

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П. Аксёнов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.
ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2000

УДК 517.38, 517.3821

Аксёнов А.П. Математический анализ. (Интегралы, зависящие от параметра. Двойные интегралы. Криволинейные интегралы.) Учебное пособие. СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 2000, 145 с.

Пособие соответствует государственному стандарту дисциплины «Математический анализ» направления бакалаврской подготовки 510200 «Прикладная математика и информатика».

Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам: «Интегралы, зависящие от параметра, собственные и несобственные», «Двойной интеграл», «Криволинейные интегралы первого и второго рода», «Вычисление площадей кривых поверхностей, заданных как явными, так и параметрическими уравнениями», «Эйлеровы интегралы (Бета-функция и Гамма-функция)». Разобрано большое количество примеров и задач (общим числом 47).

Предназначено для студентов физико-механического факультета специальностей 010200, 010300, 071100, 210300, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Ил. 79. Библ. 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Глава 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

§1. Определение интегралов, зависящих от параметров

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$

Пусть при каждом закреплённом y из $[c, d]$ существует $\int_a^b f(x, y) dx$. Ясно, что каждому значению y из $[c, d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int_a^b f(x, y) dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y , определенную в промежутке $[c, d]$.

Введем обозначение

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (1)$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы, зная свойства функции $f(x, y)$, получить информацию о свойствах функции $I(y)$. Эти свойства, как будет показано ниже, имеют многообразные применения, в особенности при вычислении интегралов.

Допустим еще, что при каждом закреплённом x из промежутка $[a, b]$ существует $\int_c^d f(x, y) dy$. Тогда этот интеграл будет представлять собой функцию переменной (параметра) x , определенную в промежутке $[a, b]$. Обозначим ее через $\tilde{I}(x)$, так что

$$\tilde{I}(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]. \quad (\tilde{1})$$

§2. О допустимости предельного перехода по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y) \in C(\bar{P})$ и пусть y_0 – любое из $[c, d]$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx. \quad (1)$$

► Отметим, что $\int_a^b f(x, y) dx$ существует для каждого значения y из $[c, d]$, так как $f(x, y) \in C([a, b])$ при любом закреплённом $y \in [c, d]$. В частности, существует $\int_a^b f(x, y_0) dx$.

Возьмём $\varepsilon > 0$ – любое. Выберём и закреплём любое $y_0 \in [c, d]$.

По условию $f(x, y) \in C(\bar{P})$, поэтому $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $(\bar{P})$ (см. теорему Кантора) и, следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое, что для любых двух точек (x', y') , (x'', y'') из $(\bar{P})$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, $|y'' - y'| < \delta$, оказывается $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Положим $y' = y_0$, $y'' = y$, где y – любое, но такое, что $|y - y_0| < \delta$, $y \in [c, d]$, $x' = x'' = x$, где x – любое из $[a, b]$ ($|x'' - x'| = 0 < \delta$). Тогда $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ для любого $x \in [a, b]$, если $|y - y_0| < \delta$, $y \in [c, d]$.
Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx = \int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)] dx \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $|y - y_0| < \delta$, $y \in [c, d]$, так сейчас же $\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\int_a^b f(x, y_0) dx = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx$. ◀

Совершенно аналогично доказывается утверждение: если $f(x, y) \in C(\bar{P})$ и если x_0 – любое из $[a, b]$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) dy = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

§3. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть $f(x, y) \in C(\bar{P})$ и $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. Тогда

$$I(y) \in C([c, d]).$$

► Возьмем любое $y_0 \in [c, d]$ и закрепим. В §2 было доказано, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx, \text{ то есть}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0).$$

Последнее же означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0 . Так как y_0 – любое из $[c, d]$, то заключаем, что $I(y) \in C([c, d])$. ◀

Замечание 1. Условие $f(x, y) \in C(\bar{P})$ является достаточным для непрерывности $I(y)$ на $[c, d]$, но оно не необходимо.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

Пример. Пусть $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ в $(\bar{P}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -5 \leq y \leq 5. \end{cases}$

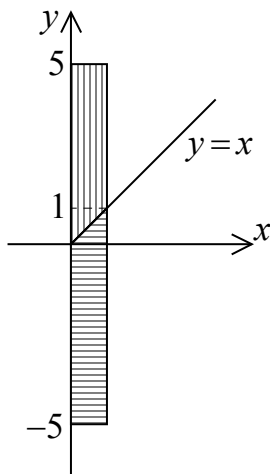


Рис. 1.1

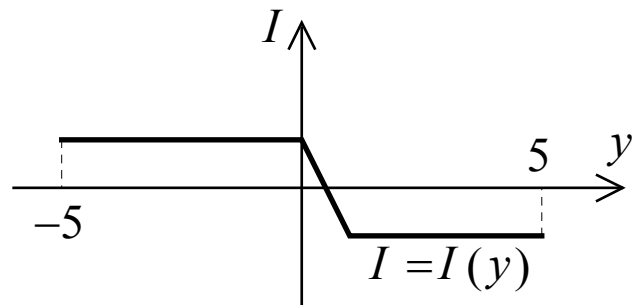


Рис. 1.2

Видим, что $f(x, y)$ терпит разрыв в точках, принадлежащих прямой $x = y$ (рис. 1.1).

Пусть $I(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - y) dx$. Имеем:

1) если $-5 \leq y < 0$, то $I(y) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$.

$$2) \text{ если } 0 \leq y \leq 1, \text{ то } I(y) = \int_0^y (-1) \cdot dx + \int_y^1 1 \cdot dx = 1 - 2y.$$

$$3) \text{ если } 1 < y \leq 5, \text{ то } I(y) = \int_0^1 (-1) \cdot dx = -1.$$

$$\text{Таким образом, } I(y) = \begin{cases} 1, & y \in [-5, 0), \\ 1 - 2y, & y \in [0, 1], \\ -1, & y \in (1, 5] \end{cases} \Rightarrow I(y) \in C([-5, 5]) \text{ (см.}$$

рис. 1.2).

Замечание 2. Совершенно аналогично доказывается **теорема**: Пусть $f(x, y) \in C(\bar{P})$ и пусть $\tilde{I}(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, $x \in [a, b]$. Тогда $\tilde{I}(x) \in C([a, b])$.

Следствие. Если $f(x, y) \in C(\bar{P})$, то одновременно $I(y) \in C([c, d])$, $\tilde{I}(x) \in C([a, b])$ и, следовательно, существуют одновременно

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

$$\int_a^b \tilde{I}(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \text{ называются повторными интегралами}$$

от функции $f(x, y)$ в $(\bar{P})$.

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $(\bar{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$. Пусть $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. Тогда:

1) функция $I(y)$ имеет в промежутке $[c, d]$ производную $I'(y)$;

$$2) I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx, \text{ то есть } \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^b f'_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d];$$

3) $I'(y) \in C([c, d])$.

► Возьмем любую точку $y_0 \in [c, d]$ и закрепим. Дадим y_0 приращение Δy – любое, но такое, что $\Delta y \neq 0$ и точка $y_0 + \Delta y \in [c, d]$. Тогда

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx, \quad I(y_0 + \Delta y) = \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx,$$

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx. \quad (1)$$

По теореме Лагранжа $f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$ ($0 < \theta < 1$). Следовательно,

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx. \quad (2)$$

По условию, $f'_y(x, y) \in C(\bar{P})$. Перейдем в (2) к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$. Приняв во внимание теорему о допустимости предельного перехода под знаком интеграла, получим:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$$

$\Rightarrow I'(y_0)$ существует, причем $I'(y_0) = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$. Так как y_0 – любое из

$[c, d]$, то заключаем, что $I'(y)$ существует для любого y из $[c, d]$, причем $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. У нас $f'_y(x, y) \in C(\bar{P})$, а $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$.

А тогда по теореме о непрерывности интеграла как функции параметра заключаем, что $I'(y) \in C([c, d])$. ◀

§5. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть функция $f(x, y) \in C(\bar{P})$. Пусть $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$,

$y \in [c, d]$. Тогда $\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$, т. е.

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

► Докажем более общее равенство

$$\int_c^t I(y) dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx, \text{ для любого } t \in [c, d]. \quad (1)$$

Займемся сначала левой частью равенства (1). Так как $f(x, y) \in C(\bar{P})$, то $I(y) \in C([c, d])$ (см. теорему §3). Следовательно, $\int_c^t I(y) dy$ – интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. А тогда по теореме Барроу

$$\left(\int_c^t I(y) dy \right)'_t = I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]. \quad (2)$$

Займемся теперь правой частью равенства (1). Положим

$$\int_c^t f(x, y) dy = \varphi(x, t). \quad (3)$$

Здесь в интеграле слева x выступает в роли параметра. Ясно, что функция $\varphi(x, t)$ определена в прямоугольнике $(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq t \leq d. \end{cases}$

Покажем, что $\varphi(x, t) \in C(\bar{P})$. Для этого выберем и закрепим любую точку $(x, t) \in (\bar{P})$. Затем возьмем Δx и Δt – любые, но такие, что точка $(x + \Delta x, t + \Delta t) \in (\bar{P})$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x, t + \Delta t) - \varphi(x, t) &= \int_c^{t+\Delta t} f(x + \Delta x, y) dy - \int_c^t f(x, y) dy = \\ &= \int_c^t [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy + \int_t^{t+\Delta t} f(x + \Delta x, y) dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2}$. Отметим, что $(\rho \rightarrow 0) \Leftrightarrow$ (одновременно $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$). Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в $(\bar{P})$, $f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \xrightarrow[\substack{\rho \rightarrow 0 \\ (\Delta x \rightarrow 0)}}{0} 0 \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое,

что $|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$, если $\rho < \delta$. Тогда

$$\left| \int_c^t [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy \right| < \frac{\varepsilon}{d - c} (t - c) \leq \varepsilon,$$

если $\rho < \delta$. Последнее означает, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_c^t [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy = 0$. Так

как $f(x, y) \in C(\bar{P})$, то $f(x, y)$ – ограниченная в $(\bar{P})$, т. е. существует число

$M > 0$ такое, что $|f(x, y)| \leq M$ в $(\bar{P})$. А тогда $\left| \int_t^{t+\Delta t} f(x + \Delta x, y) dy \right| \leq M \cdot |\Delta t| \Rightarrow$

$\int_t^{t+\Delta t} f(x + \Delta x, y) dy \xrightarrow[\substack{\rho \rightarrow 0 \\ (\Delta t \rightarrow 0)}]{0} 0$. Теперь из (4) следует

$$\varphi(x + \Delta x, t + \Delta t) - \varphi(x, t) \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0.$$

Последнее означает, что функция $\varphi(x, t)$ непрерывна в точке (x, t) . У нас точка (x, t) – любая из $(\bar{P})$. Поэтому $\varphi(x, t) \in C(\bar{P})$. Из (3) находим:

$$\varphi'_t(x, t) = f(x, t). \quad (5)$$

По условию, $f(x, y) \in C(\bar{P})$. Следовательно, $\varphi'_t(x, t) \in C(\bar{P})$. Принимая во внимание (3), правую часть равенства (1) можно записать в виде

$$\int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \varphi(x, t) dx. \quad (6)$$

В интеграле, стоящем в правой части (6), t выступает в роли параметра. Выше было показано, что функция $\varphi(x, t)$ непрерывна в $(\bar{P})$ и имеет там непрерывную частную производную $\varphi'_t(x, t)$. Но тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\left(\int_a^b \varphi(x, t) dx \right)'_t = \int_a^b \varphi'_t(x, t) dx \stackrel{(5)}{=} \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]. \quad (7)$$

Видим, что левая и правая части равенства (1) имеют в промежутке $[c, d]$ совпадающие производные (см. (2) и (7)). Следовательно, они различаются в этом промежутке лишь на постоянную величину, т. е. для любого $t \in [c, d]$

$$\int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx + \text{const}. \quad (8)$$

Положим в (8) $t = c$. Получим $0 = 0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = 0$. Значит, будем иметь вместо (8) для любого $t \in [c, d]$

$$\int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx. \quad (9)$$

Положив в (9) $t = d$, получим

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad (10)$$

а это и требовалось установить. ◀

§6. Случаи, когда и пределы интеграла зависят от параметра

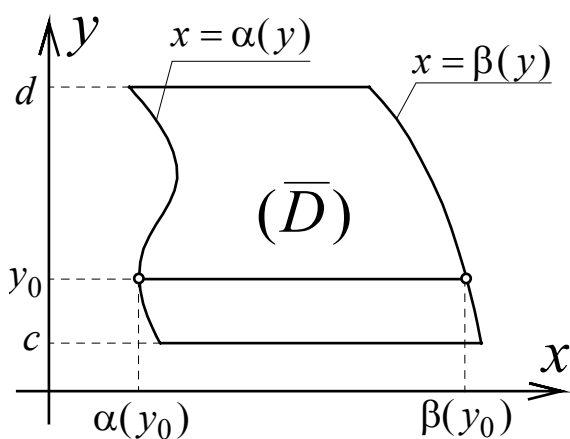


Рис. 1.3

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $(\bar{D})$, ограниченной линиями: $y = c$, $y = d$ ($c < d$), $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на промежутке $[c, d]$ и такие, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $y \in [c, d]$.

Пусть при каждом закреплённом y из $[c, d]$ существует $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$. Ясно, что

каждому значению y из $[c, d]$ будет отве-

чать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y , определённую в промежутке $[c, d]$.

Станем обозначать

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (1)$$

Теорема (о непрерывности интеграла как функции параметра). Пусть функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, и пусть $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. Тогда

$$I(y) \in C([c, d]).$$

► Выберем и закрепим любое $y_0 \in [c, d]$.

1. Пусть $\alpha(y_0) < \beta(y_0)$.

Положим $\gamma = \frac{\alpha(y_0) + \beta(y_0)}{2}$. Ясно, что $\alpha(y_0) < \gamma < \beta(y_0) \Rightarrow \alpha(y_0) - \gamma < 0$, $\beta(y_0) - \gamma > 0$. Функции $\alpha(y) - \gamma$ и $\beta(y) - \gamma$ – непрерывные на

промежутке $[c, d]$. Следовательно, по теореме о стабильности знака существует $\delta_1 > 0$ такое, что как только $|y - y_0| < \delta_1$ и $y \in [c, d]$, так сейчас же: $\alpha(y) - \gamma < 0$, $\beta(y) - \gamma > 0$, т. е. $\alpha(y) < \gamma < \beta(y)$.

Возьмем y из промежутка $[c, d]$ любое, но такое, чтобы было $|y - y_0| < \delta_1$, и положим $p = \max\{\alpha(y), \alpha(y_0)\}$; $q = \min\{\beta(y_0), \beta(y)\}$. Ясно, что $p < q$. Имеем:

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \underbrace{\int_{\alpha(y_0)}^p f(x, y_0) dx}_p + \underbrace{\int_p^q f(x, y_0) dx}_p + \underbrace{\int_q^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx}_q,$$

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \underbrace{\int_{\alpha(y)}^p f(x, y) dx}_p + \underbrace{\int_p^q f(x, y) dx}_p + \underbrace{\int_q^{\beta(y)} f(x, y) dx}_q.$$

В этих соотношениях из четырех подчеркнутых интегралов два обязательно равны нулю (так как обязательно: либо $p = \alpha(y_0)$, либо $p = \alpha(y)$, и либо $q = \beta(y_0)$, либо $q = \beta(y)$).

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, сколь угодно малое. Так как $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны в точке y_0 , то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$ такое, что как только $|y - y_0| < \delta_2$ и $y \in [c, d]$, так сейчас же $|\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \varepsilon$, $|\beta(y) - \beta(y_0)| < \varepsilon$. Отметим, что если брать на промежутке $[c, d]$ значения y , удовлетворяющие условию: $|y - y_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то справедливы приведенные выше выражения для $I(y_0)$ и $I(y)$. Для таких y будем иметь:

$$I(y) - I(y_0) = \underbrace{\int_p^q [f(x, y) - f(x, y_0)] dx}_p +$$

$$+ \underbrace{\int_{\alpha(y)}^p f(x, y) dx}_{\alpha(y)} + \underbrace{\int_q^{\beta(y)} f(x, y) dx}_q - \underbrace{\int_{\alpha(y_0)}^p f(x, y_0) dx}_{\alpha(y_0)} - \underbrace{\int_q^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx}_q.$$

Рассмотрим, например, $\int_{\alpha(y_0)}^p f(x, y_0) dx$. По условию $f(x, y) \in C(\overline{D}) \Rightarrow$

$f(x, y)$ ограниченная в $(\overline{D})$, т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|f(x, y)| \leq M$ всюду в $(\overline{D})$. Так как $y \in [c, d]$ и $|y - y_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то

$$|p - \alpha(y_0)| < \varepsilon. \text{ Следовательно, } \left| \int_{\alpha(y_0)}^p f(x, y_0) dx \right| \leq M \cdot |p - \alpha(y_0)| < M \cdot \varepsilon.$$

Такая же оценка верна и для каждого из трех оставшихся подчеркнутых ин-

тегралов. Поэтому

$$|I(y) - I(y_0)| < \int_p^q |f(x, y) - f(x, y_0)| dx + 2M \cdot \varepsilon.$$

Так как $(\bar{D})$ – ограниченное замкнутое множество и $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то $f(x, y)$ равномерно непрерывная в $(\bar{D})$. А тогда взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_3 > 0$, зависящее только от ε , такое, что для любых двух точек (x', y') , (x'', y'') из $(\bar{D})$, для которых $|x'' - x'| < \delta_3$, $|y'' - y'| < \delta_3$, будет $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $y' = y_0$, $y'' = y$, где $y \in [c, d]$ и удовлетворяет условию $|y - y_0| < \delta$; $x' = x'' = x$, где x – любое из $[p, q]$. Тогда $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in [p, q]$. Следовательно, для y , удовлетворяющих условиям $|y - y_0| < \delta$ и $y \in [c, d]$, будет:

$$\int_p^q |f(x, y) - f(x, y_0)| dx < \varepsilon \cdot (q - p), \text{ и потому } |I(y) - I(y_0)| < \varepsilon(q - p + 2M).$$

У нас функции $\alpha(y), \beta(y) \in C([c, d]) \Rightarrow \alpha(y)$ и $\beta(y)$ – ограниченные в $[c, d] \Rightarrow$ существует число $K > 0$ такое, что $|\alpha(y)| \leq K$, $|\beta(y)| \leq K$ для всех $y \in [c, d]$. А тогда $|q - p| \leq |q| + |p| \leq 2K$. Значит,

$$|I(y) - I(y_0)| < 2\varepsilon \cdot (K + M). \quad (2)$$

Отметим, что число $2\varepsilon \cdot (K + M)$ сколь угодно мало вместе с ε .

Так как для достижения неравенства (2) понадобилось лишь, чтобы было $|y - y_0| < \delta$, $y \in [c, d]$, то заключаем, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0 .

2. Пусть $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$.

$$\begin{aligned} \text{В этом случае } I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = 0; \quad I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \Rightarrow \\ |I(y)| &\leq M \cdot [\beta(y) - \alpha(y)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеем $\lim_{y \rightarrow y_0} [\beta(y) - \alpha(y)] = \beta(y_0) - \alpha(y_0) = 0$. А тогда из (3)

$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = 0 [= I(y_0)]$. Видим, что и в этом случае установлена непрерывность $I(y)$ в точке y_0 .

У нас y_0 – любое из $[c, d]$. Следовательно, $I(y) \in C([c, d])$. ◀

Теорема (о дифференцировании по параметру). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в $(\bar{D})$ и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$.

Пусть функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ определены в промежутке $[c, d]$ и имеют там производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$. Пусть $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. Тогда для любого $y \in [c, d]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y). \quad (4)$$

► Выберем и закрепим любое $y_0 \in [c, d]$.

1. Пусть $\alpha(y_0) < \beta(y_0)$. При доказательстве предыдущей теоремы было отмечено, что в этом случае существует окрестность: $u_{\delta_1}(y_0)$ такая, что для любого $y \in u_{\delta_1}(y_0)$ будет: $\alpha(y) < \gamma < \beta(y)$. Дадим y_0 приращение Δy – любое, но такое, что $\Delta y \neq 0$ и $y_0 + \Delta y \in u_{\delta_1}(y_0)$. Будем иметь, следовательно, $\alpha(y_0 + \Delta y) < \gamma < \beta(y_0 + \Delta y)$. Положим $p = \max\{\alpha(y_0), \alpha(y_0 + \Delta y)\}$; $q = \min\{\beta(y_0), \beta(y_0 + \Delta y)\}$. Могут реализоваться следующие случаи:

- 1) $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0)$;
- 2) $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0 + \Delta y)$;
- 3) $p = \alpha(y_0 + \Delta y)$, $q = \beta(y_0)$;
- 4) $p = \alpha(y_0 + \Delta y)$, $q = \beta(y_0 + \Delta y)$.

1. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0)$. Имеем в этом случае

$$\begin{aligned} I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx, & I(y_0 + \Delta y) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \\ &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx. \end{aligned}$$

А тогда

$$\begin{aligned} I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) &= \\ &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y) dx. \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа $f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) = f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y$. По частному случаю теоремы о среднем для определенного интеграла

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(c_1, y_0 + \Delta y) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)],$$

где $c_1 \in [\beta(y_0), \beta(y_0 + \Delta y)] \Rightarrow c_1 \rightarrow \beta(y_0)$, если $\Delta y \rightarrow 0$;

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)],$$

где $c_2 \in [\alpha(y_0), \alpha(y_0 + \Delta y)] \Rightarrow c_2 \rightarrow \alpha(y_0)$, если $\Delta y \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx + \\ &+ f(c_1, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, получаем:

$$I'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (5)$$

2. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0)$, $q = \beta(y_0 + \Delta y)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx + \int_{\beta(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\alpha(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y) dx + \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \\ &+ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y \cdot dx + \\ &+ f(c_1, y_0) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] - f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] \\ &\Rightarrow \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx + \\ &+ f(c_1, y_0) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, находим

$$I'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (5)$$

3. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0 + \Delta y)$, $q = \beta(y_0)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx + \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0 + \Delta y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \\ &+ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx = \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y \cdot dx + \\ &+ f(c_1, y_0 + \Delta y) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] - f(c_2, y_0) \cdot [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] \\ \Rightarrow \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx + \\ &+ f(c_1, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y} \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$I'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (5)$$

4. Рассмотрим случай, когда $p = \alpha(y_0 + \Delta y)$, $q = \beta(y_0 + \Delta y)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx + \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0) dx + \int_{\beta(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx; \\ I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0 + \Delta y)}^{\beta(y_0 + \Delta y)} [f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)] dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y_0+\Delta y)} f(x, y_0) dx = \int_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y \cdot dx + \\
& + f(c_1, y_0) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)] - f(c_2, y_0) \cdot [\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)] \\
& \Rightarrow \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx + \\
& + f(c_1, y_0) \cdot \frac{\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)}{\Delta y} - f(c_2, y_0) \cdot \frac{\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, находим

$$I'(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0) dx + f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (5)$$

II. Пусть $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$.

В этом случае $I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx = 0$ (как интеграл, у которого совпа-

дают нижний и верхний пределы интегрирования);

$$I(y_0 + \Delta y) = \int_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx. \text{ А тогда}$$

$$\begin{aligned}
I(y_0 + \Delta y) - I(y_0) &= \int_{\alpha(y_0+\Delta y)}^{\beta(y_0+\Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx = \\
&= f(c, y_0 + \Delta y) \cdot [\beta(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0 + \Delta y)].
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha(y_0 + \Delta y) \leq c \leq \beta(y_0 + \Delta y) \Rightarrow c \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} \alpha(y_0) [= \beta(y_0)]$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \\
& = f(c, y_0 + \Delta y) \cdot \frac{(\beta(y_0 + \Delta y) - \beta(y_0)) - (\alpha(y_0 + \Delta y) - \alpha(y_0))}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$, находим:

$$I'(y_0) = f(\beta(y_0), y_0) \cdot [\beta'(y_0) - \alpha'(y_0)] = f(\alpha(y_0), y_0) \cdot [\beta'(y_0) - \alpha'(y_0)],$$

ибо $\alpha(y_0) = \beta(y_0)$. Последняя формула может быть записана также в виде

$$I'(y_0) = f(\beta(y_0), y_0) \cdot \beta'(y_0) - f(\alpha(y_0), y_0) \cdot \alpha'(y_0). \quad (6)$$

Легко видеть, что формула (6) является частным случаем формулы (5) (она получается из (5), если положить в (5) $\beta(y_0) = \alpha(y_0)$).

Так как у нас y_0 – любое, принадлежащее $[c, d]$, то приходим к выводу, что $I'(y)$ существует для любого $y \in [c, d]$ и что

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y). \blacktriangleleft$$

§7. Примеры к главе 1

1. Дано: $I(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx$. Найти $\lim_{y \rightarrow 0} I(y)$.

► Так как подынтегральная функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна на всей плоскости Oxy , то она непрерывна, в частности, в прямоугольнике $(\bar{P}) = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -d \leq y \leq d, \end{cases}$ где $d > 0$ – любое конечное число. По теореме §2 заключаем, что допустим предельный переход по параметру под знаком интеграла, когда $y \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dx &= \int_{-1}^1 \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^2} dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \\ &= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Дано: $I(y) = \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$. Найти $\lim_{y \rightarrow 0} I(y)$.

► Здесь подынтегральная функция $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Она непрерывна на всей плоскости Oxy . Функции $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = 1+y$ непрерывны для всех $y \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, в частности, $f(x, y)$ непрерывна в области $(\bar{D}) = \begin{cases} y \leq x \leq 1+y, \\ -d \leq y \leq d, \end{cases}$ где $d > 0$ – любое конечное число, а функции $\alpha(y)$, $\beta(y)$ непрерывны на промежутке $[-d, d]$. Видим, что выполнены условия теоремы о непрерывности интеграла как функции параметра (см. §6). По этой теореме $I(y) \in C([-d, d])$, а значит, $I(y)$ непрерывна в точке $y = 0$. Следовательно, $\lim_{y \rightarrow 0} I(y) = I(0)$, т. е.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

3. Вычислить $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($a > 0$, $b > 0$), применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла.

► Отметим прежде всего, что данный интеграл – несобственный, Подынтегральная функция имеет две особые точки. Это – точки $x = 0$ и $x = 1$. Имеем:

1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0 \Rightarrow$ подынтегральная функция в правой полуокрестности точки $x = 0$ – ограниченная.

2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (bx^b - ax^a) = b - a$ – определенное число. $\Rightarrow$ подынтегральная функция в левой полуокрестности точки $x = 1$ – ограниченная.

Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^b - x^a}{\ln x}, & x \in (0, 1); \\ 0, & x = 0; \\ b - a, & x = 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{f}(x) \in C([0, 1]) \Rightarrow \tilde{f}(x) \in R([0, 1])$, а значит, данный интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \text{ сходится.}$$

Введем в рассмотрение интеграл $I(x) = \int_a^b x^y dy$ ($a > 0$, $b > 0$), $x \in [0, 1]$.

Этот интеграл представляет собой функцию параметра x , определенную в промежутке $[0, 1]$. Здесь $f(x, y) = x^y$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq y \leq b, \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ А тогда по теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §5) имеем:

$$\int_0^1 I(x) dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy.$$

Так как $I(x) = \int_a^b x^y dy = \frac{x^y}{\ln x} \Big|_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$, то предыдущее равенство примет

вид:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \left(\frac{x^{y+1}}{y+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \blacktriangleleft$$

4. Вычислить $I'(y)$, если $I(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2} dx$.

► Здесь $f(x, y) = e^{-yx^2}$, $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = y^2$; $\alpha(y) \leq \beta(y)$, если $y \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$; $\alpha(y) \geq \beta(y)$, если $y \in [0, 1]$. Пусть $d_1 > 0$ – любое конечное число; $d_2 > 1$ – любое конечное число. Введем в рассмотрение области

$$(\overline{D}_1) = \begin{cases} -d_1 \leq y \leq 0, \\ y \leq x \leq y^2; \end{cases} \quad (\overline{D}_2) = \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ y^2 \leq x \leq y; \end{cases} \quad (\overline{D}_3) = \begin{cases} 1 \leq y \leq d_2, \\ y \leq x \leq y^2. \end{cases}$$

В каждой из этих трех областей $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную $f'_y(x, y) = -x^2 e^{-yx^2}$.

В каждом из промежутков: $[-d_1, 0]$; $[0, 1]$; $[1, d_2]$ существуют $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, причем $\alpha'(y) = 1$, $\beta'(y) = 2y$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) заключаем, что для любого $y \in ([-d_1, 0] \cup [1, d_2])$ $I'(y)$ существует и

$$I'(y) = - \int_y^{y^2} x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}.$$

Пусть теперь y – любое из промежутка $[0, 1]$. Имеем $I(y) = -\tilde{I}(y)$, где

$\tilde{I}(y) = \int_{y^2}^y e^{-yx^2} dx$. По теореме о дифференцировании по параметру (см. §6) для

любого $y \in [0, 1]$ $\tilde{I}'(y)$ существует и $\tilde{I}'(y) = - \int_{y^2}^y x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^3} - e^{-y^5} \cdot 2y$.

Следовательно, для любого $y \in [0, 1]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y) = -\tilde{I}'(y), \text{ т. е. } I'(y) = \int_{y^2}^y x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I'(y) = - \int_y^{y^2} x^2 e^{-yx^2} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}, \quad y \in [0, 1].$$

Глава 2. Двойные интегралы

§1. Область и ее диаметр

Предварительно напомним некоторые сведения, относящиеся к понятию кривой на плоскости.

1. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – две функции, определенные и непрерывные на промежутке $[a, b]$, то множество точек плоскости $\{(\varphi(t), \psi(t))\}$, $t \in [a, b]$, называется *непрерывной кривой*.

2. Если $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $\psi(a) = \psi(b)$, то непрерывная кривая называется *замкнутой*.

3. Замкнутая кривая называется *самонепересекающейся*, если две точки кривой $(\varphi(u), \psi(u))$ и $(\varphi(v), \psi(v))$ при $u < v$ могут совпасть лишь тогда, когда $u = a$, $v = b$.

4. Замкнутая самонепересекающаяся кривая (K) делит плоскость на два *связных* множества (D) и (G) . (Любые две точки каждого из этих множеств можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей (K) . Если же одна из этих точек принадлежит (D) , а другая – принадлежит (G) , то всякая соединяющая их непрерывная кривая пересекает (K) .) Точки, лежащие на (K) , не входят ни в (D) , ни в (G) . Одно из множеств (D) , (G) является ограниченным, а другое – нет. То из этих двух множеств, которое является ограниченным, будем называть *областью*, ограниченной контуром (K) . (У нас на рис. 2.1 (D) – область, ограниченная контуром (K) .) Если к точками области (D) присоединить точки контура (K) , то полученное множество будем называть *замкну-*

той областью, ограниченной контуром (K) , и обозначать через $(\bar{D})$. Отметим, что замкнутая область $(\bar{D})$ есть ограниченное замкнутое множество.

Определение. Пусть $(\bar{D})$ – замкнутая область, ограниченная контуром (K) . Пусть M и N – любые две точки, лежащие на (K) . Пусть $\rho(M, N)$ – расстояние между точками M и N . Число $d = \sup_{\substack{M \in (K) \\ N \in (K)}} \{\rho(M, N)\}$ называется *диаметром* $(\bar{D})$.

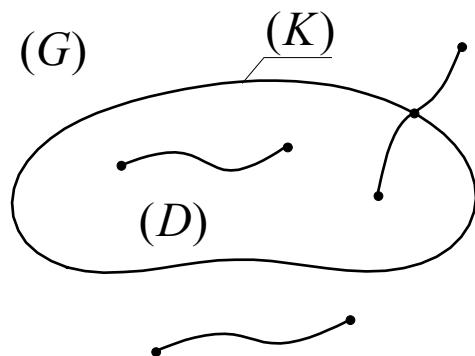


Рис. 2.1. К определению понятия области

Теорема. На контуре (K) существуют две точки M_0 и N_0 такие, что $\rho(M_0, N_0) = d$.

► Возьмем на контуре (K) точки M и N . Пусть $M = (\varphi(u), \psi(u))$, $N = (\varphi(v), \psi(v))$. Тогда $\rho(M, N) = \sqrt{[\varphi(v) - \varphi(u)]^2 + [\psi(v) - \psi(u)]^2}$. Видим, что $\rho(M, N)$ есть функция аргументов u, v , определенная в квадрате $(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq u \leq b, \\ a \leq v \leq b, \end{cases}$ и, очевидно, непрерывная в $(\bar{P})$. По второй теореме Вейерштрасса существует точка $(u_0, v_0) \in (\bar{P})$, в которой эта функция принимает свое наибольшее значение. Остается только положить $M_0 = (\varphi(u_0), \psi(u_0))$, $N_0 = (\varphi(v_0), \psi(v_0))$. ◀

В главе 3 (см. §1) учебного пособия [4] дано определение площади области $(\bar{D})$, установлено необходимое и достаточное условие квадратуемости этой области. Там же введено понятие простой кривой и доказана теорема о простой кривой. Следствием этой теоремы явилось утверждение, что область $(\bar{D})$, ограниченная простым контуром, квадратуема. Отметим здесь, что *теорема о простой кривой* допускает *обобщение*, а именно:

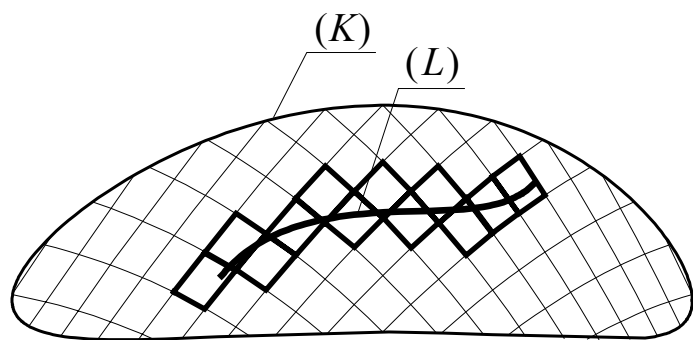


Рис. 2.2. К обобщенной теореме о простой кривой

Обобщенная теорема о простой кривой. Пусть (L) – простая кривая, расположенная в области (D) , ограниченной простым контуром (K) . Разделим $(\bar{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\bar{D}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть

Q – сумма площадей тех частичных областей $(\bar{D}_k)$, которые имеют с (L) хотя бы одну общую точку. Тогда, если λ – наибольший из диаметров частичных областей $(\bar{D}_k)$, то $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q = 0$.

§2. Определение двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ задана в области $(\bar{D})$, ограниченной простым контуром (K) . Проведем следующие операции.

1. Дробим $(\bar{D})$ произвольной сетью простых кривых на n частичных областей $(\bar{D}_1), (\bar{D}_2), \dots, (\bar{D}_n)$. Пусть площади этих частичных областей есть соответственно $F_1, F_2, \dots, F_n$, а диаметры – $d_1, d_2, \dots, d_n$. Положим $\lambda = \max_{k=1, n} \{d_k\}$ (λ – ранг дробления).

2. В каждой частичной области $(\bar{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k) и находим в ней значения функции f , т. е. находим $f(x_k, y_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на площадь соответствующей частичной области: $f(x_k, y_k) \cdot F_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot F_k.$$

Сумму σ будем называть *интегральной суммой Римана*. Отметим, что σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, так и от выбора точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \rightarrow 0$, и ищем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа дробления $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, ни от выбора точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$, то его называют *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области $(\bar{D})$ и обозначают символом $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$ или $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$.

Таким образом,

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma \quad \left(\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k \right). \quad (1)$$

Замечание. Соотношение $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ означает: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает

число $\delta > 0$ такое, что для любого способа дробления $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, будет: $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы ни были при этом выбраны точки (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$.

Если у функции $f(x, y)$, определенной в $(\bar{D})$, существует $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$,

то будем говорить, что $f(x, y)$ интегрируема в $(\bar{D})$ и писать $f(x, y) \in R(\bar{D})$ ($f(x, y)$ принадлежит классу R в области $(\bar{D})$).

Установим теперь необходимое условие интегрируемости функции $f(x, y)$ в области $(\bar{D})$.

Теорема (об ограниченности функции $f(x, y)$, интегрируемой в $(\bar{D})$).

Если функция $f(x, y) \in R(\bar{D})$, то $f(x, y)$ – ограниченная в области $(\bar{D})$.

► По условию $f(x, y) \in R(\bar{D})$. Пусть $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$. Но тогда любому

$\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого способа дробления $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$. В частности, числу $\varepsilon = 1$ (> 0) будет отвечать $\tilde{\delta} > 0$ такое, что для любого способа разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, независимо от способа выбора точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$, будет $|\sigma - I| < 1$.

Возьмем любой способ разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \tilde{\delta}$, и закрепим его. (Тогда F_k , $k = \overline{1, n}$, будут определенными числами.) Для такого способа разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, независимо от способа выбора точек

(x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$ будем иметь $\left| \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot F_k - I \right| < 1$.

Теперь выберем и закрепим точки (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ..., (x_n, y_n) соответственно в областях $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$, ..., $(\bar{D}_n)$ (тогда $f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3)$, ..., $f(x_n, y_n)$ будут определенными числами). Точку (x_1, y_1) оставим свободной в $(\bar{D}_1)$ (т. е. точка (x_1, y_1) может занимать любое положение в области $(\bar{D}_1)$). Будем иметь при любом положении точки (x_1, y_1) в $(\bar{D}_1)$:

$$\left| f(x_1, y_1) \cdot F_1 + \sum_{k=2}^n f(x_k, y_k) \cdot F_k - I \right| < 1.$$

Положим $I - \sum_{k=2}^n f(x_k, y_k) \cdot F_k = C$ (C – определенное число, не зависящее от выбора точки (x_1, y_1)). Предыдущее неравенство запишется теперь так:

$$|f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C| < 1, \text{ точка } (x_1, y_1) \in (\bar{D}_1).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) \cdot F_1 &= (f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C) + C \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_1, y_1) \cdot F_1| &\leq |f(x_1, y_1) \cdot F_1 - C| + |C| \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_1, y_1) \cdot F_1| &< 1 + |C| \Rightarrow |f(x_1, y_1)| < \frac{1 + |C|}{F_1}. \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство верно для любого положения точки (x_1, y_1) в $(\bar{D}_1)$, то заключаем, что функция $f(x, y)$ – ограниченная в $(\bar{D}_1)$. Совершенно аналогично устанавливается ограниченность функции $f(x, y)$ в областях $(\bar{D}_2), (\bar{D}_3), \dots, (\bar{D}_n)$.

Положим

$$M_1 = \sup_{(\bar{D}_1)} \{|f(x, y)|\}, M_2 = \sup_{(\bar{D}_2)} \{|f(x, y)|\}, \dots, M_n = \sup_{(\bar{D}_n)} \{|f(x, y)|\}.$$

Пусть $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$. Тогда $|f(x, y)| \leq M$ для любой точки (x, y) из $(\bar{D})$. А это и означает, что $f(x, y)$ – ограниченная в $(\bar{D})$. ◀

Замечание. Доказанная теорема необратима, т. е. не всякая функция $f(x, y)$, заданная в $(\bar{D})$ и ограниченная там, оказывается интегрируемой в $(\bar{D})$. Следовательно, ограниченность функции $f(x, y)$ в области $(\bar{D})$ является лишь необходимым условием интегрируемости этой функции в $(\bar{D})$.

§3. Признаки интегрируемости функций

Пусть ограниченная функция $f(x, y)$ задана в области $(\bar{D})$, ограниченной простым контуром.

На вопрос, существует или не существует $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$, ответить, поль-

зуясь непосредственным определением двойного интеграла, удастся сравнительно легко лишь в отдельных частных случаях. В связи с этим оказывается важным установление признаков интегрируемости функции $f(x, y)$ в области $(\bar{D})$. Но признаки интегрируемости $f(x, y)$ в $(\bar{D})$ содержат понятия верхней и нижней сумм Дарбу. Поэтому необходимо ввести эти понятия.

Итак, пусть $f(x, y)$ – ограниченная функция, определенная в области $(\bar{D})$. Разложим $(\bar{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, и положим $M_k = \sup_{(\bar{D}_k)} \{f(x, y)\}$; $m_k = \inf_{(\bar{D}_k)} \{f(x, y)\}$. Отметим, что числа m_k и M_k , $k = \overline{1, n}$, существуют, ибо множество $\{f(x, y)\}$, $(x, y) \in (\bar{D}_k)$ – ограниченное и сверху, и снизу. Составим суммы $s = \sum_{k=1}^n m_k F_k$ и $S = \sum_{k=1}^n M_k F_k$. Эти суммы называют соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*, отвечающими данному способу разбиения области $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$.

Отметим, что для закрепленного способа разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$ суммы s и S – определенные числа. Если же способ разбиения изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа s и S . Отметим далее, что интегральные суммы Римана σ даже для закрепленного способа дробления $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$ принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений (за счет различного выбора точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$).

Суммы Дарбу обладают следующими свойствами.

1. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\bar{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\bar{D})$. Тогда для любой интегральной суммы Римана σ из $\{\sigma\}$ будет: $s \leq \sigma \leq S$.

2. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие закрепленному способу дробления области $(\bar{D})$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому же способу дробления области $(\bar{D})$. Тогда $s = \inf\{\sigma\}$, $S = \sup\{\sigma\}$.

3. Пусть s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие какому-нибудь способу дробления области $(\bar{D})$. Добавим теперь еще одну простую кривую дробления (все прежние кривые дробления сохраняются). В результате у нас получится некоторый новый способ дробления области $(\bar{D})$. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу, отвечающие этому новому способу дробления области $(\bar{D})$. Справедливо утверждение, что $\tilde{S} \leq S$, $\tilde{s} \geq s$, т. е. что от добавления новых кривых дробления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

4. Выше было отмечено, что для закрепленного способа дробления области $(\bar{D})$ нижняя и верхняя суммы Дарбу s и S суть определенные числа. Если же способ дробления области $(\bar{D})$ изменить, то изменятся, вообще говоря, и числа

s и S . Следовательно, как s , так и S принимают, вообще говоря, бесконечное множество значений.

Пусть $\{s\}$ – множество значений, принимаемых нижней суммой Дарбу, $\{S\}$ – множество значений, принимаемых верхней суммой Дарбу. Справедливо утверждение:

Всякая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу, т. е. для всякой s из $\{s\}$ и для любой S из $\{S\}$ оказывается

$$s \leq S.$$

Видим, что перечисленные здесь свойства сумм Дарбу являются дословным повторением аналогичных свойств сумм Дарбу, установленных для функций $f(x)$, заданных на промежутке $[a, b]$ (см. главу 1, §2 учебного пособия [4]) Следует отметить, что и доказательства этих свойств совершенно аналогичны прежним.

Приступим теперь к установлению признаков интегрируемости.

Теорема 1 (основной признак интегрируемости). Пусть функция $f(x, y)$ – ограниченная, заданная в области $(\bar{D})$. Для того, чтобы $f(x, y) \in R(\bar{D})$, необходимо и достаточно, чтобы было $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$ (разности $S - s$ составляют каждый раз из чисел s и S , отвечающих одному и тому же способу дробления области $(\bar{D})$).

► *Необходимость.* Дано: $f(x, y) \in R(\bar{D})$, $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$. Доказать:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию $f(x, y) \in R(\bar{D}) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, для каждой σ из множества $\{\sigma\}$, отвечающих этому способу разбиения, будет $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выберем и закрепим какой-нибудь способ разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь $|\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{3}$, для любой σ из $\{\sigma\}$ (здесь $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих нашему закрепленному способу разбиения $(\bar{D})$), или, что то же самое,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sigma \in \{\sigma\}. \quad (1)$$

1) Из соотношения (1) имеем, в частности, $\sigma < I + \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\} \Rightarrow I + \frac{\varepsilon}{3}$ – верхняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $S = \sup \{\sigma\}$. Поэтому

$$S \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

(S – верхняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закреплённому способу разбиения $(\bar{D})$).

2) Из соотношения (1) имеем также $\sigma > I - \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \{\sigma\} \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{3}$ – нижняя граница $\{\sigma\}$. Мы знаем, что $s = \inf\{\sigma\}$. Поэтому

$$s \geq I - \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

(s – нижняя сумма Дарбу, отвечающая нашему закреплённому способу разбиения $(\bar{D})$).

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$0 \leq S - s \leq \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Тогда $0 \leq S - s < \varepsilon \Rightarrow |S - s| < \varepsilon$. Последнее неравенство получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Достаточность. Дано: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$. Доказать: $f(x, y) \in R(\bar{D})$.

По условию, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$. Это означает, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$

такое, что для любого разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, оказывается $|S - s| < \varepsilon$, или $S - s < \varepsilon$ (так как $S - s \geq 0$). Рассмотрим множества $\{s\}$ и $\{S\}$. Выберем и закрепим любую S и $\{S\}$. Обозначим ее через S_0 . По свойству 4) сумм Дарбу, имеем $s \leq S_0$, $s \in \{s\}$. Это означает, что $\{s\}$ ограничено сверху. Но тогда, как мы знаем, существует $\sup\{s\}$. Пусть $A = \sup\{s\}$ (A – определенное число). Ясно, что $s \leq A$, $s \in \{s\}$. Ясно далее, что $A \leq S_0$ (так как A – точная верхняя граница $\{s\}$, а S_0 – просто верхняя граница этого множества). У нас S_0 – любая из $\{S\}$. Следовательно, $A \leq S$, $S \in \{S\}$. Таким образом, получили

$$s \leq A \leq S. \quad (4)$$

Отметим, что в соотношении (4) s и S могут отвечать как различным, так и одному и тому же способу разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$. Возьмем любой способ разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$. Пусть $\{\sigma\}$ – множество интегральных сумм Римана, отвечающих этому способу разбиения $(\bar{D})$, а s и S – нижняя и верхняя суммы Дарбу. Одновременно будут иметь место соотношения

$$s \leq \sigma \leq S, \quad \sigma \in \{\sigma\}; \quad s \leq A \leq S.$$

Тогда $-(S-s) \leq \sigma - A \leq (S-s)$, $\sigma \in \{\sigma\}$ или $|\sigma - A| \leq (S-s)$, $\sigma \in \{\sigma\}$. Если брать любой способ разбиения $(\bar{D})$ на части, у которого $\lambda < \delta$, то будет $S-s < \varepsilon$, а значит,

$$|\sigma - A| < \varepsilon, \quad \sigma \in \{\sigma\}.$$

Последнее означает, что $A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma \Rightarrow f(x, y) \in R(\bar{D})$. ◀

Замечание. Имеем

$$S-s = \sum_{k=1}^n M_k F_k - \sum_{k=1}^n m_k F_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) F_k = \sum_{k=1}^n \omega_k F_k.$$

Здесь $\omega_k = M_k - m_k$ – колебание функции $f(x, y)$ в $(\bar{D}_k)$. Теперь основной признак интегрируемости может быть сформулирован так.

Пусть функция $f(x, y)$ – ограниченная, заданная в области $(\bar{D})$. Для того, чтобы $f(x, y) \in R(\bar{D})$, необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечало $\delta > 0$ такое, что для любого способа разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, было бы

$$\sum_{k=1}^n \omega_k F_k < \varepsilon.$$

Теорема 2. Если $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то $f(x, y) \in R(\bar{D})$ (т. е. если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в $(\bar{D})$, то $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$ существует).

► Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По условию $f(x, y) \in C(\bar{D})$. Так как $(\bar{D})$ – ограниченное замкнутое множество, то по теореме Кантора $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $(\bar{D})$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, у которого $\lambda < \delta$, будет $\omega_k < \frac{\varepsilon}{F}$ одновременно для всех $k = \overline{1, n}$ (см. следствие из теоремы Кантора; здесь F – площадь области $(\bar{D})$). Возьмем любой способ разбиения $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$ ($k = \overline{1, n}$), у которого $\lambda < \delta$. Будем иметь для такого способа разбиения $(\bar{D})$

$$\sum_{k=1}^n \omega_k F_k < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{F} \cdot F_k = \frac{\varepsilon}{F} \sum_{k=1}^n F_k = \frac{\varepsilon}{F} \cdot F = \varepsilon.$$

Неравенство $\sum_{k=1}^n \omega_k F_k < \varepsilon$ получено нами лишь в предположении, что $\lambda < \delta$.

Последнее означает, что $f(x, y) \in R(\bar{D})$. ◀

Теорема 3. Пусть ограниченная функция $f(x, y)$ задана в области $(\bar{D})$ и непрерывна там всюду, за исключением множества точек, лежащих на конечном числе простых кривых. Тогда $f(x, y) \in R(\bar{D})$.

► Пусть для определенности у функции $f(x, y)$ в $(\bar{D})$ имеется лишь одна линия разрыва (L) . Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По теореме о простой кривой линию (L) можно заключить внутрь многоугольной области (D_*) , площадь которой меньше ε .

Контур (K_*) области (D_*) есть замкнутая ломаная, звенья которой параллельны координатным осям. (L) и (K_*) не пересекаются.

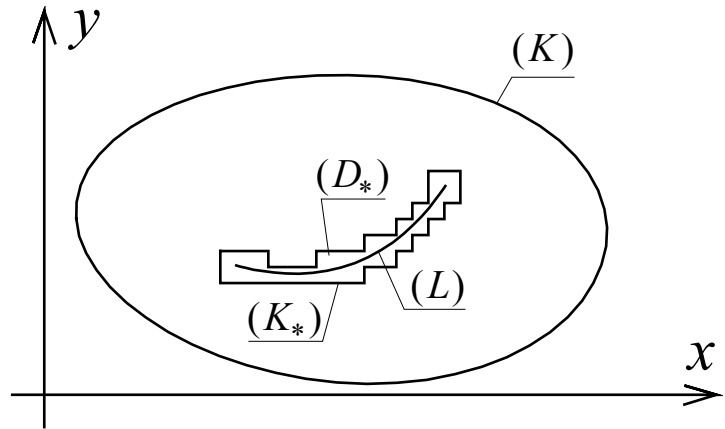


Рис. 2.3. К доказательству теоремы 3

Пусть $(\bar{D}) \setminus (D_*)$ – область, остающаяся после удаления (D_*) из $(\bar{D})$. (Контур (K_*) причисляем к области $(\bar{D}) \setminus (D_*)$). Ясно, что $f(x, y)$ – непрерывна в $(\bar{D}) \setminus (D_*)$.

Так как $(\bar{D}) \setminus (D_*)$ – ограниченное замкнутое множество, то $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $(\bar{D}) \setminus (D_*)$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых двух точек (x', y') ; (x'', y'') из $(\bar{D}) \setminus (D_*)$, для которых $\rho((x', y'); (x'', y'')) < \delta$ будет $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$.

Контур (K_*) есть простая кривая. По обобщенной теореме о простой кривой, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$ такое, что для любого способа дробления, у которого $\lambda < \delta_2$, сумма площадей тех частичных областей, которые задевают (K_*) , будет меньше ε .

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Разобьем область $(\bar{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, так, чтобы оказалось $\lambda < \delta$ и составим

разность сумм Дарбу $S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k \cdot F_k$.

Из областей $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, ..., $(\bar{D}_n)$ образуем три группы.

В группу I отнесем те из $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, которые лежат в $(\bar{D}) \setminus (D_*)$ и не задевают контура (K_*) .

В группу II отнесем те из $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, которые лежат в (D_*) и не задевают контура (K_*) .

В группу III отнесем те $(\bar{D}_k)$, которые задевают контур (K_*) .

Тогда и сумма $\sum_{k=1}^n \omega_k F_k$ разобьется на три суммы $\sum_I, \sum_{II}, \sum_{III}$. В сумме $\sum_I$ будет $\omega_k < \varepsilon$ и поэтому $\sum_I \omega_k F_k < \varepsilon \cdot F$. В суммах $\sum_{II}$ и $\sum_{III}$ будет $\omega_k \leq \Omega$, где Ω – колебание функции $f(x, y)$ в $(\bar{D})$ (число Ω существует, ибо $f(x, y)$ – ограниченная в $(\bar{D})$). Так как суммы площадей областей $(\bar{D}_k)$, попавших в группу II и в группу III меньше ε , то будем иметь:

$$\begin{aligned}\sum_{II} \omega_k F_k &\leq \Omega \cdot \sum_{II} F_k < \Omega \cdot \varepsilon, \\ \sum_{III} \omega_k F_k &\leq \Omega \cdot \sum_{III} F_k < \Omega \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

А тогда

$$S - s = \sum_{k=1}^n \omega_k F_k < \varepsilon(F + 2\Omega) \quad (5)$$

(число $\varepsilon(F + 2\Omega)$ сколь угодно мало вместе с ε).

Так как для достижения неравенства (5) нам потребовалось лишь чтобы было $\lambda < \delta$, то заключаем, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$, а это означает, что $f(x, y) \in R(\bar{D})$.

§4 Свойства двойных интегралов

1°. $\iint_{(\bar{D})} dF = F$ (F – площадь области $(\bar{D})$).

► В самом деле, здесь $f(x, y) \equiv 1$ всюду в $(\bar{D})$. Поэтому, взяв любое разбиение области $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$, и выбрав произвольно точки (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$, будем иметь $f(x_1, y_1) = 1$; $f(x_2, y_2) = 1$, $f(x_3, y_3) = 1$, ..., $f(x_n, y_n) = 1$. Следовательно,

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot F_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot F_k = \sum_{k=1}^n F_k = F \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = F. \blacktriangleleft$$

2°. Если $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и α – произвольное число, то $\alpha f(x, y) \in R(\bar{D})$, причем $\iint_{(\bar{D})} \alpha f(x, y) dF = \alpha \cdot \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$.

► Возьмем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$ и составим интегральную сумму Римана для функции $\alpha f(x, y)$. Будем иметь

$$\sigma(\alpha f) = \sum_{k=1}^n \alpha f(x_k, y_k) F_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k = \alpha \cdot \sigma(f).$$

По условию, $f(x, y) \in R(\bar{D}) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f)$ существует, конечный и равный

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF. \text{ Но тогда } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(\alpha f) = \alpha \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f) = \alpha \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(\alpha f) \text{ существует, конечный} \Rightarrow \iint_{(\bar{D})} \alpha f(x, y) dF \text{ существует, причем}$$

$$\iint_{(\bar{D})} \alpha f(x, y) dF = \alpha \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF. \blacktriangleleft$$

3°. Если $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и $g(x, y) \in R(\bar{D})$, то $(f(x, y) \pm g(x, y)) \in R(\bar{D})$, причем

$$\iint_{(\bar{D})} (f(x, y) \pm g(x, y)) dF = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \pm \iint_{(\bar{D})} g(x, y) dF.$$

► Берем произвольное разбиение сетью простых кривых области $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$ и составляем интегральную сумму Римана для функции $f(x, y) \pm g(x, y)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma(f \pm g) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k, y_k) \pm g(x_k, y_k)) F_k = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k \pm \sum_{k=1}^n g(x_k, y_k) F_k = \\ &= \sigma(f) \pm \sigma(g). \end{aligned}$$

По условию $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и $g(x, y) \in R(\bar{D}) \Rightarrow$ существуют конечные $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f)$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(g)$. Но тогда существует конечный $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f \pm g)$, причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f \pm g) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(f) \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(g) \Rightarrow \iint_{(\bar{D})} (f(x, y) \pm g(x, y)) dF \text{ существует,}$$

$$\text{причем } \iint_{(\bar{D})} (f(x, y) \pm g(x, y)) dF = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \pm \iint_{(\bar{D})} g(x, y) dF. \blacktriangleleft$$

4°. Пусть $f(x, y) \in R(\bar{D})$. Если изменить значения функции $f(x, y)$ вдоль какой-нибудь простой кривой (L) (с тем лишь условием, чтобы и измененная

функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в $(\bar{D})$ и ее двойной интеграл по области $(\bar{D})$ равен $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$.

► Если составить интегральные суммы Римана для измененной и исходной функций, то они могут различаться лишь теми слагаемыми, которые относятся к областям $(\bar{D}_k)$, задевающим кривую (L) . Но, по обобщенной теореме о простой кривой, общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, откуда уже легко заключить, что обе интегральные суммы стремятся к общему пределу, т. е. к $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF$.

Таким образом, существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. ◀

5°. Если область $(\bar{D})$, в которой задана функция $f(x, y)$, разложена простой кривой (L) на две области $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$, то из интегрируемости функции $f(x, y)$ во всей области $(\bar{D})$ следует ее интегрируемость в областях $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$, и обратно – из интегрируемости функции $f(x, y)$ в обеих областях $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$ вытекает ее интегрируемость в области $(\bar{D})$. При этом

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \iint_{(\bar{D}_1)} f(x, y) dF + \iint_{(\bar{D}_2)} f(x, y) dF. \quad (1)$$

► Разложим области $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$ произвольными сетями простых кривых на части; тем самым и $(\bar{D})$ разложится на части $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, ..., $(\bar{D}_n)$. Если значком k' отметить частичные области, содержащиеся в $(\bar{D}_1)$, а значком k'' – частичные области, содержащиеся в $(\bar{D}_2)$, то

$$\sum_{k=1}^n \omega_k F_k = \sum \omega_{k'} F_{k'} + \sum \omega_{k''} F_{k''}.$$

1) Пусть функция $f(x, y) \in R(\bar{D})$. Но тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k F_k = 0$, а, следовательно, и подаловно $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \omega_{k'} F_{k'} = 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \omega_{k''} F_{k''} = 0$. Последнее означает, что $f(x, y) \in R(\bar{D}_1)$ и $f(x, y) \in R(\bar{D}_2)$.

2) Пусть теперь дано, что функция $f(x, y) \in R(\bar{D}_1)$ и $f(x, y) \in R(\bar{D}_2)$. Но тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \omega_{k'} F_{k'} = 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \omega_{k''} F_{k''} = 0$, а, следовательно, и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \omega_k F_k = 0 \Rightarrow f(x, y) \in R(\bar{D})$.

Однако нужно помнить, что $\sum_{k=1}^n \omega_k F_k$ построена не для произвольного раз-

биения области $(\bar{D})$ на части: ведь мы исходим из разложения порознь областей $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$. Чтобы от произвольного разложения области $(\bar{D})$ перейти к разложению рассмотренного частного вида, нужно присоединить к линиям деления кривую (L) . Тогда соответствующие суммы будут различаться лишь слагаемыми, отвечающими тем частичным областям, которые задевают кривую (L) . Но по обобщенной теореме о простой кривой общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ и, следовательно, соответствующие суммы будут различаться на бесконечно малую величину. Значит, условие интегрируемости функции $f(x, y)$ в $(\bar{D})$ будет выполнено.

Доказываемая формула (1) получается из равенства:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k = \sum f(x_{k'}, y_{k'}) F_{k'} + \sum f(x_{k''}, y_{k''}) F_{k''}$$

переходом в нем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$.

6°. Пусть $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и $g(x, y) \in R(\bar{D})$, и пусть всюду в $(\bar{D})$ выполняется неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$. Тогда

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \leq \iint_{(\bar{D})} g(x, y) dF.$$

► Произвольной сетью простых кривых разобьем $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_k)$. В каждой частичной области $(\bar{D}_k)$ берем произвольную точку (x_k, y_k) . Ясно, что $f(x_k, y_k) \leq g(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, n}$. Умножим обе части этого неравенства на F_k ($F_k > 0$). Получим $f(x_k, y_k) F_k \leq g(x_k, y_k) F_k$. Просуммируем полученные неравенства по значку k от 1 до n . Будем иметь

$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k \leq \sum_{k=1}^n g(x_k, y_k) F_k$. Переходя здесь к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \leq \iint_{(\bar{D})} g(x, y) dF. \blacktriangleleft$$

7°. Пусть $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и пусть всюду в $(\bar{D})$: $m \leq f(x, y) \leq M$. Тогда $m \cdot F \leq \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \leq M \cdot F$.

► Это следует из свойств 6°, 2°, 1°. ◀

8°. Теорема о среднем значении. Пусть $f(x, y) \in R(\bar{D})$ и пусть всюду в $(\bar{D})$: $m \leq f(x, y) \leq M$. Тогда: существует число μ , удовлетворяющее условию $m \leq \mu \leq M$, такое, что будет $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \mu \cdot F$.

► Выше (см. 7°) установлено, что в этом случае выполняется неравенство $mF \leq \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \leq MF$. Разделим все части этого неравенства на F

($F > 0$): $m \leq \frac{1}{F} \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \leq M$. Обозначим $\frac{1}{F} \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \mu$ (ясно, что

$m \leq \mu \leq M$). Тогда $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \mu \cdot F$, а это и требовалось установить. ◀

9°. Частный случай теоремы о среднем значении. Если функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то в $(\bar{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ, η) такая, что будет:

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = f(\xi, \eta) \cdot F.$$

► По условию $f(x, y) \in C(\bar{D}) \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $f(x, y)$ достигает в $(\bar{D})$ своего наименьшего m и наибольшего M значений. Так как $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то $f(x, y) \in R(\bar{D})$. Тогда по теореме о среднем значении $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \mu \cdot F$, где $m \leq \mu \leq M$. Значения m и M функция $f(x, y)$ при-

нимает в $(\bar{D})$. Если же $m < \mu < M$, то по теореме о промежуточном значении для функции $f(x, y) \in C(\bar{D})$ заключаем: в области $(\bar{D})$ обязательно найдется хотя бы одна точка (ξ, η) такая, что будет $f(\xi, \eta) = \mu$, а значит, и в этом случае

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = f(\xi, \eta) \cdot F. \quad \blacktriangleleft$$

10°. Если функция $f(x, y) \in R(\bar{D})$, то и функция $|f(x, y)| \in R(\bar{D})$, причем

$$\left| \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \right| \leq \iint_{(\bar{D})} |f(x, y)| dF.$$

► По условию $f(x, y) \in R(\bar{D}) \Rightarrow f(x, y)$ – ограниченная в $(\bar{D})$, т. е. существует число $L > 0$ такое, что $|f(x, y)| \leq L$ в $(\bar{D})$. Последнее означает, что

функция $|f(x, y)|$ – ограниченная в $(\bar{D})$. Следовательно, существуют $m = \inf_{(\bar{D})} \{f(x, y)\}$, $M = \sup_{(\bar{D})} \{f(x, y)\}$, $\tilde{m} = \inf_{(\bar{D})} \{|f(x, y)|\}$, $\tilde{M} = \sup_{(\bar{D})} \{|f(x, y)|\}$, а

значит, существуют $\Omega = M - m$ и $\tilde{\Omega} = \tilde{M} - \tilde{m}$ (Ω – колебание функции $f(x, y)$ в $(\bar{D})$, а $\tilde{\Omega}$ – колебание $|f(x, y)|$ в $(\bar{D})$). Легко понять, что $\tilde{\Omega} \leq \Omega$.

Возьмем произвольное разбиение области $(\bar{D})$ сетью простых кривых на части $(\bar{D}_k)$, $k = \overline{1, n}$. Пусть ω_k – колебание $f(x, y)$ в $(\bar{D}_k)$, а $\tilde{\omega}_k$ – колебание $|f(x, y)|$ в $(\bar{D}_k)$. Имеем $0 \leq \tilde{\omega}_k \leq \omega_k$, $k = \overline{1, n} \Rightarrow 0 \leq \tilde{\omega}_k F_k \leq \omega_k F_k$, $k = \overline{1, n}$. Следовательно,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k F_k \leq \sum_{k=1}^n \omega_k F_k. \quad (2)$$

Так как $f(x, y) \in R(\bar{D})$, то $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k F_k = 0$. Тогда из (2) заключаем, что

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k F_k = 0$. Последнее означает, что $|f(x, y)| \in R(\bar{D})$. Имеем, далее,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) F_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(x_k, y_k)| F_k,$$

т. е. $|\sigma(f)| \leq \sigma(|f|)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\left| \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF \right| \leq \iint_{(\bar{D})} |f(x, y)| dF. \blacktriangleleft$$

§5. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области

Пусть ограниченная функция $f(x, y)$ задана в прямоугольнике

$$(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$$

1) Пусть при каждом закреплённом y из $[c, d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема на $[a, b]$, т. е. при каждом закреплённом y из $[c, d]$ существует

$$\int_a^b f(x, y) dx. \text{ Следовательно, } \int_a^b f(x, y) dx \text{ представляет собой функцию аргумента } y, \text{ заданную на промежутке } [c, d]. \text{ Станем обозначать}$$

$$\int_a^b f(x, y) dx = \varphi(y), \quad y \in [c, d]. \text{ Допустим теперь, что эта функция}$$

$\varphi(y) \in R([c, d])$. Тогда $\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ назы-

вается *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ в $(\bar{P})$.

2) Допустим ещё, что при каждом закреплённом x из $[a, b]$ существует

$$\int_c^d f(x, y) dy. \text{ Ясно, что каждому } x \text{ из } [a, b] \text{ будет отвечать свое, вполне опре-}$$

деленное значение интеграла $\int_c^d f(x, y) dy$. Следовательно, $\int_c^d f(x, y) dy$ представляет собой функцию аргумента x , определённую на промежутке $[a, b]$.

Станем обозначать $\int_c^d f(x, y) dy = \psi(x), \quad x \in [a, b]$. Допустим, что эта функция

$$\psi(x) \in R([a, b]). \text{ Тогда } \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \text{ назы-}$$

вается ещё одним *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ в $(\bar{P})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x, y)$, заданной в прямоугольнике $(\bar{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{P})} f(x, y) dx dy$ и

$$I_{\text{повт.}} = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \text{ то они равны, т. е. } I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}.$$

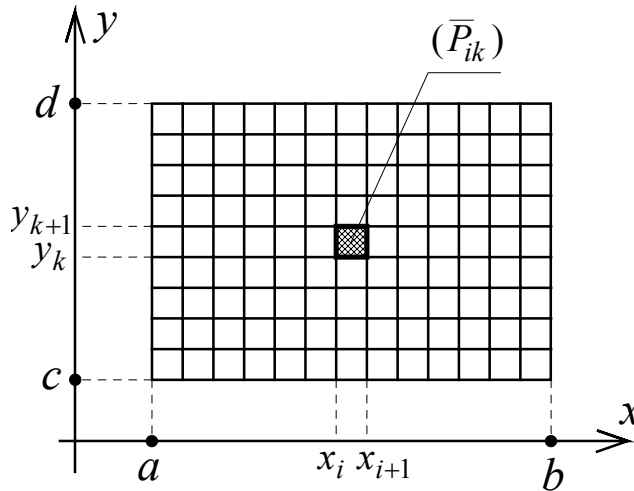


Рис. 2.4. К вычислению двойного интеграла в случае прямоугольной области

► Разобьем $(\bar{P})$ отрезками прямых $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$), $y = y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m$, $y_0 = c$, $y_m = d$), на частичные прямоугольники $(\bar{P}_{ik})$, где $(\bar{P}_{ik}) = \begin{cases} x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ y_k \leq y \leq y_{k+1}. \end{cases}$ Пусть $m_{ik} = \inf_{(\bar{P}_{ik})} \{f(x, y)\}$,

$M_{ik} = \sup_{(\bar{P}_{ik})} \{f(x, y)\}$. Значит, если точка $(x, y) \in (\bar{P}_{ik})$, то

$$m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}. \quad (1)$$

Возьмем любое y из $[y_k, y_{k+1}]$ и закрепим его. Сделав это, проинтегрируем неравенство (1) по x от x_i до x_{i+1} . Получим

$$m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \leq M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \quad (2)$$

Интеграл $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$ существует, так как существует по условию $I_{\text{повт.}}$, а это

значит, что при любом закреплённом y из $[c, d]$ $f(x, y) \in R([a, b])$; тем более $f(x, y) \in R([x_i, x_{i+1}])$. Просуммируем неравенства (2) по значку i от 0 до $n-1$

(во всех этих неравенствах считаем y одним и тем же, взятым из $[y_k, y_{k+1}]$). Будем иметь

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i) \leq \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i). \quad (3)$$

Проинтегрируем неравенство (3) по y от y_k до y_{k+1} . Получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k) \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_a^b f(x, y) dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k). \quad (4)$$

Просуммируем неравенства (4) по значку k от 0 до $m-1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} m_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)}_{=s} &\leq \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \leq \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} M_{ik}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)}_{=S} \Leftrightarrow s \leq I_{\text{повт.}} \leq S. \end{aligned}$$

Так как $s \leq I_{\text{дв.}} \leq S$, то $-(S-s) \leq I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} \leq (S-s)$, т. е. $|I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}}| \leq S-s$. По условию, $I_{\text{дв.}}$ существует $\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S-s) = 0$. Следовательно, $I_{\text{повт.}} - I_{\text{дв.}} = 0 \Rightarrow I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$. ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается:

Если у ограниченной функции $f(x, y)$, заданной в прямоугольнике $(\bar{P})$, существуют одновременно $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{P})} f(x, y) dx dy$ и $\tilde{I}_{\text{повт.}} = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$, то

$$I_{\text{дв.}} = \tilde{I}_{\text{повт.}}$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в $(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ Пусть $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$. Тогда функция $\varphi(y) \in C([c, d])$.

► Эта теорема была доказана ранее. См. главу 1, §3. О непрерывности интеграла как функции параметра. ◀

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается справедливость утверждения:

Пусть $f(x, y) \in C(\bar{P})$ и пусть $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, $x \in [a, b]$. Тогда функция $\psi(x) \in C([a, b])$.

Следствие. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в $(\bar{P})$, то существуют $I_{\text{повт.}} = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ и $\tilde{I}_{\text{повт.}} = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

► Действительно, в этом случае $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \in C([c, d])$, а

$\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy \in C([a, b])$. Следовательно, $\varphi(y) \in R([c, d])$;

$\psi(x) \in R([a, b])$, т. е. $\int_c^d \varphi(y) dy = I_{\text{повт.}}$ и $\int_a^b \psi(x) dx = \tilde{I}_{\text{повт.}}$ существуют. ◀

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x, y) \in C(\bar{P})$, то $f(x, y) \in R(\bar{P})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{P})} f(x, y) dx dy$.

Таким образом, приходим к **выводу**: если $f(x, y) \in C(\bar{P})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$, $I_{\text{повт.}}$, $\tilde{I}_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа, получаем, что $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint_{(\bar{P})} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (5)$$

и $I_{\text{дв.}} = \tilde{I}_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint_{(\bar{P})} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (6)$$

Пример 1. Вычислить $I = \iint_{(\bar{P})} \frac{dx dy}{(x+y)^2}$, где $(\bar{P}) = \begin{cases} 3 \leq x \leq 4, \\ 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$

► По формуле (5) имеем $\iint_{(\bar{P})} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$. Находим сначала

внутренний интеграл:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y} \Big|_{x=3}^{x=4} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

А тогда

$$\iint_{(\bar{P})} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right) dy = \ln \frac{y+3}{y+4} \Big|_{y=1}^{y=2} = \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{25}{24}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Вычислить $I = \iint_{(\bar{P})} \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где $(\bar{P}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

► Здесь для вычисления I удобнее воспользоваться формулой (6), т. е. взять внешнее интегрирование по x , а внутреннее – по y . Будем иметь:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}. \text{ Находим внутренний интеграл:}$$

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

А тогда

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \ln \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + \ln \sqrt{2} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Если вычислять I по формуле (5), то квадратуры окажутся более сложными. В самом деле, будем иметь: $I = \int_0^1 y dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$. Находим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+y^2}}.$$

А тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{y dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{2}+1)^2}{2} = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

§6. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области

Пусть ограниченная функция $f(x, y)$ задана в области $(\bar{D})$, ограниченной линиями: $y = c$, $y = d$ ($c < d$) и $x = \alpha(y)$; $x = \beta(y)$, где $\alpha(y)$, $\beta(y)$ – функции, непрерывные на промежутке $[c, d]$ и такие, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$, $y \in [c, d]$.

Определение. Пусть при каждом закреплённом y из $[c, d]$ существует

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad \text{Тогда} \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

представляет собой функцию аргумента y , определённую на проме-

жутке $[c, d]$, т. е. $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$. Если эта функция $\varphi(y)$ обозн.

оказывается интегрируемой на промежутке $[c, d]$, то

$\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ называется *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ в области $(\bar{D})$.

Теорема 1. Если у ограниченной функции $f(x, y)$, заданной в области $(\bar{D})$, существуют одновременно оба интеграла: $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$ и

$$I_{\text{повт.}} = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx, \quad \text{то они равны, т. е. } I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}.$$

► По условию $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на $[c, d]$. Значит, они – ограниченные на $[c, d]$. Следовательно, найдутся числа a и b такие, что будет: $a < \alpha(y) \leq \beta(y) < b$, $y \in [c, d]$. Построим прямоугольник

$(\bar{P}) = \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ Ясно, что $(\bar{D}) \subset (\bar{P})$. Введём в рассмотрение вспомогатель-

ную функцию $g(x, y)$, определив её в прямоугольнике $(\bar{P})$ следующим образом:

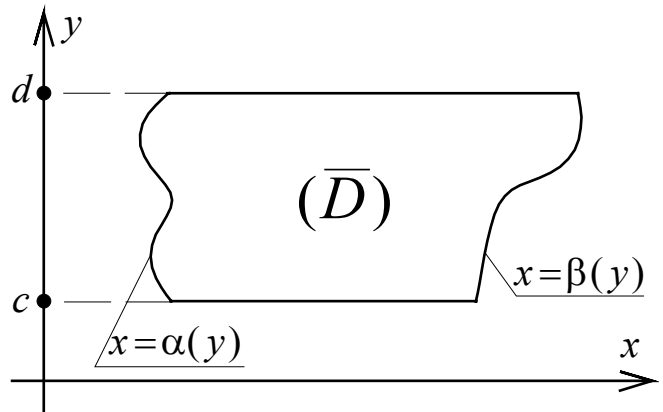


Рис. 2.5. К определению повторного интеграла от функции $f(x, y)$ в области $(\bar{D})$

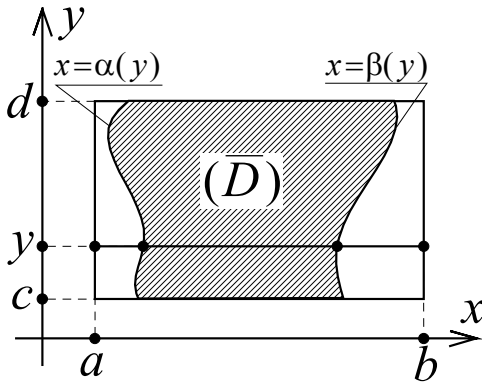


Рис. 2.6. К доказательству теоремы 1

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{в } (\bar{D}), \\ 0 & \text{в } (\bar{P}) \setminus (\bar{D}). \end{cases}$$

Покажем, что у функции $g(x, y)$ в $(\bar{P})$ существуют оба интеграла $I_{\text{дв.}}^* = \iint_{(\bar{P})} g(x, y) dF$ и

$$I_{\text{повт.}}^* = \int_c^d dy \int_a^b g(x, y) dx.$$

1) Действительно, $g(x, y) \in R(\bar{D})$, ибо в $(\bar{D})$ $g(x, y) \equiv f(x, y)$. Кроме того, $g(x, y) \in R((\bar{P}) \setminus (D))$, ибо $g(x, y) = 0$ всюду в $(\bar{P}) \setminus (D)$, за исключением, быть может, множества точек, лежащих на двух простых кривых: $x = \alpha(y)$ и $x = \beta(y)$, $y = [c, d]$ (мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых). Значит, $g(x, y) \in R(\bar{P})$, т. е.

$I_{\text{дв.}}^* = \iint_{(\bar{P})} g(x, y) dF$ существует. Имеем, далее,

$$\begin{aligned} I_{\text{дв.}}^* &= \iint_{(\bar{P})} g(x, y) dF = \iint_{(\bar{D})} g(x, y) dF + \underbrace{\iint_{(\bar{P}) \setminus (D)} g(x, y) dF}_{=0} = \\ &= \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF + 0 = I_{\text{дв.}}. \end{aligned}$$

Итак, $I_{\text{дв.}}^*$ существует, и

$$I_{\text{дв.}}^* = I_{\text{дв.}}. \quad (1)$$

2) Покажем теперь, что у функции $g(x, y)$ в $(\bar{P})$ существует $I_{\text{повт.}}^*$. Для этого возьмем любое y из $[c, d]$ и закрепим его. Имеем

$$[a, b] = [a, \alpha(y)] \cup [\alpha(y), \beta(y)] \cup [\beta(y), b].$$

Функция $g(x, y)$ интегрируема по x на каждом из этих трех промежутков, ибо на $[\alpha(y), \beta(y)]$ она совпадает с $f(x, y)$, а на остальных двух — $g(x, y) = 0$ всюду за исключением, быть может, двух точек. Имеем, далее,

$$\int_a^b g(x, y) dx = \underbrace{\int_a^{\alpha(y)} g(x, y) dx}_{=0} + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g(x, y) dx + \underbrace{\int_{\beta(y)}^b g(x, y) dx}_{=0} = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

По условию, правая часть последнего равенства интегрируема на промежутке $[c, d]$ (по условию, $I_{\text{повт.}}$ существует). Значит, интегрируема на промежутке $[c, d]$ и левая часть этого равенства, т. е. существует $I_{\text{повт.}}^* = \int_c^d dy \int_a^b g(x, y) dx$.

Таким образом, показано, что $I_{\text{повт.}}^*$ существует и что

$$I_{\text{повт.}}^* = I_{\text{повт.}}. \quad (2)$$

Так как у ограниченной функции $g(x, y)$, заданной в прямоугольнике $(\bar{P})$, существуют оба интеграла $I_{\text{дв.}}^*$ и $I_{\text{повт.}}^*$, то по теореме 1 предыдущего параграфа заключаем, что

$$I_{\text{дв.}}^* = I_{\text{повт.}}^*. \quad (3)$$

У нас $I_{\text{дв.}}^* = I_{\text{дв.}}$, $I_{\text{повт.}}^* = I_{\text{повт.}}$. Следовательно, $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$. ◀

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, и пусть $\varphi(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$,

$y \in [c, d]$. Тогда $\varphi(y) \in C([c, d])$.

► Эта теорема была доказана ранее (см. гл. 1, §6, теорема о непрерывности интеграла как функции параметра). ◀

Следствие. Если функция $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то существует

$$I_{\text{повт.}} = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Ранее (см. §3, теорема 2) было доказано, что если $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то $f(x, y) \in R(\bar{D})$, т. е. существует $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$. Таким образом, приходим к заключению: если $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то существуют одновременно $I_{\text{дв.}}$ и $I_{\text{повт.}}$. А тогда по теореме 1 настоящего параграфа приходим к выводу, что $I_{\text{дв.}} = I_{\text{повт.}}$, т. е.

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (4)$$

Замечание 1. Если область $(\bar{D})$ представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена кривыми $y = \tilde{\alpha}(x)$, $y = \tilde{\beta}(x)$, $x \in [a, b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (функции $\tilde{\alpha}(x)$ и $\tilde{\beta}(x)$ предполагаются непрерыв-

ными на промежутке $[a, b]$ и такими, что $\tilde{\alpha}(x) \leq \tilde{\beta}(x)$, $x \in [a, b]$, то вместо формулы (4) придем к формуле

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\tilde{\alpha}(x)}^{\tilde{\beta}(x)} f(x, y) dy. \quad (5)$$

Разумеется, что при этом предполагается, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$, а, следовательно,

но, $I_{\text{дв.}} = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$ и $\tilde{I}_{\text{повт.}} = \int_a^b dx \int_{\tilde{\alpha}(x)}^{\tilde{\beta}(x)} f(x, y) dy$ существуют.

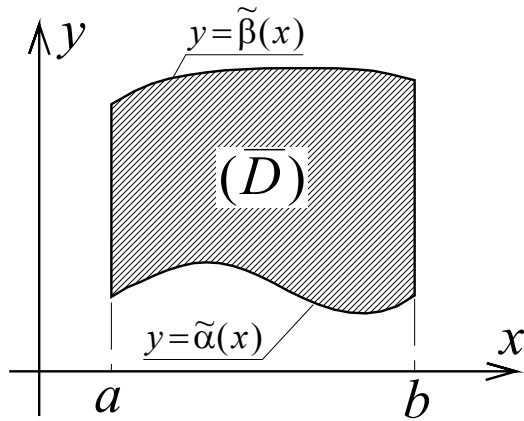


Рис. 2.7. К замечанию 1

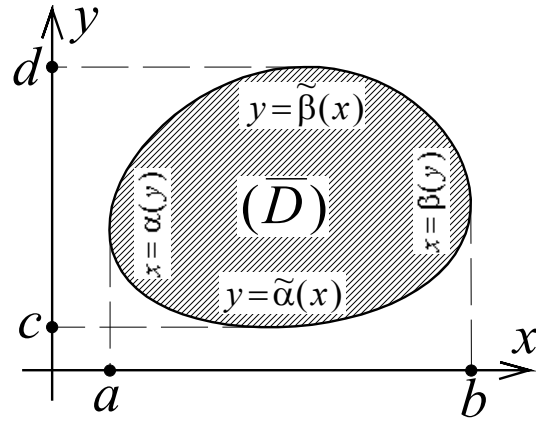


Рис. 2.8. К замечанию 2

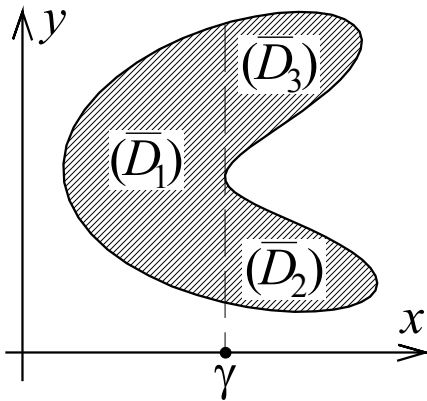


Рис. 2.9. К замечанию 3

Замечание 2. Если контур области $(\bar{D})$ пересекается лишь в двух точках как параллелями оси абсцисс, так и параллелями оси ординат (как, например, в случае, изображенном на рис. 2.8), то справедливы обе формулы (4) и (5). При этом, конечно, предполагается, что $f(x, y) \in C(\bar{D})$. Функции $\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x) \in C([a, b])$. Функции $\alpha(y), \beta(y) \in C([c, d])$.

Замечание 3. В случае более сложного контура область $(\bar{D})$ обычно разлагается на конечное число

частей рассмотренного типа (например, на рис. 2.9 область $(\bar{D})$ рассекается прямой $x = \gamma$ на три такие части: $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$). Тогда и искомый двойной интеграл представляется суммой двойных интегралов, распространенных в отдельности на эти части:

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dF = \iint_{(\bar{D}_1)} f(x, y) dF + \iint_{(\bar{D}_2)} f(x, y) dF + \iint_{(\bar{D}_3)} f(x, y) dF.$$

§7. Примеры к главе 2

1. Вычислить $I = \iint_{(\bar{D})} (x^2 + y) dx dy$, где $(\bar{D})$ – область, ограниченная двумя

параболами: $y = x^2$ и $y^2 = x$.

► Полезно сделать чертеж (хотя бы грубо), чтобы получить общее представление об области. Решая совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения: $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Если внешнее интегрирование производить по y , то промежутком изменения y будет $[0, 1]$. Взяв произвольное значение y из промежутка $[0, 1]$, видим по рисунку, что x изменяется от $x = y^2$ до $x = \sqrt{y}$. Бу-

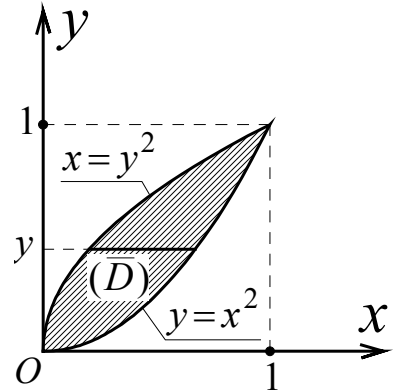


Рис. 2.10. К примеру 1

дем иметь, следовательно, $I = \int_0^1 dy \int_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y) dx$.

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \left(\frac{x^3}{3} + yx \right) \Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{3} y^{3/2} + y^{3/2} - \frac{1}{3} y^6 - y^3 = \frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^6 - y^3.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left(\frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^6 - y^3 \right) dy = \frac{33}{140}. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \iint_{(\bar{D})} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где $(\bar{D})$ – об-

ласть, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

► Наносим все эти три линии на рисунок (рис. 2.11). Совместным решением уравнений легко получить, что прямая $x = 2$ пересекает прямую $y = x$ в точке $(2, 2)$, а гиперболу $xy = 1$ – в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; прямая же $y = x$ и гипербола $xy = 1$ (в пределах первого квадранта, где и лежит рассматриваемая область) пересекаются в точке $(1, 1)$.

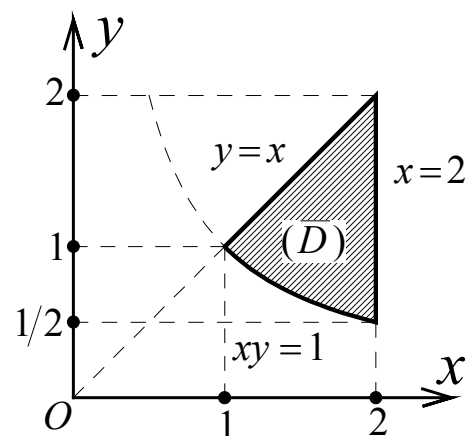


Рис. 2.11. К примеру 2

Если внешнее интегрирование производить по x , то промежуток изменения x будет $[1, 2]$. Взяв произвольное значение x из этого промежутка, видим по рисунку, что y изменяется от $y = \frac{1}{x}$ до $y = x$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_1^2 dx \int_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy. \quad \text{Но} \quad \int_{y=1/x}^{y=x} \frac{x^2}{y^2} dy = -\frac{x^2}{y} \Big|_{y=1/x}^{y=x} = x^3 - x, \quad \text{так что}$$

$$I = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

В то время как в примере 1 вычисление двойного интеграла по обеим формулам (4) или (5) представлялось одинаково простым, в примере 2 дело обстоит иначе: вычисление по формуле (4) здесь было бы сложнее. Тем не менее мы выполним его, ибо поучительно дать себе отчет в причине указанного обстоятельства.

Прямая, параллельная оси Ox , пересекает контур области $(\bar{D})$ в двух точках, так что формула (4) применима. Но кривая, ограничивающая нашу область слева, состоит из двух частей: куска гиперболы и куска прямой, которые определяются различными уравнениями. Иными словами, функция $x = \alpha(y)$ задается различными формулами в различных частях промежутка $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ изменения y . Именно,

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{если } y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ y, & \text{если } y \in [1, 2]. \end{cases}$$

Поэтому интегрирование по y следует разбить на два промежутка: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и $[1, 2]$. Следовательно, будем иметь:

$$I = \int_{1/2}^1 dy \int_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx.$$

Так как

$$\int_{x=1/y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2} \Big|_{x=1/y}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5}, \quad \int_{x=y}^{x=2} \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{x^3}{3y^2} \Big|_{x=y}^{x=2} = \frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3},$$

то

$$I = \int_{1/2}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{y}{3} \right) dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}. \blacktriangleleft$$

С подобными обстоятельствами приходится считаться: из двух возможных путей вычисления двойного интеграла, естественно, выбирают более простой.

3. Вычислить $I = \iint_{(\bar{D})} \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$, где $(\bar{D})$ –

область, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

Если внешнее интегрирование производить по x , то промежуток изменения x будет $[0, 1]$. Взяв произвольное значение x из промежутка $[0, 1]$, видим по рисунку, что y изменяется от $y = 0$ до $y = x$. Будем

иметь, следовательно, $I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x} \sqrt{4x^2 - y^2} dy$. Вы-

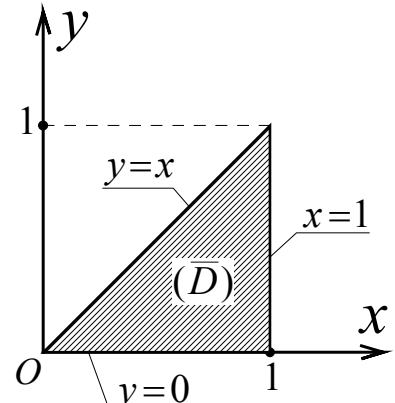


Рис. 2.12. К примеру 3

числяем внутренний интеграл:

$$\int_{y=0}^{y=x} \sqrt{4x^2 - y^2} dy = \left[\frac{y}{2} \sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2.$$

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$

В примере 3 вычисление I можно было вести и по формуле (4), т. е. производить внешнее интегрирование по y . Но в этом случае мы натолкнемся на более трудные квадратуры. Чтобы убедиться в этом, станем вычислять I

по формуле (4). Имеем: $I = \int_0^1 dy \int_{x=y}^{x=1} \sqrt{4x^2 - y^2} dx$. Вычисляем внутренний инте-

грал:

$$\begin{aligned} \int_{x=y}^{x=1} \sqrt{4x^2 - y^2} dx &= \frac{1}{2} \left[x \sqrt{4x^2 - y^2} - \frac{y^2}{2} \ln \left(2x + \sqrt{4x^2 - y^2} \right) \right]_{x=y}^{x=1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{4 - y^2} - \frac{y^2}{2} \ln \left(2 + \sqrt{4 - y^2} \right) - y^2 \sqrt{3} + \frac{y^2}{2} \ln \left(2y + \sqrt{3}y \right) \right]. \end{aligned}$$

А тогда

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{4-y^2} - \sqrt{3}y^2 + \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2} y^2 + \frac{y^2}{2} \ln \frac{y}{2+\sqrt{4-y^2}} \right] dy.$$

Сопоставляя это выражения для I с ранее полученным: $I = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) x^2 dx$,

видим, что вычисление I по формуле (5) предпочтительнее. Подобное обстоятельство следует учитывать при выборе формулы для вычисления двойного интеграла. ◀

Для приобретения навыков в расстановке пределов интегрирования в случае криволинейной области полезны следующие упражнения.

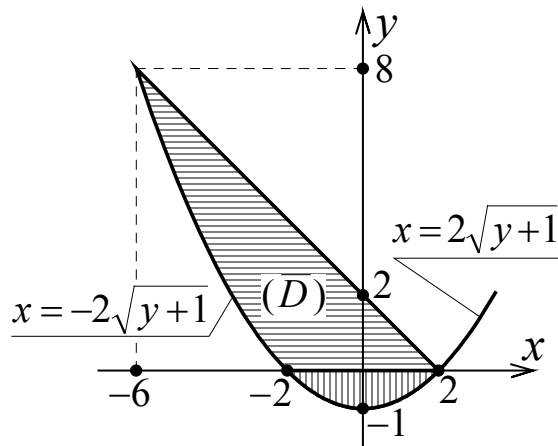


Рис. 2.13. К задаче 1

Задача 1. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_{-6}^2 dx \int_{y=\frac{x^2}{4}-1}^{y=2-x} f(x, y) dy.$$

► Область интегрирования $(\bar{D})$ определяется совместными неравенствами:

$$-6 \leq x \leq 2, \quad \frac{x^2}{4} - 1 \leq y \leq 2 - x.$$

Изобразим эту область $(\bar{D})$ на рисунке. Из рис. 2.13 видим, что если брать внешнее интегриро-

вание по y , то область $(\bar{D})$ следует разбить на две области $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$ линией $y = 0$. Тогда: $(\bar{D}_1)$ будет определяться неравенствами: $-1 \leq y \leq 0$, $-2\sqrt{y+1} \leq x \leq 2\sqrt{y+1}$, а $(\bar{D}_2)$ — неравенствами $0 \leq y \leq 8$, $-2\sqrt{y+1} \leq x \leq 2 - y$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{x=-2\sqrt{y+1}}^{x=2-y} f(x, y) dx. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=1-x^2} f(x, y) dy.$$

► Область интегрирования $(\bar{D})$ определяется совместными неравенствами

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1-x^2.$$

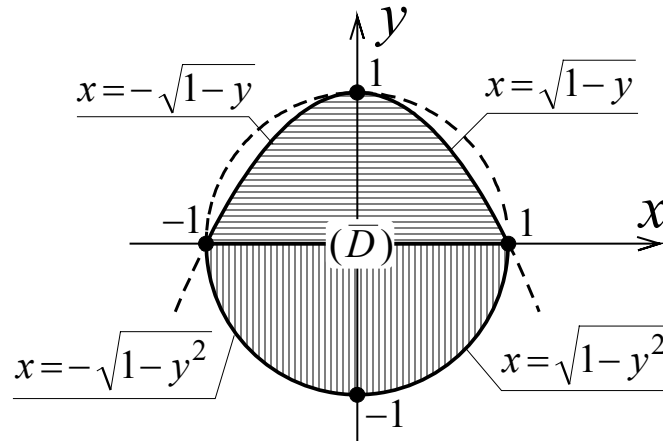


Рис. 2.14. К задаче 2

Изобразим область $(\bar{D})$ на рисунке. Из рис. 2.14 видим, что если внешнее интегрирование производить по y , то область $(\bar{D})$ следует разбить линией $y = 0$ на две области $(\bar{D}_1)$ и $(\bar{D}_2)$. Область $(\bar{D}_1)$ определяется неравенствами: $-1 \leq y \leq 0$, $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$, а область $(\bar{D}_2)$ – неравенствами $0 \leq y \leq 1$, $-\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{x=-\sqrt{1-y}}^{x=\sqrt{1-y}} f(x, y) dx. \blacktriangleleft$$

Задача 3. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^{2a} dx \int_{y=\sqrt{2ax-x^2}}^{y=\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

► Область интегрирования $(\bar{D})$ определяется совместными неравенствами: $0 \leq x \leq 2a$; $\sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}$. Изобразим область $(\bar{D})$ на рисунке. Из рис. 2.15 видим, что если внешнее интегрирование производить по y , то область $(\bar{D})$ следует разбить линией: $y = a$ на три области: $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$.

Область $(\bar{D}_1)$ определяется неравенствами:

$$0 \leq y \leq a, \quad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2};$$

область $(\bar{D}_2)$ – неравенствами:

$$0 \leq y \leq a, \quad a + \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq 2a;$$

область $(\bar{D}_3)$ – неравенствами

$$a \leq y \leq 2a, \quad \frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a.$$

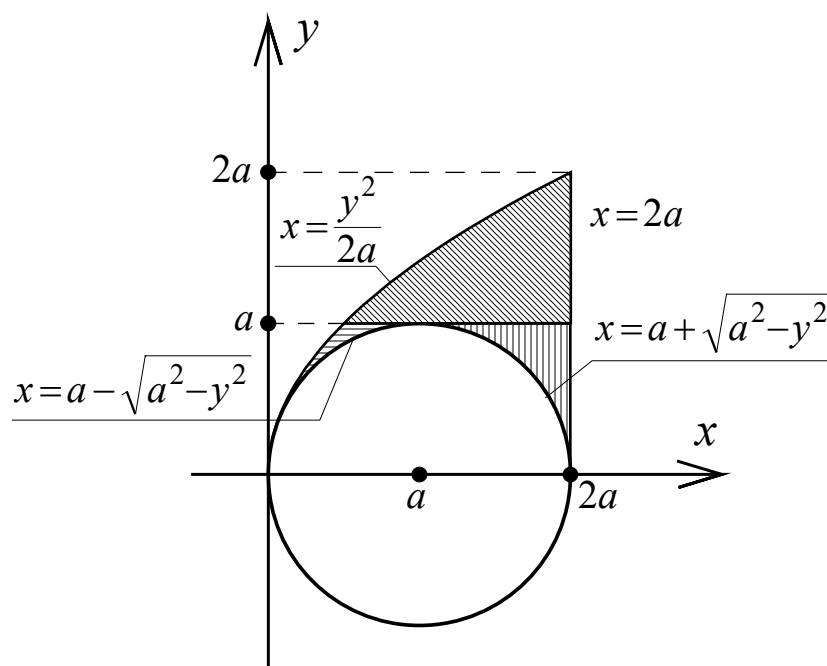


Рис. 2.15. К задаче 3

Следовательно, будем иметь:

$$I = \int_0^a dy \int_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_0^a dy \int_{x=a+\sqrt{a^2-y^2}}^{x=2a} f(x,y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{x=\frac{y^2}{2a}}^{x=2a} f(x,y) dx. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Вычислить $I = \iint_{(\bar{D})} |\cos(x+y)| dx dy$, где $(\bar{D}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$

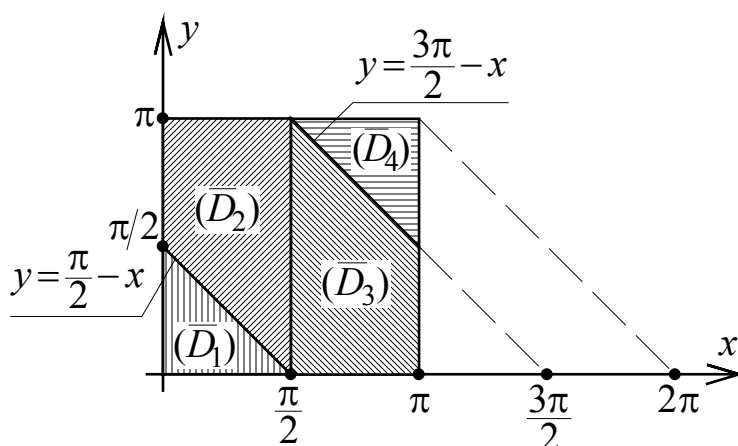


Рис. 2.16. К задаче 4

► Отметим прежде всего, что $\cos(x+y) \geq 0$ в областях:

$$(\bar{D}_1) = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x \right\} \text{ и } (\bar{D}_4) = \left\{ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi \right\}.$$

$\cos(x+y) \leq 0$ в областях:

$$(\overline{D}_2) = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - x \leq y \leq \pi \right\} \text{ и } (\overline{D}_3) = \left\{ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2} - x \right\}.$$

Имеем поэтому

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\overline{D})} |\cos(x+y)| dx dy = \iint_{(\overline{D}_1)} \cos(x+y) dx dy - \iint_{(\overline{D}_2)} \cos(x+y) dx dy - \\ &\quad - \iint_{(\overline{D}_3)} \cos(x+y) dx dy + \iint_{(\overline{D}_4)} \cos(x+y) dx dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \int_{y=0}^{y=\pi/2-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{y=\pi/2-x}^{y=\pi} \cos(x+y) dy - \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{y=0}^{y=3\pi/2-x} \cos(x+y) dy + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{y=3\pi/2-x}^{y=\pi} \cos(x+y) dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \Big|_{y=0}^{y=\pi/2-x} dx - \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) \Big|_{y=\pi/2-x}^{y=\pi} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x+y) \Big|_{y=0}^{y=3\pi/2-x} dx + \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x+y) \Big|_{y=3\pi/2-x}^{y=\pi} dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx + \int_0^{\pi/2} (1 + \sin x) dx + \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} dx + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} dx = \pi + \pi = 2\pi. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Задача 5. Вычислить $I = \iint_{(\overline{D})} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, где $(\overline{D}) = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$$\blacktriangleright x^2 - y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1. \text{ Вет-}$$

ви этой гиперболы являются линиями разрыва подынтегральной функции. Так как подынтегральная функция – ограниченная в $(\overline{D})$ и непрерывная там всюду, за исключением точек, лежащих на двух простых кривых, то двойной интеграл I существует.

Пусть

$$(\overline{D}_1) = \left\{ -1 \leq x \leq 1; \sqrt{x^2 + 2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\},$$

$$(\overline{D}_3) = \left\{ -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq -\sqrt{x^2 + 2} \right\},$$

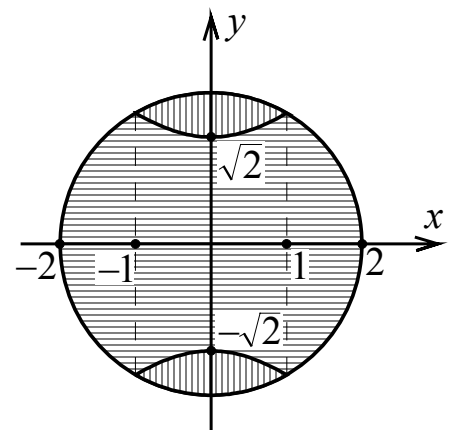


Рис. 2.17. К задаче 5

$$(\bar{D}_2) = \left\{ -2 \leq x \leq -1; -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\} \cup \\ \cup \left\{ -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{x^2+2} \leq y \leq \sqrt{x^2+2} \right\} \cup \\ \cup \left\{ 1 \leq x \leq 2; -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

Имеем в $(D_1) \cup (D_3)$: $x^2 - y^2 + 2 < 0$, а в (D_2) : $x^2 - y^2 + 2 > 0$. Мы знаем, что существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых. Поэтому

$$I = \iint_{(\bar{D}_2)} dx dy - \iint_{(\bar{D}_1)} dx dy - \iint_{(\bar{D}_3)} dx dy = F_{\bar{D}_2} - F_{\bar{D}_1} - F_{\bar{D}_3},$$

где $F_{\bar{D}_1}$, $F_{\bar{D}_2}$, $F_{\bar{D}_3}$ – площади областей $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$. Так как $F_{(\bar{D})} = 4\pi$, $F_{(\bar{D}_3)} = F_{(\bar{D}_1)}$, то $F_{(\bar{D}_2)} = 4\pi - 2F_{(\bar{D}_1)}$ и, следовательно, $I = 4\pi - 4F_{(\bar{D}_1)}$. Так как область $(\bar{D}_1)$ симметрична относительно оси Oy , то

$$F_{(\bar{D}_1)} = 2 \int_0^1 dx \int_{y=\sqrt{x^2+2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2} \right) dx = \\ = 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2} \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{x^2+2} - \frac{2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \right] \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln \sqrt{2} \right] = \frac{2\pi}{3} + 2 \ln \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}.$$

А тогда

$$I = 4\pi - \frac{8\pi}{3} - 8 \ln \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + 4 \ln(2 + \sqrt{3}). \blacktriangleleft$$

Задача 6. Вычислить $I = \iint_{(\bar{D})} \sqrt{E(y-x^2)} dx dy$, где $(\bar{D}) = \{x^2 \leq y \leq 4\}$.

► По определению функции E , имеем:

если $0 \leq y - x^2 < 1$, т. е. если $x^2 \leq y < 1 + x^2$, то $E(y - x^2) = 0$;

если $1 \leq y - x^2 < 2$, т. е. если $1 + x^2 \leq y < 2 + x^2$, то $E(y - x^2) = 1$;

если $2 \leq y - x^2 < 3$, т. е. если $2 + x^2 \leq y < 3 + x^2$, то $E(y - x^2) = 2$;

если $3 \leq y - x^2 < 4$, т. е. если $3 + x^2 \leq y < 4 + x^2$, то $E(y - x^2) = 3$.

Следовательно, $E(y - x^2) = 0$ в (D_1) ;
 $E(y - x^2) = 1$ в (D_2) ; $E(y - x^2) = 2$ в
 (D_3) ; $E(y - x^2) = 3$ в (D_4) . Видим, что
 подынтегральная функция терпит разрыв
 на конечном числе простых кривых, ле-
 жащих в области $(\bar{D})$. В остальных точ-
 ках области $(\bar{D})$ она непрерывная. Так
 как подынтегральная функция еще и ог-
 раниченная в $(\bar{D})$, то двойной интеграл
 I существует. Принимая во внимание,
 что существование и величина двойного
 интеграла не зависят от значений, при-
 нимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа простых кривых,
 можем написать, что:

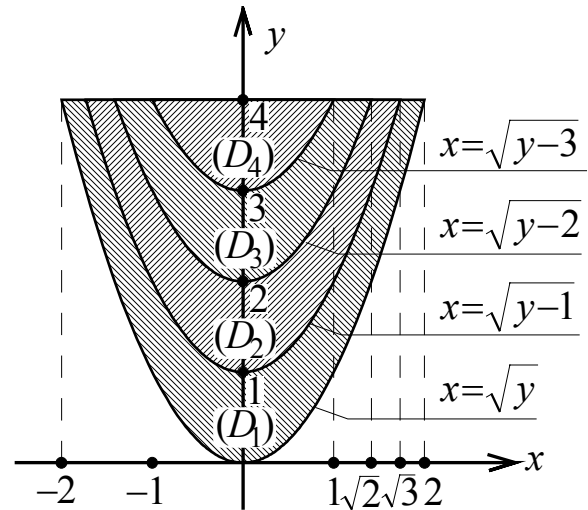


Рис. 2.18. К задаче 6

$$I = \iint_{(\bar{D}_1)} 0 \cdot dx dy + \iint_{(\bar{D}_2)} 1 \cdot dx dy + \iint_{(\bar{D}_3)} \sqrt{2} dx dy + \iint_{(\bar{D}_4)} \sqrt{3} dx dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = F_{\bar{D}_2} + \sqrt{2} \cdot F_{\bar{D}_3} + \sqrt{3} \cdot F_{\bar{D}_4}, \text{ где } F_{\bar{D}_2}, F_{\bar{D}_3}, F_{\bar{D}_4} - \text{площади областей } (\bar{D}_2),$$

$$(\bar{D}_3), (\bar{D}_4) \text{ соответственно. Так как области } (\bar{D}_2), (\bar{D}_3), (\bar{D}_4) \text{ симметричны}$$

$$\text{относительно оси } Oy, \text{ то:}$$

$$F_{\bar{D}_4} = 2 \int_3^4 dy \int_{x=0}^{x=\sqrt{y-3}} dx = 2 \int_3^4 \sqrt{y-3} dy = 2 \cdot \frac{2}{3} (y-3)^{3/2} \Big|_{y=3}^{y=4} = \frac{4}{3};$$

$$F_{\bar{D}_3} = 2 \int_2^4 dy \int_{x=0}^{x=\sqrt{y-2}} dx - F_{D_4} = 2 \int_2^4 \sqrt{y-2} dy - \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} (y-2)^{3/2} \Big|_{y=2}^{y=4} - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1);$$

$$F_{\bar{D}_2} = 2 \int_1^4 dy \int_{x=0}^{x=\sqrt{y-1}} dx - (F_{\bar{D}_3} + F_{\bar{D}_4}) = 2 \int_1^4 \sqrt{y-1} dy - \frac{8\sqrt{2}}{3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} (y-1)^{3/2} \Big|_{y=1}^{y=4} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

А тогда

$$I = \left(4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) + \sqrt{2} \cdot \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) + \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4). \blacktriangleleft$$

Глава 3. Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы первого рода

1°. Прежде чем дать определение криволинейного интеграла первого рода, рассмотрим следующую задачу.

Имеется спрямляемая пространственная кривая (l) длины s . Пусть на (l) непрерывным образом распределена масса с плотностью $\rho(x, y, z)$. (Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине. Плотность $\rho(x, y, z)$ кривой (l) в точке (x, y, z) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку). Требуется найти массу m кривой (l) .

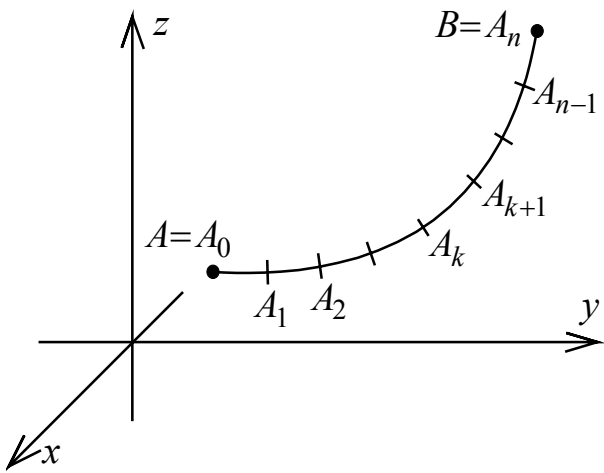


Рис. 3.1. К задаче по определению массы кривой

► Разбиваем кривую (l) точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ произвольным образом на n частичных дуг $A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) с длинами $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$. Полагаем $\lambda = \max_{k=0, n-1} \{s_k\}$. Предполагаем частичные дуги $A_k A_{k+1}$ столь малыми, что на $\cup A_k A_{k+1}$ плотность распределения массы ρ вдоль этой дуги можно приближенно считать постоянной, равной $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$, где точка $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ —

любая, принадлежащая $\cup A_k A_{k+1}$. Тогда масса Δm_k частичной дуги $A_k A_{k+1}$ кривой (l) будет приближенно выражаться формулой

$$\Delta m_k = \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k.$$

Масса m всей кривой (l) будет выражаться приближенно суммой

$$\begin{aligned} m &\approx \rho(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \cdot s_0 + \rho(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \cdot s_1 + \dots + \rho(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) \cdot s_{n-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k. \end{aligned}$$

Интуитивно ясно, что чем мельче частичные дуги $A_k A_{k+1}$, тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая частичную дугу $A_k A_{k+1}$ однородной. Поэтому за массу m кривой (l) естественно принять:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k. \blacktriangleleft$$

2°. Дадим теперь определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть в пространстве расположена спрямляемая кривая (l) , имеющая концы в точках A и B , и пусть во всех точках кривой (l) определена функция $f(x, y, z)$. Проведем следующие операции.

1. Разобьем кривую (l) точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$, следующими друг за другом вдоль кривой (l) в направлении от A к B , на частичные дуги $\smile A_k A_{k+1}$. Пусть s_k — длина $\smile A_k A_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Положим $\lambda = \max_{k=0, n-1} \{s_k\}$ (λ — ранг дробления).

2. На каждой дуге $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение функции f , т. е. находим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$.

3. Умножаем найденное значение функции на длину соответствующей частичной дуги: $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k, k = 0, 1, \dots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot s_k.$$

Отметим, что значение суммы σ зависит, вообще говоря, как от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}, k = \overline{0, n-1}$, так и от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$.

5. Измельчаем дробление так, чтобы $\lambda \rightarrow 0$, и ищем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$. Если существует конечный предел $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения кривой (l) на части $\smile A_k A_{k+1}, k = \overline{0, n-1}$, ни от способа выбора точек $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то его называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой (l) и обозначают символом

$$\int_{\smile AB} f(x, y, z) ds. \quad (1)$$

Если, в частности, кривая (l) лежит в плоскости Oxy , то функция f от координаты z не зависит, и вместо (1) появляется интеграл

$$\int_{\smile AB} f(x, y) ds. \quad (2)$$

Замечание 1. Из самого определения криволинейного интеграла первого рода вытекает следующее свойство:

$$\int_{\smile AB} f(x, y, z) ds = \int_{\smile BA} f(x, y, z) ds,$$

т. е. направление, которое может быть придано пути интегрирования, никакой роли не играет. В самом деле, ведь длина s_k дуги $\smile A_k A_{k+1}$ не зависит от того, какая из точек A_k и A_{k+1} принята за начало и какая – за конец дуги.

Замечание 2. Принимая во внимание определение криволинейного интеграла первого рода, можно заключить, что в задаче пункта 1° масса m кривой (l) определяется по формуле: $m = \int_{\smile AB} \rho(x, y, z) ds$.

3°. Теорема (о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по плоской кривой).

1. Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [p, q]$, где φ и ψ – функции, заданные на промежутке $[p, q]$ и имеющие там непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Пусть $(\varphi(p), \psi(p)) = A$, $(\varphi(q), \psi(q)) = B$. Пусть точки $(\varphi(t), \psi(t))$ следуют друг за другом на $\smile AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p, q]$. (Считаем $\smile AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек.)

2. Пусть функция $f(x, y)$ задана на $\smile AB$ и непрерывна там.

Тогда $I = \int_{\smile AB} f(x, y) ds$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле:

$$\int_{\smile AB} f(x, y) ds = \int_p^q f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (p < q). \quad (3)$$

(подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла (3) должен быть меньше верхнего).

► Заметим сначала, что интеграл, стоящий в правой части (3), существует, ибо подынтегральная функция в нем непрерывна на промежутке $[p, q]$.

Напомним, что в условиях теоремы кривая $\smile AB$ спрямляема и ее длина s равна: $s = \int_p^q \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (p < q)$. Составим сумму Римана σ для криволинейного интеграла $\int_{\smile AB} f(x, y) ds$. Для этого надо разбить $\smile AB$ точками A_k на дуги $A_k A_{k+1}$ ($k = \overline{0, n-1}$). Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[p, q]$ произвольным образом точками $t_0 = p < t_1 < t_2 < \dots < t_n = q$ и положить $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $k = \overline{0, n}$. Тогда

$$s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4)$$

Затем на каждой частичной дуге $\cup A_k A_{k+1}$ нужно взять произвольную точку $M_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$. Будем иметь тогда:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) s_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла (4)

$$s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot (t_{k+1} - t_k),$$

где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Поэтому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) \cdot \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

Полученное выражение для σ сходно с суммой Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), но таковой не является, так как θ_k и τ_k , вообще говоря, различны.

Составим сумму

$$\sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2} \cdot \Delta t_k.$$

Это уже настоящая сумма Римана для определенного интеграла, стоящего в правой части (3), т. е. для интеграла

$$I_* = \int_p^q f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Было отмечено, что I_* существует. Следовательно, $\sigma_* \rightarrow I_*$ при $\lambda_* \rightarrow 0$ ($\lambda_* = \max_{k=0, n-1} \{\Delta t_k\}$). Заметим, что $(\lambda \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\lambda_* \rightarrow 0)$. Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \quad (5)$$

Из (5) видно, что теорема будет доказана, если показать, что $\lim_{\lambda_* \rightarrow 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$.

Имеем

$$\sigma - \sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))] \cdot s_k.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, сколь угодно малое. Функция $f(\varphi(t), \psi(t)) \in C([p, q])$, как суперпозиция непрерывных функций. Значит, она и равномерно непрерывна на промежутке $[p, q] \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[p, q]$, для которых $|t'' - t'| < \delta$, будет

$$|f(\varphi(t''), \psi(t'')) - f(\varphi(t'), \psi(t'))| < \varepsilon.$$

Возьмем любое разбиение промежутка $[p, q]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$, у которого ранг дробления $\lambda_* < \delta$. Так как θ_k и $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, то $|\theta_k - \tau_k| \leq t_{k+1} - t_k \leq \lambda_* < \delta$. Следовательно, для любого $k = \overline{0, n-1}$ будем иметь:

$$|f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| < \varepsilon.$$

Поэтому, считая дробление промежутка $[p, q]$ таким, что $\lambda_* < \delta$, получим

$$|\sigma - \sigma_*| < \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \cdot s_k = \varepsilon \cdot s \quad (\text{здесь } s - \text{длина } \smile AB). \text{ Так как для достижения нера-$$

венства $|\sigma - \sigma_*| < \varepsilon \cdot s$ потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_* < \delta$, то заключаем, что $\lim_{\lambda_* \rightarrow 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$, а значит, и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$. $\blacktriangleleft$

Частные случаи.

I. Пусть кривая $\smile AB$ дана явным уравнением: $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, $a < b$.

Тогда:

1) если функция $\varphi(x)$ имеет на промежутке $[a, b]$ непрерывную производную $\varphi'(x)$ и

2) если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int_{\smile AB} f(x, y) ds$ существует, и

$$\int_{\smile AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

II. Пусть $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. Тогда:

1) если функция $r(\varphi)$ имеет на промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$ и

2) если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\smile AB$, то $\int_{\smile AB} f(x, y) ds$ существует, и

$$\int_{\cup AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi.$$

Замечание. Совершенно аналогично доказывается теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода по пространственной кривой.

Теорема.

1. Пусть пространственная кривая $\cup AB$ задана уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [p, q] \text{ и } p < q$$

(считаем $\cup AB$ незамкнутой и не имеющей кратных точек).

2. Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют на промежутке $[p, q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

3. Пусть $(\varphi(p), \psi(p), \omega(p)) = A$, $(\varphi(q), \psi(q), \omega(q)) = B$ и точки $(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ следуют друг за другом на $\cup AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[p, q]$.

Тогда, если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на $\cup AB$, то $I = \int_{\cup AB} f(x, y, z) ds$

существует и выражается через обыкновенный определенный интеграл по формуле:

$$\int_{\cup AB} f(x, y, z) ds = \int_p^q f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2} dt \quad (p < q).$$

Примеры.

1. Вычислить $I = \int_{(l)} (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$, где (l) – дуга

астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

► Вычисление I удобнее производить, взяв уравнение астроиды (l) в параметрической форме:

$$(l) = \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Имеем $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$; $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$;

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} \cdot dt = 3a |\sin t \cos t| dt.$$

Поэтому

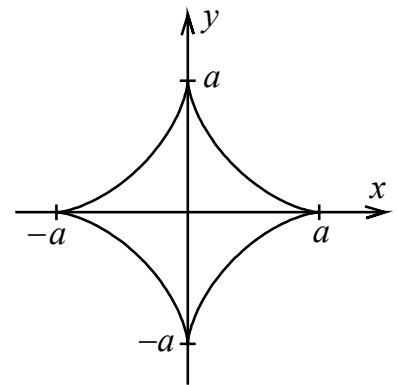


Рис. 3.2. К примеру 1

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a |\sin t \cos t| dt = \\
&= 3a^{7/3} \left[\int_0^{\pi/2} (\cos^5 \sin t + \sin^5 \cos t) dt - \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^5 \sin t + \sin^5 \cos t) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\pi}^{3\pi/2} (\cos^5 \sin t + \sin^5 \cos t) dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} (\cos^5 \sin t + \sin^5 \cos t) dt \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow I = \frac{1}{2} a^{7/3} \left[(-\cos^6 t + \sin^6 t) \Big|_0^{\pi/2} + (\cos^6 t - \sin^6 t) \Big|_{\pi/2}^{\pi} + \right. \\
&\quad \left. + (-\cos^6 t + \sin^6 t) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} + (\cos^6 t - \sin^6 t) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right] = \frac{a^{7/3}}{2} [2 + 2 + 2 + 2] = 4a^{7/3}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

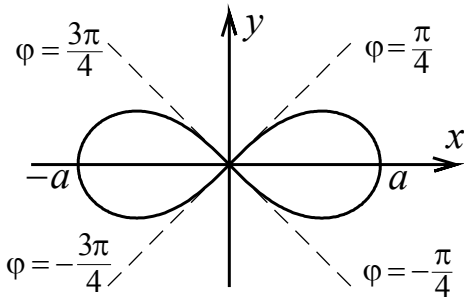


Рис. 3.3. К примеру 2

2. Вычислить $I = \int_{(l)} |y| ds$, где (l) – дуга

лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

► Перейдем к полярным координатам:

Тогда уравнение лемнискаты по-

лучим в виде: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Имеем

$$r'_\varphi = -a \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \quad r^2 + (r'_\varphi)^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}; \quad ds = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$|y| = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot |\sin \varphi|$, $|y| ds = a^2 |\sin \varphi| d\varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned}
I &= a^2 \left[\int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi + \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin \varphi d\varphi - \int_{-\pi}^{-3\pi/4} \sin \varphi d\varphi - \int_{-\pi/4}^0 \sin \varphi d\varphi \right] = \\
&= a^2 \left[-\cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} - \cos \varphi \Big|_{3\pi/4}^{\pi} + \cos \varphi \Big|_{-\pi}^{-3\pi/4} + \cos \varphi \Big|_{-\pi/4}^0 \right] = a^2 \cdot (4 - 2\sqrt{2}). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

3. Вычислить $I = \int_{(l)} (x + y) ds$, где (l) – контур треугольника с вершинами в

точках $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

$$\blacktriangleright (l) = (l_1) \cup (l_2) \cup (l_3);$$

$$I = \int_{(l)} (x+y) ds = \int_{(l_1)} (x+y) ds + \int_{(l_2)} (x+y) ds + \int_{(l_3)} (x+y) ds.$$

$$1) (l_1) = OA: y = 0, x \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = dx;$$

$$I_1 = \int_{(l_1)} (x+y) ds = \int_0^1 (x+0) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$2) (l_2) = AB: y = 1-x, x \in [0, 1] \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{2} dx;$$

$$I_2 = \int_{(l_2)} (x+y) ds = \int_0^1 (x+1-x) \sqrt{2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2} x \Big|_0^1 = \sqrt{2}.$$

$$3) (l_3) = OB: x = 0; y \in [0, 1] \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy = dy;$$

$$I_3 = \int_{(l_3)} (x+y) ds = \int_0^1 (0+y) dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}. \blacktriangleleft$$

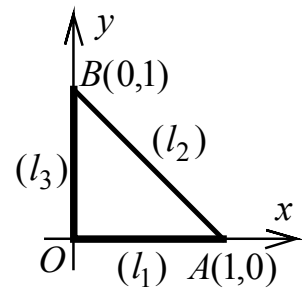


Рис. 3.4.
К примеру 3

4. Вычислить $I = \int_{(l)} z ds$, где (l) – коническая винтовая линия:

$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \quad t \in [0, t_0]. \\ z = t, \end{cases}$$

$\blacktriangleright$ Имеем: $x'_t = \cos t - t \sin t$; $y'_t = \sin t + t \cos t$; $z'_t = 1$;

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt = \sqrt{2 + t^2} dt.$$

Тогда

$$I = \int_{(l)} z ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} (2 + t^2)^{3/2} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{2} \left((2 + t_0)^{3/2} - 2^{3/2} \right). \blacktriangleleft$$

5. Вычислить $I = \int_{(l)} x^2 ds$, где (l) – окружность: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

► Плоскость $x + y + z = 0$ проходит через начало координат и пересекается со сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ по окружности радиуса a . Таким образом, (l) – окружность радиуса $a \Rightarrow$ длина (l) равна $2\pi a$. Легко понять, что $\int_{(l)} x^2 ds = \int_{(l)} y^2 ds = \int_{(l)} z^2 ds$. А тогда $I = \int_{(l)} x^2 ds = \frac{1}{3} \int_{(l)} (x^2 + y^2 + z^2) ds$. Заметим, что на (l) , т. е. на окружности радиуса a с центром в точке O , подынтегральная функция равна a^2 . Следовательно, $I = \frac{1}{3} \int_{(l)} a^2 ds = \frac{a^2}{3} \int_{(l)} ds$. Но $\int_{(l)} ds$ равен значению длины окружности (l) , т. е. $2\pi a$. Поэтому $I = \frac{2\pi a^3}{3}$. ◀

§2. Криволинейные интегралы второго рода

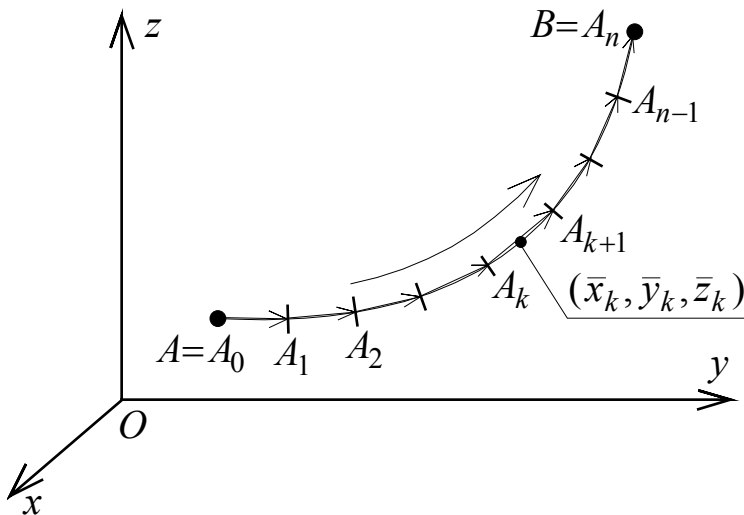


Рис. 3.5. К определению криволинейного интеграла второго рода

1°. Определение. Пусть в пространстве дана непрерывная кривая $\smile AB$. Пусть на $\smile AB$ задана функция $f(x, y, z)$. Выберем на $\smile AB$ какое-нибудь направление (одно из двух возможных), например, от точки A к точке B . Проведем следующие операции.

1. Разбиваем $\smile AB$ точками $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n частичных дуг $\smile A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Точки $A_k(x_k, y_k, z_k)$ следуют друг за другом вдоль $\smile AB$ в направлении от точки A к точке B . Пусть d_k – диаметр $\smile A_k A_{k+1}$ ($d_k = \sup_{\substack{M \in \smile A_k A_{k+1}, \\ N \in \smile A_k A_{k+1}}} \{\rho(M, N)\}$),

и пусть $\lambda = \max_{k=0, n-1} \{d_k\}$.

2. На каждой $\smile A_k A_{k+1}$ берем произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и вычисляем в ней значение данной функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Соединим концы каждой частичной дуги хордой и придадим этим хордам направления соответствующих дуг. Получим направленную ломаную. Звенья этой ломаной есть векторы

$\vec{\Delta l}_0, \vec{\Delta l}_1, \dots, \vec{\Delta l}_{n-1}$. Спроектируем эти векторы на ось Ox . Получим числа $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \text{пр}_{Ox} \overrightarrow{A_k A_{k+1}} = \text{пр}_{Ox} \vec{\Delta l}_k$). Эти числа могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

3. Каждое вычисленное значение функции $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ умножаем на проекцию соответствующего звена ломаной на ось Ox . Получим $f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

4. Складываем все такие произведения. Получаем сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \Delta x_k$ (σ – интегральная сумма).

5. Измельчаем дробление $\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$ так, чтобы $\lambda \rightarrow 0$, и ищем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$. Если существует конечный

$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения

$\smile AB$ на части $\smile A_k A_{k+1}$, ни от выбора точки $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ на $\smile A_k A_{k+1}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой $\smile AB$ (по x) и обозначается $\int_{\smile AB} f(x, y, z) dx$.

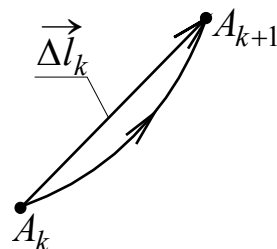


Рис. 3.6. К определению криволинейного интеграла второго рода

Замечания.

1. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при перемене направления линии, по которой производится интегрирование, т. е.

$$\int_{\smile AB} f(x, y, z) dx = - \int_{\smile BA} f(x, y, z) dx.$$

Это ясно, ибо проекции звеньев ломаной $\vec{\Delta l}_k$ на ось Ox существенно зависят от направления $\smile A_k A_{k+1}$ и меняют знак с изменением этого направления на обратное.

2. Если звенья $\vec{\Delta l}_k$ направленной ломаной проецировать на ось Oy , то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x, y, z)$ по $\smile AB$ (по y):

$$\int_{\smile AB} f(x, y, z) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta y_k.$$

3. Если звенья $\vec{\Delta l}_k$ направленной ломаной проецировать на ось Oz , то получим криволинейный интеграл второго рода от функции $f(x, y, z)$ по $\smile AB$ (по z):

$$\int_{\curvearrowright AB} f(x, y, z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta z_k.$$

4. Если на кривой $\curvearrowright AB$ определены три функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и если существуют интегралы $\int_{\curvearrowright AB} P(x, y, z) dx$, $\int_{\curvearrowright AB} Q(x, y, z) dy$, $\int_{\curvearrowright AB} R(x, y, z) dz$, то их сумму называют криволинейным интегралом второго рода («общего вида») и полагают

$$\begin{aligned} & \int_{\curvearrowright AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ &= \int_{\curvearrowright AB} P(x, y, z) dx + \int_{\curvearrowright AB} Q(x, y, z) dy + \int_{\curvearrowright AB} R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

2°. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Теорема.

1. Пусть кривая $\curvearrowright AB$ задана параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ – функции, заданные и непрерывные на промежутке $[a, b]$. Кроме того, у функции $\varphi(t)$ на $[a, b]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$. Пусть $(\varphi(a), \psi(a), \omega(a)) = A$, $(\varphi(b), \psi(b), \omega(b)) = B$, причем $A \neq B$, т. е. кривая $\curvearrowright AB$ – незамкнутая. Пусть точки $(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ следуют друг за другом на $\curvearrowright AB$ именно в том порядке, в каком соответствующие значения t следуют друг за другом на $[a, b]$.

2. Пусть функция $f(x, y, z)$, заданная на $\curvearrowright AB$, непрерывна там.

Тогда $I = \int_{\curvearrowright AB} f(x, y, z) dx$ существует и выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле

$$\int_{\curvearrowright AB} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Замечания.

1. Интеграл $I_* = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ существует, ибо подынте-

гральная функция в нем непрерывна на $[a, b]$.

2. Нижний предел в I_* должен отвечать началу пути интегрирования в I , а верхний предел – концу пути интегрирования.

► Составим интегральную сумму σ для I . Для этого надо разбить $\cup AB$ точками $A_k(x_k, y_k, z_k)$ на частичные дуги $\cup A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ($A_0 = A$, $A_n = B$). Такое разбиение можно осуществить, если разбить промежуток $[a, b]$ произвольным образом точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ и положить $A_k(\varphi(t_k), \psi(t_k), \omega(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Затем на каждой дуге $\cup A_k A_{k+1}$ надо взять произвольную точку $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$. Это можно сделать так: на каждом частичном промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ взять произвольную точку θ_k и положить $\bar{x}_k = \varphi(\theta_k)$, $\bar{y}_k = \psi(\theta_k)$, $\bar{z}_k = \omega(\theta_k)$. Тогда получим

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k))(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)).$$

По формуле Лагранжа $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$, где $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Поэтому $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$. Видим, что эта сумма по-

хожа на интегральную сумму Римана для определенного интеграла I_* , но таковой не является, ибо, вообще говоря, $\theta_k \neq \tau_k$.

Составим сумму $\sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k)) \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k$. Это уже на-

стоящая интегральная сумма Римана для I_* . Было отмечено выше, что интеграл I_* существует, и потому $\sigma_* \rightarrow I_*$ при $\lambda_* \rightarrow 0$ ($\lambda_* = \max_{k=0, n-1} \{\Delta t_k\}$). Отметим,

что $\lambda \rightarrow 0$, если $\lambda_* \rightarrow 0$.

Рассмотрим очевидное равенство

$$\sigma = \sigma_* + (\sigma - \sigma_*). \quad (2)$$

Из (2) видим, что теорема будет доказана, если показать, что

$$\lim_{\substack{\lambda_* \rightarrow 0 \\ (\lambda \rightarrow 0)}} (\sigma - \sigma_*) = 0.$$

Имеем

$$\sigma - \sigma_* = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k))] \cdot \varphi'(\tau_k) \Delta t_k.$$

По условию $\varphi'(t) \in C([a, b]) \Rightarrow \varphi'(t)$ – ограниченная в $[a, b]$, т. е. существует число $M > 0$ такое, что $|\varphi'(t)| \leq M$ для всех $t \in [a, b]$. Поэтому

$$|\sigma - \sigma_*| \leq M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k))| \cdot \Delta t_k.$$

Функция $f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \in C([a, b])$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ – равномерно непрерывная в $[a, b]$. Значит, всякому $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малому) отвечает $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек t' и t'' из $[a, b]$, для которых $|t'' - t'| < \delta$, будет

$$|f(\varphi(t''), \psi(t''), \omega(t'')) - f(\varphi(t'), \psi(t'), \omega(t'))| < \varepsilon.$$

Возьмем дробление промежутка $[a, b]$ на части $[t_k, t_{k+1}]$ любым, но таким, чтобы было $\lambda_* < \delta$. У нас θ_k и $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Следовательно, $|\theta_k - \tau_k| \leq t_{k+1} - t_k \leq \lambda_* < \delta$, для любого $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. А тогда для любого $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ будем иметь

$$|f(\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k), \omega(\theta_k)) - f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \omega(\tau_k))| < \varepsilon.$$

Следовательно, $|\sigma - \sigma_*| < M \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \cdot \Delta t_k \Rightarrow$

$$|\sigma - \sigma_*| < \varepsilon \cdot M \cdot (b - a). \quad (3)$$

Отметим, что число $\varepsilon \cdot M(b - a)$ сколь угодно мало вместе с ε . Так как для достижения неравенства (3) потребовалось лишь, чтобы было $\lambda_* < \delta$, то заключаем, что $\lim_{\lambda_* \rightarrow 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$, а значит, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma - \sigma_*) = 0$. ◀

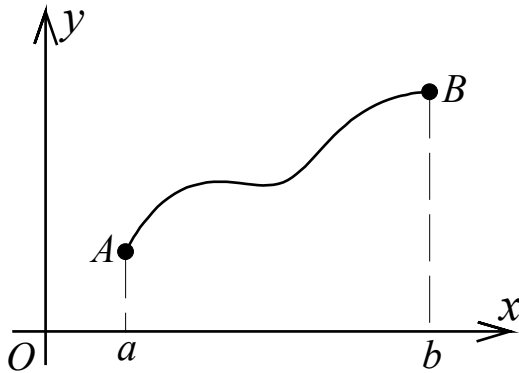


Рис. 3.7. К частному случаю I

Частные случаи.

I. 1) Пусть кривая $\cup AB$ плоская, заданная явным уравнением $y = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $[a, b]$, причем a – абсцисса точки A , а b – абсцисса точки B .

2) Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на кривой $\cup AB$.

Тогда $\int_{\cup AB} f(x, y) dx$ существует, и

$$\int_{\cup AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, \varphi(x)) dx.$$

II. Пусть $\cup AB$ – прямолинейный отрезок, расположенный в плоскости Oxy и перпендикулярный к оси Ox . Тогда $\int_{\cup AB} f(x, y) dx$ существует для любой функции $f(x, y)$, определенной на $\cup AB$, причем $\int_{\cup AB} f(x, y) dx = 0$.

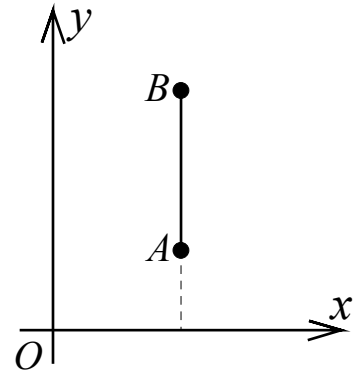


Рис. 3.8. К частному случаю II

3°. Механический смысл криволинейного интеграла второго рода.

Механический смысл криволинейного интеграла второго рода вытекает из решения следующей задачи.

Задача. Материальная точка перемещается по кривой $\cup AB$ из точки A в точку B под действием переменной по величине и направлению силы $\vec{F}(x, y, z)$. Требуется найти работу $\vec{F}$ на криволинейном пути $\cup AB$.

► Разбиваем путь $\cup AB$ на столь малые части $\cup A_k A_{k+1}$, чтобы каждую такую часть можно

было считать приближенно прямолинейной, а силу $\vec{F}(x, y, z)$, в пределах этой части, считать приближенно постоянной по величине и направлению. Тогда работа силы $\vec{F}(x, y, z)$ на элементарном участке $\cup A_k A_{k+1}$ приближенно будет равна: $\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \vec{\Delta l}_k$. Но

$$\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) = F_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \vec{i} + F_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \vec{j} + F_z(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{\Delta l}_k = \Delta x_k \cdot \vec{i} + \Delta y_k \cdot \vec{j} + \Delta z_k \cdot \vec{k}.$$

Поэтому

$$\vec{F}(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \cdot \vec{\Delta l}_k = F_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta x_k + F_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta y_k + F_z(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta z_k.$$

Следовательно, работа силы $\vec{F}$ на всем пути $\cup AB$ приближенно будет равна:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (F_x(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta x_k + F_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta y_k + F_z(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k) \Delta z_k). \quad (4)$$

Предел суммы (4) при $\lambda \rightarrow 0$ будет давать точное значение работы силы $\vec{F}(x, y, z)$ на пути $\cup AB$. А этим пределом является

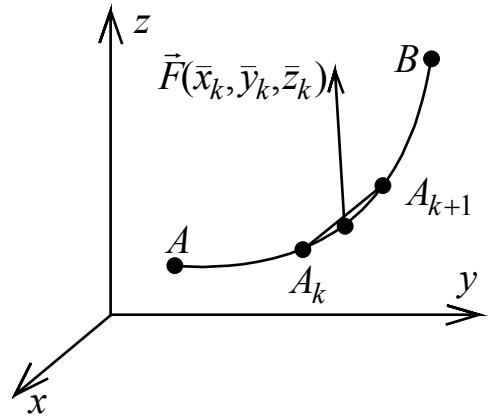


Рис. 3.9. К решению задачи

$$\int_{\cup AB} F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz.$$

Таким образом, всякий криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_{\cup AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

можно истолковать как работу, которую производит сила с проекциями P, Q, R на оси Ox, Oy, Oz соответственно, по перемещению материальной точки по пути $\cup AB$ из точки A в точку B .

Примеры на вычисление криволинейных интегралов второго рода.

1. Вычислить $I = \int_{\cup AB} (x + y) dx + 2z dy + xy dz$, где $\cup AB$ – линия, заданная

уравнениями
$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = 3 - t, \end{cases}$$
 причем точка A соответствует значению параметра

$t = 1$, а точка B – значению параметра $t = 2$.

$$\blacktriangleright I = \int_1^2 (t + t^2) dt + \int_1^2 2(3 - t) \cdot 2t dt + \int_1^2 t^3 \cdot (-dt) = \frac{35}{4}. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \int_{(l)} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, где (l) – кривая, заданная

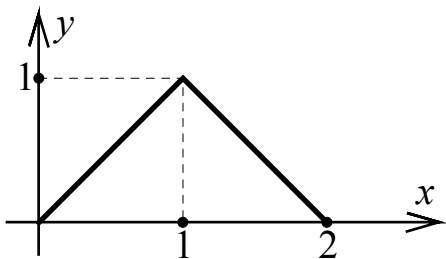


Рис. 3.10. К примеру 2

уравнением: $y = 1 - |1 - x|$, $x \in [0, 2]$. Интегрирование вдоль (l) ведется в направлении, соответствующем возрастанию параметра.

$\blacktriangleright$ Имеем:

$$y = 1 - (1 - x) \Rightarrow y = x, x \in [0, 1];$$

$$y = 1 + (1 - x) \Rightarrow y = 2 - x, x \in [1, 2];$$

$$(l) = (l_1) \cup (l_2), \text{ где } (l_1): y = x, x \in [0, 1], (l_2):$$

$$y = 2 - x, x \in [1, 2].$$

$$I = I_1 + I_2, \text{ где}$$

$$I_1 = \int_{(l_1)} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, I_2 = \int_{(l_2)} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy.$$

На (l_1) : $y = x$, $dy = dx$, $x \in [0, 1]$. Поэтому

$$I_1 = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx + 0 \cdot dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

На (l_2) : $y = 2 - x$, $x \in [1, 2]$; $dy = -dx$. Поэтому

$$I_2 = \int_1^2 [x^2 + (2-x)^2 - x^2 + (2-x)^2] dx = 2 \int_1^2 (2-x)^2 dx = -\frac{2}{3}(2-x)^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $I = \frac{4}{3}$. ◀

3. Вычислить $I = \int_{(l)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, где (l) – окружность

$x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода стрелки часов.

► Перейдем к параметрическому заданию кривой (l) . Положим

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \Rightarrow \begin{cases} dx = -a \sin t dt, \\ dy = a \cos t dt. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2(\cos t + \sin t)\sin t - a^2(\cos t - \sin t)\cos t}{a^2} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \quad \blacktriangleleft$$

4. Вычислить $I = \int_{OmAnO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx$, где OmA – отрезок параболы $y = x^2$,

AnO – отрезок прямой $y = x$.

► $I = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int_{\smile OmA}$, $I_2 = \int_{\smile AnO}$.

$\smile OmA$: $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $dy = 2x dx$. Поэтому

$$I_1 = \int_0^1 \arctg x \cdot 2x dx - dx = \left[\begin{matrix} u = \arctg x, & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ 2x dx = dv, & v = x^2 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left(x^2 \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) - 1 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2.$$

$\smile AnO$: $y = x$, x изменяется от 1 до 0; $dy = dx$. По-

этому

$$I_2 = \int_1^0 (\arctg 1 - 1) dx = \int_1^0 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$$I = 2 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - 1. \quad \blacktriangleleft$$

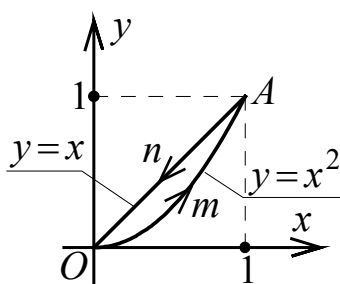


Рис. 3.11. К примеру 4

5. Вычислить $I = \int_{(l)} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, где (l) – кон-

тур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, пробе-
гаемый так, что внешняя сторона этой поверхности оста-
ется слева.

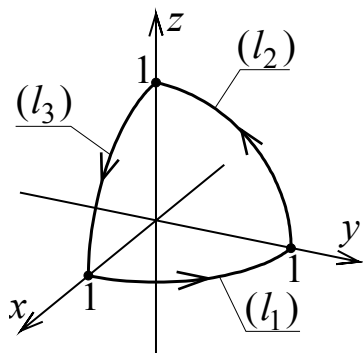


Рис. 3.12. К примеру 5

► $I = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = \int_{(l_1)}$; $I_2 = \int_{(l_2)}$; $I_3 = \int_{(l_3)}$.

$(l_1): x^2 + y^2 = 1$ (1-я четверть),

$(l_2): y^2 + z^2 = 1$ (1-я четверть),

$(l_3): z^2 + x^2 = 1$ (1-я четверть).

Контур (l_1) расположен в плоскости Oxy . Следова-
тельно, на $(l_1): z = 0$; $dz = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{(l_1)} y^2 dx - x^2 dy = \int_1^0 (1 - x^2) dx - \int_0^1 (1 - y^2) dy = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=1}^{x=0} - \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \\ &= -\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Контур (l_2) расположен в плоскости Oyz . Следовательно, на $(l_2): x = 0$,
 $dx = 0$.

$$I_2 = \int_{(l_2)} z^2 dy - y^2 dz = \int_1^0 (1 - y^2) dy - \int_0^1 (1 - z^2) dz = -\frac{4}{3}.$$

Контур (l_3) расположен в плоскости Oxz . Следовательно, на $(l_3): y = 0$,
 $dy = 0$.

$$I_3 = \int_{(l_3)} x^2 dz - z^2 dx = \int_1^0 (1 - z^2) dz - \int_0^1 (1 - x^2) dx = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем $I = -\frac{4}{3} \cdot 3 = -4$. ◀

§3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутым плоским кривым. Формула Грина

1°. Станем рассматривать криволинейные интегралы второго рода вида

$$\oint_{(K)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (1)$$

где (K) – замкнутый самонепересекающийся контур, расположенный в плоскости Oxy . Если на контуре (K) выбрать какое-нибудь направление интегрирования, то оказывается безразличным, какую точку на (K) взять за начало (а значит, и конец) пути интегрирования. В самом деле, пусть A и B – любые две различные точки на (K) . Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\curvearrowright AA} Pdx + Qdy &= \int_{\curvearrowright AIB} Pdx + Qdy + \int_{\curvearrowright BIIA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{\curvearrowright BIIA} Pdx + Qdy + \int_{\curvearrowright AIB} Pdx + Qdy = \int_{\curvearrowright BB} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Замечание. Особенность обсуждаемого случая заключается в том, что указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки на этот раз не определяет направления интегрирования на (K) . Конечно, можно было бы в каждом случае указывать особо, какое именно направление имеется в виду. Но обычно поступают иначе, а именно: из двух возможных направлений одно принимается за положительное, другое – за отрицательное.

Условимся за *положительное направление обхода контура* (K) принимать такое направление, когда наблюдатель (у которого направление от ног к голове совпадает с направлением оси Oz), обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K) , слева от себя. Это соглашение относится к случаю правой системы координат.

В дальнейшем интеграл (1), взятый по (K) в положительном направлении, будем обозначать символом: $\oint_{(K)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

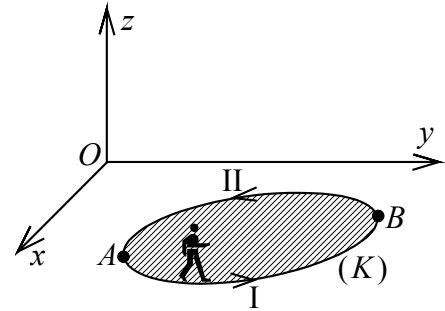


Рис. 3.13. К определению положительного обхода контура (K)

2°. Формула Грина.

I. Пусть (D) – область, ограниченная замкнутым контуром (K) . Пусть (K) состоит из отрезков прямых: $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и из кривых, заданных уравнениями: $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$; $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Предполагается, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и такие, что $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Такую область (D) будем называть *областью типа I*. Пусть в $(\bar{D})$ задана непрерывная функция

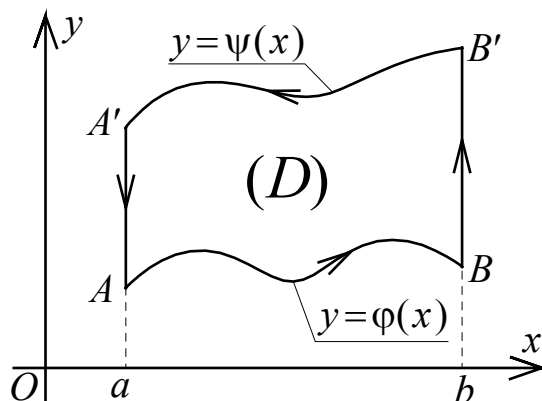


Рис. 3.14. К выводу формулы Грина

$P(x, y)$, имеющая в $(\bar{D})$ непрерывную частную производную $\frac{\partial P}{\partial y}$. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \iint_{(\bar{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Мы знаем, что этот двойной интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b dx \int_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \Rightarrow I = \int_a^b \left[P(x, y) \Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \right] dx = \\ &= \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, \psi(x)) dx &= \int_{\curvearrowright A'B'} P(x, y) dx = - \int_{\curvearrowright B'A'} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx &= \int_{\curvearrowright AB} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Поэтому $I = - \int_{\curvearrowright B'A'} P(x, y) dx - \int_{\curvearrowright AB} P(x, y) dx$. Так как $\int_{\curvearrowright BB'} P(x, y) dx = 0$ и $\int_{\curvearrowright A'A} P(x, y) dx = 0$, то можем написать

$$I = - \int_{\curvearrowright AB} P dx - \int_{\curvearrowright BB'} P dx - \int_{\curvearrowright B'A'} P dx - \int_{\curvearrowright A'A} P dx = - \oint_{(K)} P(x, y) dx.$$

Таким образом, получили

$$\iint_{(\bar{D})} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{(K)} P(x, y) dx. \quad (2)$$

Замечание. Формула (2) установлена для области типа I, но она верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Oy , может быть разложена на конечное число областей типа I (рис. 3.15).

В самом деле, для каждой области типа I, на которые разложена область (D) , пишем формулу (2), а затем складываем соответствующие части полученных соотношений. Так как криволинейные интегралы по вспомогательным прямым линиям равны нулю, то получим формулу (2), в которой (D) – вся область, а (K) – контур всей этой области.

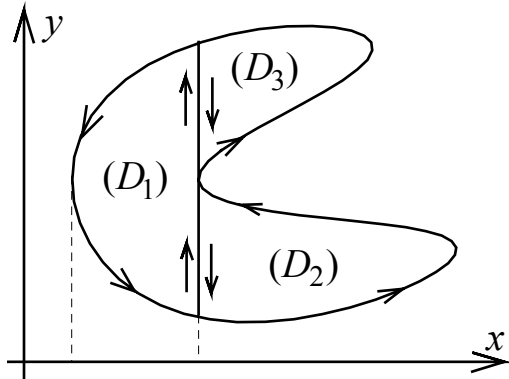


Рис. 3.15. К выводу формулы Грина

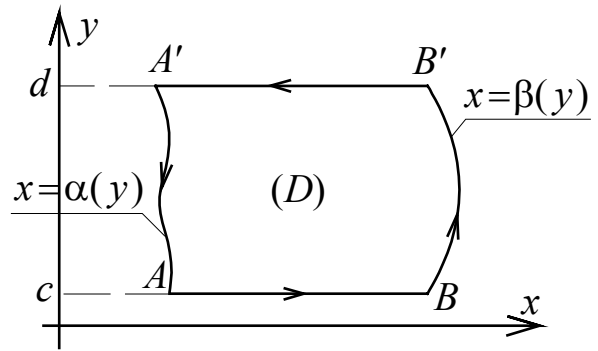


Рис. 3.16. К выводу формулы Грина

II. Пусть (D) – область, ограниченная замкнутым контуром (K) , и пусть теперь (K) состоит из отрезков прямых $y = c$, $y = d$ ($c < d$) и из кривых, заданных уравнениями: $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – функции, непрерывные на $[c, d]$ и такие, что $\alpha(y) < \beta(y)$, $y \in [c, d]$ (рис. 3.16). Такую область (D) будем называть *областью типа II*.

Пусть в $(\bar{D})$ задана непрерывная функция $Q(x, y)$, имеющая в $(\bar{D})$ непрерывную частную производную $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Рассмотрим двойной интеграл

$$I = \iint_{(\bar{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Мы знаем, что этот интеграл выражается через повторный интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_c^d dy \int_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \Rightarrow I = \int_c^d \left[Q(x, y) \Big|_{x=\alpha(y)}^{x=\beta(y)} \right] dy = \\ &= \int_c^d Q(\beta(y), y) dy - \int_c^d Q(\alpha(y), y) dy. \end{aligned}$$

Но

$$\int_c^d Q(\beta(y), y) dy = \int_{\curvearrowright BB'} Q(x, y) dy;$$

$$\int_c^d Q(\alpha(y), y) dy = \int_{\curvearrowright AA'} Q(x, y) dy = - \int_{\curvearrowright A'A} Q(x, y) dy.$$

Поэтому $I = \int_{\curvearrowright BB'} Q(x, y) dy + \int_{\curvearrowright A'A} Q(x, y) dy$. Так как $\int_{\curvearrowright AB} Q(x, y) dy = 0$ и

$\int_{\curvearrowright B'A'} Q(x, y) dy = 0$, то можем написать

$$I = \int_{\curvearrowright AB} Q(x, y) dy + \int_{\curvearrowright BB'} Q(x, y) dy + \int_{\curvearrowright B'A'} Q(x, y) dy + \int_{\curvearrowright A'A} Q(x, y) dy = \oint_{(K)} Q(x, y) dy.$$

Таким образом, получили:

$$\iint_{(\bar{D})} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{(K)} Q(x, y) dy. \quad (3)$$

Замечание. Формула (3) верна и тогда, когда область (D) прямыми, параллельными оси Ox , разлагается на конечное число областей типа II. Это устанавливается совершенно аналогично тому, как это сделано в предыдущем замечании.

Пусть область (D) такая, что она прямыми линиями, параллельными оси Oy , разлагается на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox – на конечное число областей типа II. Пусть в $(\bar{D})$ заданы функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, непрерывные там вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда верны одновременно формулы (2) и (3). Вычитая из формулы (3) соответствующие части формулы (2), получим

$$\oint_{(K)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(\bar{D})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4)$$

(4) – *формула Грина*. Она преобразует криволинейный интеграл второго рода по замкнутому самонепересекающемуся контуру в двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Определение 1.

1. Область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром, называется *односвязной*.

2. Область, ограниченная замкнутым самонепересекающимся контуром (K_1) и $(n-1)$ замкнутыми самонепересекающимися контурами (K_2) , (K_3) , ..., (K_n) , лежащими внутри (K_1) и вне друг друга, называется n -связной.

Теорема. Формула Грина

$$\oint_{(K)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (5)$$

верна и для многосвязной области, если под контуром (K) понимать объединение всех контуров (K_1) , (K_2) , ..., (K_n) , ограничивающих область (D) , причем направление интегрирования такое, что наблюдатель, обходящий контур (K) в этом направлении, оставляет ближайшую к нему часть области, ограниченной (K) , слева от себя (система координат предполагается правой).

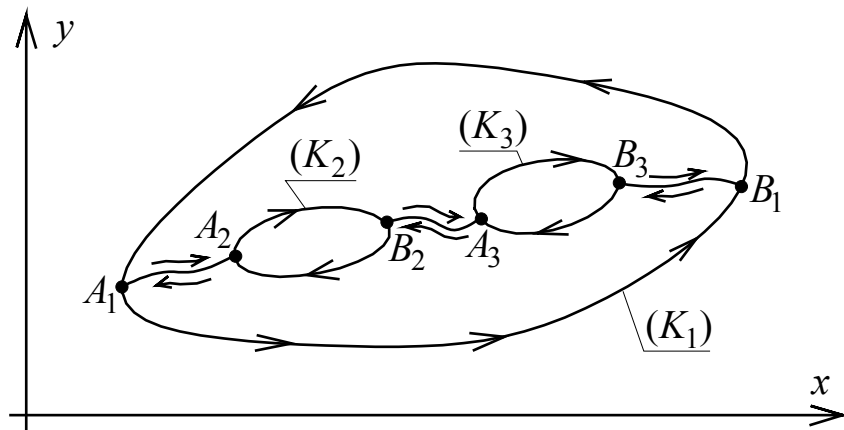
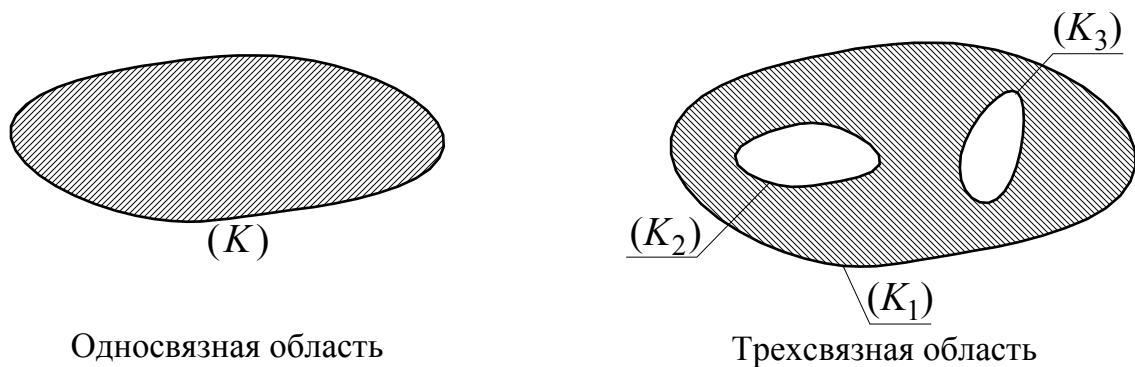


Рис. 3.17. К выводу формулы Грина для многосвязных областей

► Рассмотрим для простоты трехсвязную область (D) . Возьмем на (K_1) точки A_1 и B_1 ; на (K_2) – точки A_2 и B_2 ; на (K_3) – точки A_3 и B_3 . Проведем линии: $\neg A_1 A_2$; $\neg B_2 A_3$; $\neg B_3 B_1$. Тогда область (D) разобьется на две односвязные области. Написав формулу Грина для каждой из этих двух односвязных областей и сложив результаты, мы получим формулу (5). (По каждой вспомогательной кривой: $\neg A_1 A_2$, $\neg B_2 A_3$, $\neg B_3 B_1$ интегрирование ведется дважды в двух противоположных направлениях. Следовательно, криволинейные интегралы по вспомогательным кривым взаимно уничтожаются.)

§4. Вопрос о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Пусть (D) – область, ограниченная одним замкнутым самонепересекающимся контуром (K) (значит, (D) – односвязная область). Пусть в (D) заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

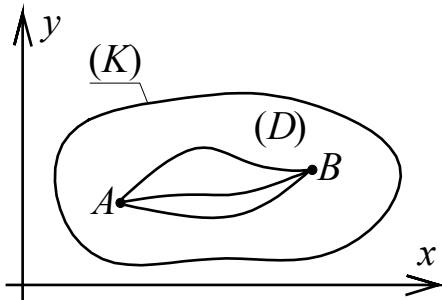


Рис. 3.18. К определению интеграла, не зависящего от формы пути

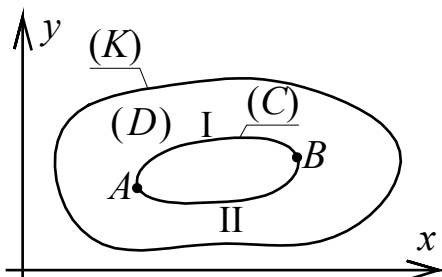


Рис. 3.19. К доказательству леммы 1

Будем говорить, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в (D) *пару типа «α»*, если криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma_{AB}} P dx + Q dy$, взятый по незамкнутому пути γ_{AB} , целиком лежащему в (D) , не зависит от формы пути (а зависит только от концов пути).

Будем говорить, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в (D) *пару типа «β»*, если для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C) , целиком лежащего в (D) , оказывается: $\oint_C P dx + Q dy = 0$.

Лемма 1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в области (D) пару типа «α», то они образуют в (D) также и пару типа «β».

► Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа «α» в (D) . Возьмем в (D) любой замкнутый самонепересекающийся контур (C) . Выберем и закрепим на (C) любые две точки A и B . Эти точки разобьют (C) на две дуги: γ_{AIB} и $\gamma_{AII B}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \int_{\gamma_{AII B}} P dx + Q dy + \int_{\gamma_{BIA}} P dx + Q dy = \\ &= \int_{\gamma_{AII B}} P dx + Q dy - \int_{\gamma_{AIB}} P dx + Q dy. \end{aligned} \quad (1)$$

У нас P и Q – пара типа «α» в (D) . Поэтому

$$\int_{\gamma_{AII B}} P dx + Q dy = \int_{\gamma_{AIB}} P dx + Q dy.$$

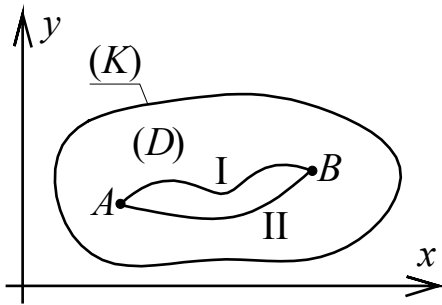


Рис. 3.20а. К доказательству леммы 2

А тогда из (1) следует, что $\oint_C P dx + Q dy = 0$. Так как (C) – любой замкнутый самонепересекающийся контур, лежащий в (D), то последнее означает, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа «β» в (D). ◀

Лемма 2. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в области (D) пару типа «β», то они образуют в (D) также и пару типа «α».

► Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа «β» в (D). Возьмем в (D) любые две точки A и B и соединим их двумя различными линиями: $\cup AIB$ и $\cup AII B$, целиком лежащими в (D). Лемма 2 будет доказана, если показать, что

$$\int_{\cup AIB} P dx + Q dy = \int_{\cup AII B} P dx + Q dy. \quad (2)$$

Установим соотношение (2) в следующих двух простых случаях.

1) Линии $\cup AIB$ и $\cup AII B$ не имеют других общих точек, кроме точек A и B (см. рис. 3.20а). В этом случае наши линии образуют замкнутый самонепересекающийся контур. Так как функции P и Q – пара типа «β» в (D), то

$$\begin{aligned} & \int_{\cup AII BIA} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{\cup AII B} P dx + Q dy + \int_{\cup BIA} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{\cup AII B} P dx + Q dy - \int_{\cup AIB} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \int_{\cup AII B} P dx + Q dy = \int_{\cup AIB} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

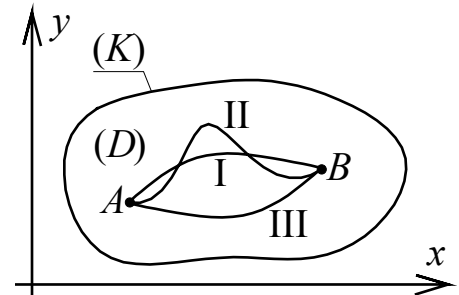


Рис. 3.20б. К доказательству леммы 2

Видим, что соотношение (2) в этом случае установлено.

2) Линии $\cup AIB$ и $\cup AII B$ кроме точек A и B имеют еще и другие общие точки, но существует линия $\cup AIII B$, которая пересекается с ними только в точках A и B (см. рис. 3.20б). Тогда, по доказанному в случае 1), имеем:

$$\int_{\cup AIB} P dx + Q dy = \int_{\cup AIII B} P dx + Q dy, \quad \int_{\cup AII B} P dx + Q dy = \int_{\cup AIII B} P dx + Q dy,$$

а значит, и

$$\int_{\cup AIB} P dx + Q dy = \int_{\cup AII B} P dx + Q dy.$$

Видим, что соотношение (2) установлено и в этом случае.

3) В более сложных случаях утверждение леммы 2 принимаем без доказательства. Рис. 3.20в – пример как раз того случая, который не подходит ни к 1), ни к 2). ◀

Следствие. Свойство пар функций иметь в области (D) тип « α » равносильно свойству иметь тип « β ».

Теорема. Пусть в односвязной области (D) заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Пусть $P(x, y)$, $Q(x, y)$

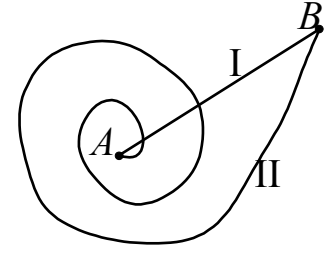


Рис. 3.20в. К лемме 2

непрерывны в (D) и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда для того, чтобы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были парой типа « β » (а значит, и парой типа « α ») в (D) , необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D)

было: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

► *Необходимость.* Дано: $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа « β » в (D) . Требуется доказать, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D) .

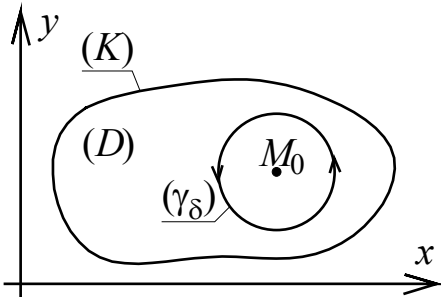


Рис. 3.21. К доказательству теоремы

Рассуждаем от противного. Допустим, что соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в

(D) . Но тогда в (D) имеется точка $M_0(x_0, y_0)$ такая, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\cdot)M_0} \neq 0$. Пусть для опреде-

ленности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\cdot)M_0} > 0$. Так как $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

– функция непрерывная в (D) , то по теореме о стабильности знака существует

$\bar{u}_\delta(M_0)$ такая, что $\bar{u}_\delta(M_0) \subset (D)$ и что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ в $\bar{u}_\delta(M_0)$ ($\bar{u}_\delta(M_0)$ –

замкнутый круг радиуса δ с центром в точке M_0 ; (γ_δ) – контур этого круга).

Так как $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \in C(\bar{u}_\delta(M_0))$, то эта разность достигает в $\bar{u}_\delta(M_0)$ своего

наименьшего m значения. Ясно, что $m > 0$.

По формуле Грина имеем

$$\oint_{(\gamma_\delta)} P dx + Q dy = \iint_{(\bar{u}_\delta(M_0))} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \geq m \cdot \iint_{(\bar{u}_\delta(M_0))} dx dy = m \cdot \pi \delta^2 > 0,$$

а это невозможно, ибо $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа « β » в (D) . Таким образом, предположение, что соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполняется не всюду в (D) , приводит к противоречию.

Достаточность. Дано: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в (D) . Требуется доказать, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ образуют в (D) пару типа « β ».

Возьмем любой замкнутый самонепересекающийся контур (C) , целиком лежащий в (D) . Пусть (Δ) – область, ограниченная контуром (C) . По формуле Грина имеем

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{(\Delta)} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ в } (\Delta)} dx dy = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \oint_C P dx + Q dy = 0 \Rightarrow$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа « β » в (D) . $\blacktriangleleft$

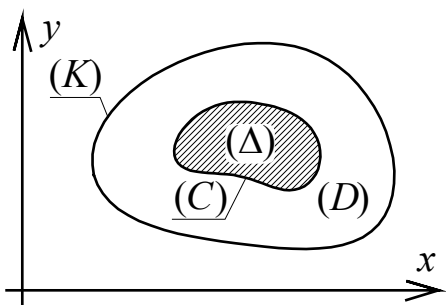


Рис. 3.22. К доказательству теоремы

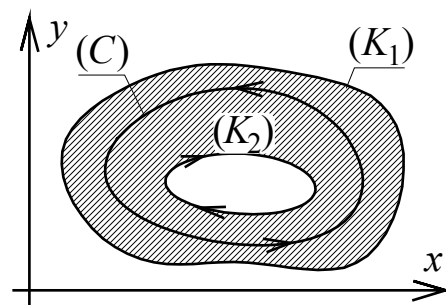


Рис. 3.23. К замечанию

Замечание. Важно подчеркнуть, что доказанное утверждение верно при условии, что область (D) – односвязная.

Действительно, если бы область (D) была, например, двухсвязной с внешним контуром (K_1) и внутренним контуром (K_2) (см. рис. 3.23), то для контура (C) , охватывающего контур (K_2) , мы имели бы:

$$\int_{(C), \text{ обл. слева}} P dx + Q dy + \int_{(K_2), \text{ обл. слева}} P dx + Q dy = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

ибо $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ всюду в (D) , а значит, и в (Δ) ((Δ) – область, ограниченная контурами (C) и (K_2)). Значит,

$$\int_{(C) \odot} P dx + Q dy + \int_{(K_2) \ominus} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow \int_{(C) \odot} P dx + Q dy - \int_{(K_2) \odot} P dx + Q dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{(C)} P dx + Q dy = \int_{(K_2)} P dx + Q dy \quad (\neq 0, \text{ вообще говоря}).$$

Значит, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не есть пара типа « β » в (D) .

Пример. Пусть $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$. Эти функции опре-

делены и непрерывны на плоскости Oxy всюду, за исключением точки $O(0, 0)$.

Имеем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ всюду на плоско-

сти Oxy , кроме точки $O(0, 0)$. Значит, для любого замкнутого самонепересекающегося контура (C) , не охватывающего начала координат, будет:

$$\oint_{(C)} P dx + Q dy = \oint_{(C)} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0,$$

так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – пара типа « β » в области (D) , ограниченной контуром (K) (см. рис. 3.24).

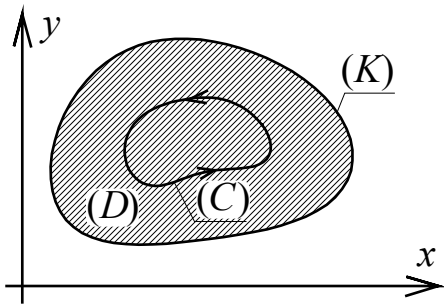


Рис. 3.24. К примеру

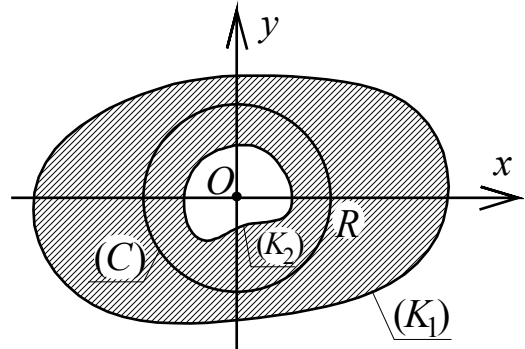


Рис. 3.25. К примеру

Пусть (C) – окружность радиуса R с центром в точке $O(0, 0)$. Вычислим

$I = \oint_{(C)} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$. Параметрическими уравнениями (C) будут:

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

А тогда

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t}{R^2} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi \quad (\neq 0).$$

$P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в области (D_1) , ограниченной контуром (K_1) , не есть пара типа « β », ибо нарушена непрерывность в точке $O(0, 0)$, расположенной внутри контура (K_1) . Если же исключить точку $O(0, 0)$, окружив ее контуром

(K_2) (см. рис. 3.25), то условие непрерывности в области (D_2), ограниченной контурами (K_1) и (K_2), будет иметь место, но нарушится односвязность.

Дополнение. Пусть выполнены все условия теоремы, а значит, $\int_{\gamma_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по любому незамкнутому пути γ_{AB} , целиком лежащему в (D), не зависит от формы пути, а зависит только от концов пути. Пусть функция $u(x, y)$ определена в (D) и такая, что

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$$

(т. е. выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$). Тогда

$$\int_{\gamma_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$$

(здесь x_A, y_A — координаты точки A , а x_B, y_B — координаты точки B).

► По условию $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$. Это значит, что

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$I = \int_{\gamma_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\gamma_{AB}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy.$$

Для вычисления интеграла I введем параметрические уравнения γ_{AB} . Пусть

они такие: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [p, q]$, причем значению $t = p$ отвечает точка A , а

значению $t = q$ отвечает точка B . Будем иметь тогда

$$I = \int_p^q \left[\frac{\partial u(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \cdot \psi'(t) \right] dt.$$

Заметив это, рассмотрим функцию $f(t) = u(\varphi(t), \psi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$f'(t) = \frac{\partial u(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial u(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \cdot \psi'(t).$$

Следовательно, предыдущее выражение для I принимает вид

$$I = \int_p^q f'(t) dt = f(q) - f(p).$$

Но $f(q) = u(\varphi(q), \psi(q)) = u(x_B, y_B)$; $f(p) = u(\varphi(p), \psi(p)) = u(x_A, y_A)$ (у нас $\varphi(p) = x_A$, $\psi(p) = y_A$, $\varphi(q) = x_B$, $\psi(q) = y_B$). Поэтому

$$I = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A). \blacktriangleleft$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int_{\curvearrowright AB} P dx + Q dy$ нужно найти

функцию $u(x, y)$, первообразную для дифференциала $P dx + Q dy$ и составить разность значений этой первообразной в конце и в начале пути интегрирования. Ясно, что это – аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Примеры к §4.

1. Вычислить $I = \int_{\curvearrowright AB} (x - y)(dx - dy)$, где $\curvearrowright AB$ – любая кривая, соединяющая точки $A(1, -1)$ и $B(1, 1)$.

► В этом случае $P(x, y) = x - y$; $Q(x, y) = y - x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ на всей плоскости. Следовательно, в любой односвязной области, расположенной в плоскости Oxy , подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Так как

$$(x - y)(dx - dy) = (x - y) \cdot d(x - y) = \frac{1}{2} d((x - y)^2),$$

то такой функцией $u(x, y)$ будет: $u(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$. Поэтому

$$I = \frac{(x - y)^2}{2} \Big|_{(1, -1)}^{(1, 1)} = 0 - \frac{2^2}{2} = -2. \blacktriangleleft$$

2. Вычислить $I = \int_{\curvearrowright AB} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, где $\curvearrowright AB$ – любая кривая, соединяющая точки $A(-2, -1)$ и $B(3, 0)$.

► Здесь $P(x, y) = x^4 + 4xy^3$; $Q(x, y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$

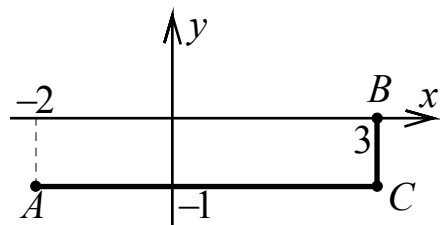


Рис. 3.26. К примеру 2

на всей плоскости Oxy . Следовательно, I не зависит от формы пути интегрирования, соединяющего точки A и B . А раз так, то возьмем, например, в качестве пути $\curvearrowright AB$ ломаную $AC \cup CB$ (см. рис. 3.26). Тогда

$$I = \int_{\curvearrowright AB} = \int_{\curvearrowright AC} + \int_{\curvearrowright CB} (= I_1 + I_2).$$

Имеем:

$$\cup AC = \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow dy = 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int_{\cup AC} = \int_{-2}^3 (x^4 - 4x) dx + 0 = \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^3 = 45.$$

Имеем:

$$\cup CB = \begin{cases} x = 3 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow dx = 0.$$

Поэтому

$$I_2 = \int_{\cup CB} = \int_{-1}^0 (54y^2 - 5y^4) dy = (18y^3 - y^5) \Big|_{-1}^0 = 17.$$

Следовательно, $I = 45 + 17 = 62$. ◀

3. Вычислить $I = \int_{\cup AB} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$, где $\cup AB$ —

любая кривая, соединяющая точки $A(1, \pi)$ и $B(2, \pi)$ и не пересекающая ось Oy .

► Здесь

$$P(x, y) = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}; \quad Q(x, y) = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Видим, что $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy , кроме точек, лежащих

на оси Oy , и что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ для $x \neq 0$. Следовательно, I

не зависит от формы пути $\cup AB$. Требуется только, чтобы $\cup AB$ не пересекала ось Oy . А раз так, то возьмем, например, в качестве $\cup AB$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки A и B (см. рис. 3.27). Так как

$$\cup AB = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ y = \pi \end{cases} \Rightarrow dy = 0,$$

то будем иметь

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} \right) dx + 0 = \left(x + \pi \sin \frac{\pi}{x} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = 1 + \pi. \quad \blacktriangleleft$$

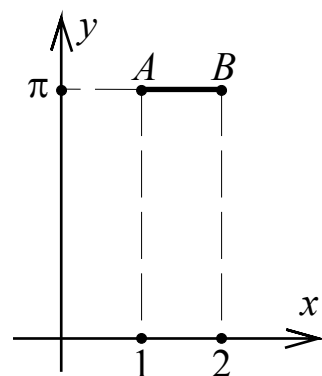


Рис. 3.27.

К примеру 3

§5. Площадь плоской фигуры в криволинейных координатах

1°. Вычисление площади плоской фигуры при помощи криволинейного интеграла второго рода.

Пусть (K) – простой, замкнутый самонепересекающийся контур, ограничивающий область (D) .

1) Пусть область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy , она может быть разложена на конечное число областей типа I. Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint_{(K)} y dx$ (это – частный случай интеграла $\oint_{(K)} P dx + Q dy$, когда

$P \equiv y$, а $Q \equiv 0$). Преобразуя $\oint_{(K)} y dx$ по формуле Грина, получим

$$\oint_{(K)} y dx = - \iint_{(\bar{D})} dx dy = -F_{\bar{D}} \Rightarrow$$

$$F_{\bar{D}} = - \oint_{(K)} y dx. \quad (1)$$

2) Пусть теперь область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Ox , ее можно разложить на конечное число областей типа II. Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint_{(K)} x dy$ (это – частный случай интеграла $\oint_{(K)} P dx + Q dy$, когда

$P \equiv 0$, $Q \equiv x$). Преобразуя $\oint_{(K)} x dy$ по формуле Грина, получим:

$$\oint_{(K)} x dy = \iint_{(\bar{D})} dx dy = F_{\bar{D}} \Rightarrow$$

$$F_{\bar{D}} = \oint_{(K)} x dy. \quad (2)$$

3) Пусть, наконец, область (D) такая, что прямыми, параллельными оси Oy , она может быть разложена на конечное число областей типа I, а прямыми, параллельными оси Ox , – на конечное число областей типа II. Тогда будут верны одновременно формулы (1) и (2). Сложив соответствующие части этих формул, получим

$$2F_{\bar{D}} = \oint_{(K)} x dy - y dx \Rightarrow F_{\bar{D}} = \frac{1}{2} \oint_{(K)} x dy - y dx. \quad (3)$$

2°. Формула для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в плоскостях Oxy и $O\xi\eta$ расположены области (D) и (Δ) с простыми контурами (K_D) и (K_Δ) . Если дано правило, которое каждой точке (ξ, η) из $(\bar{\Delta})$ сопоставляет одну и только одну точку (x, y) из $(\bar{D})$, причем каждая точка (x, y) из $(\bar{D})$ оказывается сопоставленной одной и только одной точке из $(\bar{\Delta})$, то говорят, что между точками областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$ установлено *взаимно-однозначное соответствие*.

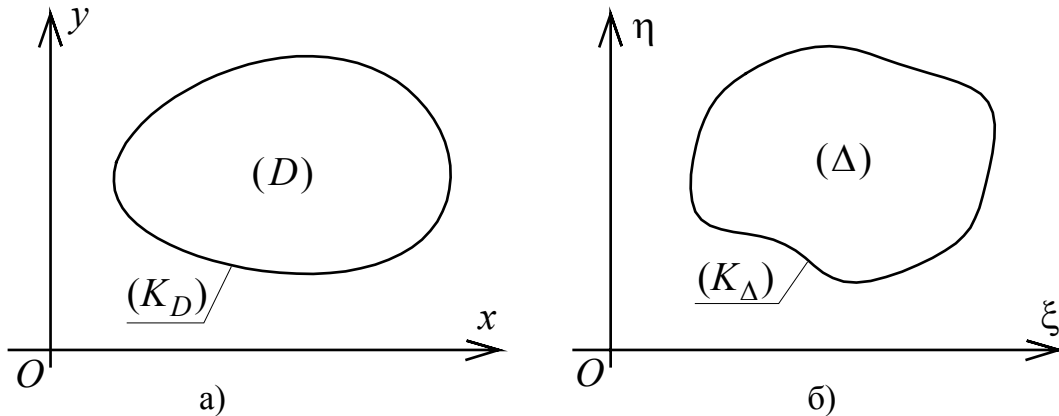


Рис. 3.28. К выводу формулы для площади в криволинейных координатах

Если (ξ, η) и (x, y) есть взаимно-соответствующие точки, то

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнения (4) есть уравнения преобразования $(\bar{\Delta})$ в $(\bar{D})$. В силу взаимной однозначности соответствия между точками областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$, система (4) однозначно разрешима относительно ξ и η . Поэтому

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Впредь функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ будем считать непрерывными в $(\bar{\Delta})$, а функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ – непрерывными в $(\bar{D})$. Покажем, что тогда непрерывные кривые, лежащие, например, в $(\bar{\Delta})$, преобразуются в непрерывные кривые, лежащие в $(\bar{D})$.

В самом деле, пусть (λ) – непрерывная кривая, лежащая в $(\bar{\Delta})$, и пусть ее параметрические уравнения такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases}$ где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – функции, определенные и непрерывные в промежутке $[p, q]$. Тогда точки, соответствующие точкам кривой (λ) , имеют координаты:

$$\begin{cases} x = x(\alpha(t), \beta(t)), \\ y = y(\alpha(t), \beta(t)). \end{cases} \quad (6)$$

Так как правые части в уравнениях (6) есть функции непрерывные в промежутке $[p, q]$, как суперпозиции непрерывных функций, то заключаем, что непрерывная кривая (λ) преобразуется в непрерывную же кривую (l) , лежащую в области $(\bar{D})$.

Задача. Зная область $(\bar{\Delta})$ и формулы преобразования области $(\bar{\Delta})$ в область $(\bar{D})$: $\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases}$ найти площадь $F_{\bar{D}}$ области $(\bar{D})$.

► Решать эту задачу будем при следующих предположениях.

1) Обе области $(\bar{\Delta})$ и $(\bar{D})$ прямыми, параллельными координатным осям, разлагаются на конечное число областей как типа I, так и типа II.

2) Контур (K_{Δ}) соответствует контур (K_D) , причем положительному обходу (K_{Δ}) соответствует определенный (положительный или отрицательный) обход (K_D) .

3) Функции $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ имеют в $(\bar{\Delta})$ непрерывные частные производные первого порядка x'_{ξ} , x'_{η} , y'_{ξ} , y'_{η} , а одна из этих функций имеет в $(\bar{\Delta})$ непрерывные смешанные производные второго порядка. Пусть, например, в $(\bar{\Delta})$ существуют и непрерывны $y''_{\xi\eta}$ и $y''_{\eta\xi}$ ($\Rightarrow y''_{\eta\xi} = y''_{\xi\eta}$ в $(\bar{\Delta})$).

4) Определитель $J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} x'_{\xi} & x'_{\eta} \\ y'_{\xi} & y'_{\eta} \end{vmatrix}$ всюду в $(\bar{\Delta})$ сохраняет знак ($J(\xi, \eta)$ – определитель Якоби, или якобиан).

Решение. Мы знаем, что $F_{\bar{D}} = \oint_{(K_D)} x dy$. Выразим этот криволинейный интеграл через обыкновенный определенный интеграл. Пусть параметрические уравнения контура (K_{Δ}) такие: $\begin{cases} \xi = \alpha(t), \\ \eta = \beta(t), \end{cases} t \in [p, q]$, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – функции, определенные на $[p, q]$ и имеющие там непрерывные производные $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$.

Тогда параметрические уравнения контура (K_D) будут такими:

$$\begin{cases} x = x(\alpha(t), \beta(t)), \\ y = y(\alpha(t), \beta(t)), \end{cases} t \in [p, q].$$

Пусть для определенности изменению t от p до q соответствует положительный обход контура (K_D) . Тогда

$$F_{\overline{D}} = \int_p^q x(\alpha(t), \beta(t)) \cdot [y'_\xi(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t) + y'_\eta(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t)] dt. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь следующий криволинейный интеграл второго рода по контуру (K_Δ) :

$$I = \oint_{(K_\Delta)} x(\xi, \eta) \cdot [y'_\xi(\xi, \eta) d\xi + y'_\eta(\xi, \eta) d\eta]. \quad (8)$$

Чтобы выразить I обыкновенным определенным интегралом, нужно использовать параметрические уравнения контура (K_Δ) . Сделав это, мы придем в точности к интегралу, стоящему в правой части (7), если только положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу контура (K_Δ) . Если же положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ) , то мы получим интеграл стоящий в правой части (7), взятый со знаком «минус». Таким образом,

$$F_{\overline{D}} = \pm I. \quad (9)$$

Преобразуем интеграл I (см. (8)) по формуле Грина

$$\oint_{(K_\Delta)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

У нас в I : $P = x(\xi, \eta) \cdot y'_\xi(\xi, \eta)$, $Q = x(\xi, \eta) \cdot y'_\eta(\xi, \eta)$. Значит,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= x'_\xi \cdot y'_\eta + x \cdot y''_{\eta\xi} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= x'_\eta \cdot y'_\xi + x \cdot y''_{\xi\eta} \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi = J(\xi, \eta).$$

Поэтому

$$I = \iint_{(\overline{\Delta})} (x'_\xi \cdot y'_\eta - x'_\eta \cdot y'_\xi) d\xi d\eta = \iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

А, следовательно,

$$F_{\overline{D}} = \pm \iint_{(\overline{\Delta})} J(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

У нас по условию $J(\xi, \eta)$ всюду в $(\overline{\Delta})$ сохраняет знак. Поэтому, принимая во внимание, что $F_{\overline{D}} > 0$, можем написать

$$F_{\overline{D}} = \iint_{(\overline{\Delta})} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad \blacktriangleleft \quad (10)$$

Из рассуждений, проведенных выше, следует, что $J(\xi, \eta) > 0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует положительному обходу

контура (K_Δ) и что $J(\xi, \eta) < 0$ тогда, когда положительный обход контура (K_D) соответствует отрицательному обходу контура (K_Δ) .

К двойному интегралу, стоящему в правой части (10), применим частный случай теоремы о среднем. Получим.

$$F_{\bar{D}} = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot F_{\bar{\Delta}}, \text{ где } (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in (\bar{\Delta}). \quad (11)$$

Из (11) находим $\frac{F_{\bar{D}}}{F_{\bar{\Delta}}} = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})|$. Станем сжимать область $(\bar{\Delta})$ по всем направлениям в некоторую точку (ξ, η) (тогда $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \rightarrow (\xi, \eta)$). В силу непрерывности отображения область (D) будет при этом сжиматься в точку (x, y) , которая соответствует точке (ξ, η) . Следовательно,

$$|J(\xi, \eta)| = \lim_{F_{\bar{\Delta}} \rightarrow 0} \frac{F_{\bar{D}}}{F_{\bar{\Delta}}}.$$

Таким образом, модуль якобиана есть коэффициент искажения площадей при переходе из плоскости $O\xi\eta$ в плоскость Oxy .

Замечание. Формула (10) остается верной и в том случае, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi, \eta)$ остается ограниченным всюду в $(\bar{\Delta})$.

§6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть между точками областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$ установлено взаимно-однозначное соответствие посредством формул $\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$ Считаем, что выполняются все условия, указанные при выводе формулы для площади плоской фигуры в криволинейных координатах.

Пусть в области $(\bar{D})$ задана непрерывная функция $f(x, y)$. Мы знаем, что тогда существует двойной интеграл $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$. Требуется выразить I

через некоторый двойной интеграл по области $(\bar{\Delta})$.

► Составим интегральную сумму Римана для двойного интеграла I . Для этого произвольной сетью простых кривых нужно разбить область $(\bar{D})$ на части $(\bar{D}_1), (\bar{D}_2), \dots, (\bar{D}_n)$; в каждой части $(\bar{D}_k)$ взять произвольную точку

$$(x_k, y_k), \text{ и тогда } \sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot F_{\bar{D}_k}.$$

Заметим, что, проводя в $(\bar{D})$ сеть простых кривых, мы, в силу однозначности отображения, будем проводить также сеть простых кривых в области $(\bar{\Delta})$, так что $(\bar{\Delta})$ разобьется на части $(\bar{\Delta}_1), (\bar{\Delta}_2), \dots, (\bar{\Delta}_n)$.

По формуле для площади плоской фигуры в криволинейных координатах, имеем

$$F_{\bar{D}_k} = \iint_{(\bar{\Delta}_k)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

Применяя к двойному интегралу, стоящему в правой части, частный случай теоремы о среднем, получим

$$F_{\bar{D}_k} = |J(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| \cdot F_{\bar{\Delta}_k}, \text{ где точка } (\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in (\bar{\Delta}_k).$$

А тогда

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot |J(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| \cdot F_{\bar{\Delta}_k}.$$

Было отмечено, что у нас двойной интеграл I существует. Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$ при любом выборе точек (x_k, y_k) в $(\bar{D}_k)$. В частности, в качестве точек (x_k, y_k) можно взять точки, соответствующие точкам $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$, т. е.

положить $x_k = x(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$, $y_k = y(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$. При таком выборе точек (x_k, y_k) будем иметь:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k), y(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)) \cdot |J(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| \cdot F_{\bar{\Delta}_k}.$$

Сумма, стоящая здесь в правой части, есть сумма Римана для двойного интеграла

$$I_* = \iint_{(\bar{\Delta})} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta,$$

причем I_* существует, ибо подынтегральная функция в нем есть функция непрерывная в $(\bar{\Delta})$.

Отметим, что, измельчая дробление в $(\bar{D})$, мы тем самым будем измельчать дробление и в $(\bar{\Delta})$, ибо функции, осуществляющие взаимно-однозначное отображение областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$ друг на друга, есть непрерывные функции. Но тогда $\sigma \rightarrow I_*$ при $\lambda \rightarrow 0$. А так как $\sigma \rightarrow I$ при $\lambda \rightarrow 0$, то получаем $I = I_*$, т. е.

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy = \iint_{(\bar{\Delta})} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (1)$$

Частный случай. Пусть $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$ Тогда

$$\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy = \iint_{(\bar{\Delta})} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Замечание. Формула (1) остается верной и тогда, когда взаимно-однозначное соответствие между точками областей $(\bar{D})$ и $(\bar{\Delta})$ нарушается на множестве точек, лежащих на конечном числе простых кривых. При этом предполагается, что якобиан $J(\xi, \eta)$ остается ограниченным всюду в $(\bar{\Delta})$.

§7. Примеры к главе 3

Пример 1 (интеграл Эйлера). Вычислить $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (попутно будет до-

казана сходимость этого несобственного интеграла).

► Введем в рассмотрение функцию

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ и области $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, $(\bar{D}_3)$, где:

$(\bar{D}_1)$ – четверть круга: $x^2 + y^2 \leq R^2$, лежащая в первой четверти;

$(\bar{D}_2)$ – квадрат: $\begin{cases} 0 \leq x \leq R, \\ 0 \leq y \leq R; \end{cases}$

$(\bar{D}_3)$ – четверть круга: $x^2 + y^2 \leq 2R^2$, лежащая в первой четверти.

Ясно, что $(\bar{D}_1) \subset (\bar{D}_2) \subset (\bar{D}_3)$. Отсюда и из того,

что $f(x, y) > 0$ следует:

$$\underbrace{\iint_{(\bar{D}_1)} e^{-x^2-y^2} dx dy}_{=I_1} \leq \underbrace{\iint_{(\bar{D}_2)} e^{-x^2-y^2} dx dy}_{=I_2} \leq \underbrace{\iint_{(\bar{D}_3)} e^{-x^2-y^2} dx dy}_{=I_3}. \quad (2)$$

Выразим двойной интеграл I_2 через повторный.

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{(\bar{D}_2)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R dx \int_0^R e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \\ &= \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Вычисление двойных интегралов I_1 , I_3 будем производить, переходя к полярным координатам. Будем иметь

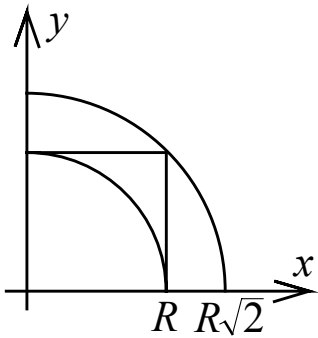


Рис. 3.29.
К вычислению
интеграла Эйлера

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{(\bar{D}_1)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{(\bar{\Delta}_1)} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^R e^{-r^2} dr^2 = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}); \\
I_3 &= \iint_{(\bar{D}_3)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}R} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).
\end{aligned}$$

Теперь неравенство (2) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) &\leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}) \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-R^2}} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2R^2}}.
\end{aligned}$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Так как

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-R^2}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2R^2}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то по теореме о сжатой переменной заключаем, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак, получили $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Легко показать, что $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а следо-

вательно, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. ◀

Пример 2. В интеграле $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$ перей-

ти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\bar{D})$ – круг $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

$$\blacktriangleright x^2 + y^2 \leq ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \Rightarrow (\bar{D}) -$$

круг радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Положим

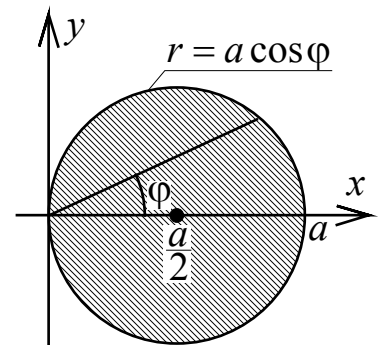


Рис. 3.30. К примеру 2

$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$ Окружность $x^2 + y^2 = ax$ в полярных координатах задается уравнением $r^2 = ar \cos \varphi \Rightarrow r = a \cos \varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Якобиан $J(r, \varphi) = r$.

Если внешнее интегрирование производить по φ , то промежутком изменения φ , будет $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, видим по рисунку 3.30, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a \cos \varphi$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{r=0}^{r=a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \blacktriangleleft$$

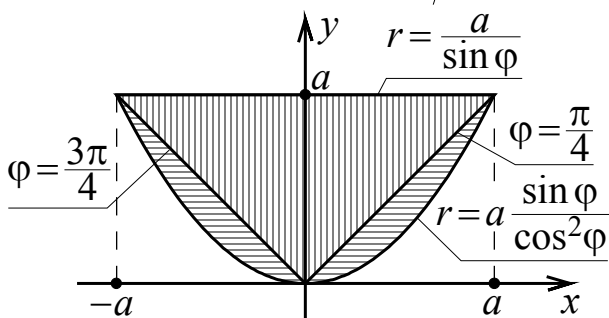


Рис. 3.31. К примеру 3

Пример 3. В интеграле $I = \iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если $(\bar{D})$ – параболический сегмент $\begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ \frac{x^2}{a} \leq y \leq a. \end{cases}$

► В полярных координатах отрезок прямой $y = a$, $-a \leq x \leq a$, определяется уравнением: $r = \frac{a}{\sin \varphi}$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, а кусок параболы $y = \frac{x^2}{a}$, $x \in [-a, a]$, – уравнением: $r = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Будем производить внешнее

интегрирование по φ . Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, видим по рисунку 3.31, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$. Взяв произ-

вольное значение φ из промежутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = \frac{a}{\sin \varphi}$. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, видим, что r изменяется от $r = 0$ до $r = a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$. Будем, следовательно, иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{a}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=a \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \blacktriangleleft$$

Пример 4. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

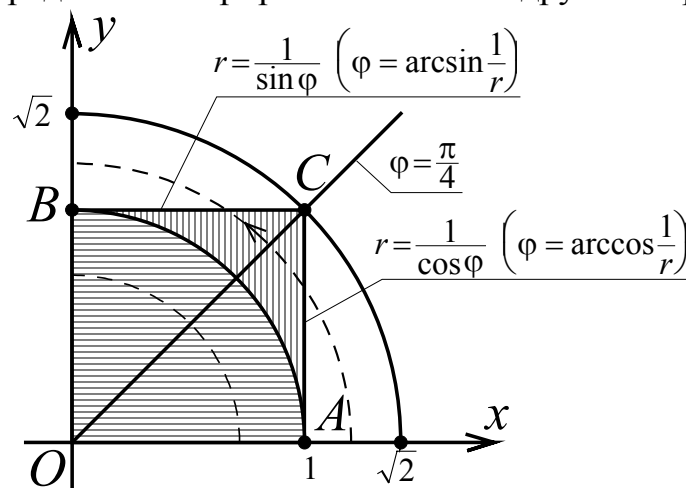


Рис. 3.32. К примеру 4

► Область интегрирования $(\bar{D})$ определяется соотношениями
 $(\bar{D}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$ При замене $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} J(r, \varphi) = r.$

$$\text{Отрезок } OA = \begin{cases} y = 0, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } OB = \begin{cases} x = 0, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } AC = \begin{cases} x = 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\cos \varphi}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos \frac{1}{r}, \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } BC = \begin{cases} y = 1, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sin \varphi}, \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arcsin \frac{1}{r}, \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

I. Если внешнее интегрирование производить по φ , то будем иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

II. Будем производить теперь внешнее интегрирование по r . Взяв произвольное значение r из промежутка $[0, 1]$, видим по рис. 3.32, что φ изменяется от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Взяв произвольное значение r из промежутка $[1, \sqrt{2}]$, видим, что φ изменяется от $\varphi = \arccos \frac{1}{r}$ до $\varphi = \arcsin \frac{1}{r}$. Будем иметь, следовательно,

$$I = \int_0^1 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\varphi=\arccos \frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \blacktriangleleft$$

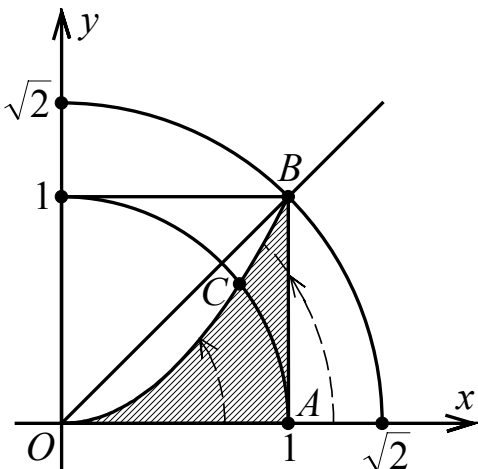


Рис. 3.33. К примеру 5

Пример 5. В интеграле $I = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=x^2} f(x, y) dy$

перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

► Область интегрирования ($\bar{D}$) определяется соотношениями $(\bar{D}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x^2. \end{cases}$ Делаем

замену $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J(r, \varphi) = r.$

$$\text{Отрезок } OA = \begin{cases} y = 0, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{Отрезок } AB = \begin{cases} x = 1, \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\cos \varphi}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos \frac{1}{r}, \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\cup OCB = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}, \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

$$(y = x^2 \Rightarrow r \sin \varphi = r^2 \cos^2 \varphi \Rightarrow r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

имеем также

$$r \sin \varphi = r^2(1 - \sin^2 \varphi) \Rightarrow r \sin^2 \varphi + \sin \varphi - r = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r^2}}{2r} \Rightarrow$$

так как $\sin \varphi \geq 0$ для $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}, r \in [0, \sqrt{2}].$$

$\varphi(r)$ в точке $r = 0$ понимается в предельном смысле, $\varphi(0) = 0$.

I. Будем производить внешнее интегрирование по φ . Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ видим по рис. 3.33, что r изменяется от

$r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ до $r = \frac{1}{\cos \varphi}$. Поэтому будем иметь

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{r=\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

II. Станем производить теперь внешнее интегрирование по r . Взяв произвольное значение r из промежутка $[0, 1]$, видим по рис. 3.33, что φ изменяется

от $\varphi = 0$ до $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. Взяв произвольное значение r из проме-

жутка $[1, \sqrt{2}]$, видим по рис. 3.33, что φ изменяется от $\varphi = \arccos \frac{1}{r}$ до

$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_0^1 dr \int_{\varphi=0}^{\varphi=\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\varphi=\arccos \frac{1}{r}}^{\varphi=\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Переменить порядок интегрирования в интеграле

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr.$$

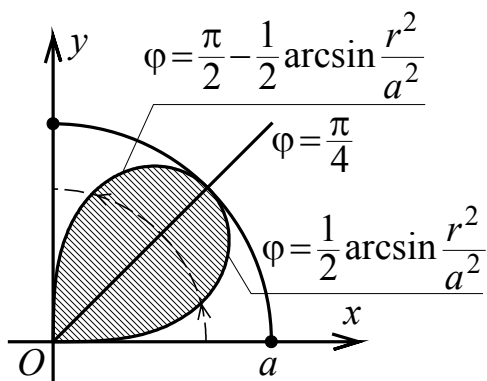


Рис. 3.34. К примеру 6

► Область интегрирования $(\bar{D})$ определяется соотношениями: $(\bar{D}) = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2\varphi}. \end{cases}$ Из

соотношения $r = a\sqrt{\sin 2\varphi} \Rightarrow r^2 = a^2 \sin 2\varphi$

$$\Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow 2\varphi = \arcsin \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}, \quad r \in [0, a]. \text{ Требуется произве-}$$

сти внешнее интегрирование по r .

Возьмем произвольное значение r из промежутка $[0, a]$. Из рис. 3.34 видим, что φ будет изменяться при этом r от значения $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$ до значения $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$. Следовательно, будем иметь

$$I = \int_0^a dr \int_{\varphi=\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. В двойном интеграле $\iint_{(\bar{D})} f(x, y) dx dy$, где $(\bar{D})$ – область, огра-

ниченная линиями: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$), $x = 0$, $y > 0$, сделать замену пере-

менных по формулам: $\begin{cases} x = u \cos^4 v, \\ y = u \sin^4 v. \end{cases}$

► При такой замене:

1) линия $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) перейдет в линию $\sqrt{u} \cdot \cos^2 v + \sqrt{u} \cdot \sin^2 v = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{a} \Rightarrow u = a$ (рис. 3.35, 3.36);

2) линия $\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x \leq a \end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u \sin^4 v = 0, \\ 0 < u \cos^4 v \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 0, \\ 0 < u \leq a; \end{cases}$

3) линия $\begin{cases} x=0, \\ 0 < y \leq a \end{cases}$ перейдет в линию $\begin{cases} u \cos^4 v = 0, \\ 0 < u \sin^4 v \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{\pi}{2}, \\ 0 < u \leq a; \end{cases}$

4) точка $O(0, 0)$ перейдет в линию $\begin{cases} u \cos^4 v = 0, \\ u \sin^4 v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 0.$

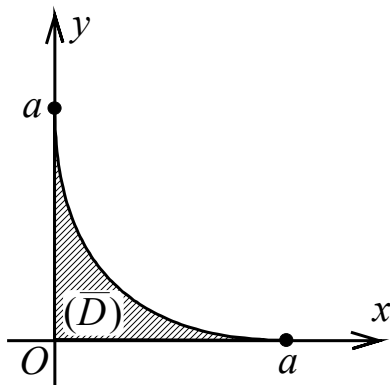


Рис. 3.35. К примеру 7

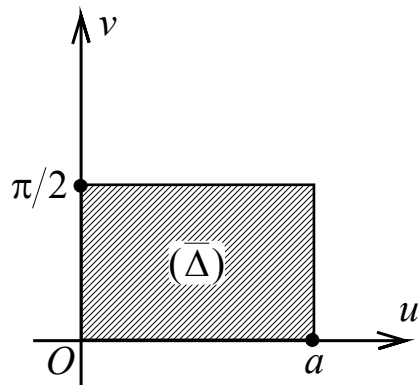


Рис. 3.36. К примеру 7

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u \cos^3 v \sin v \\ \sin^4 v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = 4u \sin^3 v \cos^3 v.$$

Следовательно,

$$I = 4 \int_0^a u du \int_{v=0}^{v=\pi/2} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) \sin^3 v \cos^3 v dv. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Произведя соответствующую замену переменных, свести двойной интеграл $I = \iint_{(\bar{D})} f(x \cdot y) dx dy$, где $(\bar{D})$ – область, ограниченная линиями:

$xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ ($x > 0$, $y > 0$), к однократному.

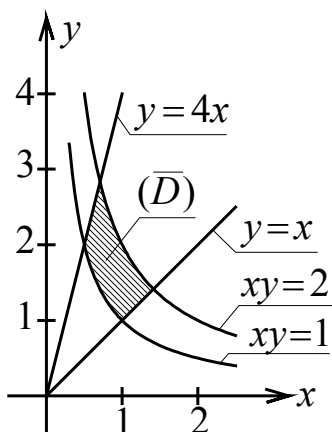


Рис. 3.37. К примеру 8

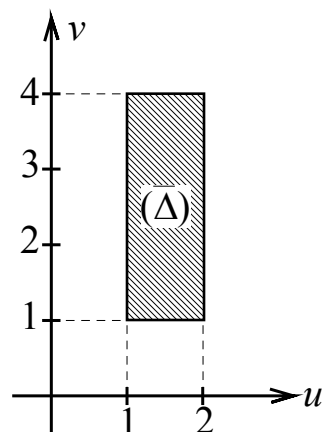


Рис. 3.38. К примеру 8

► Делаем замену переменных:

$$\begin{cases} xy = u, \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \quad (u > 0, v > 0, \text{ ибо } x > 0, y > 0).$$

При такой замене:

- 1) линия $xy = 1$ перейдет в линию $u = 1$;
- 2) линия $xy = 2$ перейдет в линию $u = 2$;
- 3) линия $y = x$ перейдет в линию $v = 1$;
- 4) линия $y = 4x$ перейдет в линию $v = 4$.

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Будем иметь, следовательно,

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{v=1}^{v=4} f(u) \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \int_{u=1}^{u=2} f(u) [\ln v]_{v=1}^{v=4} du = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(u) du. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$).

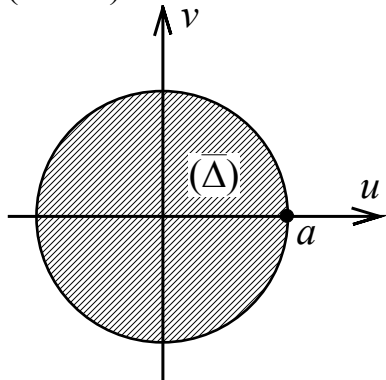


Рис. 3.39. К примеру 9

► Делаем замену переменных $\begin{cases} x - y = u, \\ x = v \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = v, \\ y = v - u. \end{cases}$ При такой замене линия $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$) перейдет в линию $u^2 + v^2 = a^2$. Это – окружность радиуса a с центром в точке $(0, 0)$.

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Искомая площадь F фигуры, ограниченной линией $(x - y)^2 + x^2 = a^2$ ($a > 0$) будет равна

$$F = \iint_{(\bar{D})} dx dy = \iint_{(\bar{\Delta})} |J(u, v)| du dv = \iint_{(\bar{\Delta})} du dv = \pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \geq a^2.$$

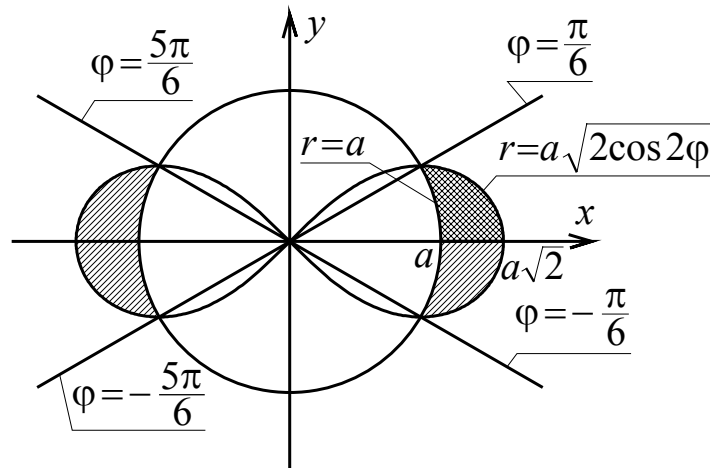


Рис. 3.40. К примеру 10

► Переходим к полярным координатам $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$ В полярной системе

координат линия $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ будет иметь уравнение: $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (это – лемниската), а линия $x^2 + y^2 = a^2$ – уравнение $r = a$ (это – окружность). Найдём точки пересечения этих линий. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \\ r = a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2\cos 2\varphi} = 1 \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}; \varphi = \pm \frac{5\pi}{6}.$$

Принимая во внимание симметричность фигуры, станем вычислять площадь ее части, расположенной в первой четверти. Взяв произвольное значение φ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, видим из рис. 3.40, что r при этом φ изменяется от значения $r = a$ до значения $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Будем иметь, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{r^2}{2} \Big|_{r=a}^{r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2\cos 2\varphi - a^2) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\ \Rightarrow F &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} \cdot a^2 \text{ (кв. ед.).} \end{aligned}$$

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$; $y^2 = 2qx$; $x^2 = 2ry$; $x^2 = 2sy$ ($0 < p < q$; $0 < r < s$).

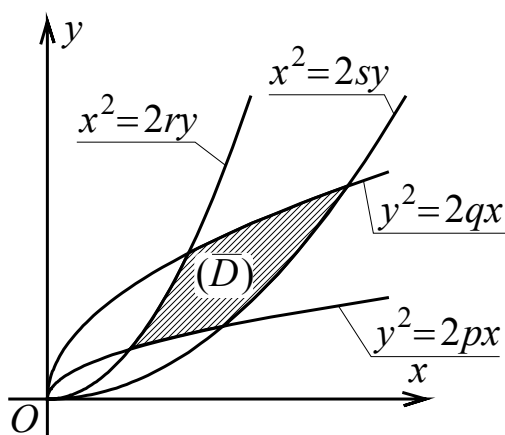


Рис. 3.41. К примеру 11

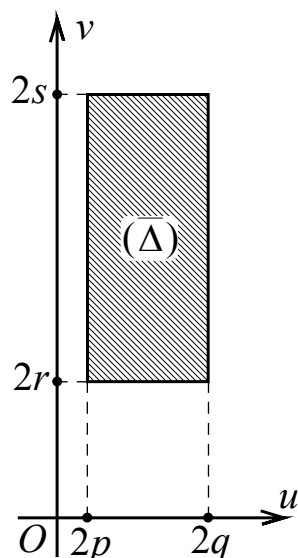


Рис. 3.42. К примеру 11

► Делаем замену переменных

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x} = u, \\ \frac{x^2}{y} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{1/3} \cdot v^{2/3}, \\ y = u^{2/3} \cdot v^{1/3}. \end{cases}$$

При такой замене:

- 1) ветвь параболы $y^2 = 2px$ перейдет в прямую линию $u = 2p$;
- 2) ветвь параболы $y^2 = 2qx$ перейдет в прямую линию $u = 2q$;
- 3) ветвь параболы $x^2 = 2ry$ перейдет в прямую линию $v = 2r$;
- 4) ветвь параболы $x^2 = 2sy$ перейдет в прямую линию $v = 2s$.

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |J(u, v)| = \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$F = \iint_{(D)} dx dy = \iint_{(\Delta)} |J(u, v)| du dv = \frac{1}{3} \int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3}(q - p)(s - r). \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$(l_1): \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1; \quad (l_2): \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4;$$

$$(l_3): \frac{x}{a} = \frac{y}{b}; \quad (l_4): 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (x > 0, y > 0).$$

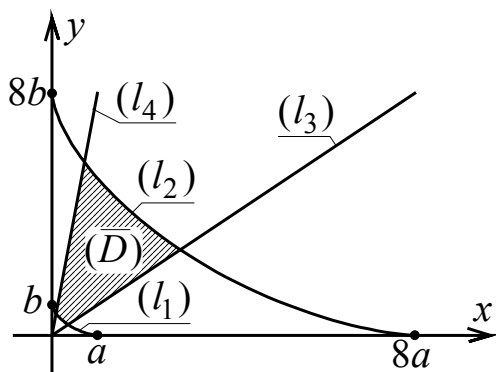


Рис. 3.43. К примеру 12

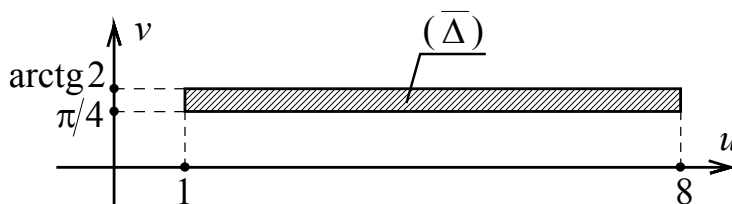


Рис. 3.44. К примеру 12

► Делаем замену переменных $\begin{cases} x = aucos^3 v, \\ y = busin^3 v. \end{cases}$ При такой замене:

1) линия (l_1) перейдет в линию $u^{2/3} = 1 \Rightarrow u = 1$;

2) линия (l_2) перейдет в линию $u^{2/3} = 4 \Rightarrow u = 8$;

3) линия (l_3) перейдет в линию $tg^3 v = 1 \Rightarrow v = \frac{\pi}{4}$;

4) линия (l_4) перейдет в линию $tg^3 v = 8 \Rightarrow v = \arctg 2$.

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos^3 v & -3aucos^2 v \sin v \\ b \sin^3 v & 3busin^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3abusin^2 v \cos^2 v.$$

Имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} F &= \iint_{(D)} dx dy = \iint_{(\Delta)} 3abusin^2 v \cos^2 v du dv = 3ab \int_{v=\pi/4}^{v=\arctg 2} \sin^2 v \cos^2 v dv \int_{u=1}^{u=8} u du = \\ &= \frac{3 \cdot 63}{2} ab \int_{v=\pi/4}^{v=\arctg 2} \sin^2 v \cos^2 v dv = \frac{189}{2} ab \cdot \frac{1}{4} \int_{v=\pi/4}^{v=\arctg 2} \sin^2 2v dv = \\ &= \frac{189}{8} ab \int_{v=\pi/4}^{v=\arctg 2} \frac{1 - \cos 4v}{2} dv = \frac{189}{16} ab \left[\left(\arctg 2 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4} \sin 4v \Big|_{v=\pi/4}^{v=\arctg 2} \right] = \\ &= \frac{189}{16} ab \left[(\arctg 2 - \arctg 1) - \frac{1}{4} \sin(4 \arctg 2) \right]. \end{aligned}$$

Так как $\arctg 2 - \arctg 1 = \arctg \frac{1}{3}$, $\sin(4 \arctg 2) = -\frac{24}{25}$, то

$$F = \frac{189}{16} ab \left(\arctg \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right) \text{ (кв. ед.).} \blacktriangleleft$$

Глава 4. Вычисление площадей кривых поверхностей

§1. Некоторые сведения из геометрии

1.° Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой.

Определение. Касательной в точке N к пространственной кривой (l) называется предельное положение секущей, проходящей через точку N и какую-нибудь точку M этой кривой, когда точка M по кривой стремится к совпадению с точкой N .

Пусть кривая (l) задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [p, q]. \quad (1)$$

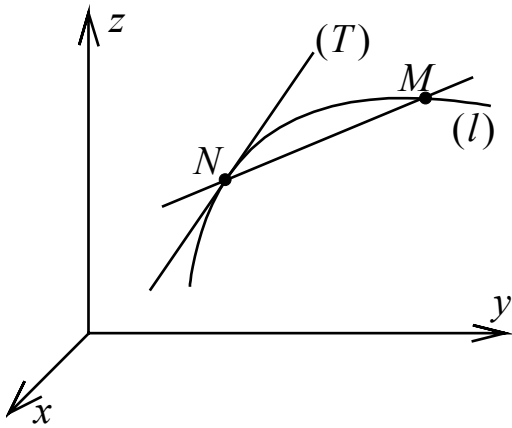


Рис. 4.1. К определению касательной к пространственной кривой

Предполагаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ имеют в $[p, q]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$.

Пусть точка $N(x_0, y_0, z_0)$ соответствует значению параметра t_0 , а точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ — значению параметра $t_0 + \Delta t$, так что: $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $z_0 = \omega(t_0)$; $x_0 + \Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t)$, $y_0 + \Delta y = \psi(t_0 + \Delta t)$, $z_0 + \Delta z = \omega(t_0 + \Delta t)$. Составляем уравнение секущей NM как уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y - y_0}{(y_0 + \Delta y) - y_0} = \frac{z - z_0}{(z_0 + \Delta z) - z_0}$$

(x, y, z — текущие координаты), или

$$\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega(t_0 + \Delta t) - \omega(t_0)}.$$

Разделив знаменатели этих отношений на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение касательной к (l) в точке N .

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}. \quad (2)$$

Из (2) видим, что вектор $\vec{\tau}(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$ направлен по касательной к кривой (l) в точке N .

Замечание. Уравнения (2) теряют смысл, если $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = \omega'(t_0) = 0$. В этом случае точка N называется *особой*. Если же хотя бы один из знаменателей в соотношении (2) не равен нулю, то точка N называется *обыкновенной*. В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные точки.

Определение. Нормальной плоскостью к кривой (l) в точке N называется плоскость, проходящая через точку N перпендикулярно касательной к (l) в точке (N) .

Найдем уравнение нормальной плоскости. Для этого берем уравнение связки плоскостей с центром в точке $N(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

По определению, нормальная плоскость перпендикулярна касательной к (l) в точке N . Поэтому $\frac{A}{\varphi'(t_0)} = \frac{B}{\psi'(t_0)} = \frac{C}{\omega'(t_0)} (=k)$, k – обозначение общей величины этих отношений. А тогда

$$A = k \cdot \varphi'(t_0), \quad B = k \cdot \psi'(t_0), \quad C = k \cdot \omega'(t_0).$$

Подставив эти выражения для A , B и C в (3), получим уравнение нормальной плоскости к (l) в точке N :

$$\varphi'(t_0) \cdot (x - x_0) + \psi'(t_0) \cdot (y - y_0) + \omega'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

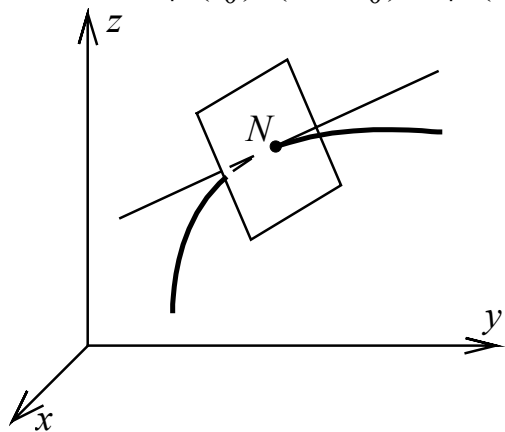


Рис. 4.2. К определению нормальной плоскости к пространственной кривой

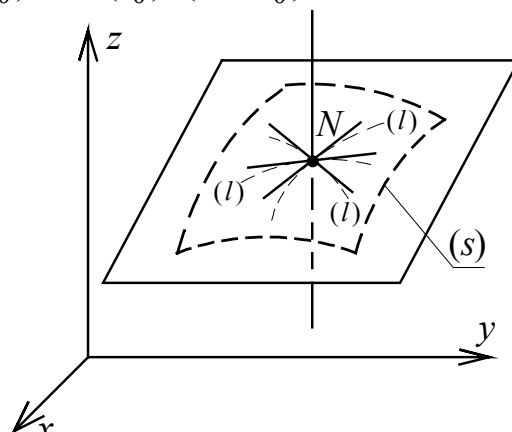


Рис. 4.3. К определению касательной плоскости и нормали к поверхности

2°. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение. Пусть дана поверхность (s) и пусть точка $N(x_0, y_0, z_0) \in (s)$. Рассмотрим всевозможные кривые, лежащие на (s) и проходящие через точку N . Проведем к этим кривым в точке N касательные прямые. Если геометрическим местом этих касательных прямых оказывается плоскость, то она называется *касательной плоскостью* к поверхности (s) в точке N , а перпендикуляр к этой плоскости в точке N называется *нормалью* к поверхности (s) в точке N .

Пусть данная поверхность (s) имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Предполагаем, что функция $F(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z в некоторой пространственной области. Точки поверхности (s) , в которых одновременно $F'_x(x, y, z) = 0, F'_y(x, y, z) = 0, F'_z(x, y, z) = 0$, называются *особыми* точками. Остальные точки поверхности (s) называются *обыкновенными*.

Пусть точка $N(x_0, y_0, z_0)$ – обыкновенная точка поверхности (s) . Рассмотрим одну из кривых (l) , лежащую на (s) и проходящую через точку $N(x_0, y_0, z_0)$. Пусть параметрические уравнения этой кривой (l) такие:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [p, q],$$

где функции $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ определены и имеют непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)$ в промежутке $[p, q]$.

Пусть точка $N(x_0, y_0, z_0)$ соответствует значению параметра t_0 . Уравнение касательной к (l) в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ будет таким:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}. \quad (6)$$

Мы докажем, что у данной поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость, если покажем, что касательная прямая к любой кривой (l) , проходящей через точку N , перпендикулярна к некоторой определенной прямой.

Так как вся кривая (l) лежит на поверхности (s) , то при всех $t \in [p, q]$ будет

$$F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = 0. \quad (7)$$

Значит, (7) есть тождество относительно t . Продифференцируем это тождество по t . Получим

$$F'_x(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \varphi'(t) + F'_y(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \psi'(t) + F'_z(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \cdot \omega'(t) = 0$$

Положим в этом соотношении $t = t_0$. Получим

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \varphi'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \psi'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \omega'(t_0) = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) представляет собой условие перпендикулярности двух прямых, а именно, прямой (6) (т. е. касательной к (l) в точке N) и прямой, имеющей уравнение

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (9)$$

Ясно, что прямая (9) не зависит от выбора кривой (l) . Она зависит только от поверхности (s) и от положения точки N на (s) . Значит, касательная прямая к

любой кривой (l), лежащей на (s) и проходящей через точку $N(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярна к одной и той же прямой (9). Следовательно, у поверхности (s) в точке N существует касательная плоскость.

Нетрудно понять, что прямая (9) является нормалью к поверхности (s) в точке N .

Выведем теперь уравнение касательной плоскости к (s) в точке N . Для этого возьмем уравнение связки плоскостей с центром в точке N :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (10)$$

Так как касательная плоскость к (s) в точке N перпендикулярна нормали (9), то

$$\frac{A}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{B}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{C}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} (= \tilde{k}),$$

$\tilde{k}$ – обозначение общей величины этих отношений. А тогда

$$A = \tilde{k} \cdot F'_x(x_0, y_0, z_0), \quad B = \tilde{k} \cdot F'_y(x_0, y_0, z_0), \quad C = \tilde{k} \cdot F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

Подставив эти выражения для A , B и C в (10), получим уравнение касательной плоскости к поверхности (s) в точке N :

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (11)$$

Частный случай. Пусть поверхность (s) задана явным уравнением:

$$z = f(x, y), \quad (12)$$

где $f(x, y)$ – непрерывная вместе со своими частными производными $p(x, y) = f'_x(x, y)$ и $q(x, y) = f'_y(x, y)$. Отметим, что у такой поверхности все точки обыкновенные. В самом деле, запишем уравнение (12) в виде: $f(x, y) - z = 0$. Это есть уравнение вида (5), где $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Поэтому $F'_x(x, y, z) = f'_x(x, y)$, $F'_y(x, y, z) = f'_y(x, y)$, $F'_z = -1$ ($\neq 0$). Уравнение касательной плоскости в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12), будет таким:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (13)$$

Уравнение нормали в точке $N(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной уравнением (12):

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (14)$$

Если α , β , γ – углы, которые нормаль к поверхности (s) образует с осями координат, то

$$\cos \alpha = \frac{f'_x}{\pm \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{f'_y}{\pm \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}. \quad (15)$$

Выбор знака перед радикалом означает выбор определенного направления на нормали. Если нам нужно, например, то направление, которое составляет с осью Oz острый угол, то должно быть $\cos \gamma > 0$ и, следовательно, в формулах (15) перед радикалом нужно взять знак минус.

Замечание. Пусть кривая (l) задана пересечением двух поверхностей, т. е. системой $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$ Касательную прямую к этой кривой в точке

$N(x_0, y_0, z_0)$ можно получить как пересечение касательных плоскостей, проведенных к данным поверхностям в точке N . Следовательно, уравнение этой касательной прямой будет таким:

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \\ \Phi'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \Phi'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \Phi'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

§2. Существование площади кривой поверхности и ее вычисление

1°. Рассмотрим поверхность (s), заданную явным уравнением

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

где $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в области $(\bar{D})$, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной простым контуром.

Разобьем $(\bar{D})$ произвольной сетью простых кривых на части $(\bar{D}_1)$, $(\bar{D}_2)$, ..., $(\bar{D}_n)$ с площадями $F_1, F_2, \dots, F_n$. Рассмотрим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси Oz , а направляющими служат простые кривые, разбивающие на части $(\bar{D})$. Эти цилиндрические поверхности переносят дробящую сеть с $(\bar{D})$ на (s) . Поэтому по-

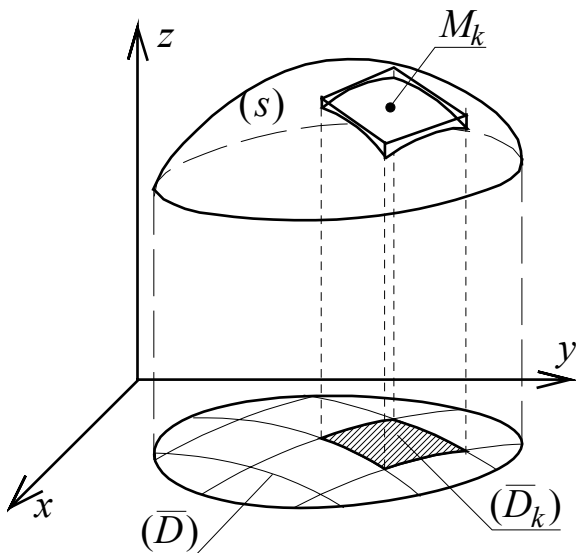


Рис. 4.4. К вычислению площади кривой поверхности

верхность (s) разобьется на части (s_1) , (s_2) , ..., (s_n) . На каждой части (s_k)

берем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и проводим в этих точках плоскости, касательные к поверхности (s) . Продолжим упомянутые выше цилиндрические поверхности до пересечения с построенными касательными плоскостями. Тогда на этих плоскостях вырежутся плоские области $(\tilde{s}_1), (\tilde{s}_2), \dots, (\tilde{s}_n)$. Пусть площади их будут: $T_1, T_2, \dots, T_n$ соответственно. Обозначим через λ ранг дробления области $(\bar{D})$. Покажем, что существует конечный предел

$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n T_k$, не зависящий ни от выбора дробящей сети, ни от выбора точек

M_k на (s_k) . Этот предел и принимается за площадь s поверхности (s) .

► Заметим, что области $(\bar{D}_k)$ являются проекциями $(\tilde{s}_k)$ на плоскость Oxy . Значит, площади их связаны так: $F_k = T_k \cdot \cos \psi_k$, где ψ_k – угол между плоскостью Oxy и плоскостью, касательной к поверхности (s) в точке M_k . Но угол между плоскостями равен углу между нормалью к этим плоскостям. Поэтому $\psi_k = \gamma_k$, где γ_k – угол между осью Oz и нормалью к поверхности (s) в точке M_k . А тогда

$$\cos \psi_k = \cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2}}$$

(заметим, что нам нужен положительный косинус). И, следовательно,

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{F_k}{\cos \psi_k} = \sqrt{1 + (f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2} \cdot F_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'_x(x_k, y_k))^2 + (f'_y(x_k, y_k))^2} \cdot F_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Видим, что сумма (2) есть интегральная сумма Римана для двойного интеграла по области $(\bar{D})$ от непрерывной в $(\bar{D})$ функции $\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$.

Значит, у суммы (2) существует при $\lambda \rightarrow 0$ конечный предел, не зависящий ни от выбора дробящей сети области $(\bar{D})$, ни от выбора точек M_k на (s_k) , а это и требовалось доказать. Попутно установлено, что

$$s = \iint_{(\bar{D})} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (3)$$

Замечание. Формулу (3) для площади s кривой поверхности можно записать в виде:

$$s = \iint_{(\bar{D})} \frac{dx dy}{\cos \gamma}, \quad (4)$$

где γ – острый угол между нормалью к поверхности (s) и осью Oz . Если на нормали к (s) направление не выбрано нужным образом, то вместо (4) следует писать

$$s = \iint_{(\bar{D})} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}. \quad (5)$$

2°. Случай, когда поверхность задана параметрическими уравнениями.

Рассмотрим теперь поверхность (s) , заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (6)$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ есть функции, заданные в области $(\bar{\Delta})$ плоскости Ouv , непрерывные там и имеющие непрерывные частные производные x'_u , x'_v , y'_u , y'_v , z'_u , z'_v . Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

и рассмотрим следующие определители, составленные из элементов этой матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Предположим, что один из этих трех определителей, например, C , всюду в $(\bar{\Delta})$ отличен от нуля. ($C \neq 0$ всюду в $(\bar{\Delta})$).

Возьмем первые два уравнения из системы (6). При условии, что $C \neq 0$ в $(\bar{\Delta})$, система $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$ однозначно разрешима относительно u и v , т. е.

$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$ причем функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ будут определены, непрерывны

и иметь непрерывные частные производные $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$, $v'_x(x, y)$, $v'_y(x, y)$ в некоторой области $(\bar{D})$ плоскости Oxu (см. теорию функций, заданных неявно). Подставив выражения для u и v через x и y в соотношение $z = z(u, v)$ из (6), получим

$$z = z(u(x, y), v(x, y)), \text{ т. е. } z = f(x, y).$$

Отметим, что функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в области $(\bar{D})$. Видим, таким образом, что поверхность (s) , заданная параметрическими уравнениями (6), пред-

ставляет собой поверхность как раз такого типа, который был рассмотрен выше в 1°.

Было показано, что у такой поверхности есть площадь s , причем $s = \iint_{(\bar{D})} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}$ (см. (5)). В двойном интеграле, выражающем площадь поверхности (s) , сделаем замену переменных, взяв в качестве новых переменных пара-

метры u и v , т. е. положив $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} (u, v) \in (\bar{\Delta})$. Получим

$s = \iint_{(\bar{\Delta})} \frac{|J(u, v)|}{|\cos \gamma|} du dv$. У нас $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = C$. Поэтому

$$s = \iint_{(\bar{\Delta})} \frac{|C|}{|\cos \gamma|} du dv. \quad (7)$$

В двойном интеграле (7) следует выразить $|\cos \gamma|$ через переменные u и v . Для этого на поверхности (s) выберем и закрепим произвольную точку $N(x_0, y_0, z_0)$, соответствующую точке $(u_0, v_0) \in (\bar{\Delta})$. Проведем в этой точке нормаль $\vec{n}$ к поверхности (s) . Пусть α, β, γ – углы, которые нормаль $\vec{n}$ образует с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Проведем на поверхности (s) через точку N кривую (l_1) :

$$(l_1) = \begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0) \end{cases}$$

(это – линия, ибо параметр один). Вектор $\vec{\tau}_1(x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0))$ направлен по касательной к (l_1) в точке N . Так как линия (l_1) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N , то $\vec{\tau}_1 \perp \vec{n}$. Поэтому

$$\begin{aligned} x'_u(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_u(u_0, v_0) \cos \beta + z'_u(u_0, v_0) \cos \gamma &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x'_u(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_u(u_0, v_0) \cos \beta &= -z'_u(u_0, v_0) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Затем на поверхности (s) через точку $N(x_0, y_0, z_0)$ проводим кривую

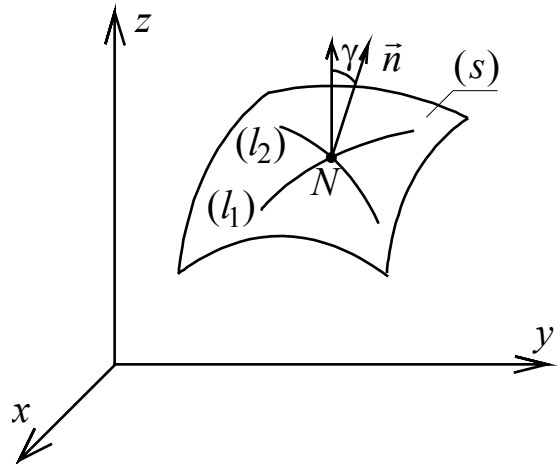


Рис. 4.5. К вычислению площади кривой поверхности, заданной параметрическими уравнениями

$$(l_2) = \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v). \end{cases}$$

Вектор $\vec{\tau}_2(x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0))$ направлен по касательной к (l_2) в точке N . Так как (l_2) лежит на поверхности (s) и проходит через точку N , то $\vec{\tau}_2 \perp \vec{n}$. Поэтому

$$\begin{aligned} x'_v(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_v(u_0, v_0) \cos \beta + z'_v(u_0, v_0) \cos \gamma &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x'_v(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_v(u_0, v_0) \cos \beta &= -z'_v(u_0, v_0) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Из системы

$$\begin{cases} x'_u(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_u(u_0, v_0) \cos \beta = -z'_u(u_0, v_0) \cos \gamma, \\ x'_v(u_0, v_0) \cos \alpha + y'_v(u_0, v_0) \cos \beta = -z'_v(u_0, v_0) \cos \gamma \end{cases}$$

найдем $\cos \alpha$ и $\cos \beta$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} -z'_u(u_0, v_0) \cos \gamma & y'_u(u_0, v_0) \\ -z'_v(u_0, v_0) \cos \gamma & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos \gamma \cdot \begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{A}{C} \cos \gamma; \\ \cos \beta &= \frac{\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & -z'_u(u_0, v_0) \cos \gamma \\ x'_v(u_0, v_0) & -z'_v(u_0, v_0) \cos \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\cos \gamma \cdot \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{C} = \frac{B}{C} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Можем написать также, что $\cos \gamma = \frac{C}{C} \cos \gamma$. Известно, что

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. А тогда

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2} \cdot \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow |\cos \gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Подставляя это выражение для $|\cos \gamma|$ в (7), находим:

$$s = \iint_{(\bar{\Delta})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, dudv. \quad (10)$$

Замечание 1. Из формулы (10) для площади s поверхности видим, что на окончательном результате не отразилось, что отличен от нуля именно определитель C , а не A или B . Точно такое же выражение для s мы получили бы, предполагая, что в $(\bar{\Delta})$ отличен от нуля либо определитель A , либо определитель B . Поэтому формула (10) верна и тогда, когда область $(\bar{\Delta})$ разлагается на конечное число частей, в каждой из которых отличен от нуля хотя бы один из трех определителей: A , B , C .

Замечание 2. Положим

$$(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = E,$$

$$(x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = G,$$

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F$$

(E, G, F – это так называемые *коэффициенты Гаусса*). Легко проверить, что $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$. Поэтому

$$s = \iint_{(\bar{\Delta})} \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (11)$$

§3. Примеры к главе 4

Пример 1. Найти площадь s поверхности тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

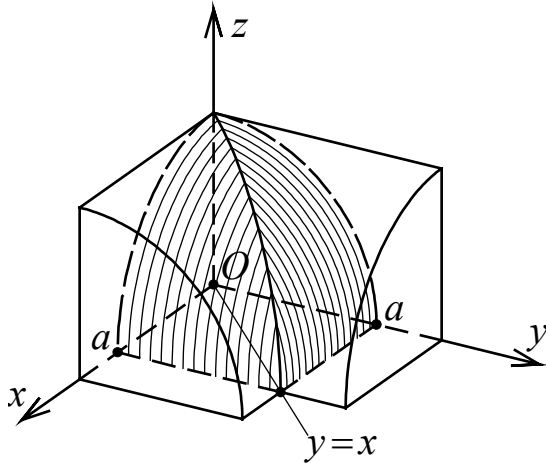


Рис. 4.6. К примеру 1

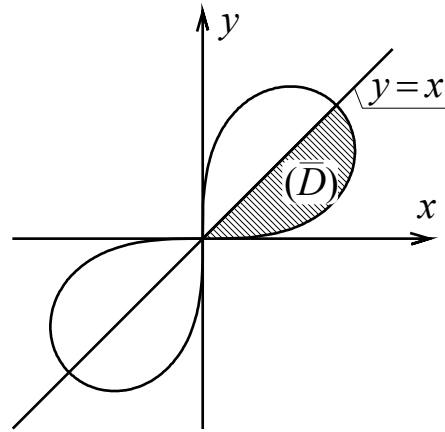


Рис. 4.7. К примеру 2

► На рис. 4.6 изображена часть интересующей нас поверхности, расположенная в первом октанте. Эта часть поверхности состоит из двух одинаковых по площади кусков. Один из этих кусков определяется уравнением $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ и проектируется на плоскость Oxy в треугольник

$(\bar{D}) = \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$ Площадь $\tilde{s}$ этого куска поверхности можно определить по

формуле: $\tilde{s} = \iint_{(\bar{D})} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx dy$. Имеем: $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$. Следовательно,

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}.$$

А тогда

$$\tilde{s} = a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{y=0}^{y=x} dy = a \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{x=0}^{x=a} = a^2.$$

Так как $\tilde{s}$ составляет лишь $\frac{1}{16}$ часть площади s , то находим

$$s = 16a^2 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти площадь s части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (рис. 4.7).

► Поверхность $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ – параболоид вращения. Ось Oz является осью симметрии этого параболоида вращения. Цилиндрическая поверхность $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ – симметрична относительно плоскости $y = x$. Она пересекается с плоскостью Oxy по кривой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Одна четвертая часть куска поверхности, вырезаемая цилиндром из параболоида вращения, проектируется на плоскость Oxy в область $(\bar{D})$, ограниченную линиями: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Имеем

$$z'_x = \frac{x}{a}; \quad z'_y = \frac{y}{a}; \quad \Rightarrow \quad 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{4}{a} \iint_{(\bar{D})} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \, dxdy.$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам. Будем иметь

$$S = \frac{4}{a} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{a^2 + r^2} \, r \, dr = \frac{4}{3a} \int_0^{\pi/4} (a^2 + r^2)^{3/2} \Big|_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/4} \left((1 + \sin 2\varphi)^{3/2} - 1 \right) d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \left(\int_0^{\pi/4} (\sin \varphi + \cos \varphi)^3 d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{4}{3} a^2 \left(2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \sin^3 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3}a^2 \left(2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) d \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{4}{3}a^2 \left(2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi). \text{ (кв. ед.). } \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти площадь s части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

► Пусть ρ, φ, θ – сферические координаты точек пространства. Декартовы и сферические координаты точки пространства связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Координаты любой точки сферы радиуса R будут такими:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \cos \theta, \\ z = R \sin \theta. \end{cases}$$

Последние уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения интересующего нас куска сферы, если $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$; $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = R^2 \cos^2 \theta, \quad G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = R^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \theta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
s &= \iint_{\substack{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2}} R^2 \cos \theta d\varphi d\theta = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \\
&= R^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \text{ (кв. ед.). } \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

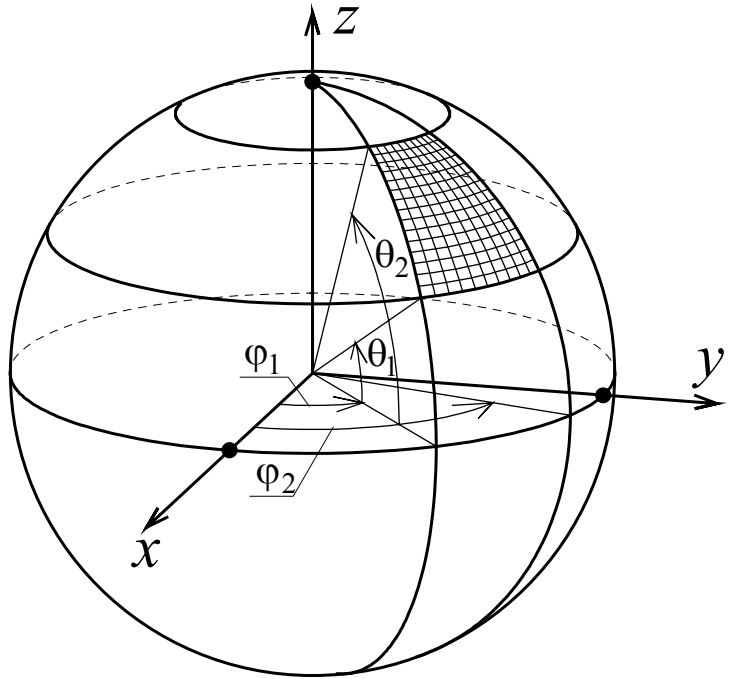


Рис. 4.8. К примеру 3

Пример 4. Найти площадь части поверхности тора

$$\begin{cases} x = (b + a \cos \theta) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \theta) \sin \varphi, \quad (0 < a \leq b), \\ z = a \sin \theta \end{cases}$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ ($\varphi_1 < \varphi_2$) и двумя параллелями $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2$). Чему равна поверхность всего тора?

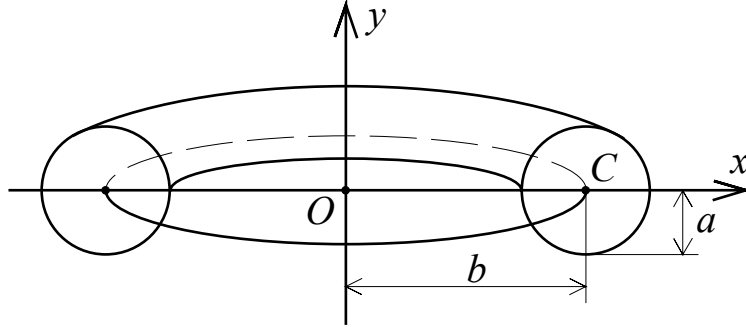


Рис. 4.9. К примеру 4

► Найдем коэффициенты Гаусса данной поверхности. Имеем:

$$\begin{pmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b + a \cos \theta) \sin \varphi & (b + a \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ -a \sin \theta \cos \varphi & -a \sin \theta \sin \varphi & a \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = (b + a \cos \theta)^2, \quad G = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\theta + y'_\varphi y'_\theta + z'_\varphi z'_\theta = 0 \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = a(b + a \cos \theta).$$

$$s = \iint_{\substack{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2}} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (b + a \cos \theta) d\theta =$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot (b\theta + a \sin \theta) \Big|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} =$$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot [b(\theta_2 - \theta_1) + a(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)] \text{ (кв. ед.).}$$

Чтобы найти площадь поверхности всего тора, нужно в полученное выражение для s подставить значения: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi$. Получим

$$s_{\text{полн.}} = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab \text{ (кв. ед.)} \blacktriangleleft$$

Глава 5. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

§1. Определение равномерной сходимости несобственных интегралов

Пусть функция $f(x, y)$ задана в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ Пусть при каждом

закрепленном y из $[c, d]$ несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится. То-

гда $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ будет представлять собою функцию переменной (параметра) y , определенную в промежутке $[c, d]$ (в дальнейшем будем обозначать эту функцию через $I(y)$, $y \in [c, d]$).

Утверждение, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится при каждом y из $[c, d]$, означает следующее: при каждом закрепленном y из $[c, d]$

$$\int_a^A f(x, y) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0, \text{ или } \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0.$$

А это означает, что для каждого y из $[c, d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать

число $M > 0$ такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$.

Важно заметить, что число $M > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$, и для каждого y из $[c, d]$ оно будет, вообще говоря, своим, то есть M зависит и от ε , и от y : $M = M(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $M > 0$, зависящее только от ε (то есть одно и то же для всех y из $[c, d]$), такое, что как только

$A > M$, так сейчас же $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$ сразу для всех y из $[c, d]$, то несобст-

венный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ называется *равномерно сходящимся относительно параметра y на $[c, d]$* .

Совершенно аналогично вводится понятие равномерной сходимости несобственных интегралов второго рода. Например, пусть функция $f(x, y)$ определена в области $\begin{cases} a \leq x < b, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ (a, b, c, d – конечные числа).

Пусть при каждом y из $[c, d]$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится. Ясно, что тогда $\int_a^b f(x, y) dx$ будет представлять собой функцию переменной (параметра) y , определенную в промежутке $[c, d]$.

Утверждение, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится при каждом y из $[c, d]$, означает следующее. При каждом закреплённом y из $[c, d]$

$$\begin{aligned} \int_a^{\beta} f(x, y) dx \xrightarrow{\beta \rightarrow b-0} \int_a^b f(x, y) dx &\Leftrightarrow \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{\beta} f(x, y) dx \xrightarrow{\beta \rightarrow b-0} 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\beta}^b f(x, y) dx \xrightarrow{\beta \rightarrow b-0} 0 \Leftrightarrow \int_{b-\gamma}^b f(x, y) dx \xrightarrow{\gamma \rightarrow +0} 0 \end{aligned}$$

(здесь положено $\beta = b - \gamma \Rightarrow \gamma = b - \beta$). А это означает, что для каждого y из $[c, d]$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что как только

$$0 < \gamma < \delta, \text{ так сейчас же } \left| \int_{b-\gamma}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

И здесь важно отметить, что число $\delta > 0$ выбирается по $\varepsilon > 0$, и для каждого y из $[c, d]$ оно будет, вообще говоря, своим, то есть δ зависит и от ε , и от y : $\delta = \delta(\varepsilon, y)$.

Если же для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$, зависящее только от ε (то есть одно и то же для всех y из $[c, d]$), такое, что как только $0 < \gamma < \delta$,

$$\text{так сейчас же } \left| \int_{b-\gamma}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ сразу для всех } y \text{ из } [c, d], \text{ то несобственный}$$

интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ называется равномерно сходящимся относительно параметра y на $[c, d]$.

§2. О непрерывности интеграла как функции параметра

Теорема. Пусть

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d; \end{cases}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = I(y)$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

Тогда функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$.

► Возьмем любое y_0 из $[c, d]$ и закрепим его. Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

По условию $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$,

поэтому взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, зависящее только от ε , такое, что при всяком A , удовлетворяющем условию $A > M$, сразу для всех $y \in [c, d]$ будет

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Выберем и закрепим какое-нибудь A , удовлетворяющее условию $A > M$.

Положив $\Psi_A(y) = \int_a^A f(x, y) dx$, неравенство (1) сразу для всех $y \in [c, d]$ можно записать в виде:

$$|I(y) - \Psi_A(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

$$[I(y) - \Psi_A(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx = \int_A^{+\infty} f(x, y) dx].$$

Но $\Psi_A(y)$ – собственный интеграл, зависящий от параметра y . По теореме о непрерывности собственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\Psi_A(y) \in C([c, d])$, а значит, по теореме Кантора, $\Psi_A(y)$ будет равномерно непрерывной на $[c, d]$.

Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое,

что для любых двух точек y' и y'' из $[c, d]$, для которых $|y'' - y'| < \delta$, будет $|\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Для разности значений функции $I(y)$ в точках y' и y'' имеем:

$$\begin{aligned} I(y'') - I(y') &= [I(y'') - \Psi_A(y'')] + [\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')] + [\Psi_A(y') - I(y')] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |I(y'') - I(y')| \leq |I(y'') - \Psi_A(y'')| + |\Psi_A(y'') - \Psi_A(y')| + \\ &\quad + |\Psi_A(y') - I(y')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

В частности, полагая $y' = y_0$, $y'' = y$, где $y \in [c, d]$ – любое, но такое, что $|y - y_0| < \delta$, будем иметь $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$. Последнее означает, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0 . Так как у нас точка y_0 – любая из $[c, d]$, то заключаем, что $I(y) \in C([c, d])$.

§3. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d; \end{cases}$

2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad (1)$$

причем несобственный интеграл, стоящий в правой части (1), сходится.

► Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$, поэтому взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$, зависящее только от ε , такое, что при всяком A , удовлетворяющем условию $A > M$, сразу для всех $y \in [c, d]$ будет справедливо неравенство:

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Выберем и закрепим какое-нибудь A , удовлетворяющее условию $A > M$.

Полагая, как и раньше, $\Psi_A(y) = \int_a^A f(x, y) dx$, предыдущее неравенство сразу для всех $y \in [c, d]$ можно записать в виде

$$|I(y) - \Psi_A(y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Так как $I(y) \in C([c, d])$ и $\Psi_A(y) \in C([c, d])$, то $I(y) \in R([c, d])$, $\Psi_A(y) \in R([c, d])$. Поскольку имеет место равенство

$$\int_c^d I(y) dy - \int_c^d \Psi_A(y) dy = \int_c^d [I(y) - \Psi_A(y)] dy,$$

то

$$\left| \int_c^d I(y) dy - \int_c^d \Psi_A(y) dy \right| \leq \int_c^d |I(y) - \Psi_A(y)| dy < \frac{\varepsilon}{d - c} \cdot (d - c) = \varepsilon.$$

Таким образом, получили: при любом A , удовлетворяющем условию $A > M$, оказывается $\left| \int_c^d I(y) dy - \int_c^d \Psi_A(y) dy \right| < \varepsilon$. Последнее означает, что

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^d \Psi_A(y) dy \quad (2)$$

(именно так, ибо первый интеграл от A не зависит). Но $\Psi_A(y) = \int_a^A f(x, y) dx$ – собственный интеграл, зависящий от параметра y . По теореме об интегрировании по параметру под знаком собственного интеграла можем написать

$$\int_c^d \Psi_A(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^A f(x, y) dx \right) dy = \int_a^A \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Теперь соотношение (2) может быть записано в виде

$$\int_c^d I(y) dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Нами установлено существование написанного здесь предела. Но тогда мы должны обозначать этот предел так:

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Таким образом, мы доказали сходимость несобственного интеграла, стояще-

го в правой части (1), и справедливость равенства (1).

§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла

Теорема. Пусть

1) функция $f(x, y)$ определена в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d, \end{cases}$ непрерывна там и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$;

2) $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится при каждом y из $[c, d]$;

3) $\Psi(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

Тогда:

1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c, d]$;

2) $I'(y) = \Psi(y)$, то есть $\left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$;

3) $I'(y) \in C([c, d])$.

► Так как $f'_y(x, y)$ непрерывна в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ и $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$, то $\Psi(y) \in C([c, d])$ (см. теорему §2) и $\int_c^d \Psi(y) dy$ существует. В частности, существует $\int_c^z \Psi(y) dy$ для любого z , удовлетворяющего условию $c \leq z \leq d$. По теореме §3 имеем

$$\int_c^z \Psi(y) dy = \int_c^z \left(\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^z f'_y(x, y) dy \right) dx.$$

Но $\int_c^z f'_y(x, y) dy = f(x, y) \Big|_{y=c}^{y=z} = f(x, z) - f(x, c)$. Поэтому

$$\int_c^z \Psi(y) dy = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x, z) dx}_{=I(z)} - \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x, c) dx}_{=I(c)} = I(z) - I(c),$$

откуда
120

$$I(z) = \int_c^z \Psi(y) dy + I(c). \quad (1)$$

В правой части последнего равенства мы имеем интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Следовательно, у правой части равенства (1) производная по z существует и равна $\Psi(z)$ (см. теорему Барроу). Но тогда существует производная по z и у левой части равенства (1), причем

$$I'(z) = \Psi(z). \quad (2)$$

Равенство (2) установлено для любого $z \in [c, d]$. Оно может быть записано и так: $I'(y) = \Psi(y)$, $y \in [c, d]$.

Таким образом, доказано, что

- 1) $I'(y)$ существует при каждом y из $[c, d]$;
- 2) $I'(y) = \Psi(y)$, $y \in [c, d]$;
- 3) $I'(y) \in C([c, d])$, ибо $\Psi(y) \in C([c, d])$.

§5. Признак равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема. Пусть

- 1) функция $f(x, y)$ определена в области $\begin{cases} a \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ и непрерывна там;
- 2) функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна в $[a, +\infty)$;
- 3) $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ при всех значениях y из $[c, d]$ и $x \in [a, +\infty)$.

Тогда, если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, то несобственный

интеграл $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

► Сходимость (и притом абсолютная) несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ при каждом y из $[c, d]$ следует из признака сравнения.

Возьмем любое A , удовлетворяющее условию $A > a$, и закрепим его. Затем возьмем любое B , удовлетворяющее условию $B > A$. Имеем при всех значениях y из $[c, d]$:

$$\left| \int_A^B f(x, y) dx \right| \leq \int_A^B |f(x, y)| dx \leq \int_A^B \varphi(x) dx.$$

Отсюда в пределе при $B \rightarrow +\infty$ при всех значениях y из $[c, d]$ получаем

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \int_A^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (1)$$

По условию, $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, поэтому

$$\int_a^A \varphi(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \Leftrightarrow \left[\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_a^A \varphi(x) dx \right] \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \int_A^{+\infty} \varphi(x) dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0.$$

Последнее означает, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает число $M > 0$ такое, что как только $A > M$, так сейчас же $\int_A^{+\infty} \varphi(x) dx < \varepsilon$. Отметим, что здесь M зависит

только от ε . В силу (1), при $A > M$ и подавно будет $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$ сразу для

всех y из $[c, d]$. А это означает, что $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

Замечание. Для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, имеют место теоремы, совершенно аналогичные теоремам §2–§5.

§6. Примеры к главе 5

Рассмотрим несколько примеров применения доказанных теорем к вычислению интегралов.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin xy \, dx. \quad (1)$$

Имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \sin xy \, dx = -\frac{e^{-x}}{1+y^2} \cdot (\sin xy + y \cos xy) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{y}{1+y^2}. \quad (2)$$

Используя равенство (2), найдем величины некоторых других интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на

любом промежутке $[c, d]$. В самом деле, имеем: $|e^{-x} \cdot \sin xy| \leq e^{-x}$ для любого

$y \in [c, d]$ и для всех $x \in [0, +\infty)$; интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$, т.е. сходится, тогда по теореме §5 $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c, d]$.

Отметим еще, что функция $f(x, y) = e^{-x} \sin xy$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ Тогда по теореме §2 имеем:

$$I(y) \in C([c, d]) \Rightarrow I(y) \in R([c, d]) \Rightarrow I(y) \in R([0, z]).$$

(здесь положено $c = 0$, $d = z$, где z – любое конечное). По теореме §3

$$\int_0^z \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin xy dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^z e^{-x} \sin xy dy \right) dx.$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (2) по y от 0 до z , будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^z e^{-x} \sin xy dy \right) dx = \int_0^z \frac{y dy}{1 + y^2}. \quad (3)$$

Но $\int_0^z e^{-x} \sin xy dy = -e^{-x} \frac{\cos xy}{x} \Big|_{y=0}^{y=z} = e^{-x} \frac{1 - \cos xz}{x}$ (это равенство установлено

для $x \neq 0$; оно верно и при $x = 0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^z e^{-x} \sin xy dy = \int_0^z \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} \sin xy) dy = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \frac{1 - \cos xz}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \frac{2}{x} \sin^2 \frac{xz}{2} = 0).$$

Тогда (3) для любого конечного z примет вид:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos xz}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + z^2),.$$

2. Имеем: $f'_y(x, y) = (e^{-x} \sin xy)'_y = xe^{-x} \cos xy$ непрерывна в области

$\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d. \end{cases}$ $\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos xy dx$ сходится равномерно относи-

тельно y на $[c, d]$. В самом деле, $|xe^{-x} \cos xy| \leq xe^{-x}$ для любого $y \in [c, d]$ и $x \in [0, +\infty)$; $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$, т.е. сходится. Поэтому

$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos xy dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c, d]$.

Тогда по теореме §4

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin xy dx \right)'_y = \int_0^{+\infty} (e^{-x} \sin xy)'_y dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos xy dx.$$

Дифференцируя по y обе части равенства (2), получим для любого конечного y

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos xy dx = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}, \quad y \in [c, d], \quad (4)$$

где $[c, d]$ — любой, но такой, что $1 \leq c < d$.

Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2y}, \quad y \in [c, d]. \quad (5)$$

И здесь, используя равенство (5), найдем величины еще некоторых интегралов.

1. Отметим, что интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c, d]$. Действительно, имеем: $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$, $y \in [c, d]$ и

$x \in [0, +\infty)$; $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, т.е. сходится. Следовательно, $I(y)$

сходится равномерно относительно y на $[c, d]$.

Отметим еще, что функция $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ непрерывна в области

$$\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$I(y) \in C([c, d]) \Rightarrow I(y) \in R([c, d]) \Rightarrow I(y) \in R([1, z])$$

(здесь положено $c = 1$, $d = z$, где z – любое конечное, $z > 1$).

По теореме об интегрировании по параметру под знаком интеграла (см. §3)

$$\int_1^z \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx.$$

Следовательно, интегрируя обе части равенства (5) по y от 1 до z , будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx = \int_1^z \frac{\pi}{2y} dy. \quad (6)$$

Но $\int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y=1}^{y=z} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x}$ (это равенство установлено для $x \neq 0$; оно верно и при $x = 0$, если в этой точке понимать его в предельном смысле:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_1^z \frac{dy}{x^2 + y^2} &= \int_1^z \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy = \int_1^z \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \Big|_1^z = 1 - \frac{1}{z}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{(z-1)x}{x^2 + z}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(z-1)x}{x^2 + z}}{x} = 1 - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Тогда (6) для любого конечного $z \geq 1$ примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln z.$$

2. Имеем: $f'_y(x, y) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$ непрерывна в области

$\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad (1 \leq c < d).$ $\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx$ сходится равномерно

относительно y на $[c, d]$. В самом деле, для $y \in [c, d]$ и $x \in [0, +\infty)$

$\left| \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{2d}{(x^2 + 1)^2}$, а $\int_0^{+\infty} \frac{2d}{(x^2 + 1)^2} dx$ сходится. Тогда по теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (см. §4)

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \right)'_y = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)'_y dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

Дифференцируя по y обе части равенства (5), получим

$$-2 \int_0^{+\infty} \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\pi}{2y^2},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{4y^3}, \quad y \in [c, d]. \quad (7)$$

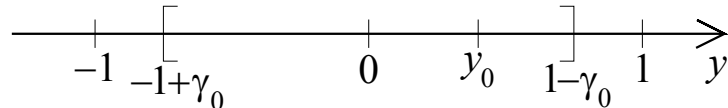
Аналогично обосновывается возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла левой части (7). Тогда, дифференцируя по y обе части равенства (7), находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{-4y}{(x^2 + y^2)^3} dx = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{y^4}, \quad y \in [c, d] \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{1}{y^5}, \quad y \in [c, d].$$

Пример 3. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + y \cos x}{1 - y \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}, \quad |y| < 1. \quad (8)$$

► Возьмем любую точку $y_0 \in (-1, 1)$. Всегда можно указать число $\gamma_0 > 0$ такое, что будет $[-1 + \gamma_0, 1 - \gamma_0] \subset (-1, 1)$ и точка $y_0 \in (-1 + \gamma_0, 1 - \gamma_0)$.



Так как $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln \left(\frac{1 + y \cos x}{1 - y \cos x} \right) \cdot \frac{1}{\cos x} = 2y$ конечен, то функция

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in [0, \pi/2), \quad y \in [-1 + \gamma_0, 1 - \gamma_0], \\ 2y, & x = \pi/2, \quad y \in [-1 + \gamma_0, 1 - \gamma_0] \end{cases}$$

где $f(x, y) = \ln \left(\frac{1 + y \cos x}{1 - y \cos x} \right) \cdot \frac{1}{\cos x}$, непрерывна в области $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2, \\ -1 + \gamma_0 \leq y \leq 1 - \gamma_0, \end{cases}$

причем

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \tilde{f}(x, y) dx.$$

Последнее выражение для $I(y)$ – собственный интеграл, зависящий от пара-

метра y .

Имеем: $\tilde{f}'_y(x, y) = \frac{2}{1 - y^2 \cos^2 x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi/2, \\ -1 + \gamma_0 \leq y \leq 1 - \gamma_0. \end{cases}$

По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла, находим

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dx}{1 - y^2 \cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1 - y^2) + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1 - y^2}} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - y^2}}, \\ &\quad y \in [-1 + \gamma_0, 1 - \gamma_0]. \end{aligned}$$

В частности, существует $I'(y_0)$, причем $I'(y_0) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - y_0^2}}$. У нас точка y_0 –

любая из $(-1, 1)$. Следовательно, $I'(y) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - y^2}}$, $y \in (-1, 1)$. Тогда

$$I(y) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \pi \cdot \arcsin y + C, \quad y \in (-1, 1). \quad (9)$$

Здесь C – постоянная интегрирования. Из (8) видим, что $I(0) = 0$. Положив теперь в обеих частях равенства (9) $y = 0$, получим $0 = 0 + C$, откуда $C = 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$I(y) = \pi \cdot \arcsin y, \quad y \in (-1, 1). \quad \blacktriangleleft \quad (10)$$

Пример 4. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy \, dx, \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

► Имеем:

1) $f(x, y) = e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ c \leq y \leq d, \end{cases}$ где $[c, d]$ –

любой промежуток, и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x, y) = -xe^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy$.

2) Интеграл $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy \, dx$ ($\alpha > 0$) сходится (и даже равномерно

относительно y на промежутке $[c, d]$).

3) Интеграл $\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy dx$ сходится равномерно относительно y на промежутке $[c, d]$.

В самом деле, $|f'_y(x, y)| = |-x e^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy| \leq x e^{-\alpha x^2}$ для любого $y \in [c, d]$ и для всех $x \in [0, +\infty)$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} d(-\alpha x^2) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2\alpha},$$

т.е. сходится.

По теореме о дифференцировании по параметру под знаком интеграла

$$\begin{aligned} I'(y) &= - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin xy & \Rightarrow du = y \cos xy dx, \\ dv = -x e^{-\alpha x^2} dx & \Rightarrow v = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \end{array} \right] = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \cdot \sin xy \Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0} - \underbrace{\frac{y}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot \cos xy dx}_{=I(y)} = -\frac{y}{2\alpha} I(y). \end{aligned}$$

Итак, получили уравнение

$$I'(y) = -\frac{y}{2\alpha} \cdot I(y), \quad (12)$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим

$$I(y) = C \cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}, \quad (13)$$

где C – постоянная интегрирования.

Из (11) видим, что

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx. \quad (14)$$

Если в (14) сделать замену $t = \sqrt{\alpha} \cdot x$, то получим

$$I(0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

В главе 3 (см. §7) было получено $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Следовательно,

$I(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Положив теперь в обеих частях равенства (13) $y = 0$, получим

$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Таким образом, окончательно будем иметь

$$I(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}. \quad (15)$$

Глава 6. Эйлеровы интегралы

§1. Интеграл Эйлера первого рода (Бета-функция)

Так называется интеграл вида

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx. \quad (1)$$

Этот интеграл собственный, если одновременно $a \geq 1$, $b \geq 1$. Если же хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то интеграл (1) – несобственный.

Покажем, что интеграл (1) сходится, если одновременно $a > 0$ и $b > 0$.

Видим, что подынтегральная функция в (1) имеет, вообще говоря, две особые точки: $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому представляем (1) в виде:

$$B(a, b) = \underbrace{\int_0^{1/2} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx}_{=I_2} = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл $I_1 = \int_0^{1/2} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx$. Он – несобственный при $a < 1$. Особая точка $x = 0$. Запишем подынтегральную функцию в виде $f(x) = x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}$ и введем функцию $g(x) = \frac{1}{x^{1-a}}$. Так как

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{b-1} = 1$ при любом b (конечный, $\neq 0$), то интегралы

$\int_0^{1/2} f(x) dx$ и $\int_0^{1/2} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но

$\int_0^{1/2} g(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-a}}$ сходится лишь тогда, когда $1-a < 1$, то есть когда $a > 0$.

Следовательно, I_1 сходится при любом b и лишь при $a > 0$.

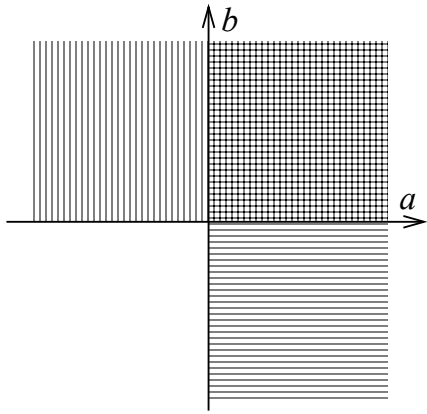


Рис. 6.1. К определению Бета-функции

Рассмотрим $I_2 = \int_{1/2}^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx$. Он – не-
собственный при $b < 1$. Особая точка $x = 1$. По-
дынтегральная функция

$$f(x) = x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} = \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}.$$

Положим $\tilde{g}(x) = \frac{1}{(1-x)^{1-b}}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} x^{a-1} = 1 \text{ при любом } a \text{ (конечный,}$$

$\neq 0$). Значит, $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ и $\int_{1/2}^1 \tilde{g}(x) dx$ сходятся или

расходятся одновременно. Но $\int_{1/2}^1 \tilde{g}(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-b}}$ сходится лишь тогда,

когда $1-b < 1$, то есть когда $b > 0$. Следовательно, I_2 сходится при любом a и
лишь при $b > 0$.

Вывод: $B(a, b)$ сходится, если одновременно $a > 0$ и $b > 0$. Значит,
 $\begin{cases} 0 < a < +\infty, \\ 0 < b < +\infty \end{cases}$ – область определения функции $B(a, b)$ (рис. 6.1).

Установим некоторые *свойства* Бета-функции $B(a, b)$.

1. Положим в (1) $x = 1 - t$. Тогда

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a). \quad (2)$$

Видим, что Бета-функция – симметричная функция.

2. Пусть $b > 1$. Применяя формулу интегрирования по частям, находим

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \\ &= \underbrace{\frac{x^a}{a} (1-x)^{b-1}}_{=0} \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx. \end{aligned}$$

Так как $x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$, то будем иметь

$$\begin{aligned}
B(a, b) &= \frac{b-1}{a} \underbrace{\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2} dx}_{=B(a, b-1)} - \frac{b-1}{a} \underbrace{\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx}_{=B(a, b)} = \\
&= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b),
\end{aligned}$$

откуда

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \quad (3)$$

Так как функция $B(a, b)$ – симметричная, то при $a > 1$ будет справедлива формула

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) можно применять для «уменьшения» аргументов, чтобы сделать их, например, меньше единицы. Если $b = n$, где n – натуральное, > 1 , то, применяя формулу (3) повторно, получим:

$$\begin{aligned}
B(a, n) &= \frac{n-1}{a+n-1} B(a, n-1) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} B(a, n-2) = \dots = \\
&= \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \frac{n-3}{a+n-3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} B(a, 1).
\end{aligned}$$

Но $B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{x^a}{a} \Big|_0^1 = \frac{1}{a}$. Поэтому

$$B(a, n) = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-2)(a+n-1)}.$$

Если еще и $a = m$, где m – натуральное, то будем иметь

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2) \dots (m+n-2)(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Получим для функции $B(a, b)$ другое аналитическое выражение. Для этого в (1) сделаем замену, положив $x = \frac{y}{1+y}$ ($\Rightarrow y = \frac{x}{1-x}$). Тогда $1-x = \frac{1}{1+y}$,

$dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$ и, следовательно,

$$B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a-1}} \cdot \frac{1}{(1+y)^{b-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy. \quad (5)$$

4. Отметим без доказательства, что если $b = 1-a$ и если еще $0 < a < 1$ (а значит, и $0 < b < 1$), то

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (6)$$

Соотношение (6) будет установлено позже (в теории функций комплексного переменного).

§2. Интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция)

Так называется интеграл вида

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx. \quad (1)$$

Покажем, что интеграл (1) сходится при $a > 0$. Для этого представим его в виде

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx}_{=I_2}.$$

Рассмотрим $I_1 = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$. Отметим, что I_1 – собственный интеграл, если $a \geq 1$, и несобственный, если $a < 1$ (особая точка $x = 0$). Подынтегральная функция $f(x) = x^{a-1} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}$. Положим $g(x) = \frac{1}{x^{1-a}}$. Имеем

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ (конечный, $\neq 0$). Значит, $\int_0^1 f(x) dx$ и $\int_0^1 g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. Но $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$ сходится лишь тогда, когда $1-a < 1$, то есть когда $a > 0$.

$$\text{Рассмотрим } I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Так как при любом a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$, то существует число $k > 1$ такое, что как только $x \geq k$, так сейчас же будет, например, $\frac{x^{a+1}}{e^x} < 1$. Но тогда при $x \geq k$ будет $\frac{x^{a-1}}{e^x} < \frac{1}{x^2}$ при любом a . Известно, что $\int_k^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Значит, и

$\int_k^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится при любом a . Следовательно, сходится при любом a и несобственный интеграл I_2 .

Общий вывод: интеграл (1) сходится, если $a > 0$, и расходится, если $a \leq 0$. Областью определения функции $\Gamma(a)$ является промежуток $(0, +\infty)$.

Установим некоторые свойства функции $\Gamma(a)$.

1. $\Gamma(a) > 0$, $a \in (0, +\infty)$.

Это следует из выражения (1) для $\Gamma(a)$.

2. Рассмотрим произведение $a\Gamma(a)$. Имеем:

$$a\Gamma(a) = a \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = a \int_0^{+\infty} e^{-x} d\left(\frac{x^a}{a}\right).$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$a\Gamma(a) = a \left[\underbrace{e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a}}_{=0} \Big|_0^{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx}_{=\Gamma(a+1)} \right],$$

откуда

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a). \quad (2)$$

Равенство (2) выражает так называемое *основное свойство Гамма-функции*. Пользуясь (2), получим при натуральном n и положительном a ($0 < a < 1$)

$$\begin{aligned} \Gamma(n+a) &= (n+a-1)\Gamma(n+a-1) = (n+a-1)(n+a-2)\Gamma(n+a-2) = \dots = \\ &= (n+a-1)(n+a-2)(n+a-3) \cdot \dots \cdot a\Gamma(a). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, значение Гамма-функции от аргумента $n+a$, большего единицы, можно выразить через значение Гамма-функции от аргумента a , меньшего единицы. Поэтому таблица значений Гамма-функции обычно дается лишь для значений аргумента между нулем и единицей.

В частности, если в формуле (3) взять $a=1$ и принять во внимание, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1, \text{ то получим}$$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!.$$

Таким образом, на Гамма-функцию можно смотреть как на обобщение понятия факториала натурального числа: *Гамма-функция является продолжением функции $a!$, определенной только для целых положительных $a=1, 2, 3, \dots$, на всю полуось $a > 0$ вещественных чисел.*

3. Покажем, что между Бета-функцией и Гамма-функцией существует следующая связь:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (4)$$

Для этого рассмотрим $\Gamma(a+b) = \int_0^{+\infty} x^{a+b-1} e^{-x} dx$. Сделаем в интеграле замену переменной, положив $x = (1+u)z$, где u – произвольное положительное число. Получим $\Gamma(a+b) = (1+u)^{a+b} \int_0^{+\infty} z^{a+b-1} e^{-(1+u)z} dz$, откуда

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+u)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} z^{a+b-1} e^{-(1+u)z} dz.$$

Умножим обе части последнего равенства на u^{a-1} и проинтегрируем по u от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} z^b (uz)^{a-1} e^{-z} e^{-uz} dz \right) du.$$

Но $\int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du = B(a, b)$ (см. §1, формула (5)). Следовательно, предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} z^b (uz)^{a-1} e^{-z} e^{-uz} dz \right) du.$$

В повторном интеграле, стоящем в правой части, переменим порядок интегрирования.

Здесь следует отметить, что мы (при определенных условиях) установили право переставлять два интеграла, из которых лишь один распространен на бесконечный промежуток. Оправдывать такую перестановку в случае, когда оба интеграла берутся по бесконечному промежутку, значительно сложнее. Обоснование возможности перемены порядка интегрирования в нашем повторном интеграле интересующийся может найти в книге Л.Д. Кудрявцева «Курс математического анализа», т. 2, 1981.

Поменяв порядок интегрирования, получаем

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a, b) = \int_0^{+\infty} z^{b-1} e^{-z} \left(\int_0^{+\infty} (uz)^{a-1} e^{-uz} z du \right) dz.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену $uz = v$:

$$\Gamma(a+b) \cdot B(a,b) = \int_0^{+\infty} z^{b-1} e^{-z} \left(\int_0^{+\infty} (v)^{a-1} e^{-v} dv \right) dz = \int_0^{+\infty} z^{b-1} e^{-z} \Gamma(a) dz = \Gamma(a) \cdot \Gamma(b),$$

откуда

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

В частности, $B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)$. Если $0 < a < 1$, то отсюда получаем:

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}. \quad (5)$$

Формула (5) носит название *формулы дополнения*.

Пусть $a = 1/2$. Из формулы (5) находим $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$ и, следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (6)$$

Пользуясь соотношениями (3) и (6), получаем для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 3 \cdot 1}{2^n} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

4. Функция $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

► Возьмем любую точку $a_0 > 0$. Всегда можно указать промежуток $[c, d]$ ($0 < c < d < +\infty$) такой, что будет: $c < a_0 < d$.

Представим $\Gamma(a)$ в виде:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx}_{=I_1(a)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx}_{=I_2(a)} = I_1(a) + I_2(a).$$

Рассмотрим $I_1(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$. Имеем:

1) $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ c \leq a \leq d; \end{cases}$

2) $\int_0^1 f(x, a) dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно относительно a на про-

межутке $[c, d]$.

В самом деле, для $0 < x \leq 1$: $x^a \leq x^c \Rightarrow$ умножив обе части этого неравенства на $\frac{e^{-x}}{x}$ (> 0), получим: $x^{a-1}e^{-x} \leq x^{c-1}e^{-x}$ (для $0 < x \leq 1$ и для $c \leq a \leq d$). Но

интеграл $\int_0^1 x^{c-1}e^{-x}dx$ сходится, если $c > 0$. А тогда по признаку равномерной

сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, интеграл

$I_1(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на $[c, d]$. Следова-

тельно, функция $I_1(a)$ непрерывна на $[c, d] \Rightarrow I_1(a)$ непрерывна в точке a_0 .

Рассмотрим $I_2(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Имеем:

1) $f(x, a) = x^{a-1}e^{-x}$ непрерывна в области $\begin{cases} 1 \leq x < +\infty, \\ c \leq a \leq d; \end{cases}$

2) $\int_1^{+\infty} f(x, a)dx = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$.

В самом деле, для $1 \leq x < +\infty$: $x^a \leq x^d \Rightarrow x^{a-1}e^{-x} \leq x^{d-1}e^{-x}$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}dx$ сходится для любого конечного d , то $I_2(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$

сходится равномерно относительно a на $[c, d]$. Следовательно, функция $I_2(a)$ непрерывна на $[c, d]$, в частности, $I_2(a)$ непрерывна в точке a_0 . Так как $I_1(a)$ и $I_2(a)$ непрерывны в точке a_0 , то $\Gamma(a) = I_1(a) + I_2(a)$ непрерывна в точке a_0 . У нас a_0 – любая на промежутке $(0, +\infty)$. Значит, $\Gamma(a)$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$. ◀

5. $\Gamma(a) \sim 1/a$ при $a \rightarrow +0$.

В самом деле, запишем соотношение (2) в виде

$$\Gamma(a+1) = \frac{\Gamma(a)}{1/a}$$

и перейдем к пределу при $a \rightarrow +0$. В силу непрерывности Гамма-функции в интервале $(0, +\infty)$ $\lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a+1) = \Gamma(1) = 1$. Значит, и $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{\Gamma(a)}{1/a} = 1$, а это озна-

чает, что $\Gamma(a) \sim \frac{1}{a}$ при $a \rightarrow +0$, то есть при приближении a к $+0$ $\Gamma(a)$ ведет себя как эквивалентная ей бесконечно большая положительная величина $1/a$.

6. Функция $\Gamma(a)$ имеет в интервале $(0, +\infty)$ производные всех порядков, причем

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^n dx. \quad (7)$$

Установим существование первой производной функции $\Gamma(a)$ и равенство

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx. \quad (8)$$

Возьмем любую точку $a_0 > 0$. Всегда можно указать промежуток $[c, d]$ ($0 < c < d < +\infty$) такой, что будет $c < a_0 < d$. Имеем:

1) $f(x, a) = x^{a-1} e^{-x}$ и $f'_a(x, a) = x^{a-1} e^{-x} \ln x$ непрерывны в области

$$\begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ c \leq a \leq d. \end{cases}$$

2) $\int_0^{+\infty} f(x, a) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ сходится в промежутке $[c, d]$.

3) Покажем, что $\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$.

Имеем

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a) dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x dx.$$

Рассмотрим $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x dx$.

Так как $0 < x \leq 1$, $c \leq a \leq d$, то $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{c-1} e^{-x}$ (см. пункт 4) $\Rightarrow$
 $\underbrace{x^{a-1} e^{-x} \ln x}_{\leq 0} \geq \underbrace{x^{c-1} e^{-x} \ln x}_{\leq 0}$, ибо $\ln x \leq 0$ для $x \in (0, 1]$. А тогда

$$\left| x^{a-1} e^{-x} \ln x \right| \leq \left| x^{c-1} e^{-x} \ln x \right| = \underbrace{-x^{c-1} e^{-x} \ln x}_{\geq 0}.$$

Так как $e^{-x} < 1$ для $x \in (0, 1]$, то $\left| x^{a-1} e^{-x} \ln x \right| \leq -x^{c-1} \ln x$. Имеем:

$$-\int_0^1 x^{c-1} \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{c-1} dx \Rightarrow v = \frac{1}{c} x^c \end{array} \right] = \underbrace{-\frac{1}{c} x^c \ln x}_{=0} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}}.$$

Мы знаем, что $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}}$ сходится, если $1-c < 1$, т. е. если $c > 0$. Следовательно, по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что интеграл $\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$.

Рассмотрим теперь $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$.

Для $1 \leq x < +\infty$, $c \leq a \leq d$ имеем: $x^{a-1} e^{-x} \leq x^{d-1} e^{-x} \Rightarrow x^{a-1} e^{-x} \ln x \leq x^{d-1} e^{-x} \ln x$, ибо $\ln x \geq 0$ для $x \in [1, +\infty)$. Имеем: $x^{d-1} e^{-x} \ln x = x^d e^{-x} \frac{\ln x}{x}$. Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, то существует точка $\tilde{x} (> 1)$

такая, что для $x \geq \tilde{x}$: $\frac{\ln x}{x} < 1$ и, следовательно, для $x \geq \tilde{x}$:

$x^{d-1} e^{-x} \ln x < x^d e^{-x}$. Так как $\int_{\tilde{x}}^{+\infty} x^d e^{-x} dx$ сходится при любом конечном d , то

сходится интеграл $\int_{\tilde{x}}^{+\infty} x^{d-1} e^{-x} \ln x \, dx$, а значит, сходится $\int_1^{+\infty} x^{d-1} e^{-x} \ln x \, dx$. А то-

гда по признаку равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, заключаем, что $\int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$. Таким образом, окончательно приходим к

выводу, что интеграл $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$ сходится равномерно относительно a на промежутке $[c, d]$.

Значит, $\Gamma'(a)$ существует для любого $a \in [c, d]$, в частности, существует $\Gamma'(a_0)$. Так как точка a_0 — любая ($a_0 > 0$), то заключаем: $\Gamma'(a)$ существует

для $a \in (0, +\infty)$, причем $\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \ln x \, dx$. Формула (8) доказана.

Доказательство равенства (7) проводится с помощью аналогичных оценок по индукции.

Теперь мы в состоянии составить себе представление о характере поведения Гамма-функции в интервале $(0; +\infty)$.

Имеем $\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} (\ln x)^2 \, dx$. Ясно, что

$\Gamma''(a) > 0$ и поэтому $\Gamma'(a)$ строго возрастает в $(0; +\infty)$. Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля в интервале $(1, 2)$ лежит точка c такая, что $\Gamma'(c) = 0$. Следовательно, $\Gamma'(a) < 0$ при $0 < a < c$ и $\Gamma'(a) > 0$ при $c < a < +\infty$. Значит, сама функция $\Gamma(a)$ строго убывает в интервале $(0, c)$ и строго возрастает в интервале $(c, +\infty)$. При этом $\lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = +\infty$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty$. В точке $a = c$ функция $\Gamma(a)$ достигает своего наименьшего значения. Можно показать, что $c \approx 1.462$; $\Gamma(c) \approx 0.886$.

График Гамма-функции представлен на рис. 6.2.

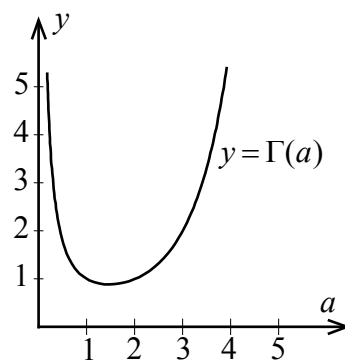


Рис. 6.2. График функции $y = \Gamma(a)$ при $a > 0$

Замечание 1. Пользуясь основным свойством (2) Гамма-функции и опираясь на определение (1) этой функции при положительных значениях аргумента a , можно определить Гамма-функцию и для отрицательных значений аргумента. В самом деле, запишем формулу (2) в виде

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \quad (9)$$

Из (9) видим, что зная значение Гамма-функции при каком-нибудь значении аргумента, можно вычислить ее значение при аргументе, уменьшенном на единицу. Для этого нужно прежнее значение функции разделить на уменьшенное значение аргумента.

Если взять a , удовлетворяющее неравенствам $-1 < a < 0$, то в правой части (9) $\Gamma(a+1)$ будет функцией от положительного аргумента, значение которой определено формулой (1), а в левой части (9) $\Gamma(a)$ будет функцией от отрицательного аргумента. За значение $\Gamma(a)$ при a из промежутка $(-1, 0)$ принимаем значение $\frac{\Gamma(a+1)}{a}$ в соответствии с формулой (9). Так, например,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

Если теперь взять a , удовлетворяющее неравенствам $-2 < a < -1$, то правая часть формулы (9) будет содержать значения Гамма-функции при аргументах из промежутка $(-1, 0)$, уже определенные нами выше. Это дает возможность по формуле (9) определить значения $\Gamma(a)$ при $-2 < a < -1$. В силу этого определения будем иметь, например:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

Определив теперь значения Гамма-функции в промежутке $(-2, -1)$, мы, пользуясь формулой (9), сможем определить ее значения в промежутке $(-3, -2)$, и т. д. Так мы можем определить значения Гамма-функции при любых отрицательных *не целых* значениях аргумента a .

Выше было отмечено, что $\Gamma(+0) = \lim_{a \rightarrow +0} \Gamma(a) = +\infty$. Из формулы (9) находим, что

$$\Gamma(-0) = \lim_{a \rightarrow -0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = -\infty.$$

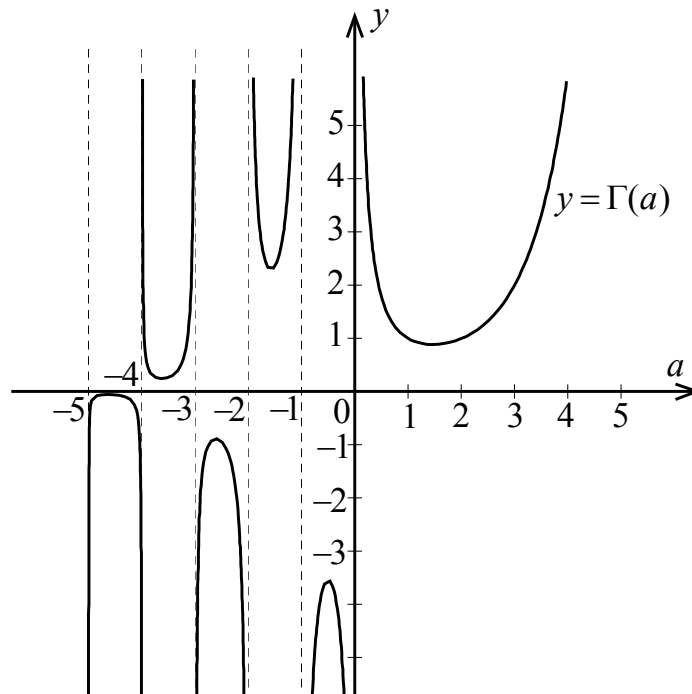


Рис. 6.3. График функции $y = \Gamma(a)$

Пользуясь этой же формулой (9), находим, что

$$\begin{aligned}\Gamma(-1+0) &= \lim_{a \rightarrow -1+0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(+0)}{-1} = -\infty, \\ \Gamma(-1-0) &= \lim_{a \rightarrow -1-0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(-0)}{-1} = +\infty, \\ \Gamma(-2+0) &= \lim_{a \rightarrow -2+0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(-1+0)}{-2} = +\infty, \\ \Gamma(-2-0) &= \lim_{a \rightarrow -2-0} \frac{\Gamma(a+1)}{a} = \frac{\Gamma(-1-0)}{-2} = -\infty\end{aligned}$$

и т. д. Обычно это выражают словами так: Гамма-функция при нуле и при целых отрицательных значениях аргумента обращается в бесконечность (см. рис. 6.3).

Замечание 2. Введенная в этом параграфе неэлементарная функция $\Gamma(a)$ играет в математике важную роль. Для функции $\Gamma(a)$ составлены подробные таблицы, и при вычислениях она может использоваться наравне с простейшими элементарными функциями – показательной, тригонометрическими и т. д.

Оказывается, что определенные интегралы различных типов могут быть выражены через Гамма-функцию. В частности, к таким интегралам нередко приводят задачи, связанные с вычислением площадей и объемов. Даже если функция имеет первообразную, являющуюся элементарной функцией, интеграл от этой функции зачастую целесообразно вычислять, используя Гамма-функцию.

§3. Примеры к главе 6

Пример 1. Вычислить $I = \int_0^1 x^{a-1} (1-x^c)^{b-1} dx$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

► Положим $x^c = t \Rightarrow cx^{c-1} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{c} t^{\frac{1-c}{c}} dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{c} \int_0^1 t^{\frac{a-1}{c}} t^{\frac{1-c}{c}} (1-t)^{b-1} dt = \frac{1}{c} \int_0^1 t^{\frac{a}{c}-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{1}{c} B\left(\frac{a}{c}, b\right) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{c}\right) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{a}{c} + b\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что здесь a, b, c – любые вещественные положительные числа, а значит, вообще говоря, неопределенный интеграл $\int x^{a-1} (1-x^c)^{b-1} dx$ является неэлементарной функцией. Известно, что даже в случае, когда a, b, c – рациональные числа, этот неопределенный интеграл является элементарной функцией лишь тогда, когда по крайней мере одно из чисел $b, \frac{a}{c}, \frac{a}{c} + b$ – целое. ◀

Пример 2. Вычислить $I = \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x \, dx \quad (a > 0, b > 0)$.

► Запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{a-2} x \cdot \cos^{b-2} x \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x)^{\frac{a-2}{2}} \cdot (\cos^2 x)^{\frac{b-2}{2}} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Положим $\sin^2 x = t \Rightarrow 2 \sin x \cos x \, dx = dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{a}{2}-1} \cdot (1-t)^{\frac{b}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

В частности, при $b = 1$ будем иметь

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{a-1} x \, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Важно подчеркнуть, что и в этом примере a, b – любые вещественные положительные числа, а значит, неопределенный интеграл $\int \sin^{a-1} x \cdot \cos^{b-1} x \, dx$ является, вообще говоря, неэлементарной функцией. ◀

Пример 3. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\pi}$.

► Положим $x^\pi = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{\pi}}$ и $dx = \frac{1}{\pi} t^{\frac{1}{\pi}-1} dt$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/\pi-1}}{1+t} dt.$$

Мы знаем, что $B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt$. Значит, в нашем примере

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} - 1 = a - 1, \\ 1 = a + b, \end{cases}$$

откуда $a = \frac{1}{\pi}$ и $b = 1 - \frac{1}{\pi}$. Имеем, таким образом,

$$I = \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{\pi}, 1 - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \frac{1}{\pi}\right)} = \frac{1}{\sin 1}$$

(так как $B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$, если $0 < a < 1$). ◀

Пример 4. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx$.

► Положим $x^3 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{3}}$, $dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$ и $\ln x = \frac{1}{3} \ln t$. Тогда

$$I = \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}} \ln t}{1+t} dt.$$

Введем в рассмотрение $B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ ($0 < a < 1$). Имеем

$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}$. Продифференцируем обе части последнего равенства по a .

Получим $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1} \cdot \ln t}{1+t} dt = -\pi^2 \cdot \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$, откуда при $a = \frac{2}{3}$ находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}} \cdot \ln t}{1+t} dt = -\pi^2 \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Тогда $I = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \pi^2 = \frac{2}{27} \pi^2$. ◀

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. — М.–Л.: Физматгиз, 1960.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. — М.: Высшая школа, 1981.
4. Аксёнов А.П. Математический анализ (Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Приложения определенного интеграла). — СПб.: Нестор, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА.....	3
§1. Определение интегралов, зависящих от параметра	3
§2. О допустимости предельного перехода по параметру под знаком интеграла	3
§3. О непрерывности интеграла как функции параметра.....	5
§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла.....	6
§5. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла	7
§6. Случаи, когда и пределы интеграла зависят от параметра	10
§7. Примеры к главе 1	17
ГЛАВА 2. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	20
§1. Область и ее диаметр.....	20
§2. Определение двойного интеграла	22
§3. Признаки интегрируемости функций.....	24
§4. Свойства двойных интегралов	30
§5. Вычисление двойного интеграла в случае прямоугольной области	36
§6. Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области	41
§7. Примеры к главе 2	45
ГЛАВА 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	54
§1. Криволинейные интегралы первого рода	54
§2. Криволинейные интегралы второго рода.....	62
§3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутым плоским кривым. Формула Грина.....	70
§4. Вопрос о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования	75
§5. Площадь плоской фигуры в криволинейных координатах	83
§6. Замена переменных в двойном интеграле.....	88
§7. Примеры к главе 3	90
ГЛАВА 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	102
§1. Некоторые сведения из геометрии	102
§2. Существование площади кривой поверхности и ее вычисление	106
§3. Примеры к главе 4	111
ГЛАВА 5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА ...	115
§1. Определение равномерной сходимости несобственных интегралов	115
§2. О непрерывности интеграла как функции параметра.....	117
§3. Об интегрировании по параметру под знаком интеграла	118
§4. О дифференцировании по параметру под знаком интеграла.....	120
§5. Признак равномерной сходимости несобственных интегралов	121
§6. Примеры к главе 5	122
ГЛАВА 6. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ	129
§1. Интеграл Эйлера первого рода (Бета-функция)	129
§2. Интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция).....	132
§3. Примеры к главе 6	141
Литература	143

Аксёнов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(Интегралы, зависящие от параметра.
Двойные интегралы.
Криволинейные интегралы)

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 065394 от 08.09.97

Подписано в печать . .00. Формат 60×84 1/16.

Объем п.л. Тираж . Заказ № .

Отпечатано в издательстве «НЕСТОР»
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29