всякая точка $x' \in U(x)$ есть точка локальной компактности пространства, т. е. $U(x) \subseteq \Gamma$, значит Γ открыто в R. Выбрав окрестность $U_1(x)$ так, чтобы $R[U_1(x)] \subseteq U(x)$, видим, что замыкание окрестности $U_1(x)$ в Γ совпадает с её замыканием в R и является компактом, откуда и следует, что Γ есть локально компактное пространство.

Существенным усилением первого утверждения теоремы 30 является

Теорема 31. *Пусть* M — *какое-нибудь множество, лежащее в метрическом пространстве* R. *Рассматривая* M *как пространство, обозначим через* Γ *множество точек локальной компактности пространства* M. *Множество* Γ *открыто в замыкании* $A = R[M]$ *множества* M.

(Полагая $M = R$, получим первое утверждение теоремы 30.)

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x \in \Gamma$ и обозначим через $U = U(x)$ окрестность точки x (относительно M), замыкание которой $[U]$ в M есть компакт. Так как $[U]$, будучи компактом, замкнуто во всяком объемлющем метрическом пространстве, в частности и в A, то $[U]$ является замыканием множества U не только в M, но и в A. Докажем, что U открыто в A: этим будет доказано, что произвольная точка $x \in \Gamma$ есть внутренняя (по отношению к A) точка, т. е. что Γ открыто в A. Для того чтобы убедиться в том, что U открыто в A, достаточно показать, что

$$A[A \setminus U] \cap U = \Lambda.$$

Но

$$A \setminus U = (A \setminus [U]) \cup ([U] \setminus U).$$

Множество $[U] \setminus U$ есть компакт и потому совпадает со своим замыканием в любом объемлющем пространстве, в том числе и в A. Поэтому $A[[U] \setminus U] = [U] \setminus U$ и не имеет общих точек с U. Остаётся показать, что

$$A[A\setminus[U]]\cap U=\Lambda.$$

Но $A\setminus[U]$ открыто в A, а M всюду плотно в A. Поэтому $M\cap(A\setminus[U])=M\setminus[U]$ плотно в $A\setminus[U]$ и, значит,

$$A[A\setminus[U]]=A[M\setminus[U]]. \tag{1}$$

Докажем, что

$$A[M\setminus[U]]\cap U=M[M\setminus[U]]\cap U. \tag{2}$$

Правая часть, очевидно, содержится в левой. Но любая точка левой части, будучи принадлежащей U, значит, и подавно принадлежащей M точкой прикосновения множества $M\setminus[U]$, содержится в правой части, чем тождество (2) доказано. Так как $M\setminus[U]$ и U суть непересекающиеся открытые в M множества, то $M[M\setminus[U]]\cap U=\Lambda$, значит (в силу (1) и (2)), $A[A\setminus[U]]\cap U=\Lambda$, что и требовалось доказать.

Очень легко доказывается

Теорема 32. *Всякое открытое множество* Γ *компакта* Φ *есть локально компактное пространство со счётной базой.*

В самом деле, беря для точки $x\in\Gamma$ окрестность $U(x)\subseteq\Gamma$, а затем окрестность $U_1(x)$ такую, чтобы $\Phi[U_1(x)]\subseteq U(x)$, видим, что $\Phi[U_1(x)]=\Gamma[U_1(x)]$ есть компакт, чем и доказана локальная компактность пространства Γ. Так как Φ, как всякий компакт, имеет счётную базу, то тем же свойством обладает и любое множество, лежащее в Φ, в частности и Γ. Теорема 32 доказана.

Из теорем 31 и 32 следует весьма важная

Теорема 32'. *Для того чтобы множество* M, *лежащее в компакте* Φ, *было локально компактным пространством, необходимо и достаточно, чтобы* M *было открыто в своём замыкании* $\Phi[M]$.

Действительно, если M локально компактно, то, полагая в формулировке теоремы 31 $M=\Gamma$, заключаем, что M открыто в $A=\Phi[M]$.

Обратно, если известно, что M открыто в $A=\Phi[M]$, то множество M, как открытое множество компакта A, является по теореме 32' локально компактным.

Из теорем 32 и 32′ следует далее

Теорема 33. *Для того чтобы метрическое пространство R было локально компактным пространством со счётной базой, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно открытому множеству* Γ *некоторого компакта* Φ.

В самом деле, если R гомеоморфно открытому множеству Γ компакта Φ, то, по теореме 32, Γ — локально компактное пространство со счётной базой. А так как и наличие счётной базы, и локальная компактность при топологических отображениях сохраняются, то этими свойствами обладает и пространство R. Обратно, если R — локально компактное пространство со счётной базой, то его топологический образ в гильбертовом кирпиче есть локально компактное пространство, и значит, по теореме 32′, открыто в своём замыкании Φ. Так как Φ, как замкнутое множество компакта Q, само есть компакт, то теорема доказана.

В заключение этого параграфа докажем следующую теорему:

Теорема 34. *Для того чтобы метрическое пространство R было локально компактным пространством со счётной базой, необходимо и достаточно, чтобы R могло быть представлено как сумма счётной последовательности растущих компактов:*

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \qquad \Phi_n \subseteq \Phi_{n+1},$$

таким образом, чтобы каждая точка x была внутренней точкой некоторого Φ_n.

Условие необходимо. В самом деле, пусть R — локально компактное пространство со счётной базой, элементы которой обозначим через

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots \tag{3}$$

Пусть x — произвольная точка пространства R и $U(x)$ — окрестность этой точки, имеющая компактное замыкание $R[U(x)]$. Существует U_n из базы (3), удовлетворяющее включениям $x \in U_n \subseteq U(x)$. Тогда замыкание $R[U_n]$ (как замкнутое множество компакта $R[U(x)]$) есть компакт.

Таким образом, каждая точка x содержится в некотором U_n из (3), имеющем компактное замыкание. Сохраним в (3) лишь элементы с компактным замыканием*) и занумеруем их заново в последовательность (3). Положим

$$\Phi_n = R[U_1 \cup \ldots \cup U_n] = R[U_1] \cup \ldots \cup R[U_n].$$

Множества Φ_n суть растущие компакты. Так как каждая точка x содержится в некотором $U_n \subseteq \Phi_n$, то она является внутренней точкой этого Φ_n. Необходимость нашего условия доказана.

Достаточность очевидна: если R есть сумма растущих компактов Φ_n и каждая точка x есть внутренняя точка некоторого из этих Φ_n, то, беря окрестность $U(x) \subseteq \Phi_n$, видим, что её замыкание есть компакт. Таким образом, R локально компактно. Так как в каждом Φ_n имеется счётное всюду плотное множество D_n, то в R всюду плотное счётное множество $D = \bigcup\limits_n D_n$, так что R есть пространство со счётной базой. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие:

а) Всякая точка x есть внутренняя точка некоторого Φ_n эквивалентно условию:

б) Всякая последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \quad \text{где } x_n \in R \setminus \Phi_n, \tag{4}$$

есть последовательность расходящаяся.

В самом деле, если выполнено условие (а) и $U(x)$ есть окрестность какой-нибудь точки $x \in R$, содержащаяся в Φ_n, то $U(x)$ может содержать не более чем n первых точек последовательности (4), так что никакая точка x не может быть пределом какой-либо подпоследовательности последовательности (4); значит, эта последовательность расходится и условие б) выполнено. Обратно, если условие а) не выполнено, так что точка x не есть внутренняя точка никакого множества Φ_n, то, беря последовательность $\varepsilon_n \to 0$, мы в каждой $U(x, \varepsilon_n)$ находим точку $x_n \in R \setminus \Phi_n$; полученная последовательность (4) сходится к точке x, так что условие б) также оказывается невыполненным.

---

*) Легко видеть, что они также образуют базу пространства; однако, мы этим пользоваться не будем.

§ 10. Множества, являющиеся одновременно множествами F_σ и G_δ в компактных метрических пространствах.

Пусть R — какое-либо метрическое пространство со счётной базой. Мы уже заметили, что множество Γ всех точек локальной компактности пространства R открыто в R (и локально компактно).

Положим теперь $R_0 = R$, $\Gamma_0 = \Gamma$ и предположим, что замкнутые в R множества R_ξ построены для всех порядковых чисел ξ, меньших чем данное порядковое число α. Если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, то, обозначая через $\Gamma_{\alpha'}$ открытое в $R_{\alpha'}$ множество всех точек локальной компактности пространства $R_{\alpha'}$, полагаем $R_\alpha = R_{\alpha'} \setminus \Gamma_{\alpha'}$. Если же α — второго рода, то полагаем

$$R_\alpha = \bigcap_{\alpha' < \alpha} R_{\alpha'}.$$

Таким образом, пробегая все порядковые числа $\alpha < \omega_1$, получаем вполне упорядоченную систему убывающих замкнутых множеств R_α; множество R_α называется *вычетом порядка* α *пространства* R.

В силу теоремы Бэра-Хаусдорфа (теорема 53 предыдущей главы) имеется первое порядковое число $\rho < \omega_1$, для которого $R_\rho = R_{\rho+1}$, а тогда, очевидно, и $R_\rho = R_{\rho+1} = R_{\rho+2} = \ldots$ Множество R_ρ (первое в ряду $\{R_\alpha\}$, с которого начинается совпадение) называется *последним вычетом* пространства R. Если этот последний вычет пуст, то пространство R называется *приводимым*, а соответствующее порядковое число ρ — *классом приводимости* (или просто *классом*) пространства R. Очевидно, всякое метрическое пространство, гомеоморфное приводимому пространству, само приводимо (класс приводимых пространств есть топологически-инвариантный класс). Очевидно также, что два гомеоморфных приводимых пространства имеют один и тот же класс.

Имеет место

Теорема 35. *Для того чтобы множество M, лежащее в компакте Φ, было одновременно множеством типа F_σ и типа G_δ, необходимо и достаточно, чтобы пространство M было приводимо.*

Отсюда и из только что сделанного замечания о топологической инвариантности класса приводимых пространств вытекают:

Следствие 1. *Пусть R — метрическое пространство со счётной базой, M — топологический образ пространства R в каком-либо компакте Φ (например, в гильбертовом кирпиче). Для того чтобы M было в Φ одновременно типа F_σ и G_δ, необходимо и достаточно, чтобы R было приводимо.*

Следствие 2. *Если A и A' — два гомеоморфных между собою множества, лежащих, соответственно, в компактах Φ и Φ', и если A есть в пространстве Φ множество типа F_σ и*

G_δ, то тем же свойством обладает и множество A' по отношению к компакту Φ' (теорема о топологической инвариантности множеств, являющихся одновременно множествами типа F_σ и G_δ в компактах).

Доказательство теоремы 35. Введём следующее вспомогательное понятие. Назовём цепным представлением множества M, лежащего в каком-либо пространстве R, всякое представление вида

$$M=\bigcup_{\xi<\alpha}(P_\xi\setminus Q_\xi),$$

где ξ пробегает все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\alpha<\omega_1$, а P_ξ, Q_ξ суть замкнутые множества пространства R, удовлетворяющие цепи включений:

$$P_0\supseteq Q_0\supseteq P_1\supseteq Q_1\supseteq\ldots\supseteq P_\xi\supseteq Q_\xi\supseteq P_{\xi+1}\supseteq Q_{\xi+1}\supseteq\ldots \tag{1}$$

Назовём свойством I свойство какого-либо множества M, лежащего в данном компакте Φ, быть приводимым; свойством II — свойство допускать цепное представление; наконец, свойством III — свойство множества M быть одновременно множеством типа F_σ и G_δ (в Φ). Обозначая стрелкой логическое следование одного свойства из другого, докажем отношения

$$\mathrm{I}\to\mathrm{II}\to\mathrm{III}\to\mathrm{I},$$

из которых вытекает эквивалентность всех трёх свойств I, II, III, а значит и теорема 35.

Доказательство отношения I → II. Пусть M приводимо. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned}&M=M_0\supset M_1\supset\ldots\supset M_\alpha\supset\ldots\supset M_\rho=\Lambda,\\&\Gamma_\alpha=M_\alpha\setminus M_{\alpha+1}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(где Γ_α — множество всех точек локальной компактности множества M_α) и

$$M=\bigcup_{\alpha<\rho}\Gamma_\alpha. \tag{3}$$

По теореме 31 Γ_α открыто в $[M_\alpha]$ (замыкание в Φ); поэтому $\Phi_{\alpha+1}=[M_\alpha]\setminus\Gamma_\alpha$ замкнуто в $[M_\alpha]$, следовательно, и в Φ, и

$$\Gamma_\alpha=[M_\alpha]\setminus\Phi_{\alpha+1}. \tag{4}$$

Так как

$$\Gamma_\alpha=M_\alpha\setminus M_{\alpha+1}$$

и $M_\alpha\subseteq[M_\alpha]$, то $M_{\alpha+1}\subseteq\Phi_{\alpha+1}$, значит, и $[M_{\alpha+1}]\subseteq\Phi_{\alpha+1}$, т. е.

$$[M^\alpha]\supset\Phi_{\alpha+1}\supseteq[M_{\alpha+1}]. \tag{5}$$

Компакты $\Phi_{\alpha+1}$ определены для всех порядковых чисел вида $\alpha+1<\rho$; для предельных трансфинитов λ полагаем

$$\Phi_\lambda=[M_\lambda]\subseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}[M_\alpha]=\bigcap_{\alpha+1<\lambda}\Phi_{\alpha+1}.$$

Имеем:

$$M=\bigcup_{\alpha<\rho}\Gamma_\alpha=\bigcup_{\alpha<\rho}([M_\alpha]\setminus\Phi_{\alpha+1}),$$

откуда и следует, что M обладает свойством II.

Доказательство отношения II $\to$ III. Пусть

$$M=\bigcup_{1\leqslant\xi<\alpha}(P_\xi\setminus Q_\xi),$$

т. е.

$$M=(P_1\setminus Q_1)\cup(P_2\setminus Q_2)\cup\ldots\cup(P_\xi\setminus Q_\xi)\cup\ldots$$

(причём цепь включений (1) предполагается выполненной *). Каждое слагаемое $P_\xi\setminus Q_\xi$, будучи открытым множеством метрического пространства P_ξ, есть F_σ (в Φ), следовательно, и M есть F_σ (в Φ). Но, полагая $Q_0=R$, имеем:

$$R\setminus M=(Q_0\setminus P_1)\cup(Q_1\setminus P_2)\cup\ldots\cup(Q_\xi\setminus P_{\xi+1})\cup\ldots=$$
$$=\bigcup_{\xi<\alpha}(Q_\xi\setminus P_{\xi+1}),$$

т. е. $R\setminus M$ также обладает свойством II и, значит, по только что доказанному, есть F_σ. Так как $R\setminus M$ есть F_σ, то M (будучи F_σ) есть в то же время и G_δ. Утверждение доказано.

Доказательство отношения III $\to$ I. Пусть множество M есть одновременно F_σ и G_δ в компакте Φ; рассмотрим систему всех вычетов M_α множества M, $M_\alpha\setminus M_{\alpha+1}=\Gamma_\alpha$. Нам нужно доказать, что последний вычет M_ρ есть пустое множество. Предположим противное и докажем две леммы.

Лемма 1. *Если N есть одновременно F_σ и G_δ в метрическом пространстве R, а F замкнуто в N, то и F есть одновременно F_σ и G_δ в R.*

В самом деле, так как $N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, где A_n замкнуты в R и F замкнуто в N, то существует замкнутое в R множество A такое, что

$$F=A\cap N=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A);$$

*) При этом, как легко убедиться, без ограничения общности, можно считать, что для любого трансфинита λ второго рода имеет место: $P_\lambda=\bigcap\limits_{\xi<\lambda}P_\xi$. Мы и будем предполагать это условие выполненным.

так как $A_n \cap A$ замкнуты в R, то F есть F_σ в R. С другой стороны, так как A, будучи замкнутым в R, есть G_σ в R, то существуют открытые в R множества G_n такие, что $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Но и N, будучи G_δ в R, есть пересечение счётного числа открытых в R множеств Γ_m. Поэтому

$$F = A \cap N = (\bigcap_n G_n) \cap (\bigcap_m \Gamma_m),$$

откуда следует, что F есть G_δ в R.

Лемма 2. *Если N есть одновременно F_σ и G_δ в R и $R \supseteq E \supseteq N$, то N есть одновременно F_σ и G_δ в E.*

В самом деле, по предположению, $N = \bigcap_n G_n = \bigcup_n A_n$, где A_n замкнуты, а G_n открыты в R. Так как $N \subseteq E$, то

$$N = E \cap N = \bigcap_n (E \cap G_n) = \bigcup_n (E \cap A_n),$$

откуда и вытекает, что N есть G_δ и F_σ в E.

Вернёмся к рассмотрению последнего вычета M_ρ множества M и предположим, что $M_\rho \neq \Lambda$. Так как M_ρ замкнуто в M, а M есть F_σ и G_δ в Φ, то по лемме 1 M_ρ есть одновременно F_σ и G_δ в Φ. Положим

$$B = [M_\rho] \setminus M_\rho$$

(если не оговорено противное, то замыкание везде в этом доказательстве берётся в Φ). Утверждаю, что

$$M_\rho \subseteq [B]. \tag{6}$$

Для этого заметим, что множество M_ρ, будучи последним вычетом множества M, не имеет ни одной точки локальной компактности (иначе множество Γ_ρ было бы не пусто, и мы имели бы $M_{\rho+1} = M_\rho \setminus \Gamma_\rho \subset M_\rho$). Если бы включение (6) не имело места, то существовала бы точка $x \in M_\rho$, не предельная для $B = [M_\rho] \setminus M_\rho$ и, следовательно, внутренняя к M_ρ по отношению к компакту $\Phi_\rho = [M_\rho]$. Но тогда, беря окрестность $U(x)$ так, чтобы замыкание (в Φ_ρ) этой окрестности лежало в M_ρ, мы убедились бы в том, что x есть точка локальной компактности множества M_ρ, чего не может быть.

Переписывая теперь очевидное равенство

$$[[M_\rho] \setminus M_\rho] \setminus ([M_\rho] \setminus M_\rho) = M_\rho \cap [[M_\rho] \setminus M_\rho]$$

в виде

$$[B] \setminus B = M_\rho \cap [B]$$

и пользуясь включением (6), имеем:

$$[B] \setminus B = M_\rho,$$

т. е. $[B] \supset M_\rho$, $[B] \supseteq [M_\rho]$. Но с другой стороны, очевидно, $[B] \subseteq [M_\rho]$. Итак, $[B] = [M_\rho]$. Другими словами, взаимно дополнительные по отношению к компакту $[M_\rho]$ множества M_ρ и B оба всюду плотны в компакте $[M_\rho]$. Но тогда оба эти множества не могут быть одновременно множествами типа G_δ в $[M_\rho]$; между тем множество M_ρ, будучи одновременно F_σ и G_δ в Φ, по лемме 2, является одновременно F_σ и G_δ и в замкнутом $[M_\rho]$, откуда следует, что $B = [M_\rho] \setminus M_\rho$ также есть G_δ в $[M_\rho]$. Теорема 35 полностью доказана.

Замечание. Можно построить приводимое множество (даже состоящее из рациональных чисел), классом которого является любое наперёд заданное порядковое число $\alpha < \omega_1$. В самом деле, возьмём какое-либо вполне упорядоченное множество M, состоящее из рационалных чисел отрезка $[0; 1]$ и такое, что его α-я производная (см. главу VI, § 11, стр, 276) состоит из одной последней точки. Нетрудно убедиться, что для любого $\alpha < \omega_1$ такие множества существуют. Обозначим через $M^{(\xi)}$ производную порядка ξ множества M и положим *)

$$N = (M \setminus M^{(1)}) \cup (M^{(2)} \setminus M^{(3)}) \cup \ldots \cup (M^{(2\lambda)} \setminus M^{(2\lambda+1)}) \cup \ldots$$

(где $\lambda < \alpha$). Предоставляем читателю доказать, что

$$N_\xi = (M^{(2\xi)} \setminus M^{(2\xi+1)}) \cup (M^{(2\xi+2)} \setminus M^{(2\xi+3)}) \cup \ldots,$$

откуда следует, что класс множества N есть α.

Теорема 36. *Для того чтобы метрическое пространство со счётной базой было приводимым, необходимо и достаточно, чтобы каждое непустое замкнутое в R множество имело хотя бы одну точку локальной компактности.*

Условие необходимо. В самом деле, пусть R приводимо и A — непустое замкнутое в R множество. Рассмотрим вполне упорядоченную систему всех вычетов R_α, $\alpha \leqslant \rho$, пространства R. Так как $\bigcap\limits_{\alpha \leqslant \rho} R_\alpha = \Lambda$, то для любой точки $x \in R$ существует наименьшее порядковое число $\alpha(x)$ такое, что x не содержится в $R_{\alpha(x)}$. Очевидно, $\alpha(x)$ — первого рода. Пусть $\alpha_0 = \alpha(x_0) = \gamma + 1$

---

*) Среди всех порядковых чисел $\alpha < \omega_1$ «чётными» (т. е. допускающими представление вида $\alpha = 2\eta$, где η — какое-нибудь порядковое число $< \omega_1$) являются все числа λ второго рода, $\lambda < \omega_1$ и все числа первого рода вида $\lambda + 2n$, где λ — число второго рода, $\lambda < \omega_1$, а n — натуральное число. В самом деле

$$\lambda = 2\lambda, \quad \lambda + 2n = 2(\lambda + n).$$

есть наименьшее среди всех чисел $\alpha(x)$, построенных для всевозможных $x \in A$. Тогда $A \subseteq R_\gamma$. Так как x_0 не содержится в $R_{\gamma+1}$, то x_0 есть точка локальной компактности пространства R_γ, а следовательно, и замкнутого в этом пространстве множества A.

Условие достаточно. Так как последний вычет R_ρ пространства R есть замкнутое множество, не содержащее точек локальной компактности, то из нашего условия следует, что $R_\rho = \Lambda$, что и требовалось доказать.

Выведем из доказанных результатов следующее предложение:

Теорема 37. *Для того чтобы счётное множество M, лежащее в компакте Φ, было множеством типа G_δ в Φ, необходимо и достаточно, чтобы Φ было разрозненным (т. е. не содержало непустого плотного в себе подмножества).*

В самом деле, если M разрознено, то всякое непустое подмножество множества M содержит изолированные точки, являющиеся, очевидно, точками локальной компактности. Поэтому, в силу теоремы 36, множество M приводимо, а поэтому, по теореме 35, является множеством G_δ.

Обратно, если счётное множество M есть G_δ в Φ, то, будучи (как всякое счётное множество) и множеством F_σ, оно приводимо. Пусть теперь A — плотное в себе подмножество множества M; докажем, что A пусто. Так как замыкание множества A в M также плотно в себе, то можно с самого начала предположить, что A замкнуто в M. Так как M приводимо, то A содержит точку локальной компактности x_0. Пусть $U(x_0) = \Gamma$ есть окрестность точки x_0 с компактным замыканием $M[\Gamma]$. Так как Γ (как открытое подмножество плотного в себе множества A) плотно в себе, то и компакт $M[\Gamma]$ не содержит изолированных точек, а потому имеет мощность континуума, что противоречит тому, что $M[\Gamma]$ есть подмножество счётного множества M. Теорема 37 доказана.

ПРИБАВЛЕНИЯ К ГЛАВЕ СЕДЬМОЙ

ПЕРВОЕ ПРИБАВЛЕНИЕ

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В § 1 этой главы было доказано (теорема 7), что компактность метрического пространства вполне характеризуется тем, что в данном пространстве выполнена теорема Бореля-Лебега. Другими словами, свойство, составляющее утверждение этой теоремы, может быть принято за определение компактности метрического пространства. Перенося это же свойство на топологические пространства, мы получаем следующее основное

Определение 1. Топологическое пространство R называется *бикомпактным*, если всякая система его открытых множеств, являющаяся покрытием пространства R, содержит конечную подсистему, обладающую тем же свойством.

Теорема 7 этой главы может теперь быть сформулирована так: *Для метрических пространств понятие бикомпактности совпадает с понятием компактности*.

Топологическое пространство R называется *компактным*, если в нём каждое бесконечное множество имеет предельную точку *).

*) Многие авторы называют *компактными* топологические пространства, бикомпактные в нашем смысле. Эта терминология оправдана тем, что аналогом компактных метрических пространств среди топологических пространств действительно являются бикомпактные пространства. В этой книге мы будем, однако, придерживаться исторически сложившейся терминологии.

Замечание 1. Из компактности топологического пространства R, вообще говоря, не следует, что каждая бесконечная последовательность точек пространства R содержит сходящуюся подпоследовательность: существуют примеры компактных (и бикомпактных) хаусдорфовых пространств, в которых нет ни одной нестационарной сходящейся последовательности.

Докажем, что свойство компактности топологического пространства R эквивалентно каждому из следующих свойств:

б) Всякая последовательность непустых убывающих замкнутых множеств

$$\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots \tag{1}$$

пространства R имеет непустое пересечение.

в) Всякая счётная система открытых множеств, являющаяся покрытием пространства R, содержит конечную подсистему, обладающую тем же свойством*).

Докажем прежде всего, что всякое компактное топологическое пространство обладает свойством б). Пусть дана последовательность (1) непустых замкнутых множеств. Если все множества (1), начиная с некоторого, положим с Φ_m, совпадают между собою, то $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Phi_n = \Phi_m$. Если же нет такого m, то легко выделить из последовательности (1) бесконечную подпоследовательность, все элементы которой различны. Предполагая, что этот выбор уже сделан, считаем, что все Φ_n в (1) различны. Берём для каждого n точку $x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$. Полученное бесконечное множество $X = \{x_n\}$ имеет, по предположению, предельную точку ξ. Точка ξ принадлежит всем Φ_n, так как если бы она не принадлежала, например, множеству Φ_m, то окрестность $R \setminus \Phi_m$ точки ξ содержала бы лишь первые m точек x_n, вопреки тому, что ξ — предельная точка множества X.

Обратно, если пространство R не компактно, то в нём существует бесконечное множество X, не имеющее ни одной предельной точки. Беря счётное подмножество $X_0 \subseteq X$, состоящее из точек

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots,$$

*) В этой номенклатуре свойством а) удобно назвать само свойство компактности.

и полагая $\Phi_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, получим убывающую последовательность замкнутых множеств Φ_n, имеющую пустое пересечение. Итак, свойство компактности (свойство а)) эквивалентно свойству б).

Докажем теперь, что свойства б) и в) эквивалентны между собою. Пусть свойство б) выполнено. Рассмотрим какое-нибудь покрытие Σ пространства R, состоящее из счётного числа открытых множеств

$$G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots \tag{2}$$

Положим $\Gamma_n = G_0 \cup \ldots \cup G_n$, $\Phi_n = R \setminus \Gamma_n$. Тогда имеем счётную последовательность убывающих замкнутых множеств (1) с пустым пересечением. Поэтому среди множеств Φ_n имеются пустые. Пусть $\Phi_m = \Lambda$. Тогда $\Gamma_m = G_0 \cup \ldots \cup G_m = R$ и $\{G_0, \ldots, G_m\}$ есть искомая подсистема системы (2). Обратно, пусть свойство б) не имеет места, так что некоторая последовательность (1) непустых замкнутых множеств имеет пустое пересечение. Тогда, полагая $G_n = R \setminus \Phi_n$, видим, что система (2) покрывает пространство R. Если дана конечная подсистема $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_s}\}$ системы (2) и $n_1 < \ldots < n_s$, то $G_{n_1} \subseteq \ldots \subseteq G_{n_s}$, так что $G_{n_1} \cup \ldots \cup G_{n_s} = G_{n_s} \neq R$ и условие в) не выполнено.

Из доказанного вытекает первое утверждение следующей теоремы:

Теорема 1. *Всякое бикомпактное топологическое пространство компактно. Для пространств со счётной базой понятия компактности и бикомпактности совпадают.*

Остаётся доказать, что всякое компактное топологическое пространство R со счётной базой бикомпактно. Пусть $\Sigma = \{G_\alpha\}$ есть система открытых множеств пространства R, покрывающая это пространство. В силу теоремы 52 главы 6, из системы Σ можно выделить счётную подсистему Σ_0, покрывающую пространство R. Согласно условию в) (выполненному в силу компактности пространства R), из Σ_0 можно выделить конечное покрытие Σ_1, которое и является нужной нам конечной подсистемой системы Σ.

Определение 2. Точка ξ топологического пространства R называется *точкой полного накопления* данного множества $M \subseteq R$, если пересечение множества M с любой окрестностью точки ξ имеет ту же мощность, что и всё множество M.

Докажем теперь следующую основную теорему:

Теорема 2. *Свойство бикомпактности топологического пространства (которое назовём* свойством (В)) *эквивалентно каждому из следующих свойств:*

Свойство (А). *Всякое бесконечное множество M имеет в пространстве R хотя бы одну точку полного накопления.*

Свойство (Б). *Всякая вполне упорядоченная система непустых убывающих замкнутых множеств*

$$\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_\alpha \supseteq \ldots \tag{3}$$

пространства R имеет непустое пересечение.

Доказательство теоремы 2. Назовём какую-либо систему множеств *центрированной*, если любое конечное число множеств, являющихся элементами этой системы, имеет непустое пересечение. Введя это определение и помня, что открытые и замкнутые множества пространства R являются взаимно дополнительными и что дополнение к сумме множеств есть пересечение дополнений к этим множествам, а дополнение к пересечению множеств есть сумма дополнений к этим множествам, мы без труда убеждаемся в том, что свойство (В) (т. е. свойство бикомпактности пространства R) эквивалентно следующему свойству:

(В′) *Всякая центрированная система замкнутых множеств пространства R имеет непустое пересечение.*

Поэтому достаточно доказать, что

$$(А) \to (Б) \to (В'), \ (В) \to (А)$$

(где стрелка означает логическое следование).

Доказательство отношения (А) $\to$ (Б). Пусть дана вполне упорядоченная система непустых замкнутых множеств (3). Если все элементы системы (3), начиная с некоторого Φ_α, совпадают между собою, то и пересечение всех элементов системы (3) равно этому Φ_α и потому непусто. Если в системе (3) за каждым Φ_α следует $\Phi_\beta \neq \Phi_\alpha$, то из (3) легко выделяется конфинальная подсистема, состоящая из попарно различных множеств. Предполагая, что этот переход к конфинальной подсистеме уже выполнен, можно предположить, что все Φ_α между собою различны. В этом предположении можно снова выделить подсистему системы (3), которой вся система была бы конфинальна и которая имела бы наименьший возможный порядковый тип. Заменив всю систему такой подсистемой, можно предположить, что система (3) не конфинальна никакой подсистеме, порядковый тип которой был бы меньше, чем порядковый тип всей системы (3). Но тогда порядковый тип системы (3) есть начальное (даже регулярное) порядковое число ω_τ. Итак, мы можем предположить, что система (3) имеет порядковый тип ω_τ и состоит из попарно различных множеств. Возьмём теперь в каждом из множеств $\Phi_\alpha \setminus \Phi_{\alpha+1}$ по точке x_α. Множество X всех отобранных нами точек x_α имеет мощность $\aleph_\tau$. Пусть ξ—точка полного накопления множества X. Точка ξ входит в пересечение всех Φ_α, так как, если бы она не содержалась, например, в множестве Φ_β, то $R \setminus \Phi_\beta$ было бы окрестностью точки ξ, содержащей лишь такие точки x_α, для которых $\alpha < \beta$. Но так как порядковый тип системы (3) есть начальное число ω_τ, то множество X_β точек x_α, $\alpha < \beta$, имеет мощность, меньшую чем мощность $\aleph_\tau$ всего множества X, что противоречит предположению, что ξ есть точка полного накопления множества X.

Доказательство отношения (Б)$\to$(В′). Предполагая (Б) верным, приведём к противоречию предположение, что (В′) неверно. Пусть $\aleph_\tau$ есть наименьшее (очевидно, бесконечное) кардинальное число, для которого существует центрированная система Σ мощности $\aleph_\tau$, состоящая из замкнутых множеств с пустым пересечением. Представим систему Σ в виде вполне упорядоченной системы типа ω_τ:

$$\Sigma = \{F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots\}, \ \alpha < \omega_\tau.$$

Обозначим через Φ_α пересечение всех F_β с $\beta < \alpha$. Так как мощность множества таких F_β меньше чем $\aleph_\tau$, то из определения кардинального числа $\aleph_\tau$ вытекает, что каждое Φ_α, $\alpha < \omega_\tau$ непусто. Так как множества Φ_α убывают, то их пересечение, очевидно, совпадающее с пересечением всех F_α, непусто, вопреки определению системы Σ.

Доказательство отношения (В)$\to$(А). Надо доказать: если (А) неверно, то и (В) неверно. Но если (А) неверно, то существует бесконечное множество M, не имеющее ни одной точки полного накопления. Следовательно, каждая точка $x \in R$ имеет окрестность $U(x)$, пересекающуюся с множеством M по множеству, мощность которого меньше, чем мощность множества M. Выберем для каждой точки $x \in R$ такую окрестность $U(x)$ и обозначим полученную систему открытых множеств через Σ. Пусть

$$U_1, \ldots, U_s$$

—какая-нибудь конечная подсистема системы Σ. Так как мощность каждого из множеств $M \cap U_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, меньше мощности всего множества M и число этих множеств конечно, то их сумма не может быть равна всему множеству M (на основании теоремы 22_0 главы 3). Поэтому никакая конечная подсистема системы Σ не может покрывать всё множество M и тем более всё пространство R, т. е. свойство (В) в пространстве R не выполнено.

Наша теорема полностью доказана.

Замечание 2. Так как для счётных множеств понятие точки полного накопления совпадает с понятием предельной точки и так как всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество, то свойство компактности топологического пространства может быть выражено в такой форме:

Свойство а): *Всякое счётное множество M имеет по крайней мере одну точку полного накопления.*

Поэтому, если бы мы согласились в применении к топологическим пространствам термин «бикомпактный» заменить термином «компактный», то компактные (в обычном смысле) топологические пространства было бы естественно называть «компактными для мощности $\aleph_0$». В связи с этим естественно возникает понятие «компактности в данном отрезке мощностей», с которым читатель может познакомиться в работе Ю. Смирнова «Об одном классе топологических пространств» (Доклады Академии наук СССР, т. 59, № 7, 1948 г.).

Замечание 3. Пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $< \omega_1$ компактно: действительно, всякое бесконечное множество $M \subseteq W(\omega_1)$ содержит, как легко видеть, счётную последовательность строго возрастающих порядковых чисел

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Первое число, большее чем все элементы этой последовательности, является её пределом (см. § 3 главы 3) и значит, предельной точкой множества M. Однако пространство $W(\omega_1)$ не бикомпактно: всякий интервал вида (α, β), $\alpha < \beta < \omega_1$, есть не более чем счётное множество, поэтому никакое несчётное множество не имеет в пространстве $W(\omega_1)$ точек полного накопления. В противоположность этому, пространство $W(\omega_1 + 1)$ всех порядковых чисел $\leqslant \omega_1$ бикомпактно: всякое несчётное множество этого пространства имеет (единственную) точку полного накопления, и такой точкой является точка ω_1.

Среди бикомпактных топологических пространств наиболее важными являются бикомпактные хаусдорфовы пространства, называемые просто *бикомпактами* *). Ими мы и будем главным образом заниматься. При этом нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 1. *Всякое замкнутое множество Φ, лежащее в бикомпактном топологическом пространстве R, есть бикомпактное топологическое пространство (в частности, замкнутое множество, лежащее в бикомпакте, есть бикомпакт).*

В самом деле, любое бесконечное множество $M \subseteq \Phi$ имеет в R точку полного накопления ξ, которая, в силу замкнутости Φ, лежит в Φ, откуда и следует бикомпактность Φ **).

Лемма 2. *Если $M \subseteq R$ есть бикомпактное пространство, то всякая система $\Sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ открытых в R мно-*

---

*) Итак, всякое бикомпактное пространство компактно (т. е. бикомпактные пространства являются частным случаем компактных), но компакты (т. е. компактные метрические пространства) образуют частный случай бикомпактов (т. е. бикомпактных хаусдорфовых пространств).

**) Можно, конечно, вывести это предложение и из свойства (B): пусть дана система Σ открытых в Φ множеств G_α; берём открытое в R множество Γ_α так, чтобы было $\Phi \cap \Gamma_\alpha = G_\alpha$; множества Γ_α и множество $\Gamma = R \setminus \Phi$ образуют систему Σ', покрывающую всё пространство R; берём конечную подсистему σ системы Σ, также покрывающую R; пересечения элементов системы σ с множеством Φ образуют искомую конечную подсистему системы Σ, покрывающую множество Φ.

жеств, покрывающая M, содержит конечную подсистему Σ_0, также покрывающую M.

Доказательство. Система $\sigma = \{M \cap \Gamma_\alpha\}$ в силу бикомпактности M содержит конечную подсистему $\sigma_0 = \{M \cap \Gamma_{\alpha_1}, \ldots, M \cap \Gamma_{\alpha_s}\}$, покрывающую M; подсистема $\Sigma_0 = \{\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_s}\}$ системы Σ тем более покрывает M, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Всякое хаусдорфово бикомпактное пространство R нормально.*

Доказательство. Докажем сначала, что бикомпакт R является регулярным пространством, т. е. что для каждой точки $x \in R$ и каждого не содержащего эту точку замкнутого множества $B \subset R$ можно найти непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(B)$. Для этого возьмём непересекающиеся окрестности $U_y(x)$ и $U(y)$ точки x и любой точки $y \in B$. Когда y пробегает всё множество B, то отобранные нами $U(y)$ покрывают B. Из лемм 1 и 2 следует, что существует конечное число этих $U(y)$, пусть

$$U(y_1), \ldots, U(y_s),$$

которые также покрывают всё B. Возьмём соответствующие $U_{y_1}(x), \ldots, U_{y_s}(x)$. Их пересечение $U(x)$ не имеет общих точек с суммой $U(B) = U(y_1) \cup \ldots \cup U(y_s)$.

Пусть теперь A и B — два непересекающихся непустых замкнутых множества бикомпакта R. Для каждой точки $x \in A$ возьмём пару непересекающихся окрестностей $U(x)$ и $U_x(B)$ точки x и множества B, существующую в силу уже доказанной регулярности пространства R. Когда x пробегает всё множество A, то отобранные нами $U(x)$ покрывают множество A. Значит, существует конечная система

$$U(x_1), \ldots, U(x_s)$$

этих множеств, также покрывающая множество A. Множество $U(A) = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_s)$ не имеет общих точек с пересечением $U(B) = U_{x_1}(B) \cap \ldots \cap U_{x_s}(B)$. Таким образом, множества A и B имеют непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $U(B)$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь R—компактное хаусдорфово пространство со счётной базой. По теореме 1, R бикомпактно, по только что доказанному,—нормально; в качестве нормального пространства со счётной базой R метризуемо (см. Прибавление к главе 6, первая метризационная теорема Урысона). Обратно, всякое компактное метризуемое пространство является бикомпактным хаусдорфовым пространством со счётной базой.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 4. (Вторая метризационная теорема Урысона.) *Для того чтобы компактное (в частности, бикомпактное) хаусдорфово пространство было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счётную базу.*

Таким образом, компакты с топологической точки зрения суть не что иное, как бикомпакты, имеющие счётную базу.

Замечание 4. Необходимо иметь в виду, что (в отличие от метрических пространств, в которых существование счётного всюду плотного множества эквивалентно наличию счётной базы) бикомпакт, содержащий счётное всюду плотное множество, может ещё не иметь счётной базы (примером такого бикомпакта может служить рассмотренное в Прибавлении к главе 6 множество типа 2θ, где θ есть порядковый тип сегмента числовой прямой).

Замечание 5. Следующее предложение значительно усиливает утверждение замечания 1 к теореме 3 § 1:

Теорема 5. *Если множество Φ, лежащее в каком-либо хаусдорфовом пространстве R, является бикомпактом, то Φ замкнуто в R.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку $\xi \in R \setminus \Phi$. Так как R—хаусдорфово пространство, то для каждой точки $x \in \Phi$ можно найти непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U_x^{\cdot}(\xi)$. На основании леммы 2 (вследствие бикомпактности Φ), из системы всех $U(x)$, где x пробегает всё Φ, можно выделить конечную подсистему

$$U(x_1), \ldots, U(x_s),$$

покрывающую всё Ф. Окрестности

$$U(\Phi)=U(x_1)\cup\ldots\cup U(x_s)$$

и

$$U(\xi)=U_{x1}(\xi)\cap\ldots\cap U_{x_s}(\xi)$$

не пересекаются, значит, и $R[U(\Phi)]\cap U(\xi)=\Lambda$, откуда в свою очередь следует, что $R[\Phi]$ не содержит точки ξ. Так как ξ — произвольная точка из $R\setminus\Phi$, то $\Phi=R[\Phi]$, что и требовалось доказать.

Замечание 6. Можно было бы доказать и следующее предположение: *Всякое нормальное (даже всякое регулярное) пространство, обладающее свойством так называемой H-замкнутости, т. е. замкнутое во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве, есть бикомпакт* (см. «Теорию множеств» Хаусдорфа, § 27, стр. 146—147).

Замечание 7. В начале § 2 было доказано, что метрическое пространство, являющееся непрерывным образом компакта, само есть компакт (теорема 8); однако данное нами доказательство этой теоремы фактически представляет собою доказательство гораздо более сильного предложения, а именно:

Теорема 6. *Всякое топологическое пространство, являющееся непрерывным образом бикомпактного пространства, само бикомпактно.*

Из этой теоремы и теоремы 5 следует

Теорема 7. *Всякое непрерывное отображение f бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y есть замкнутое отображение.*

В самом деле, всякое замкнутое в X множество A бикомпактно, значит, его образ $f(A)$ также бикомпактен и, следовательно, по теореме 5, замкнут в Y.

Отсюда выводим, дословно повторяя доказательство теоремы 11 (§ 2):

Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение бикомпактного топологического пространства X на хаусдорфово пространство Y есть отображение топологическое.

Замечание 8. Пространство R называется *локально бикомпактным*, если каждая точка x имеет окрестность U, замыкание которой $R[U]$ бикомпактно.

Теорема 8. *Всякое открытое множество* Γ *бикомпакта* R *локально бикомпактно.*

В самом деле, вследствие нормальности бикомпакта R каждая точка $x \in \Gamma$ имеет окрестность U, замыкание $R[U]$ которой лежит в Γ и, как замкнутое множество в бикомпакте R, само есть бикомпакт.

Докажем предложение, обратное теореме 8, даже в несколько усиленном виде:

Теорема 9. *Ко всякому локально бикомпактному хаусдорфову пространству* R (*и только к такому пространству*) *можно присоединить одну точку* ξ *так, что получится бикомпакт* $R' = R \cup \xi$ (*причём топология в* R *как в множестве, лежащем в бикомпакте* R', *будет совпадать с топологией*, a priori *данной в* R); *при этом топология в* R' *однозначно определена топологией в* R *и требованием, чтобы* R' *было бикомпактом.*

В самом деле, пусть $R' = R \cup \xi$ есть бикомпакт. Отсюда уже следует, что R (как открытое множество в бикомпакте R') есть локально бикомпактное пространство. Далее, все те и только те из множеств, лежащих в R, открыты в R', которые открыты в R (иначе топология, данная в R a priori, не совпадала бы с топологией, полученной из R'). Если Γ' есть открытое множество в R', содержащее точку ξ, то $\Gamma' = \xi \cup \Gamma$, где Γ открыто в R, причём $\Phi = R \setminus \Gamma = R' \setminus \Gamma'$, как замкнутое множество в бикомпакте R', само бикомпактно. Обратно, всякое множество вида $\Gamma' = \Gamma \cup \xi$, где $\Phi = R \setminus \Gamma$ есть бикомпакт, открыто в R', так как его дополнение $R' \setminus \Gamma' = R \setminus \Gamma = \Phi$, будучи бикомпактом, замкнуто в R'.

Итак, если существует бикомпакт $R' = R \cup \xi$, содержащий данное хаусдорфово пространство R, то это возможно во всяком случае лишь тогда, когда R локально бикомпактно, причём топология в R' однозначно определена тем, что открытые множества в R', не содержащие точку ξ, суть все открытые множества в R и только они, а открытые множества в R', содержащие точку ξ, суть не что иное, как множества вида $\xi \cup \Gamma$, где $\Gamma = R \setminus \Phi$

и $\Phi \subseteq R$ есть бикомпакт. Докажем, что в том случае, когда R — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, пространство R' с только что описанной топологией действительно есть бикомпакт. Прежде всего, легко проверяется, что в R' выполнены аксиомы топологического пространства. Докажем, далее, что хаусдорфова аксиома отделимости также выполнена в пространстве R'. Это ясно для любых двух точек x и x', лежащих в R; но для ξ и любой точки $x \in R$ также можно найти непересекающиеся окрестности: для этого достаточно взять $U(x)$ так, чтобы $\Phi = R[U(x)]$ было бикомпактно, — тогда окрестности $U(x)$ и $U(\xi) = \xi \cup (R \setminus \Phi)$ не пересекаются. Наконец, R' бикомпактно. В самом деле, пусть Σ — система открытых в R' множеств Γ_α, покрывающих всё R'. Среди множеств Γ_α имеется некоторое $\Gamma_0 = U(\xi) = \xi \cup (R \setminus \Phi)$. Остальные множества Γ_α, $\alpha \neq 0$, во всяком случае покрывают бикомпакт Φ; среди них можно выбрать конечное число множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, покрывающих Φ. Множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ покрывают всё пространство R', чем бикомпактность этого пространства доказана.

Можно вывести бикомпактность пространства R' и при помощи условия (A): пусть M — произвольное множество какой-либо бесконечной мощности m. Если существует бикомпакт $\Phi \subseteq R$, пересекающийся с множеством M по множеству мощности m, то в Φ имеется точка полного накопления множества M. Если же для любого бикомпакта $\Phi \subset R$ множество $M \cap \Phi$ имеет мощность $< m$, то это означает, что множество $M \cap (R' \setminus \Phi)$, т. е. множество $M \cap U(\xi)$ имеет мощность m при любом выборе окрестности $U(\xi)$. Но тогда ξ есть точка полного накопления множества M. Итак, пространство R' обладает свойством (A) и, следовательно, бикомпактно.

Теорема 9 доказана *).

В заключение покажем, что в теоремах 5, 8, 9 предположение, что пространство R' — хаусдорфово, существенно. В самом деле, имеет место

---

*) Всякий бикомпакт R и подавно является локально бикомпактным пространством. В этом случае пространство $R' = R \cup \xi$ содержит точку ξ в качестве изолированной точки, и теорема 9, оставаясь верной, становится тривиальной и излишней.

Теорема 10. *Всякое T_1-пространство (значит, и подавно всякое T_2-пространство) R', содержащее бесконечное число точек, может быть присоединением одной точки ξ дополнено до бикомпактного T_1-пространства $R' = R \cup \xi$, в котором ξ не есть изолированная точка.*

Доказательство. Берём произвольный элемент ξ и вводим в $R' = R \cup \xi$ топологию, объявляя открытыми в R' все множества, открытые в R, и все множества вида $\xi \cup (R \setminus K)$, где K — произвольное множество, состоящее из конечного числа точек пространства R. Легко проверить, что R' есть T_1-пространство. Так как любая окрестность точки ξ содержит все точки пространства R', кроме, быть может, некоторого конечного их числа, то ξ есть точка полного накопления для всякого бесконечного множества $M \subseteq R'$, что и требовалось доказать.

Изложение простейших теорем о бикомпактных пространствах мы закончим некоторыми из уже ставших классическими результатов А. Н. Тихонова.

Понятие произведения множеств было введено (в начале § 5 главы 3) для двух множеств. Дадим обобщение этого понятия на случай любого конечного или бесконечного числа множеств.

Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{A}$ любой мощности τ, элементы которого будем называть «индексами» и обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$ Пусть каждому индексу α отнесено некоторое определённое множество X_α. Произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ полученной системы множеств *), по определению, есть множество X, элементами которого являются системы $\{x_\alpha\}$, получающиеся, если каждому индексу $\alpha \in \mathfrak{A}$ отнести по одному элементу $x_\alpha \in X_\alpha$.

Предположим теперь, что множества X_α суть топологические пространства. Следуя А. Н. Тихонову, введём в произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ топологию следующим образом: возьмём произвольное конечное число индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, для каждого из этих α_i, $i = 1, \ldots, s$, возьмём в X_{α_i} открытое множество u_{α_i} и назовём *элементарным открытым множеством* $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$ или откры-

*) Множества X_α и X_β нашей системы могут состоять из одних и тех же элементов; поэтому, строго говоря, мы имеем систему так называемых *«обозначенных»* множеств X_α, понимая под обозначенным множеством пару, состоящую из данного множества и того индекса α, которому это множество отнесено. См. об этом мою книгу «Комбинаторная топология», п. 1 : 3 на стр. 25.

тым множеством, определённым данными $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s}$, множество всех $x=\{x_\alpha\}\in X$, для которых $x_{\alpha_1}\in u_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, x_{\alpha_s}\in u_{\alpha_s}$ (а остальные x_α совершенно произвольны). *Открытые множества топологического пространства X определяются как суммы всевозможных элементарных открытых множеств.*

Эта топология превращает X в топологическое пространство, называемое *топологическим* (или *тихоновским*) *произведением заданной системы топологических пространств* *). Легко видеть, что *топологическое произведение любой системы хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство* (доказательство может быть предоставлено читателю).

Примеры топологических произведений. Произведение двух прямых есть плоскость, произведение n прямых есть n-мерное евклидово пространство (рассматриваемое как топологическое пространство), произведение двух окружностей есть тор. *Произведение счётного числа простых двоеточий гомеоморфно канторову совершенному множеству* (доказательство предоставляется читателю, как лёгкое упражнение).

Почти столь же просто доказательство того, что *гильбертов кирпич Q есть топологическое произведение счётного числа прямолинейных сегментов.*

В самом деле, рассмотрим топологическое произведение сегментов X_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ Так как топологическое произведение определено в чисто топологических терминах, то мы можем взять за X_n отрезок $\left[0; \frac{1}{2^n}\right]$ числовой прямой. В этом предположении пространство $X=\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и гильбертов кирпич Q состоит из одних и тех же точек

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\quad 0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Остаётся доказать, что тождественное отображение X на Q является топологическим. Так как Q — компакт, то для этого в свою очередь достаточно убедиться в том, что тождественное отображение X на Q непрерывно, т. е. что

---

*) В пространстве X множества $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$, очевидно, образуют базу.

(a) Каковы бы ни были точка x и $\varepsilon > 0$, можно найти такую окрестность точки x в пространстве X, что для всех точек x' этой окрестности будем иметь $\rho(x, x') < \varepsilon$ в Q.

Доказательство утверждения (a). При заданном ε, $0 < \varepsilon < 1$, берём $n \geqslant 2$ столь большим, чтобы $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Окрестность U точки x в X, определённая условиями

$$|x_1 - x'_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, \ldots, |x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}},$$

есть искомая.

Теорема 11. (Первая теорема Тихонова.) *Топологическое произведение любой системы бикомпактных пространств есть бикомпактное пространство.*

Пусть дана какая-нибудь центрированная система S множеств, являющихся подмножествами некоторого множества M. Назовём центрированную систему S максимальной, если она не является подсистемой никакой отличной от неё центрированной системы подмножеств множества M. Легко доказать, что *всякая центрированная система $S_0 = \{M^\lambda\}$, $M^\lambda \subseteq M$, содержится по крайней мере в одной максимальной центрированной системе S.*

В самом деле, пусть система $S_0 = \{M_\alpha\}$ не максимальна. Тогда существует центрированная система $S_1 \supset S_0$. Предположим, что построены центрированные системы

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_\nu \subset \ldots, \quad \nu < \alpha.$$

Если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, и система $S_{\alpha'}$ не есть максимальная центрированная система, то берём центрированную систему $S_{\alpha'+1} \supset S_{\alpha'}$. Если α — второго рода, полагаем $S_\alpha = \bigcup\limits_{\nu<\alpha} S_\nu$; легко видеть, что S_α — центрированная система. Если мощность множества M есть $m = \aleph_\sigma$, то мощность множества N всех подмножеств множества M есть 2^m, а мощность множества всех подмножеств множества N (т. е. множества всех систем, составленных из множеств $M^\lambda \subseteq M$) есть некоторое $\aleph_\tau = 2^{2^m}$. В частности, множество всех центрированных систем подмножеств множества M имеет мощность $\leqslant \aleph_\tau$; поэтому наш процесс построения систем S должен оборваться на некотором порядковом числе $\alpha < \omega_{\tau+1}$, т. е. мы должны встретиться с таким $\alpha < \omega_{\tau+1}$, что S_α есть максимальная центрированная система.

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма. *Для того чтобы пространство R было бикомпактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система множеств $M^\lambda \subseteq R$ имела хотя бы одну общую точку прикосновения.*

В самом деле, если R бикомпактно, то система замкнутых множеств $[M^\lambda]$, будучи центрированной, имеет хотя бы одну общую точку, которая и является общей точкой прикосновения всех данных множеств M^λ. Обратно, если наше условие выполнено, то, в частности, всякая центрированная система замкнутых множеств имеет общую точку прикосновения, и пространство R бикомпактно.

Перейдём теперь собственно к доказательству первой теоремы Тихонова. Пусть X — топологическое произведение бикомпактных пространств X_α. Требуется доказать, что всякая центрированная система S множеств $M^\lambda \subseteq X$ имеет хотя бы одну общую точку прикосновения. Дополнив, если нужно, данную систему до максимальной центрированной системы, можно с самого начала предположить, что центрированная система S является максимальной. Обозначим через M^λ_α «проекцию» множества M^λ в X_α, т. е. множество всех точек $x_\alpha \in X_\alpha$, являющихся «*координатами*» точек *) $x \in M^\lambda$. Система всех множеств M^λ_α (здесь α постоянно, а λ переменно) есть центрированная система в пространстве X_α. Так как X_α бикомпактно, то множества M^λ_α имеют по крайней мере одну общую точку прикосновения $x_\alpha \in X_\alpha$. Докажем, что точка $x = \{x_\alpha\} \in X$ есть общая точка прикосновения всех M^λ. Для этого надо показать, что всякая элементарная окрестность точки x пересекается с любым M^λ. Произвольная элементарная окрестность точки x получается фиксированием некоторого конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и выбором окрестностей u_{α_i} точек x_{α_i} в X_{α_i} для $i = 1, \ldots, s$. Но для «одноиндексных» окрестностей, т. е. таких, при определении которых фиксируется лишь один индекс $\alpha_1 = \alpha$,

*) Если $x = \{x_\alpha\}$ есть точка топологического произведения $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$, то каждое x_α называется координатой точки x.

наше утверждение непосредственно следует из того, что каждая окрестность U_α точки x_α в X_α пересекается с любым M_α^λ. Далее, так как каждая одноиндексная окрестность пересекается со всеми M^λ, а система всех M^λ — *максимальная* центрированная система, то каждая одноиндексная окрестность непременно входит в систему S; действительно, пополнив какую-нибудь центрированную систему множеств любым множеством, пересекающимся со всеми элементами данной центрированной системы, мы, как легко видеть, снова получаем центрированную систему. Из только что сделанного замечания вытекает, далее, что пересечение любого конечного числа элементов максимальной центрированной системы S есть опять-таки элемент системы S. Так как каждая элементарная окрестность произвольной точки пространства X есть пересечение конечного числа одноиндексных окрестностей, то система S, содержа, как мы видели, в числе своих элементов все одноиндексные окрестности точки x, необходимо содержит и все вообще окрестности точки x, откуда следует, что любая окрестность точки x (будучи элементом системы $S = \{M^\lambda\}$) пересекается с любым множеством M^λ, чем первая теорема Тихонова и доказана.

Так как произведение хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство, то из доказанного вытекает

Следствие. *Произведение любой системы бикомпактов есть бикомпакт.*

Называя *весом* топологического пространства наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы данного пространства*), легко докажем, что произведение кардинального числа $\tau \geqslant \aleph_0$ пространств, каждое из которых имеет вес $\leqslant \tau$, является пространством веса $\leqslant \tau$. В самом деле, возьмём в каждом из данных пространств X_α базу $\mathfrak{B}_\alpha$ мощности $\leqslant \tau$. Мы получим базу $\mathfrak{B}$ пространства $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$, если при определении элементарных открытых множеств $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$ будем

*) Таким образом пространства со счётной базой можно теперь называть пространствами счётного веса (веса $\aleph_0$).

под u_α разуметь элементы базы $\mathfrak{B}_\alpha$. На каждую заданную комбинацию индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ придётся не более τ комбинаций $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s}$ и, значит, не более τ множеств $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$. Но если множество $\mathfrak{A}$ всех индексов α имеет мощность τ, то и множество всех конечных комбинаций $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ также имеет мощность τ, значит и общее число всех элементарных множеств $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$, т. е. мощность базы $\mathfrak{B}$, не превосходит τ (легко видеть, что оно в точности равно τ, чем мы, однако, пользоваться не будем).

Первая теорема Тихонова даёт много интересных и важных примеров бикомпактных пространств, в частности бикомпактов. Таковы: бикомпактное T_0-пространство $\mathfrak{F}^\tau$, являющееся произведением τ пространств, каждое из которых есть связное двоеточие; бикомпакт D^τ («дисконтинуум веса τ»), являющийся произведением τ простых двоеточий; бикомпакт I^τ, являющийся произведением τ сегментов числовой прямой (*«тихоновский кирпич веса τ»*) *); произведение τ окружностей («тор T^τ веса τ») и т. д. Все перечисленные пространства обладают рядом интересных свойств. Так, D^τ и T^τ являются, при надлежащем определении в них операции сложения, топологическими группами. Пространство $\mathfrak{F}^\tau$ замечательно тем, что содержит топологический образ любого T_0-пространства веса $\leqslant \tau$. Далее, каждое T_0-пространство веса $\leqslant \tau$ является взаимно однозначным и в одну сторону непрерывным образом некоторого множества, лежащего в D^τ, а каждый бикомпакт веса $\leqslant \tau$ является непрерывным образом некоторого замкнутого множества, лежащего в D^τ **). Доказательства всех этих теорем

*) Не все бикомпакты являются непрерывными образами всего D^τ; так, например, пространство всех порядковых чисел $\leqslant \omega_1$ не является непрерывным образом никакого D^τ; бикомпакты, являющиеся непрерывными образами какого-либо D^τ, называются *диадическими*; таковы, в частности, все бикомпактные топологические группы.

**) По доказанному, гильбертов кирпич является частным случаем тихоновского: $Q = I^{\aleph_0}$; точно так же канторово совершенное множество есть D^τ при $\tau = \aleph_0$.

можно найти в моей статье «О понятии пространства в топологии», Успехи математических наук, том 2, вып. 1 (17). Здесь же из предложений этого круга идей докажем лишь одно, именно следующее:

Теорема 12. (Вторая теорема Тихонова). *Всякое вполне регулярное пространство веса τ гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в тихоновском кирпиче веса τ.*

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем по поводу неё некоторые замечания и выведем из неё некоторые следствия. Прежде всего, из неё следует, что тихоновский кирпич I^{τ} «веса τ» действительно имеет вес τ: в самом деле, будучи произведением τ отрезков, I^{τ} имеет вес $\leqslant \tau$, а содержа топологический образ любого вполне регулярного пространства веса τ *), не может иметь вес $< \tau$. Далее, *всякое множество A, лежащее во вполне регулярном пространстве R, само есть вполне регулярное пространство*: если $x_0 \in A$ и $\Phi \subseteq A \setminus x_0$ замкнуто в A, то, беря замкнутое в R множество F так, чтобы $A \cap F = \Phi$, построим непрерывную в R функцию f, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, равную 0 в точке x_0 и 1 на F. Рассматривая эту функцию лишь на A, видим, что точка x_0 и множество Φ функционально отделены в A. Из этого замечания, из того, что всякий бикомпакт, будучи нормальным пространством, и подавно является вполне регулярным, и из второй теоремы Тихонова вытекает

Теорема 13. *Класс вполне регулярных пространств совпадает с классом множеств, лежащих в бикомпактах, причём вполне регулярные пространства веса τ лежат в бикомпактах того же веса, именно, в тихоновском кирпиче веса τ.*

Далее, так как бикомпакты нормальны, а всякое множество, лежащее в нормальном пространстве, по только что доказанному, вполне регулярно, то можно сказать и так:

Теорема 13′. *Вполне регулярные пространства суть не что иное, как множества, лежащие в нормальных пространствах.*

---

*) Например, пространства, состоящего из τ изолированных точек.

Имеет место и следующее предложение:

Теорема 14. *Класс бикомпактов может быть определён как каждый из следующих классов:*

класс вполне регулярных пространств, замкнутых во всяком объемлющем хаусдорфовом (или вполне регулярном, или нормальном) пространстве;

класс нормальных пространств, замкнутых во всяком, объемлющем хаусдорфовом (или вполне регулярном, или нормальном) пространстве.

Это утверждение следует из того, что всякий бикомпакт является нормальным (следовательно, и вполне регулярным) пространством, замкнутым во всяком хаусдорфовом (значит, и подавно во всяком вполне регулярном и во всяком нормальном) пространстве, и что не бикомпактное вполне регулярное пространство, будучи топологически отображено в тихоновский кирпич (являющийся нормальным, значит, вполне регулярным, значит, хаусдорфовым пространством), даёт там незамкнутое множество *).

Переходим к доказательству второй теоремы Тихонова. Пусть X — вполне регулярное пространство. Рассмотрим какое-нибудь множество Ξ функций f, непрерывных в X и удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Всякое такое множество Ξ называем *множеством, расчленяющим пространство* X, если для любой точки x_0 и любой окрестности Ox_0 этой точки можно найти такую функцию $f \in \Xi$, что $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in X \setminus Ox_0$. Расчленяющие множества функций существуют: таково, например, множество всех непрерывных в X функций, удовлетворяющих условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Вторая теорема Тихонова будет доказана, если мы докажем следующие два предложения:

---

*) В замечании 6 было упомянуто без доказательства, что бикомпакты могут быть также охарактеризованы как регулярные пространства, замкнутые во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. К этому надо ещё заметить, что существуют не бикомпактные хаусдорфовы пространства, замкнутые во всяком хаусдорфовом пространстве (например, нерегулярное хаусдорфово пространство, упомянутое в сноске к стр. 303), и что всякое T_1-пространство, состоящее из бесконечного числа точек (следовательно, и любой бикомпакт, состоящий из бесконечного числа точек), является незамкнутым множеством некоторого T_1-пространства.

А) *Если вполне регулярное пространство X имеет вес τ, то существует расчленяющее множество функций мощности $\leqslant \tau$.*

Б) *Если во вполне регулярном пространстве существует расчленяющее множество функций мощности τ', то существует и топологическое отображение φ пространства X в тихоновский кирпич $I^{\tau'}$* (из Б) следует, что мощность всякого расчленяющего множества функций не меньше, чем вес пространства X).

Лемма. *Пусть x_0 — точка вполне регулярного пространства X. Ко всякой окрестности Ox_0 точки x_0 можно найти такую окрестность O_1x_0 той же точки, что замкнутые множества $[O_1x_0]$ и $X \setminus Ox_0$ функционально отделимы в X (так что, в частности, $[O_1x_0] \subseteq Ox_0$).*

Для доказательства этой леммы возьмём какую-нибудь функцию f, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, непрерывную в X, равную 0 в x_0 и равную 1 в $X \setminus Ox_0$. Обозначим через O_1x_0 множество всех точек x, в которых $f(x) < \frac{1}{2}$, и определим функцию f_1 так:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = 1, \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right), & \text{если } \frac{1}{2} < f(x) < 1. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна и отделяет друг от друга множества $[O_1x_0]$ и $X \setminus Ox_0$.

Доказательство утверждения А). Возьмём теперь базу $\mathfrak{B} = \{U_\nu\}$ пространства X, имеющую мощность τ; пару $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$, где $U_\mu \in \mathfrak{B}$, $U_\nu \in \mathfrak{B}$, назовём канонической, если $[U_\mu] \subseteq U_\nu$ и множества $[U_\mu]$, $X \setminus U_\nu$, являются функционально отделимыми. Множество всех канонических пар обозначим через C. Оно имеет мощность $\leqslant \tau$. Выберем теперь для каждой канонической пары $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$ функцию f_α, $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant 1$, непрерывную в X, равную 0 на $[U_\mu]$ и 1 на $X \setminus U_\nu$. Множество Ξ отобранных нами функций f_α имеет мощность $\leqslant \tau$ и есть множество, расчленяющее пространство X. В самом деле, каковы бы ни были точка $x_0 \in X$ и её окрестность Γ в X, возьмём содержащуюся в Γ окрестность $Ox_0 = U_\nu \in \mathfrak{B}$; подберём к ней окрестность $O_1 x_0$ согласно лемме и лежащую в $O_1 x_0$ окрестность $O_2 x = U_\mu$; пара (U_μ, U_ν) есть каноническая пара π_α, причём $f_\alpha(x_0) = 0$ и $f_\alpha(x) = 1$ для $x \in X \setminus \Gamma$. Утверждение А) доказано.

Доказательство утверждения Б). Пусть дано множество

$$\Xi = \{f_\alpha\}$$

функций, расчленяющих пространство X, с индексами α, пробегающими некоторое множество $\mathfrak{A}$ мощности τ'. Топологическое отображение φ пространства X в $I^{\tau'}$ построим следующим образом. Пусть для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ взят сегмент

$$I_\alpha = [0 \leqslant t_\alpha \leqslant 1]$$

числовой прямой. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие точку

$$f_\alpha(x) = t_\alpha \in I_\alpha.$$

Получим точку $\varphi(x) = \{f_\alpha(x)\} \in I^{\tau'}$. Этим определено отображение φ пространства X на некоторое множество $Y \subseteq I^{\tau'}$.

Отображение φ взаимно однозначно. В самом деле, пусть $x \in X$, $x' \in X$, $x' \neq x$. К окрестности $X \setminus x'$ точки x подбираем, согласно определению расчленяющего множества функций, функцию $f_\alpha \in \Xi$ так, чтобы $f_\alpha(x) = 0$ и $f_\alpha(x') = 1$; тогда α-е координаты $f_\alpha(x)$ и $f_\alpha(x')$ точек $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ различны, так что $\varphi(x) \neq \varphi(x')$.

Отображение φ непрерывно. В самом деле, пусть $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y \subseteq I^{\tau'}$. Берём произвольную окрестность $Oy = O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$ точки y. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ подбираем окрестность $O_i x$ точки x так, чтобы $f_{\alpha_i}(O_i x) \subseteq u_{\alpha_i}$, и полагаем $Ox = \bigcap\limits_{i=1}^{s} O_i x$. По самому определению отображения φ имеем $\varphi(Ox) \subseteq Oy$.

Отображение φ^{-1} множества Y на X непрерывно. В самом деле, пусть $y = \{t_\alpha\} \in Y$, $\varphi^{-1}(y) = x$. К произвольной окрестности Ox точки x в X требуется подобрать такую окрестность Oy в $I^{\tau'}$, чтобы $\varphi^{-1}(Oy \cap Y) \subseteq Ox$. Берём функцию f_α так, чтобы было $f_\alpha(x) = 0$ и $f_\alpha(x') = 1$ для любого $x' \in X \setminus Ox$. Тогда α-я координата t_α точки $y = \varphi(x)$ есть $t_\alpha = f_\alpha(x) = 0$. Обозначаем через Oy множество всех точек $y' = \{t'_\alpha\} \in I^{\tau'}$, у которых $t'_\alpha < 1$. Для любой точки $y' \in Y$, попавшей в Oy, имеем $\varphi^{-1}(y') \in Ox$. В самом деле, если бы $x' = \varphi^{-1}(y') \in X \setminus Ox$, то было бы $f_\alpha(x') = 1$, т. е. α-я координата точки $\varphi(x') = y'$ равнялась бы 1, вопреки определению точки y'.

Утверждение (Б), а значит, и вторая теорема Тихонова доказаны.

Назовём *бикомпактным расширением* данного вполне регулярного пространства X всякий бикомпакт Φ, содержащий пространство X в качестве всюду плотного множества. Из только что проведённых рассуждений следует, что всякая расчленяющая система функций пространства X определяет некоторое бикомпактное расширение этого пространства. В самом деле, пусть τ — мощность данного расчленяющего множества функций. Мы имели топологическое отображение φ пространства X на некоторое множество $Y \subseteq I^\tau$. Возьмём замыкание $\Phi = [Y]$ множества Y (в I^τ). Заменяя точки $y \in Y \subseteq \Phi$ взаимно однозначно соответствующими им точками $x \in X$, можем считать, что само X лежит в бикомпакте Φ и является всюду плотным множеством этого бикомпакта, который, таким образом, становится бикомпактным расширением пространства X. Особенно интересен случай, когда *расчленяющее множество функций есть максимальное множество этого рода, т. е. состоит из всех непрерывных в X функций f, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.* Соответствующее бикомпактное расширение пространства X называется *максимальным бикомпактным расширением* этого пространства и обозначается через βX. Это расширение было впервые построено чешским математиком Э. Чехом; оно подробно разобрано в моей уже цитированной статье в «Успехах математических наук», к которой и отсылаю читателя, желающего познакомиться с этими интересными и важными вещами.

В заключение рассмотрим пространство $I^{\mathfrak{c}}$. По самому своему определению, пространство $I^{\mathfrak{c}}$ есть произведение отрезков

$$I_{\alpha} = [0 \leqslant x_{\alpha} \leqslant 1]$$

числовой прямой, причём индекс α пробегает некоторое множество значений мощности континуума. Поэтому можно считать, что индекс α принимает в качестве своих значений все действительные числа отрезка $[0; 1]$. Но тогда точкой

$$x = \{x_{\alpha}\}$$

пространства $I^{\mathfrak{c}}$ является просто произвольная функция

$$x = x(\alpha),$$

определённая на сегменте $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и принимающая значения, также принадлежащие сегменту $[0; 1]$. При этом топология в пространстве $I^{\mathfrak{c}}$ может быть описана так: чтобы получить произвольную окрестность точки $x_0 = x_0(\alpha)$ пространства $I^{\mathfrak{c}}$, надо задать произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольные точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ отрезка $[0; 1]$ в конечном числе; тогда определённая этими данными окрестность $O(\alpha_1, \ldots, \alpha_s; \varepsilon)$ точки x_0 состоит из всех функций $x = x(\alpha)$, удовлетворяющих условиям

$$|x_0(\alpha_i) - x(\alpha_i)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Итак, *пространство $I^{\mathfrak{c}}$ может быть определено как пространство всех функций $x = x(\alpha)$, определённых на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ со значениями, принадлежащими отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$, при только что описанной топологии*; поэтому пространство $I^{\mathfrak{c}}$ называют *тихоновским функциональным пространством;* по доказанному, оно представляет собой бикомпакт веса $\mathfrak{c}$.

Пусть дано счётное множество точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{4}$$

пространства $I^{\mathfrak{c}}$. Докажем, что множество (4) тогда и только тогда имеет в $I^{\mathfrak{c}}$ единственную предельную точку x_0, когда последовательность функций $x_n = x_n(\alpha)$ сходится к функции $x_0(\alpha)$ на всём отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (это предложение при ссылках на него будем называть «леммой»).

Прежде всего ясно, что если последовательность функций (4) сходится к функции x_0 в любой точке α, то x_0 есть единственная предельная точка множества (4) в пространстве $I^{\mathfrak{c}}$. Докажем обратное утверждение. Пусть x_0 — единственная предельная точка множества (4). Если последовательность функций (4) не сходится на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ к функции x_0, то существуют точка α_0, $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$, и подпоследовательность

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}, \ldots \tag{5}$$

последовательности (4) такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства

$$| x_0 (\alpha_0) - x_{m_k} (\alpha_0) | \geqslant \varepsilon \tag{6}$$

для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ В силу бикомпактности пространства I^c множество (5) имеет предельную точку x', причём из топологии пространства I^c следует, что в (6) найдётся такая функция x_{m_k}, что

$$| x' (\alpha_0) - x_{m_k} (\alpha_0) | < \varepsilon,$$

откуда, в силу неравенства (6), следует, что $x' \neq x_0$ в противоречие с предположением, что x_0 — единственная предельная точка множества (4) в I^c.

Построим в пространстве I^c замкнутое (следовательно, бикомпактное) бесконечное множество Φ, обладающее следующим замечательным свойством: Φ *не содержит никакой нестационарной* *) *сходящейся последовательности*. Для этого обозначим через D счётное множество функций $d_n(\alpha)$, заданных на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, где $d_n(\alpha)$, по определению, есть n-й двоичный знак числа α, причём если α имеет два двоичных разложения, то берём то из них, которое оканчивается нулями. Докажем, что последовательность функций

$$d_1(\alpha), d_2(\alpha), \ldots, d_n(\alpha), \ldots \tag{7}$$

не содержит никакой нестационарной подпоследовательности, сходящейся на всём отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Пусть, в самом деле,

$$d_{n_1}(\alpha), d_{n_2}(\alpha), \ldots, d_{n_k}(\alpha), \ldots \tag{8}$$

— какая-нибудь подпоследовательность последовательности (7). Определяем точку α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, её разложением в двоичную дробь

$$\alpha_0 = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

следующим образом: для всех целых $h \geqslant 1$ полагаем $a_{n_{2h}} = 0$,

---

*) Напомним, что последовательность называется стационарной, если все её элементы, начиная с некоторого, совпадают между собой.

а для n, не равного никакому n_{2k}, полагаем $a_n=1$. Так как

$$d_{n_{2k}}(x_0)=a_{n_{2k}}=0,$$

$$d_{n_{2k+1}}(x_0)=a_{n_{2k+1}}=1,$$

то последовательность (9) не может сходиться в точке x_0, и наше утверждение доказано.

Определим теперь Φ как замыкание в $I^{\mathfrak{c}}$ множества D. Так как $I^{\mathfrak{c}}$ есть бикомпакт, то и Φ — бикомпакт. Докажем, что в Φ нет никакой нестационарной сходящейся последовательности точек. В силу леммы, достаточно показать, что из множества Φ нельзя выделить никакой последовательности попарно различных функций, сходящейся на всём отрезке $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Но пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \quad x_n\in\Phi \tag{9}$$

— такая последовательность, и пусть она сходится на отрезке $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ к функции x_0. Тогда $x_0\in\Phi$. Пусть O_1 — произвольная окрестность точки x_0 относительно Φ и $x_n\in O_1$. Берём окрестность O_2 точки x_0 относительно Φ так, чтобы $\Phi[O_2]\subseteq O_1$ и чтобы $x_{n_1}\in O_1\setminus[O_2]$. Выбираем, далее, $x_{n_2}\in O_2$ и окрестность O_3, $\Phi[O_3]\subseteq O_2$, $x_{n_2}\in O_2\setminus[O_3]$. Продолжая это рассуждение, получим последовательность окрестностей

$$O_1\supseteq O_2\supseteq\ldots\supseteq O_k\supseteq\ldots$$

точки x_0 и подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

последовательности (9), причём

$$x_{n_k}\in O_k\setminus[O_{k+1}].$$

Положим

$$D_k=D\cap O_k\setminus[O]_{k+1}.$$

Ни одно из множеств D_k не пусто *) и они попарно не пересекаются. Элементы множества D_k суть некоторые из наших функций d_n; пусть это будут

$$d_{n_1^k}, d_{n_2^k}, \ldots, d_{n_i^k}, \ldots$$

---

*) В самом деле, $O_k\setminus[O_{k+1}]$ есть окрестность точки x_{n_k} в $\Phi=[D]$, поэтому в этой окрестности содержится хотя бы одна точка множества D.

Назовём теперь натуральное число n числом первого рода, если существует такое i, что $n = n_i^h$ при нечётном h, и числом второго рода, если оно не есть число первого рода. Положим теперь

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{первого рода}, \\ 0, & \text{если } n - \text{второго рода}, \end{cases}$$

и рассмотрим действительное число α_0 с двоичным разложением

$$\alpha_0 = 0,\, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Тогда при нечётном h всякая функция $d_{n_i^h} \in D_h$ принимает в α_0 значение 1, а при чётном h — значение 0; но x_{n_h} есть точка прикосновения множества D_h; поэтому функция x_{n_h} принимает в точке α_0 значение 1 при нечётном h и значение 0 при чётном h, откуда вытекает, что последовательность $\{x_{n_h}\}$ в точке α_0 не может сходиться, что и требовалось доказать.

ДАЛЬНЕЙШАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ:

1. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, главы 6 и 7.
2. П. Александров, О понятии пространства в топологии, Успехи математических наук, том 2, вып. 1 (17).
3. Н. Веденисов, Бикомпактные пространства, Успехи математ. наук, т. III, вып. 4 (26).
4. Ю. Смирнов. О пространствах, компактных в данном отрезке мощностей. Печатается в Известиях Академии наук СССР (серия математическая).

ВТОРОЕ ПРИБАВЛЕНИЕ

О КВАЗИРАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Мы видели (в главе 5, § 5), что равномерная сходимость представляет собою условие, достаточное, но не необходимое для того, чтобы последовательность непрерывных функций давала в пределе непрерывную функцию. Мы дадим условие, одновременно необходимое и достаточное.

Определение 1. Последовательность функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, \tag{1}$$

определённых на сегменте $[a; b]$ числовой прямой, сходящаяся во всех точках этого сегмента к функции f, называется сходящейся *квазиравномерно* на $[a; b]$, если каждому $\varepsilon > 0$ и каждому натуральному числу N можно поставить в соответствие конечное число покрывающих сегмент $[a; b]$ интервалов

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s \tag{2}$$

и натуральных чисел

$$n_0, n_1, \ldots, n_s, \tag{3}$$

бóльших чем N, таким образом, чтобы для всех точек $x \in [a; b]$, лежащих на Γ_k, $k = 0, 1, \ldots, s$, было

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Для того чтобы сходящаяся на* $[a; b]$ *последовательность непрерывных функций* (1) *имела непрерывную предельную функцию* f, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* (1) *сходилась к* f *квазиравномерно.*

Мы получим эту теорему как частный случай гораздо более общего предложения. Для достижения этой цели обобщим понятие квазиравномерной сходимости на случай функций, определённых в любом топологическом пространстве R *).

Определение 2. Последовательность функций (1), определённых в топологическом пространстве R, сходящаяся во всех точках этого пространства к функции f, называется сходящейся *квазиравномерно* в пространстве R, если ко всякому $\varepsilon > 0$ и всякому натуральному числу N можно подобрать конечное или счётное множество открытых множеств

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k, \ldots, \tag{2'}$$

*) Мы даём сразу столь широкое обобщение, так как какие бы то ни было ограничения оказываются решительно ни для чего не нужными; читатель, пропустивший предыдущие Прибавления, может предполагать рассматриваемое здесь пространство метрическим и в этом предположении заменить, далее, бикомпактность компактностью.

покрывающих в своей совокупности всё пространство R, и натуральных чисел

$$n_0,\ n_1,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots, \tag{3'}$$

бóльших чем N, таким образом, что для всех $x \subset \Gamma_k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, будет выполнено неравенство

$$|f(x)-f_{n_k}(x)|<\varepsilon. \tag{4}$$

Заметим прежде всего, что в случае бикомпактного*) R можно из счётной системы (2′) выделить конечную подсистему (2) и, значит, с самого начала предположить, что системы (2′) и (3′) состоят из конечного числа элементов. Далее, если пространство R имеет счётную базу

$$\Gamma'_1,\ \Gamma'_2,\ \Gamma'_3,\ \ldots,\ \Gamma'_m,\ \ldots, \tag{5}$$

то для каждой точки $x \in R$ и какого-либо содержащего эту точку множества Γ_k из системы (2′) можно подобрать множество Γ'_{m_k} из системы (5) так, что $x \in \Gamma'_{m_k} \subseteq \Gamma_k$. Отобранные таким образом множества Γ'_{m_k}, среди которых могут быть и совпадающие, и соответствующие им n_k из (3) заменяют системы (2′) и (3′), так что *в случае пространства R со счётной базой* (5) *можно с самого начала предположить, что множества* (2′) *взяты из числа элементов этой базы*. Поэтому, если R есть сегмент числовой прямой, то определение 2 переходит в определение 1 (в том смысле, что если последовательность (1) сходится квазиравномерно в смысле определения 2, то сходимость будет квазиравномерной и в смысле определения 1; обратное утверждение очевидно). Заметим ещё, что если R есть, например, квадрат (вместе с его границей), то определение 2 переходит в определение 1, в котором под интервалами следует теперь подразумевать открытые квадраты (или круги и т. п.). Если R — локально связ-

*) См. предыдущую сноску.

ное пространство со счётной базой, то открытые множества (2′) могут быть предположены связными. Читателю самому предоставляется рассмотреть ещё и другие частные случаи общего определения 2. Во всяком случае из сказанного ясно, что теорема 1 содержится в следующем общем предложении:

Теорема 2. *Для того чтобы сходящаяся в топологическом пространстве R последовательность непрерывных функций* (1) *имела непрерывную предельную функцию f, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* (1) *сходилась к f квазиравномерно (в смысле определения* 2).

Доказательство. 1) Условие необходимо. Пусть предельная функция f последовательности непрерывных функций (1) непрерывна в R. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и натуральное N. Последовательность

$$f_N, f_{N+1}, f_{N+2}, \ldots, f_{N+k}, \ldots$$

сходится к той же функции f. Положим

$$n_k = N + k, \quad \Gamma_k = \mathcal{E}(|f(x) - f_{N+k}(x)| < \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

По самому определению сходимости имеем $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k = R$, а по определению множеств Γ_k для $x \in \Gamma_k$ выполнено неравенство (4). Так как $f(x)$ и $f_{N+k}(x)$, а значит, и $|f(x) - f_{N+k}(x)|$ суть непрерывные функции, то Γ_k—открытые множества. Квазиравномерная сходимость последовательности (1) доказана.

2) Условие достаточно. Пусть последовательность (1) непрерывных в R функций f_n сходится к f квазиравномерно в R. Докажем, что функция f непрерывна во всякой точке $x_0 \in R$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется найти такую окрестность $U(x_0)$ заданной точки x_0, чтобы для всех $x \in U(x_0)$ было $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Для этого определяем натуральное число N так, чтобы для всех $n > N$ было $|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

К числу $\frac{\varepsilon}{3}$ и к только что подобранному N строим покрывающие пространство R открытые множества (2') и натуральные числа (3') так, чтобы было

$$|f(x)-f_{n_k}(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad x \in \Gamma_k.$$

Пусть $x_0 \in \Gamma_0$. Так как $n_0 > N$, то

$$|f(x_0)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Далее, в силу непрерывности функции f_{n_0} можно найти такую окрестность $U(x_0) \subseteq \Gamma_0$ точки x_0, что

$$|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad x \in U(x_0). \tag{7}$$

Наконец, по определению множества Γ_0 и числа n_0, для всех точек $x \in \Gamma_0$, значит, и подавно для всех $x \in U(x)$ имеем:

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) следует, что

$$|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U(x_0).$$

Тем самым непрерывность функции f, а значит, и теоремы 2 и 1 доказаны.

Теорема 1 была первоначально доказана Arzelà при помощи чрезвычайно пространных рассуждений. Доказательство Arzelà было значительно упрощено Борелем. В этом упрощённом виде (впрочем, лишившем теорему Arzelà её первоначальной геометрической наглядности) названная теорема вошла в курс анализа Валле-Пуссена и в курс теории функций Н. Н. Лузина. Однако превращение всей теоремы в собственно совершенно очевидное замечание (являющееся содержанием настоящего параграфа) достигается, если придать её предпосылкам разумную общность — обстоятельство, поучительное и во многих других случаях *).

*) Уже после того, как рукопись этой книги была сдана в Издательство, Д. А. Райков любезно обратил моё внимание на то обстоятельство, что можно ещё упростить результат, доказанный в этом Прибавлении; именно, имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы сходящаяся в топологическом пространстве R последовательность непрерывных функций* (1) *имела непрерывную предельную функцию f, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ открытые ядра множеств $\mathfrak{E}(|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$ давали в сумме всё пространство R.*

Доказательство может быть предоставлено читателю.